MODELO PREDITIVO PARCIAL PARA O SURGIMENTO DE TRINCAS COM PROCESSOS ESTOCÁSTICOS: UM ESTUDO DE CASO NO ESTADO DE MINAS GERAIS, BRASIL

LUCAS DOS SANTOS ROCHA[1];
MARILIA ABRÃO ZENI[2]; ARIANE FERREIRA PORTO ROSA[3]; INGRID MILENA REYES MARTINEZ BELCHIOR[4]; MARCELO SCHRAMM[5]

[1]Universidade Federal de Pelotas– lsrochad@gmail.com[1]
[2]PUC Minas– marilia.zeni@mzgeotecnia.com[2]
Universidade Federal de Pelotas – ingridbelchior17@gmail.com[3]
Universidade Federal de Pelotas – afprosa61@gmail.com[4]
[3]Universidade Federal de Pelotas– schrammmarcelo@gmail.com[5]

1. INTRODUÇÃO

Um laudo de vistoria técnica em uma região alocada em uma região de mineração, no Estado de Minas Gerais – Brasil, identificou o surgimento de trincamento dos taludes, além de um novo sistema de trincas, e dessa forma, surgiu a necessidade de investigar a progressão da trinca utilizando recursos matemáticos e computacionais, buscando preencher a lacuna em virtude da escassez de dados de deslocamento antigos, além de criar um modelo preditivo parcial para prever o comportamento da trinca. Observa-se que a formação de trincas foi acarretada devido aos passivos ambientais herdados, como a presença das bancadas que foram abertas em uma lavra realizada no passado, sem um plano de fechamento de mina adequado, em que não ocorreu o descomissionamento completo da estrutura da mina. A altitude acentuada no Estado de Minas Gerais, associado com o clima tropical, é um fator preponderante para instabilidade de encostas, à medida que os fatores externos afetam diretamente parâmetros de resistência do solo como coesão e ângulo de atrito, reduzindo assim a resistência ao cisalhamento deste solo.

Dessa forma, foi desenvolvido um modelo matemático utilizando equações diferenciais provenientes de processos estocásticos para realizar uma predição temporal da formação de trinca a partir dos dados de monitoramento através de marcos topográficos instalados na encosta.

2. METODOLOGIA

Processos estocásticos são modelos probabilísticos que permitem investigar um sistema dinâmico, e nesse estudo foi considerado o desenvolvimento da trinca dependendo do tempo como esse sistema dinâmico, modelando a probabilidade da trinca assumir valores aleatórios ao longo do tempo, nesse caso a probabilidade de aumentar 1mm ou 2mm à cada 7 dias. A probabilidade de ocorrência desses valores é denominada como estado, à medida que as probabilidades de transição considerando um cenário em que o estado supracitado ocorre em um instante qualquer, são soluções para um sistema de equações. Para esse sistema de equações, a solução pode ser fundamentada no estado predecessor (forward), descrito como uma solução que o estado anterior influencia no valor gerado, ou a solução pode ser fundamentada no estado posterior (backward), encontrando valores posteriores para obter o seu valor no estado que precede a solução (HARRIS et al., 1963; FEWSTER, 2020). As resoluções da modelagem baseada em processos estocásticos permitem obter equações de momentos estatísticos que

se assemelham com a média e a variância, possibilitando assim utilizar a média de medições de deslocamento dos dados gerados pelos marcos topográficos instalados para predizer o comportamento da trinca.

HARRIS et al., (1963) considera $Z(t)$ como um processo ramificado da Cadeia de Markov com probabilidades transicionais:

$$P_{ik}(\tau,t) = Prob(Z(t) = k|\, Z(\tau) = i) \qquad i,k = 0,1,2,\dots;0 \le \tau \le t \qquad (1)$$

Destaca-se que a equação 1 satisfaz as equações de Chapman – Kolmogorov, que é definida na equação 2.

$$P_{ik} = \sum_{j=0}^{\infty} P_{ij}(\tau,t_1)\ P_{ik}(t_1,t_2), \qquad i,k = 0,1,\dots;0 \le \tau \le t_1 \le t_2 \qquad (2)$$

Para esse estudo, considerou as probabilidades (P_{ik}) na equação diferencial forward para Cadeias de Markov. Dessa forma, HARRIS et al., (1963) define a equação forward da Cadeia de Markov como:

$$\frac{\partial P_{ik}}{\partial t} = -k\, b(t) P_{ik}(\tau,t) + b(t) \sum_{j=1}^{\infty} j p_{k-j+1}(t) P_{ij}\,(\tau,t) \qquad (3)$$

$$P_{ik}(\tau,\tau+0) = \begin{cases} 1, i = k \\ 0, i \neq k \end{cases}$$

Em que k é a estimativa da profundidade da trinca em um determinado instante de tempo (em mm), b é uma taxa de progressão, P_{ik} é a probabilidade transicional que a profundidade da trinca em t será k dado que ela é i em tau, e p_j são as probabilidades de ocorrer uma progressão de j mm na profundidade da trinca, dado que ocorreu um aumento até o tempo t.

