

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PELOTAS
Instituto de Física e Matemática
Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática



Dissertação

**APLICAÇÃO DE UM MODELO MATEMÁTICO SEIR COM QUARENTENA E
VACINAÇÃO PARA O ESTUDO DA MPOX NO BRASIL**

Antonio Marcos de Oliveira dos Santos

Pelotas, 2023

Antonio Marcos de Oliveira dos Santos

**APLICAÇÃO DE UM MODELO MATEMÁTICO SEIR COM QUARENTENA E
VACINAÇÃO PARA O ESTUDO DA MPOX NO BRASIL**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática da Universidade Federal de Pelotas, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Modelagem Matemática

Orientador: Prof^a. Dr^a. Daniela Buske
Coorientador: Prof^a. Dr^a. Luciana Rossato Piovesan

Pelotas, 2023

Universidade Federal de Pelotas / Sistema de Bibliotecas
Catalogação na Publicação

S237a Santos, Antonio Marcos de Oliveira dos

Aplicação de um modelo matemático seir com quarentena e vacinação para o estudo da mpox no Brasil / Antonio Marcos de Oliveira dos Santos ; Daniela Buske, orientadora ; Luciana Rossato Piovesan, coorientadora. — Pelotas, 2023.

90 f.

Dissertação (Mestrado) — Modelagem Matemática, Instituto de Física e Matemática, Universidade Federal de Pelotas, 2023.

1. Mpox. 2. Modelo matemático. 3. Epidemiologia. 4. Varíola. I. Buske, Daniela, orient. II. Piovesan, Luciana Rossato, coorient. III. Título.

CDD : 616.913

**APLICAÇÃO DE UM MODELO MATEMÁTICO SEIR COM QUARENTENA E
VACINAÇÃO PARA O ESTUDO DA MPOX NO BRASIL**

por

Antonio Marcos de Oliveira dos Santos

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática, PPGMMat, do Instituto de Física e Matemática da Universidade Federal de Pelotas, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de

Mestre em Modelagem Matemática

Banca Examinadora:

Profa. Dra. Daniela Buske – Orientadora (UFPel)

Profa. Dra. Luciana Rossato Piovesan – Coorientadora (UFPel)

Profa. Dra. Diomar Cristina Mistro (UFSM)

Profa. Dra. Fernanda Tumelero (UFPel)

Prof. Dr. Glênio Aguiar Gonçalves (UFPel)

Suplente:

Prof. Dr. Régis Sperotto de Quadros (UFPel)

Pelotas, 06/09/2023

AGRADECIMENTOS

Agradeço em primeiro lugar a Deus, e em especial aos meus pais, Joaquim Nonato e Maria do Rosário, que se sacrificaram e abdicaram de vários prazeres da vida para que seus filhos pudessem realizar os sonhos, e assim ter acesso a uma educação de qualidade e trilhar os caminhos certos da vida, sou grato a tudo o que fizeram por mim, mesmo sem saber se daria certo, acreditaram sempre.

Agradeço também a minha esposa Aline, por acreditar nos meus sonhos, e se arriscar em todas as aventuras para estar ao meu lado diante de todas as adversidades, foi sempre meu complemento e meu apoio durante todo esse tempo.

Agradeço a todos os meus irmãos, em especial ao Joaquim Filho por todas as vezes que me deu apoio para não desistir e sacrificou sua formação para que eu pudesse concluir o curso de Matemática.

Agradeço a todos os meus professores da educação infantil até os da pós graduação que foram fundamentais para minha formação intelectual. Agradeço a todos por sempre me motivarem a buscar conhecimento e explorar esse magnifico mundo da pesquisa, e em especial a minha orientadora Prof^a. Dra. Daniela Buske e coorientadora Prof^a. Dra. Luciana Rossato Piovesan por me ajudaram sempre no desenvolvimento do trabalho, ao Prof. Dr. Régis Sperotto de Quadros por contribuir bastante no meu aprendizado em programação.

Agradecer a CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) por financiar esta pesquisa, e também a Secretária Municipal de Educação de Penalva por acreditar no projeto de melhoria da educação como um meio de transformação e proporcionar que os funcionários possam ter acesso a qualificação profissional.

Ao longo do tempo muitos homens conseguiram atingir o êxtase da criação. A estes homens dá-se o nome de MATEMÁTICOS.

— AUTOR DESCONHECIDO

RESUMO

SANTOS, Antonio Marcos de Oliveira dos. **APLICAÇÃO DE UM MODELO MATEMÁTICO SEIR COM QUARENTENA E VACINAÇÃO PARA O ESTUDO DA MPOX NO BRASIL**. 2023. 79 f. Dissertação (Mestrado em Modelagem Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática, Instituto de Física e Matemática, Universidade Federal de Pelotas, Pelotas, 2023.

A epidemia de varíola foi uma das mais aterrorizantes doenças já documentadas, causando inúmeras mortes por todo o mundo. O controle dessa doença só foi possível graças às ações tomadas por autoridades de saúde, sendo considerada erradicada. Em julho de 2022, a OMS decretou emergência global de saúde pública devido ao retorno da doença e do alto índice de surtos por todo o mundo, surtos estes não restritos apenas a regiões endêmicas como foi no passado. Segundo as autoridades de saúde isso se dá devido à diminuição da vacinação e à dificuldade em rastrear pessoas infectadas. Neste trabalho é feito um estudo de um modelo epidemiológico do tipo SEIR para analisar os dados da mpox no Brasil. O modelo utilizado é resolvido pelo método de Runge-Kutta de quarta ordem e quatro estágios, a fim de estimar as curvas dos indivíduos infectados ao longo do tempo. O modelo é validado com dados de um surto epidêmico que aconteceu em 1972 em Kosovo. Os dados do atual surto do vírus mpox no Brasil foram coletados diretamente na página do Ministério da Saúde e verificou-se que em cenários distintos, a simulação do modelo teve o mesmo comportamento do surto ocorrido em Kosovo. O modelo também foi utilizado para verificar o efeito da vacinação e de quarentenas.

