

CONSTRUÇÃO DE AMBIENTE DE SIMULAÇÃO COMO BASE DE TESTE A DINÂMICA DO PÊNDULO INVERTIDO

RUDINEI QUADRO VELASQUES JUNIOR; ELMER A. G. PEÑALOZA

Universidade Federal de Pelotas – juniorsv.sabany@outlook.pt

Universidade Federal de Pelotas – elmeralexis@gmail.com

1. INTRODUÇÃO

Dentre dos estudos, encontrados na literatura, sobre o comportamento dinâmico de diferentes sistemas, o pêndulo invertido tem se mostrado eficiente como objeto de estudo e base de aplicação de diversas teorias de controle automático. Assim, o comportamento dinâmico instável do pêndulo invertido apresenta grandes desafios de modelagem e controle, o qual exige uma constante adaptação e inovação de técnicas de modelagem e controle a fim de se obter resultados mais precisos. Do ponto de vista dinâmico, o funcionamento do pêndulo invertido serve como mecanismo base de muitas aplicações em diversas áreas da engenharia. Um exemplo disso, é o robô com duas rodas desenvolvido, no ano de 2002, por Grasser e colaboradores, no qual é utilizado um controlador com base em realimentação de estados para manter o robô no ponto de equilíbrio (GRASSER 2002). Outro exemplo de aplicação deste tipo de mecanismo, foi apresentado no ano 2008 por Vanoncini et.al. Neste trabalho, tomando como base o modelo do pêndulo invertido, os autores desenvolveram um modelo biomecânico de tronco. Assim, este bio-mecanismo foi desenvolvido para estimulação elétrica funcional em pacientes com paraplegia (VANONCINI; et.al., 2008).

Neste trabalho é apresentado um ambiente de simulação para estudo das dinâmicas do pêndulo invertido, assim como desenvolvimento, teste e implementação de estratégias de controle. Esta pesquisa nasce da necessidade de criar uma base de conhecimento para a construção de um sistema pêndulo invertido real para estudo e aplicação de estratégias de controle automático. Por conseguinte, primeiro é apresentado o modelo analítico do pêndulo invertido, seguidamente é apresentada a construção computacional da simulação deste modelo. Depois é apresentada a implementação de um controlador PID para controlar a posição angular do pêndulo. Finalmente, uma análise e discussão dos resultados é realizada.

2. METODOLOGIA

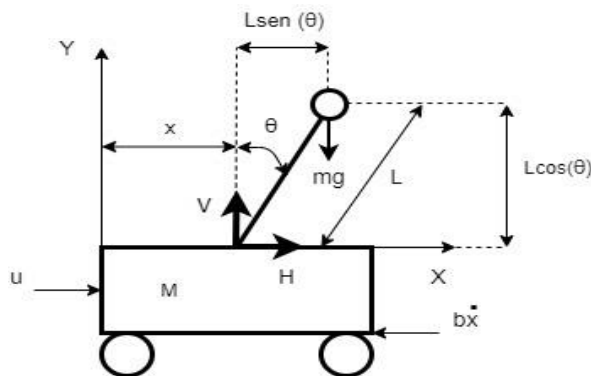
Um esboço de um sistema pêndulo invertido pode ser observado na Figura 1. Para a construção do modelo analítico, que descreve a dinâmica do sistema, neste primeiro momento não é considerado peso na ponta da haste e se utilizam as coordenadas do centro de gravidade da haste (X_g ; Y_g) como referência para os cálculos (OGATA, 2010). Assim, as coordenadas do centro de gravidade da haste podem ser calculadas com o seguinte conjunto de equações:

$$X_g = x + L \sin(\theta) \quad (1)$$

$$Y_g = L \cos(\theta) \quad (2)$$

Na qual L é o comprimento da haste, θ é a posição angular da haste com respeito o eixo Y , x é a posição linear do carro que movimentava o pêndulo. Na Tabela

1, podem ser observados outros parâmetros físicos adicionais com suas respectivas unidades. Os parâmetros físicos do sistema foram obtidos de um kit didático de pêndulo invertido da empresa Feedback® (SANTOS TEIXEIRA, 2006).