Para obter a equação de primeiro momento que permite correlacionar com a média, e a equação de segundo momento que se assemelha com a variância a partir da equação forward descrita acima, é necessário utilizar o que é denominado como Função Geradora de Momento, que é definida na equação (4):

$$F_i(s,\tau,t) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}(\tau,t) s^k \qquad |s| \le 1 \qquad (4)$$

$$h(s,t) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j(k) s^j \qquad |s| \le 1 \qquad (5)$$

Em que s é uma variável auxiliar. Dessa forma, para gerar a equação forward geradora, multiplica-se a equação (3) por s^k, soma todos os k, e realiza o algebrismo necessário, para obter a equação geradora forward (Equação 6):

$$\frac{\partial F_i(s,\tau,\ t)}{\partial t} = b(t)(h\,(s,t) - s)\frac{\partial F_i(s,\tau,t)}{\partial s} \qquad (6)$$

A partir da equação (6), busca-se encontrar a expressão do primeiro e segundo momento que se relaciona com a média e variância respectivamente, permitindo assim ajustar o modelo e aferir com a média dos valores de medição de deslocamento realizados em campo, e assim calibrar o método preditivo.

Derivando a equação (6) em relação a s e avaliando em $s = 1$, encontra-se a equação (7):

$$\frac{\partial M_{i1}(\tau,t)}{\partial t} = b(t)\left(\frac{\partial h(1,\tau)}{\partial s} - 1\right)M_{i1}(\tau,t), \qquad (7)$$

$$M_{i1}(\tau, t=\tau) = i$$

Derivando novamente em relação a s e avaliando em $s = 1$, encontra-se a equação (8):

$$\frac{\partial M_{i2}(\tau,t)}{\partial t} = (2b(t)(m_1(t) - 1\,)M_{i2}) + (b(t)(m_2(t) - m_1(t) + 1)M_{i1}) \quad (8)$$

$$M_{i2}(\tau, t=\tau) = i^2$$

Em que m_1 e m_2 são o primeiro e segundo momento dos p_j. As equações diferenciais (7) e (8) foram resolvidas analiticamente considerando a metodologia para solução a coeficientes constantes homogênea, com as seguintes condições iniciais: b, p_j, m_1 e m_2 constantes, além de considerar $F_i(s,\tau,t=\tau) = s^i$; $M_{i1}(\tau, t=\tau) = \frac{\partial F_i}{\partial s}(1,\tau,t=\tau)$, encontrando assim as soluções para de M_{i1} e M_{i2}:

$$M_{i1} = i\, e^{b(m_1-1)(t-\tau)} \qquad (9)$$

$$M_{i2} = \left(i^2 + i\frac{(m_2 - 2\,m_1 + 1)}{(m_1 - 1)}\right)e^{2b(m_1-1)(t-\tau)} - i\frac{(m_2 - 2\,m_1 + 1)}{(m_1 - 1)}\, e^{b(m_1-1)(t-\tau)} \qquad (10)$$

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Após obter a equação (9) e (10), foi possível relacionar os dados do deslocamento da trinca obtidos por marcos topográficos alocados na encosta com o modelo matemático gerado, realizando uma correlação inicial a partir dos dados medidos no dia 30/09/2022 e no dia 07/10/2022, definindo o resultado de M_{i1}como a média dos dados de deslocamento vertical obtidos, e M_{i2} foi igualado a média da variância dos dados supracitados. Dessa forma, cria-se um sistema considerando $\tau = 0$ e t como o tempo medido em dias partindo do dia 28/09/2022. Para a modelagem inicial, considerou-se a medição após 2 dias e após 9 dias em relação ao dia 28/09/2022 que foi a data da implementação dos marcos na encosta. Realizando essa relação, é gerado um sistema não linear com quatro equações e três incógnitas:

$$\begin{cases} \mathrm{e}^{\mathrm{b}(\mathrm{m}_1-1)(t-\tau)} = 1{,}080mm \\ \left(\frac{(m_2 - 2\,m_1 + 1)}{(m_1 - 1)}\right)\mathrm{e}^{2\mathrm{b}(\mathrm{m}_1-1)(t-\tau)} - \frac{(m_2 - 2\,m_1 + 1)}{(m_1 - 1)}\,\mathrm{e}^{\mathrm{b}(\mathrm{m}_1-1)(t-\tau)} = 0{,}384 \\ \mathrm{e}^{\mathrm{b}(\mathrm{m}_1-1)(t-\tau)} = 8{,}760\,mm \\ \left(\frac{(m_2 - 2\,m_1 + 1)}{(m_1 - 1)}\right)\mathrm{e}^{2\mathrm{b}(\mathrm{m}_1-1)(t-\tau)} - \frac{(m_2 - 2\,m_1 + 1)}{(m_1 - 1)}\,\mathrm{e}^{\mathrm{b}(\mathrm{m}_1-1)(t-\tau)} = 1{,}684 \end{cases}$$