Palavras-chave: Mpox, Modelo matemático, Epidemiologia, Varíola.

ABSTRACT

SANTOS, Antonio Marcos de Oliveira dos. **APPLICATION OF A SEIR MATHEMATICAL MODEL WITH QUARANTINE AND VACCINATION FOR THE STUDY OF MPOX IN BRAZIL.** 2023. 79 f. Dissertação (Mestrado em Modelagem Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática, Instituto de Física e Matemática, Universidade Federal de Pelotas, Pelotas, 2023.

The smallpox epidemic was one of the most terrifying diseases ever documented, causing countless deaths all over the world. The control of this disease only was possible thanks to actions taken by health authorities, being considered eradicated. In July 2022, the WHO declared a global public health emergency due to the return of the disease and the high rate outbreaks throughout the world, these outbreaks are not restricted to endemic regions as in the past. According to health authorities, this is due to a decrease in vaccination and the difficulty in tracking infected people. In this work it is made a study of an epidemiological model of the SEIR type to analyze the mpox data in the Brazil. The model used is solved by the fourth-order Runge-Kutta method and four stages, in order to estimate the curves of infected individuals over the course of of time. The model is validated with data from an epidemic outbreak that happened in 1972 in Kosovo. Data from the current mpox virus outbreak in Brazil were collected directly on the Ministry of Health page and it was found that in different scenarios, the model simulation had the same behavior as the outbreak occurred in Kosovo. The model was also used to verify the effect vaccination and quarantine.

Keywords: Mpox, Mathematical model, Epidemiology, Smallpox.

LISTA DE FIGURAS

1	Imagens microscópicas do vírus da mpox.	13
2	Sintomas de mpox.	14
3	Erupção na pele causada pela mpox.	14
4	Erupção na pele causada pela mpox.	15
5	Distribuição de casos pelo mundo.	16
6	Esquema compartimental do modelo SI.	22
7	Esquema compartimental do modelo SIS.	22
8	Esquema compartimental do modelo SIR.	22
9	Esquema compartimental do modelo SEIR.	23
10	Casos acumulados de varíola em Kosovo – 1972.	36
11	Incidência de casos de varíola em Kosovo - 1972.	37
12	Número de reprodução da varíola em Kosovo - fevereiro a abril de 1972.	38
13	Dados observados no surto de Kosovo comparados com a simulação do modelo (35) para o R_0 médio e o R_t	38
14	Curva epidêmica sem intervenção por número inicial de infectados do cenário hipotético.	39
15	Influência do tempo para início da resposta, com 90% de vacinação.	40
16	Recuperados após a tomada de medidas de contenção.	40
17	Cenário 1: sem tomada de medidas de vacinação ou quarentena.	42
18	Cenário 2: população é colocada em quarentena.	42
19	Cenário 3: população é vacinada.	43
20	Cenário 4: vacinação inicial é zero, e depois aumenta gradativamente.	43
21	Cenário 5: com recuperados e vacinados.	44
22	Cenário 6: com recuperados e quarentena.	44
23	Casos diários de mpox no Brasil até 31/01/2023.	46
24	Casos diários de mpox na cidade de São Paulo até 31/01/2023.	47
25	Casos diários de mpox no Distrito Federal até 31/01/2023.	47
26	Casos diários de mpox no Rio Grande do Sul até 31/01/2023.	48
27	Simulação dos casos de mpox no Brasil até 31/01/2023.	49
28	Simulação dos casos de mpox na cidade de São Paulo até 31/01/2023.	50
29	Simulação dos casos de mpox no Distrito Federal até 31/01/2023.	51
30	Simulação dos casos de mpox no Rio Grande do Sul até 31/01/2023.	51
31	R_0 com janela 1 para o Brasil.	58

32	R_0 com janela 4 para o Brasil.	58
33	R_0 com janela 7 para o Brasil.	59
34	R_0 com janela 1 para a cidade de São Paulo.	59
35	R_0 com janela 1 descosiderando o maior valor para a cidade de São Paulo.	60
36	R_0 com janela 4 para a cidade de São Paulo.	60
37	R_0 com janela 7 para a cidade de São Paulo.	61
38	R_0 com janela 1 para o Distrito Federal.	61
39	R_0 com janela 4 para o Distrito Federal.	62
40	R_0 com janela 7 para o Distrito Federal.	62
41	R_0 com janela 1 para o Rio Grande do Sul.	63
42	R_0 com janela 4 para o Rio Grande do Sul.	63
43	R_0 com janela 7 para o Rio Grande do Sul.	65
44	Etapas envolvidas na solução numérica de um problema físico. . . .	75

