

COMPARAÇÃO DE MÉTODOS DE DISCRETIZAÇÃO PARA APLICAÇÃO DE PID EM MICROCONTROLADORES

José P. A. Schulte; Thiago C. M. Bastos; Elmer A. G. Peñaloza

Universidade Federal de Pelotas – jpaschulte@ufpel.edu.br
Universidade Federal de Pelotas – thiago.bastos@ufpel.edu.br
Universidade Federal de Pelotas – eagpenaloza@ufpel.edu.br

1. INTRODUÇÃO

Dentre das técnicas de controle clássico mais aplicadas em processos industriais são os controladores baseados na abordagem proporcional, integral e derivativa da diferença entre um sinal de referência e uma realimentação da saída (Antunes, 2015). Porém, mesmo com sua aplicabilidade, existe o problema de que não pode ser implementado diretamente as estratégias de controle PID, baseada em sinais contínuos, diretamente no microcontrolador. Neste contexto, a discretização e digitalização destes sistemas é necessária e relevante para a implementação de controladores. A discretização se realiza uma vez que os sistemas de computo podem receber dados somente a intervalos específicos (discretos), é necessário aplicar métodos para descrever e analisar de forma discreta o desempenho de sistemas de controle digital (DORF, 2001, Rikwan, 2023, Peerzada, 2021). A partir dos diferentes métodos existentes, a proposta deste trabalho é implementar e comparar de forma analítica a eficiência de três métodos de discretização: Tustin, *Backward* Euler e aproximação numérica, utilizando como planta física o motor de corrente contínua e um controlador PID.

2. METODOLOGIA

Para a realização deste trabalho foi utilizado o modelo dinâmico em Laplace de motor C.C ilustrado na Figura 1. Este modelo de segunda ordem permite separar a parte elétrica da mecânica e já considera imperfeições pela perturbação de torque no atrito rotativo do motor. Aplicando álgebra de blocos é obtida a seguinte funções de transferência:

$$\frac{T(s)}{Vin(s)} = \frac{Kt}{L_a s + R_a}; \frac{\omega(s)}{T_p(s)} = \frac{1}{J s + B}; T_p(s) = T(s) + F(s) \quad (1)$$

Onde $R_a [\Omega]$ é a resistência de armadura, $L_a [mH]$ a indutância de armadura, $Kt [Nm/A]$ a constante de torque, $J [\mu Nms^2/rad]$ o momento de inércia, $B [\mu Nms^2/rad]$ o coeficiente de atrito viscoso, $T [Nm]$ o torque, $F [Nm]$ a perturbação de torque, $\omega [rpm]$ a velocidade angular e $Vin [V]$ a tensão de entrada. Por outro lado, a estratégia de controle escolhida foi o controle PID, o qual é dado pela seguinte função em Laplace: $\frac{U(s)}{e(s)} = k_p + k_d s + \frac{k_i}{s}$, onde k_p , k_d e k_i são as constantes proporcional, derivativa e integral, respectivamente. Pensando em uma implementação futura em um microcontrolador, é necessário utilizar uma função discreta em um laço de repetição a cada amostra de tempo, definida como T_s , para adequar ao processamento do microcontrolador e permitir operações para comunicação foi escolhida uma amostragem de $T_s = 1 [ms]$.

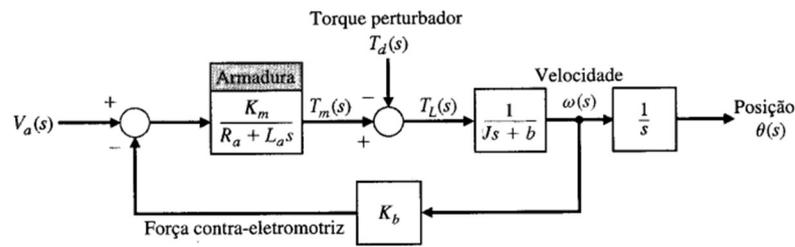


Figura 1 – Modelo do motor CC controlado por armadura. (Fonte: DORF, 2001)