Parâmetros	Unidade (SI)
Comprimento Haste (L)	0,146 m
Massa da haste (m)	0,12 Kg
Massa do carro (M)	1,12 Kg
Momento de Inércia (I)	0,001 Kg.m ²
Coefficiente de atrito (b)	2,53 Kg.m ² /s

Figura 1: Sistema Pêndulo Invertido

Tabela 1: Parâmetros Físicos

Como ilustrado na Figura 1, a força u realiza o controle da posição do pêndulo invertido diretamente no carro que suporta o pêndulo. V e H são as reações que a haste do pêndulo exerce sobre o ponto de fixação na vertical e na horizontal, respectivamente. Com estas informações pode-se construir um modelo analítico que represente a dinâmica do pêndulo. Do ponto de vista do controle o objetivo é manter a haste do pêndulo na posição vertical, o qual é um desafio grande uma vez que, a dinâmica predominante é a instabilidade e é um sistema altamente não linear. Um dos pressupostos mais frequentes encontrados na literatura é a adoção que a variação do ângulo θ (ângulo entre a haste do pêndulo e a posição vertical de 90°) é muito pequena, este fato permite assumir que $\theta \approx 0$. Deste modo, podemos inferir que: $\sin(\theta) \approx \theta$; $\cos(\theta) \approx 1$ e $\theta \cdot (\theta')^2 \approx 0$. Ao aplicar essas relações nas equações diferenciais permitem obter um modelo linearizado do sistema. Na Tabela 2 podem ser observadas as equações dinâmicas não lineares que descrevem o sistema conjuntamente com as versões linearizadas das mesmas.

$I\ddot{\theta} = VL\sin(\theta) - HL\cos(\theta)$	(1)	$I\ddot{\theta} = VL\theta - HL$	(5)
$m \frac{d^2}{dt^2} (x + L\sin(\theta)) = H$	(2)	$m\ddot{x} + m\ddot{\theta} = H$	(6)
$m \frac{d^2}{dt^2} (L\cos(\theta)) = V - mg$	(3)	$0 = V - mg$	(7)
$M \frac{d^2}{dt^2} x = u - H - b\dot{x}$	(4)	$M\ddot{x} = u - H - b\dot{x}$	(8)

Tabela 2: Equações diferenciais da dinâmica do pêndulo invertido.

É importante destacar que este conjunto de equações consideram a massa da haste, o qual implica que o momento de inércia pode-se desprezar ($I=0$) (OGATA,2010). Aplicando a transformada de Laplace no conjunto de equações linearizadas do sistema com o objetivo de encontrar as funções de transferência de G (Posição Angular) e de H (Posição Linear) com relação a entrada de controle u . Assim, as funções de malha aberta podem ser definidas como:

$$\frac{\theta(s)}{-U(s)} = \frac{s}{MLs^3 - Lbs^2 - (M+m)gs - gb} \quad (9)$$

$$\frac{X(s)}{U(s)} = \frac{2mLs^3 + Lbs^2 - (M+m)gs + gb}{(M^2L + mML)s^5 + (2MbL + mbL)s^4 + (Lb^2 - (M+m)^2g)s^3 + gb^2s} \quad (10)$$

no qual (9) representa H (posição angular em relação à entrada u) e (10) representa G (posição linear em relação à entrada u). Para realizar controle automático é necessário realimentar a malha através da posição angular. Para este fim será utilizado um controlador PID, o qual possui componentes proporcional (K_p), integral (K_i) e derivativo (K_d), da seguinte forma:

$$u(t) = K_p \cdot e(t) + K_i \int_0^t e(t) dt + K_d \cdot \frac{d e(t)}{dt} \quad (11)$$

onde $e(t)$ é o erro definido pela diferença entre o valor real e a referência desejada. Com auxílio da ferramenta Sisotool do software Matlab® foi possível sintonizar, de forma automática, o controlador PID. Através dessa ferramenta os seguintes parâmetros foram computados: $K_p=290$; $K_i=1.67e+03$ e $K_d=12.6$. Finalmente, com base nesses parâmetros, a malha fechada com o controlador PID ($C(s)$) para posição angular e posição linear estão ilustradas na Figura 2.

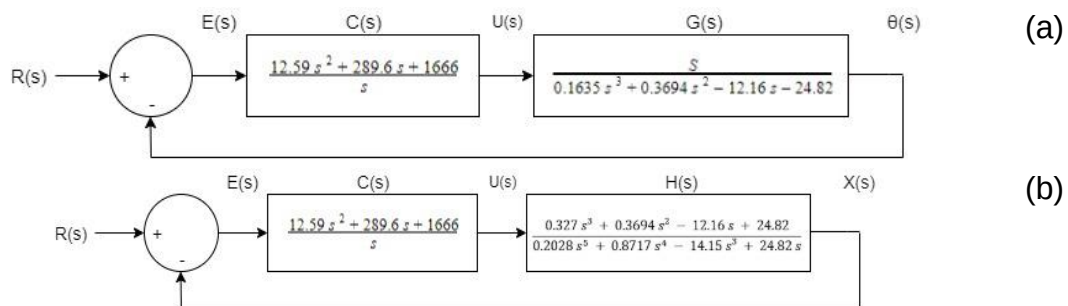


Figura 2: a) Diagrama de blocos de G; b) Diagrama de blocos de H.