LISTA DE TABELAS

1	Parâmetros de entrada no modelo.	36
2	Intervenções impostas durante o surto de varíola em Kosovo, 1972.	37
3	Dados de casos de mpox dos boletins informativos em 31/01/2023.	46
4	Parâmetros populacionais para a análise de mpox.	48
5	Parâmetros adotados no modelo para a simulação do surto de mpox.	49
6	R_0 com janela 1 para o Brasil.	64
7	R_0 com janela 4 para o Brasil.	65
8	R_0 com janela 7 para o Brasil.	66
9	R_0 com janela 1 para a cidade de São Paulo.	67
10	R_0 com janela 1 para a cidade de São Paulo desconsiderando o valor mais alto.	68
11	R_0 com janela 4 para a cidade de São Paulo.	69
12	R_0 com janela 7 para a cidade de São Paulo.	69
13	R_0 com janela 1 para o Distrito Federal.	70
14	R_0 com janela 4 para o Distrito Federal.	71
15	R_0 com janela 7 para o Distrito Federal.	72
16	R_0 com janela 1 para o Rio Grande do Sul.	73
17	R_0 com janela 4 para o Rio Grande do Sul.	74
18	R_0 com janela 7 para o Rio Grande do Sul.	74

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

Abreviaturas

OMS	Organização Mundial da Saúde
ANVISA	Agência Nacional de Vigilância Sanitária
IBGE	Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística
SIR	Suscetíveis-Infectedos-Recuperados
SI	Suscetíveis-Infectedos
SIS	Suscetíveis-Infectedos-Suscetíveis
SEIR	Suscetíveis-Expostos-Infectedos-Recuperados
AIDS	Síndrome da Imunodeficiência Adquirida
RNA	Ácido Ribonucleico
mRNA	RNA mensageiro
EDO's	Equações Diferenciais Ordinárias
Eq.	Equação
RS	Rio Grande do Sul
DF	Distrito Federal

Nomenclatura

$\text{Det}(A)$	Determinante da matriz A
J	Jacobiano
I^*	Matriz identidade
$P(x)$	Polinômio característico
Δ	Discriminante usado para calcular os autovalores do sistema
$x_{1,2}$	Autovalores para o estudo da estabilidade do sistema de EDO
$P^*(S^*, I^*, R^*)$	Pontos de equilíbrio do sistema quando há infecção
R_t	Velocidade de contágio
R_0	Reprodutividade Basal
N	População total

E_n	Indivíduos latentes não rastreados
E_i	Número de contatos latentes rastreados
C_i	Número de contatos rastreados não infectados
Q	Proporção em quarentena
V	Proporção de vacinados
U	Proporção de mortos e recuperados

Parâmetros

β	Taxa de infecção
μ	Taxa de natalidade/mortalidade
ν	Taxa de recuperação
ϵ	Taxa de remoção de indivíduos da classe de expostos
α	Taxa média de indivíduos latentes que se tornam infecciosos
χ_1	Primeiro estado de quarentena
χ_2	Segundo estado de quarentena
ϵ_1	Eficiência de vacinados não infectados
ϵ_2	Eficiência de vacinados infectados
φ	Proporção de contatos infectados
ρ	Proporção de contatos encontrados por meio de rastreamento
θ	Proporção de indivíduos infecciosos de E_n que estão em quarentena
γ	Período infeccioso

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
2	CONTEXTUALIZAÇÃO	17
2.1	Epidemiologia	17
2.2	Modelos epidemiológicos	19
2.2.1	Modelo SI	21
2.2.2	Modelo SIS	22
2.2.3	Modelo SIR	22
2.2.4	Modelo SEIR	23
2.3	Estudo do modelo SIR	23
2.3.1	Pontos de equilíbrio	25
2.3.2	Análise da estabilidade e o R_0	25
2.4	Estudo do modelo SEIR	28
2.4.1	Pontos de equilíbrio	29
2.4.2	Análise da estabilidade e o R_0	30
3	MODELO MATEMÁTICO PARA O ESTUDO DA VARÍOLA	34
3.1	Validação do modelo matemático	35
3.1.1	Surto em Kosovo, 1972	35
3.1.2	Simulação numérica do surto de Kosovo	36
3.2	Exercício Mataika	39
4	RESULTADOS	41
4.1	Análise Quantitativa do Modelo	41
4.2	Mpox no Brasil	45
4.2.1	Dados da mpox no Brasil	46
4.2.2	Simulação do surto de MPox no Brasil	46
5	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS	52
	REFERÊNCIAS	54
	ANEXO A TABELA DE R_0	57
	ANEXO B MÉTODO INICIAL DE RUNGE-KUTTA	75
B.1	Introdução	75
B.1.1	Derivação do Método de Runge-Kutta de Segundo Ordem	76
B.1.2	Método de Runge-Kutta de Quarta Ordem	78
B.1.3	Método de Runge-Kutta de Quarta Ordem	79

1 INTRODUÇÃO

A mpox é uma doença endêmica em países da África Central e Ocidental, causada pelo vírus Monkeypox, do gênero *Orthopoxvirus* e família *Poxviridae* (que fazem parte o vírus da varíola, o vírus usado na vacina contra a varíola, e o vírus da varíola bovina), e foi identificado pela primeira vez no ano de 1958 em macacos (vale lembrar que apesar do nome, esses primatas não são hospedeiros do vírus). A mpox geralmente se apresenta de forma leve.