Esse sistema foi resolvido utilizando métodos numéricos de otimização (CHONG; ZAK, 2013) denominados como *Golden Search Algorithm* e *Gradient Descent*, no qual consiste em definir uma função objetiva pelo erro quadrático médio associado com um gradiente que é obtido realizando a derivada dessa função objetiva para a variável b, m_1 e m_2. A resolução utilizando os métodos

numéricos supracitados foi efetuada por implementação computacional utilizando a linguagem Python, encontrando o valor mínimo local para cada variável. Após esse passo, foi definido $b = 1$, encontrando assim os valores de probabilidade m_1 e m_2, possibilitando realizar a predição para os valores de deslocamento médios (Figura 1), encontrando uma predição para deslocamento médio da trinca no dia 30/09/2022 como 1,61 mm e para o dia 07/10/2022 encontrou-se 8,66 mm. Destaca-se que para esse caso também foi possível inferir a probabilidade da trinca aumentar 1mm ou 2mm, obtendo uma probabilidade de 93% da trinca ter uma média de progressão de 1mm no dia.

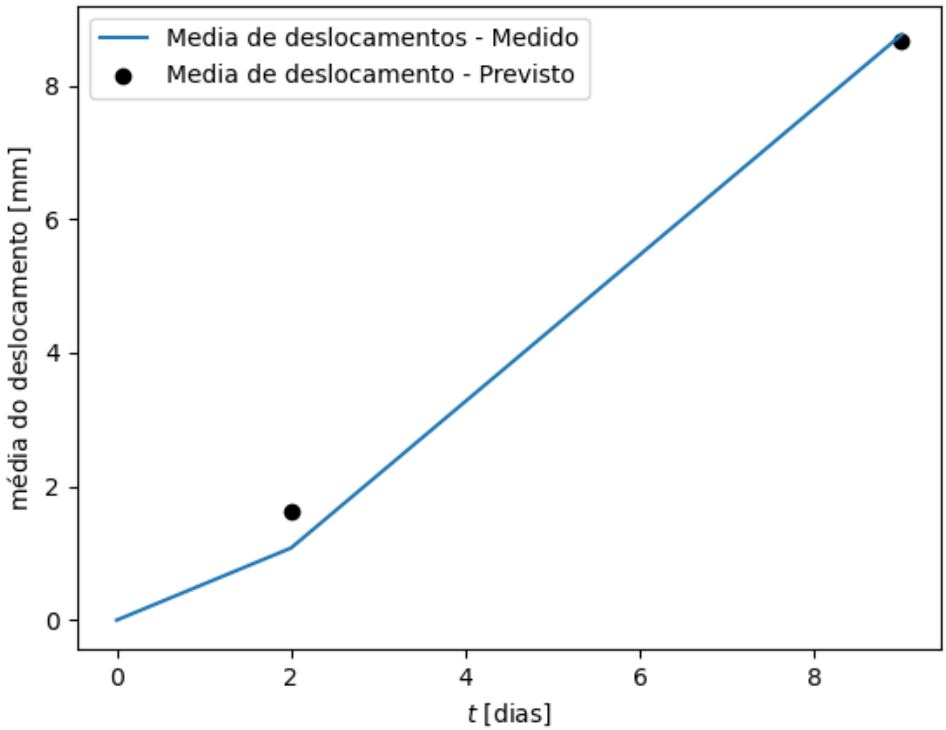

Figura 1 - Gráfico da predição do deslocamento vertical médio da trinca.

4. CONCLUSÕES

Foi possível compreender previamente os valores de deslocamento que a trinca pode apresentar ao longo do tempo, utilizando a modelagem via processos estocásticos associado com recursos computacionais, implementando a modelagem com Python, modelando assim as probabilidades de ocorrência desses valores ao longo do tempo, realizando assim a predição de deslocamento médio para 2 dias e 9 dias.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

HARRIS, T. E. et al. **The theory of branching processes**. Springer Berlin, 1963. v.6.

FEWSTER, R. **Course notes. STATS 325. Stochastic Processes**. Department of Statistics University of Auckland. 2020

CHONG, Edwin KP; LU, Wu-Sheng; ŻAK, Stanislaw H. **An introduction to optimization**. John Wiley & Sons, 2023.