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Os resultados obtidos através do ambiente de simulação podem ser observados na Figura 3. Assim, é utilizada a resposta ao degrau unitário para testar estabilidade e eficiência dos compensadores e controladores. Analisando a Figura 3.b se observa que a posição angular do pêndulo com o controlador apresenta uma resposta estável, isto é um indicativo do bom funcionamento do controlador PID no momento de controlar a posição angular da haste. Adicionalmente, o controlador atua de forma rápida, uma vez que o tempo de subida está ao redor de 0.017 [s], assim como o máximo sobressinal é 0.19 [rad.], o qual indica que os parâmetros do controlador foram sintonizados de forma adequada. De outro lado, a posição linear do carro (Figura 3.d) tem um comportamento instável mesmo na presença do controlador, isto é um comportamento esperado, já que na simulação a posição linear não está limitada fisicamente. Na Figura 3.d se observa que o sistema fica instável depois de 1 [s] de simulação, antes disso o sistema está estável em um

valor perto de 1,50 [m]. Este valor é importante considerá-lo como limitação no momento de projetar e construir um sistema carro pêndulo invertido real.

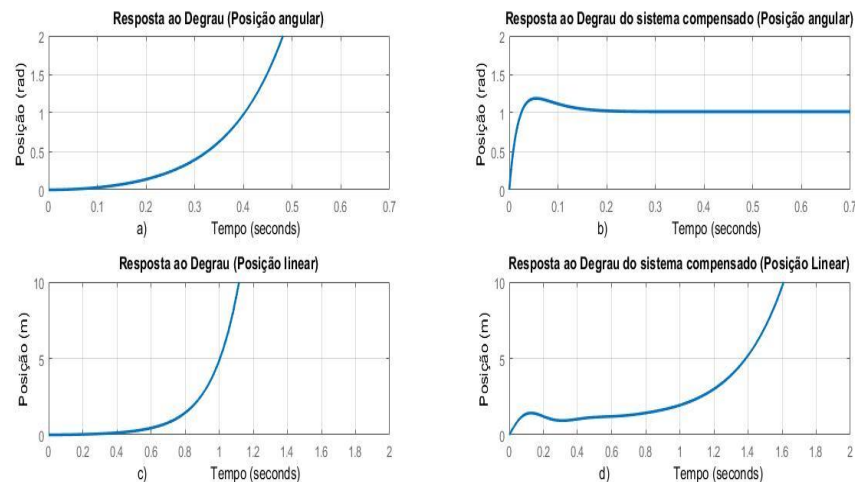


Figura 3: a) Resposta do sistema G; b) Resposta do sistema G compensado; c) Resposta do sistema H; d) Resposta do Sistema H compensado.

4. CONCLUSÕES

Esse estudo nos permite perceber que as ferramentas de simulação computacionais apresentam uma gama muito variada de recursos para o estudo da teoria de controle. Adicionalmente, este tipo de ferramentas de simulação permite criar ambientes de atuação dinâmica que podem oferecer informação valiosa para a construção e controle de sistemas reais. Portanto, a bases de informação coletadas com este ambiente de simulação construído serão utilizadas em trabalhos futuros para a construção de um sistema pêndulo invertido real. Neste sentido, é importante observar que o controlador projetado para a posição linear para aplicações reais deve ser sintonizado novamente considerando limites.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

OGATA, K. **Engenharia de Controle Moderno**. São Paulo: Pearson, 2010. 5 ed.

VANONCINI, M.I; HOLDERBAUM, W; ANDREWS, B. Development and Experimental Identification of a Biomechanical model Of the Trunk for Functional Electrical Stimulation Control in Paraplegia. **Neuromodulation: technology at the neural interface**, Reino Unido, v.11, n.4, p.315-324, 2008.

GRASSER, F; D'ARRIGO, A; COLOMBI, S; RUFER, A. Joe: A mobile inverted pendulum. **IEEE Industrial Electronics**, Suíça, v.49, n.1, p.107-114, 2002.

SANTOS, F.T; FREITAS, J.L.S; RANGEL, M.J. **O Sistema Dinâmico Pêndulo Invertido: Modelagem e Projeto de Controladores por Simulação Computacional**. 2006. Monografia (Curso Superior de Tecnologia em Automação Industrial) - CEFET – Campos.