A mpox, também conhecida como varíola dos macacos, é uma doença viral cujos sintomas se assemelham com os de casos de varíola relatados no passado. Apesar de ter sido considerada erradicada, o surgimento de novos surtos de infecção pelo vírus mpox pelo mundo foi motivo de alerta. Este vírus foi documentado pela primeira vez em humanos na década de 1970 e surtos foram relatados em muitos países, com a maioria dos casos restritos a áreas endêmicas. A epidemia de varíola foi uma das mais aterrorizantes doenças já documentadas, pois causou inúmeras mortes por todo o mundo. O controle dessa doença só foi possível devido à rígida quarentena de pessoas infectadas (e pessoas com contatos com infectados) e vacinação em massa realizada após a descoberta da vacina.

No início de maio de 2022, casos de mpox foram relatados no Reino Unido, Espanha e em outros lugares da Europa. O padrão de dispersão geográfica foi muito maior em comparação com o passado, apresentando surtos mais localizados e com mais frequência em países com poucos recursos. Em 23 de julho de 2022, a OMS decretou emergência global de saúde pública devido ao alto índice de surtos que se expandiam por todo o mundo, e não estavam restritos apenas a regiões endêmicas, como no passado. Segundo as autoridades de saúde isso se dá devido à diminuição da vacinação e à dificuldade em rastrear pessoas infectadas.

No dia 11 de maio de 2023 a OMS anunciou que a mpox deixou de ser considerada emergência de saúde global, mas não significa dizer que o vírus deixou de circular. Os trabalhos devem continuar pois ainda não se compreende o comportamento da doença, e que apesar da queda nos números de casos em algumas regiões o vírus continua afetando comunidades em todas as regiões, inclusive na África.

De acordo com dados publicados pela ANVISA (ANVISA, 2022), no segundo semestre de 2022 o Brasil já contava com vários casos confirmados e também suspeitos, assim como mortes devido a doença causada pelo vírus da mpox. Na norma técnica (ANVISA, 2020) publicada pela ANVISA sobre orientações para prevenção e controle da mpox, faz-se um alerta de que a transmissão da doença se dá principalmente pelo contato direto ou indireto com sangue, fluidos corporais, lesões de pele ou mucosa de animais infectados. Ainda destaca que seu período de incubação é geralmente de 6 a 13 dias, podendo variar de 5 a 21 dias. Os sintomas envolvem o período febril (que são os primeiros 5 dias) e o período de erupção cutânea (que se dá de 1 a 3 dias após o início do período febril), e estes duram de 2 a 4 semanas. Na Figura 1 é possível observar o vírus que causa a doença mpox, e na Figura 2 a evolução dos sintomas em um paciente. Nas figuras 3 e 4 são apresentadas imagens de erupção na pele de pacientes, causadas pela mpox.

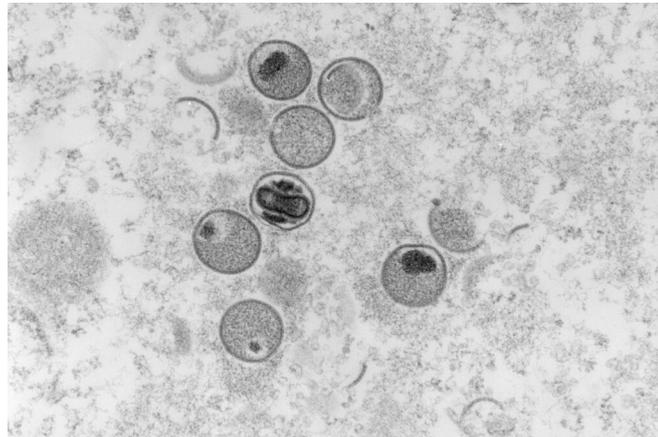


Figura 1: Imagens microscópicas do vírus da mpox.
Fonte: Freya Kaulbars/Rki Robert Koch Institute/AFP

As mortes causadas por esse vírus no Brasil são raras, sendo que a taxa de mortalidade causada pelo surto atual fica abaixo de 1%, números estes bem menores do que as taxas de letalidade calculadas pela OMS em surtos causados pela doença no passado, que eram de 3 a 6%. Embora a taxa de mortalidade seja baixa, há uma preocupação por parte das autoridades de saúde devido a grande taxa de infecção. Ainda que não se tenha vacinas aprovadas no Brasil contra a mpox, acredita-se que a vacina contra varíola ofereça proteção de aproximadamente 85%. No entanto, pessoas com menos de 50 anos podem ser mais suscetíveis ao vírus devido à interrupção das campanhas de vacinação.

Sabe-se que a forma mais segura para conter surtos de doenças causadas por agentes infecciosos é a vacinação de um percentual da população de tal maneira que se consiga atingir a imunidade de rebanho. Este fato já ficou provado historicamente, no entanto vale ressaltar que até que uma vacina seja aprovada pelas autoridades de saúde e possa ser aplicada na população, inúmeros testes e várias fases de de-