2-1. Método de Discretização de Tustin

Este método é definido pela relação em transformada: $s = \frac{2}{T_s} \left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right)$ para uma taxa de amostragem $T_s = 10^{-3}$ [seg]. Assim, obtêm-se as seguintes funções digitais:

$$T(z) = \frac{Vin(z)k_t(1 - z^{-1})}{(2000L_a + R_a) + (R_a - 2000L_a)z^{-1}} \quad (2)$$

$$\omega(z) = \frac{T_p(z)(1 - z^{-1})}{(2000J + B) + (B - 2000J)z^{-1}} \quad (3)$$

$$U(z) = e(z) \left(\frac{(k_p + 2000k_d + k_i) + (-4000k_d + 2k_i)z^{-1} + (-k_p + 2000k_d + k_i)z^{-2}}{1 - z^{-2}} \right) \quad (4)$$

As relações em (3), (4) e (5) podem ser sincretizadas para tempos discretos k :

$$T(k) = \frac{(Vin(k) + Vin(k-1))k_t - T(k-1)(R_a - 2000L_a)}{(2000L_a + R_a)} \quad (5)$$

$$\omega(k) = \frac{T(k) + T(k-1) + F(k) + F(k-1) - (B - 2000J)\omega(k-1)}{(2000J + B)} \quad (6)$$

$$U(k) = U(k-2) + e(k)(k_p + 2000k_d + k_i) + e(k-1)(-4000k_d + 2k_i) + e(k-2)(-k_p + 2000k_d + k_i) \quad (7)$$

2-2. Método Backward Euler de Discretização

Neste método se utiliza a relação: $s = \frac{1-z^{-1}}{T_s}$, para obter o seguinte conjunto de funções de transferência digitais:

$$T(z) = \frac{Vin(z)k_t}{1000L_a + R_a - 1000L_a z^{-1}} \quad (8)$$

$$T(z) = \frac{T_p(z)}{1000J + B - 1000Jz^{-1}} \quad (9)$$

$$U(z) = e(z) \left(\frac{(1 - z^{-1})k_p + 1000k_d(1 - 2z^{-1} + z^{-2}) + 10^{-3}k_i}{1 - z^{-1}} \right) \quad (10)$$

As relações em (8), (9) e (10) podem ser sincretizadas para tempos discretos k :

$$T(k) = \frac{(Vin(k))k_t + T(k-1)(1000L_a)}{(1000L_a + R_a)} \quad (11)$$

$$\omega(k) = \frac{T(k) + T(k-1) + F(k) + F(k-1) + (1000J)\omega(k-1)}{(1000J + B)} \quad (12)$$

$$U(k) = U(k-1) + e(k)(k_p + 1000k_d + 10^{-3}k_i) + e(k-1)(k_p + 2000k_d) + e(k-2)(1000k_d) \quad (13)$$

As expressões discretas em (7) e (13) são conhecidas como equação a diferença.

2-3. Método *Backward Euler* de discretização por aproximação numérica.

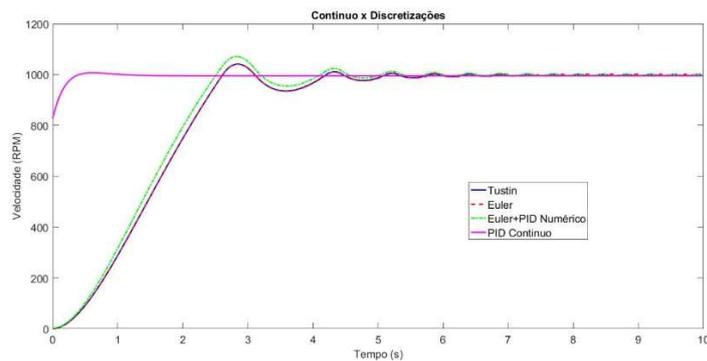
A partir da discretização de Euler e com a finalidade de minimizar o tempo em instruções de cálculo, o controlador foi reimplementado pelas seguintes aproximações numéricas: $sum(k) = sum(k-1) + \left(\frac{e(k)+e(k-1)}{2T_s} \right)$ (regra do trapézio para integração); $derivada(k) = \frac{e(k)-e(k-1)}{T_s}$ (diferenças finitas). A partir delas obtém-se a seguinte lei de controle:

$$u(k) = e(k)((k_p + k_i)sum(k)) + k_d(derivada(k)) \quad (14)$$

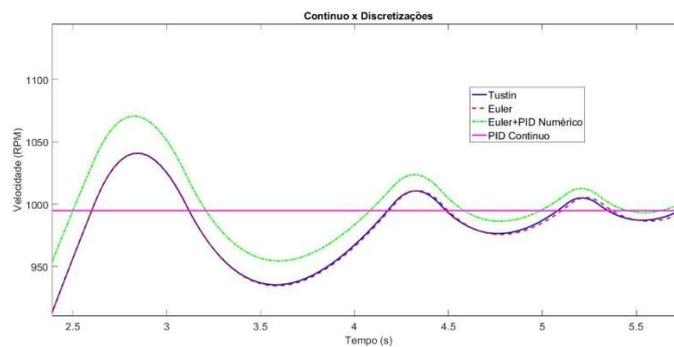
Tendo obtido as discretizações das funções de transferência e da lei de controle pelos métodos apresentados, foi utilizada a plataforma MATLAB® para realizar a simulação e comparação da eficiência de cada método para este controlador.

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Resultados da implementação de forma simulada dos métodos de discretização para o motor C.C e o controlador PID, podem ser observados na Figura 2. Assim, se observa que a resposta discretizada apresenta um comportamento levemente oscilatório e um pico em relação à resposta contínua. Quanto aos métodos de discretização, é possível observar que os métodos de Euler e Tustin possuem uma resposta similar, com uma leve defasagem aparecendo ao longo do tempo. A diferença maior, aparece na aproximação numérica, que possui uma amplitude maior que as demais respostas.



(a)



(b)

Figura 2 – Velocidade de resposta simulada a partir dos métodos de discretização. (a) Resposta dinâmica completa. (b) Destaque do estado estacionário.

4. CONCLUSÕES

O PID contínuo apresenta o resultado próximo do ideal, as aproximações discretizadas colocam uma oscilação mas é corrigido em um intervalo curto, com diferença desprezível no resultado entre os dois métodos. Porém o PID implementado com apenas os métodos numéricos apresenta um pico superior, mas ainda dentro de uma faixa desejável deixando mais processamento disponível para o loop do microcontrolador usar outras funções.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

DORF, Richard C.; BISHOP, Robert H. *Sistemas de Controle Modernos*, 8ª Edição. Editora LTC, Rio de Janeiro, 2001.

BURDEN, R. L.; FAIRES, J. D. *Análise Numérica*, Cengage Learning. Sao Paulo, 2008.

Mendes Antunes, R. N., Ferreira, D. S., Gonçalves Santos, I. I., Das Neves Sousa, A. R., & Augusto, J. S. (2015). Arduino implementation of automatic tuning in PID control of rotation in DC motors. In *CONTROLO'2014—Proceedings of the 11th Portuguese Conference on Automatic Control* (pp. 217-227). Springer.

RIKWAN, Rikwan; MA'ARIF, Alfian. DC Motor Rotary Speed Control with Arduino UNO Based PID Control. *Control Systems and Optimization Letters*, v. 1, n. 1, p. 27-31, 2023.

PEERZADA, Pirah; LARIK, Wasi Hyder; MAHAR, Aiman Abbas. DC motor speed control through arduino and L298N motor driver using PID controller. *International Journal of Electrical Engineering & Emerging Technology*, v. 4, n. 2, p. 21-24, 2021.