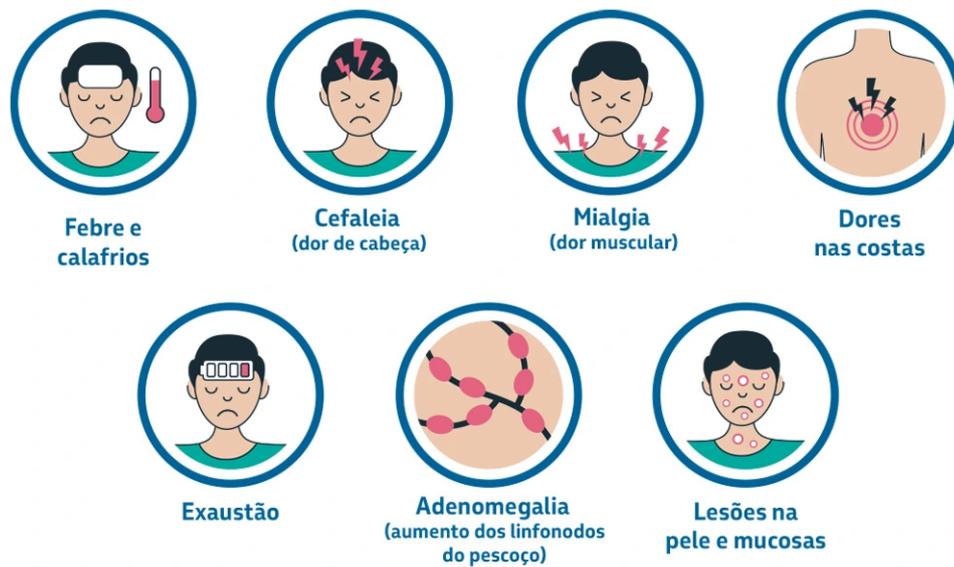


Figura 2: Síntomas de mpox.

Fonte: <https://saudepetrobras.com.br/fique-por-dentro/5-fatos-sobre-a-variola-dos-macacos-monkeypox-que-voce-precisa-saber.htm>



Figura 3: Erupção na pele causada pela mpox.

Fonte: UKHSA



Figura 4: Erupção na pele causada pela mpox.
Fonte: Centro de Controle de Doenças da Nigéria

envolvimento são necessárias. Este processo pode levar de meses, dependendo do agente causador, a anos e até a décadas. Por isso, o desenvolvimento de modelos matemáticos que representem adequadamente a disseminação de doenças é uma importante ferramenta para auxiliar na tomada de decisão. Os modelos são validados com base nos dados de epidemias ao longo da história. Estes conjuntos de dados fornecem o comportamento da doença, e podem ser utilizados em modelos matemáticos de modo a tentar mitigar o surto através de estratégias, como quarentena, até que se tenha um medicamento eficaz.

Para as simulações, modelos matemáticos epidemiológicos são utilizados, com o objetivo de compreender melhor todo o processo de transmissão e propagação da doença, para que se possam propor medidas que levem a um decréscimo na transmissão da doença. Com efeito, em (HETHCOTE, 2000), estes modelos são usados para ajudar em programas de detecção e controle, planejamento, prevenção e terapia. Vale ressaltar que o mundo tem visto o ressurgimento de muitas infecções virais. Com a mutação dos vírus essas doenças surgem com maior fatalidade e assim as vacinas antes usadas para uma infecção, com o mesmo vírus, não tem tanta eficácia. O que aconteceu com a COVID-19 tem o mesmo aspecto do que está acontecendo agora com a mpox, pois a vacina contra o vírus da varíola não tem a mesma eficácia para o vírus que causa a mpox. Por isso a importância da epidemiologia matemática, pois através da compreensão de um determinado surto é possível traçar estratégias seguras de controle de uma determinada doença.

O presente trabalho tem por objetivo conhecer a dinâmica da propagação de

doenças através do estudo de modelos epidemiológicos. Além disso, busca-se identificar e/ou estimar, através de dados da literatura, os parâmetros necessários para analisar um modelo do tipo SEIR para o estudo da varíola, implementando o método de Runge-Kutta 4 (ver Anexo B) computacionalmente para resolver o modelo proposto para simular a mpox. Também pretende-se comparar os resultados obtidos nas simulações com aqueles provenientes da literatura. Nesse sentido, entende-se que este estudo possui grande impacto, pois tem amplo alcance e grande relevância para a população em geral, pois trata-se de um tema atual e discutido no âmbito da saúde pública, visando amenizar os impactos causados pelo atual surto epidêmico de mpox no país. Na Figura 5 é possível observar a distribuição de casos pelo mundo no ano de 2022.

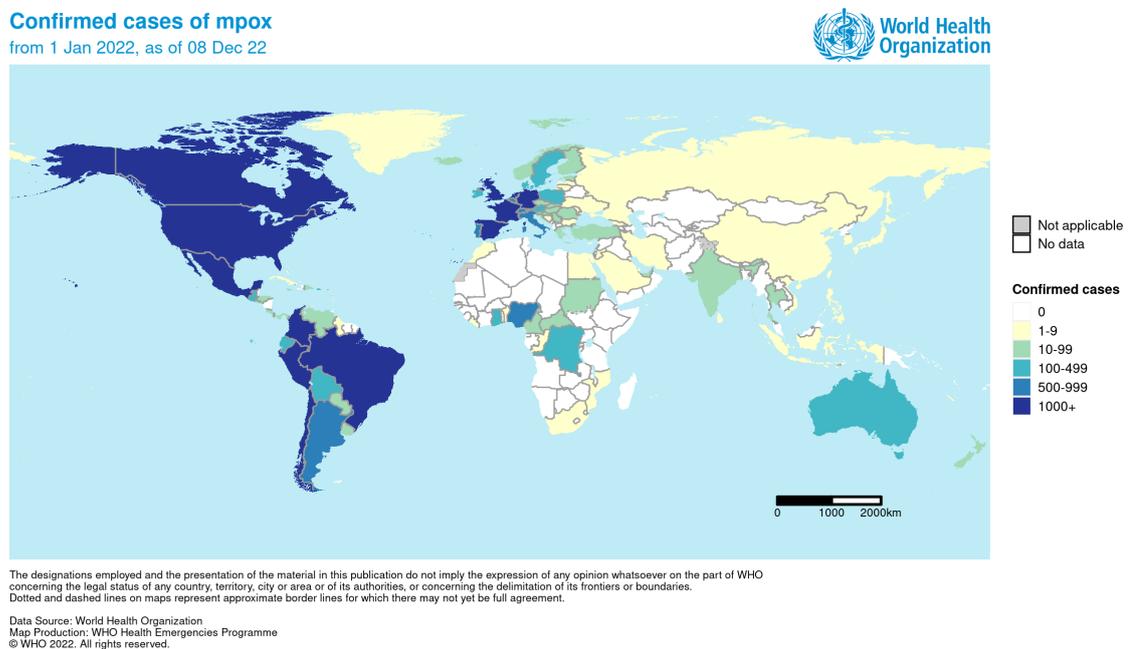


Figura 5: Distribuição de casos pelo mundo.
Fonte: OMS

O trabalho encontra-se dividido da seguinte maneira: No segundo capítulo serão apresentados alguns aspectos gerais sobre a epidemiologia e os modelos matemáticos mais utilizados na modelagem de doenças infecciosas. O terceiro capítulo apresenta o modelo matemático SEIR para o estudo da varíola e resultados numéricos utilizando informações do Surto de Kosovo. No quarto capítulo é estudado a influência da vacina e da quarentena a partir da implementação computacional do modelo estudado e, também, a simulação dos casos do surto de mpox no Brasil. O quinto capítulo apresenta as conclusões e perspectivas futuras. Por fim, são apresentadas as referências bibliográficas.

2 CONTEXTUALIZAÇÃO

Neste capítulo, estudam-se os modelos epidemiológicos mais utilizados na literatura, ou seja, o modelo SI (Suscetíveis-Infectedos), SIS (Suscetíveis-Infectedos-Suscetíveis), SIR (Suscetíveis-Infectedos-Recuperados) e SEIR (Suscetíveis-Expostos-Infectedos-Recuperados). Também analisam-se os pontos de equilíbrio e suas respectivas condições de estabilidade. Além disso, alguns conceitos básicos de epidemiologia serão descritos, de modo a possibilitar o entendimento do comportamento dos modelos e assim aplicá-los no estudo da mpox.

2.1 Epidemiologia

A epidemiologia estuda a compreensão do processo saúde-doença no âmbito de populações, aspecto que a diferencia da clínica, que tem por objetivo o estudo desse mesmo processo, mas em termos individuais. Como ciência, a epidemiologia fundamenta-se no raciocínio causal; já como disciplina da saúde pública, preocupa-se com o desenvolvimento de estratégias para as ações voltadas para a proteção e promoção da saúde da comunidade. A epidemiologia constitui também instrumento para o desenvolvimento de políticas no setor da saúde. Sua aplicação neste caso deve levar em conta o conhecimento disponível, adequando-o às realidades locais (WALDMAN; ROSA, 1998).

A caracterização epidemiológica das doenças permite conhecer sua natureza e comportamento e decidir o tipo de resposta necessária para o seu controle. O espectro de classificação das doenças são: transmissíveis ou não transmissíveis e agudas ou crônicas. As doenças transmissíveis costumam ser agudas e as não transmissíveis costumam ser crônicas.

- **Doença transmissível:** é qualquer doença causada por um agente infeccioso específico ou seus produtos tóxicos, que se manifesta pela transmissão deste agente ou de seus produtos, de um reservatório a um hospedeiro suscetível, seja diretamente de uma pessoa ou animal infectado, ou indiretamente por meio de um hospedeiro intermediário, de natureza vegetal ou animal, de um vetor ou

do meio ambiente inanimado (Organização Pan-Americana da Saúde, 2010).;

- **Doença emergente:** é uma doença transmissível cuja incidência em humanos vem aumentando ou que ameaça aumentar em um futuro (Organização Pan-Americana da Saúde, 2010).;
- **Doença reemergente:** é uma doença transmissível previamente conhecida que reaparece como problema de saúde pública após uma etapa de significativo declínio de sua incidência e aparente controle (Organização Pan-Americana da Saúde, 2010).

A palavra epidemiologia é do grego que significa estudo sobre população. O objetivo da Epidemiologia Matemática é descrever quantitativamente o fenômeno e fornecer informações epidemiológicas e dados estatísticos sobre os parâmetros envolvidos, como a força de infecção, reprodutibilidade basal e a taxa de contato (SABETI, 2011). Esses parâmetros representam termos epidemiológicos usados nas equações dos modelos. Os principais parâmetros usados nesta pesquisa são:

- **Período Infeccioso:** A duração do período de tempo durante o qual uma pessoa pode transmitir uma doença (GIESECKE, 2017);
- **Período Latente:** É o período desde a infecção até o início do período infeccioso (GIESECKE, 2017);
- **Período de Incubação:** É a partir do momento em que uma pessoa é infectada até que ela desenvolva sintomas da doença. Durante esse tempo, ele próprio pode ser infeccioso; de fato, para muitas doenças comuns da infância, o período de maior infecciosidade é apenas no final do período de incubação. Este fato tem implicações importantes para o controle de tais doenças, já que o isolamento de casos geralmente chega tarde demais para evitar a propagação (GIESECKE, 2017).
- **Taxa de mortalidade:** Mortes per capita em uma população. A taxa de mortalidade é a recíproca da expectativa de vida de uma população (CÂMARA, 2004-2007);
- **Suscetível:** É qualquer pessoa ou animal que não possui suficiente resistência contra um determinado agente patógeno que o proteja contra a doença caso chegue a ter contato com esse agente (Organização Pan-Americana da Saúde, 2010);
- **Latente (ou Exposto):** É qualquer pessoa que já está infectada mas ainda não infeccioso, ou seja, não tem ainda a capacidade de transmitir a doença (OLIVEIRA, 2008);

- **Infeccioso:** É qualquer pessoa que transmite a doença a indivíduos suscetíveis, através de várias formas de contato (OLIVEIRA, 2008);
- **Recuperado (ou Removido):** É qualquer pessoa que, após estar infectado, adquire imunidade à doença, seja temporária ou permanente (OLIVEIRA, 2008);
- **Transmissão:** Processo pelo qual um patógeno passa de uma fonte de infecção para um novo hospedeiro. Há dois tipos de transmissão: horizontal e vertical. A maioria das formas de transmissão se dá horizontalmente, ou seja, de hospedeiro para hospedeiro (CÂMARA, 2004-2007);
- **Contato:** Taxa de contato entre suscetíveis e infectados. Medido em indivíduos por unidade de tempo (CÂMARA, 2004-2007);
- **Incidência:** Taxa de aparecimento de casos novos numa população (CÂMARA, 2004-2007);
- **Vacina:** Preparação que induz imunidade artificial ativa contra um patógeno. Elas podem ser: vivas quando são feitas com patógenos atenuados; mortas quando são feitas a partir do parasita morto; e RNA mensageiro quando são feitas a partir de um RNA sintético que corresponde a uma determinada proteína do agente infeccioso (Organização Pan-Americana da Saúde, 2010).

2.2 Modelos epidemiológicos

Modelos epidemiológicos são caracterizados por um conjunto de equações que representam os compartimentos dos indivíduos. Um sistema de compartimentos consiste essencialmente de um número finito de sistemas interligados, chamados de compartimentos, que trocam entre si e com o meio ambiente, quantidade ou concentração de material (BRAUER; CHAVEZ, 2010).

Em (HETHCOTE, 2000), tem-se um modelo para varíola formulado e analisado por Daniel Bernoulli em 1760 e os autores também fazem referência a modelos determinísticos que começaram a ser usados no século XX. Em 1906, Hamer formulou um modelo discreto para o estudo do sarampo, neste tipo de modelo admite-se que a incidência depende do produto das densidades dos suscetíveis e dos infectados. Anos depois, em 1911, Ross formulou um modelo que envolve equações diferenciais para estudar a malária. O uso de equações diferenciais também é a característica dos trabalhos desenvolvidos por Ross e Hudson, Martini, e Lotka. Os trabalhos de maior relevância na área são os apresentados por Kermack e McKendrick (desde 1926), por serem os primeiros a desenvolverem o conceito de limiar, sendo assim possível descrever com maior precisão os parâmetros para que ocorra uma epidemia.

Estudos epidemiológicos investigam a transmissão de uma doença e de seus agentes causadores. Nesses estudos, a modelagem matemática pode ser uma ferramenta de suporte fundamental, na qual se propõe a tradução de uma situação real para um problema matemático, que é resolvido interpretando suas soluções numa linguagem mais próxima da realidade (BASSANEZI, 2002). Os modelos epidemiológicos devem ser capazes de descrever a dinâmica de transmissão de uma doença ou de um agente patogênico, sendo possível analisá-los quantitativamente e qualitativamente, fornecendo parâmetros suficientes para implementação de ações de controle.

Para o estudo dos modelos epidemiológicos, precisa-se de algumas definições importantes que são:

- **Ponto de Equilíbrio**

Os pontos de equilíbrio representam para onde as trajetórias da solução de cada coordenada, ou equação, vão convergir com o passar do tempo, e a partir de algum momento o sistema estará em equilíbrio. Matematicamente, os pontos de equilíbrio de um sistema são aqueles onde a derivada se anula com o tempo, um ponto de equilíbrio P pode ser livre de doença ou endêmico (OLIVEIRA, 2008);

- **Número básico de reprodução**

Endemia é o agravo da doença dentro da média de casos estudados para uma determinada região. Enquanto a epidemia é quando esse agravo ocorre acima da média (ou mediana). Quando uma epidemia atinge vários países de diferentes continentes, passa a ser denominada pandemia. Em epidemiologia chamamos de número básico de reprodução, denotado por R_0 , a capacidade de contágio de um micro-organismo, ou seja, é o número de casos secundários produzidos por um único infeccioso no tempo em que ele permanece infectado quando ele entra no grupo de suscetíveis (MACIEL, 2020). O R_0 é um número adimensional e ele nos dá a informação sobre o espalhamento da doença. Assim:

- $R_0 = 1$: A doença se tornará endêmica (GIESECKE, 2017);
- $R_0 > 1$: Haverá uma epidemia (GIESECKE, 2017);
- $R_0 < 1$: A doença desaparecerá (GIESECKE, 2017).

Esse parâmetro, também conhecido por limiar, foi proposto por Kermack e McKendrick em 1927 (MURRAY, 1989).

- **Modelos sem dinâmica vital**

São modelos em que na população estudada não se consideram nascimentos nem mortes. Assim em um conjunto de indivíduos suscetíveis a uma doença, é

esperado que os suscetíveis decresçam com o tempo ao ser multiplicado pela taxa de infecção β , por isso o sinal negativo. A taxa de variação dos infectados, em contrapartida, aumenta com o número de infectados e cai quanto maior for a taxa de recuperação ν , isso explica a alternância entre os sinais. Por último, a taxa de recuperados irá depender apenas dos indivíduos que já tiveram a doença, por isso a dependência única à taxa de recuperação (LIMA, 2021).

Exemplo de Modelo sem dinâmica vital:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS}{dt} = -\beta SI \\ \frac{dI}{dt} = \beta SI - \nu I \\ \frac{dR}{dt} = \nu I \end{array} \right. \quad (1)$$

• Modelos com dinâmica vital

Quando é considerado a chamada dinâmica vital, a descrição do sistema passa a ser mais completa, e conseqüentemente mais complexa. Uma vez que se tem indivíduos nascendo, o que implica em um aumento no número de seres suscetíveis à doença e temos indivíduos morrendo, de modo que ao considerar um intervalo de tempo grande, a tendência é que a doença atinja um estado estacionário e não seja extinta (LIMA, 2021).

Exemplo de Modelo com dinâmica vital:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS}{dt} = \mu N - \frac{\beta SI}{N} - \mu S \\ \frac{dI}{dt} = \frac{\beta SI}{N} - \mu I - \nu I \\ \frac{dR}{dt} = \nu I - \mu R \end{array} \right. \quad (2)$$

A seguir, apresenta-se de forma resumida, a representação esquemática de alguns modelos matemáticos baseados em compartimentos dos indivíduos bastante utilizados na análise de doenças infecciosas que podem gerar surtos epidêmicos.

2.2.1 Modelo SI

Este é um dos modelos mais simples, pois é formado por apenas dois compartimentos que são os Suscetíveis (S) e Infecciosos (I). Este modelo geralmente é utilizado para o estudo de doenças onde o indivíduo infectado não adquire imunidade e um exemplo de doença com esta característica é a AIDS. Na Figura 6, é possível observar um esquema do modelo SI, com dinâmica vital, a uma taxa de natalidade/mortalidade μ e taxa de infecção β .

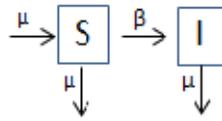


Figura 6: Esquema compartimental do modelo SI.
Fonte: Elaborado pelo autor.

2.2.2 Modelo SIS

Este é um modelo formado por apenas dois compartimentos que são os Suscetíveis (S) e Infeciosos (I). Ele é usado para estudar doenças em que o indivíduo consegue se recuperar, no entanto não adquire imunidade e assim retorna ao compartimento dos suscetíveis. Um exemplo bastante comum é a infecção por gripe, onde um indivíduo se recupera mas pode se reinfectar novamente. Na Figura 7, é possível observar um esquema do modelo SIS, com dinâmica vital, a uma taxa de natalidade/mortalidade μ , taxa de infecção β e taxa de recuperação ν .

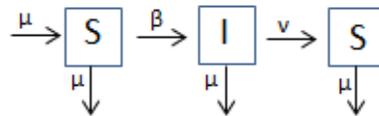


Figura 7: Esquema compartimental do modelo SIS.
Fonte: Elaborado pelo autor.

2.2.3 Modelo SIR

Proposto por Kermack e McKendrick, em um artigo publicado em 1927, em que a população é dividida em três classes (BRAUER; DRIESSCHE; WU, 2008) que são os Suscetíveis (S) os Infeciosos (I) e os Removidos/Recuperados (R). Na Figura 8, é possível observar um esquema do modelo SIR, com dinâmica vital, a uma taxa de natalidade/mortalidade μ , e taxa de infecção β e taxa de recuperação ν .

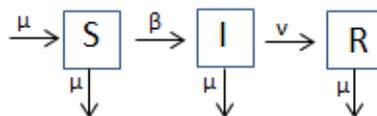


Figura 8: Esquema compartimental do modelo SIR.
Fonte: Elaborado pelo autor.

2.2.4 Modelo SEIR

Em algumas doenças há um período de exposição, que é o período antes da doença se tornar potencialmente transmissível. Quando este período é relativamente longo, ele pode influenciar significativamente nas predições do modelo SIR. Para acrescentar essa característica no modelo, precisa-se inserir uma nova classe de indivíduos, chamados de Expostos (E), em que a doença está no período de incubação. Na Figura 9, é possível observar um esquema do modelo SEIR, com dinâmica vital, a uma taxa de natalidade/mortalidade μ , taxa de infecção β , taxa de incubação ϵ e taxa de recuperação ν .

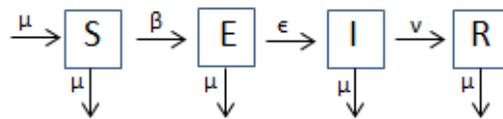


Figura 9: Esquema compartimental do modelo SEIR.
Fonte: Elaborado pelo autor.

2.3 Estudo do modelo SIR

O principal objetivo desta seção é fazer uma análise qualitativa do modelo SIR através do estudo da estabilidade dos pontos de equilíbrio.

Acrescentando a dinâmica vital, ou seja, considerando a taxa de mortalidade μ (em média o tempo de vida do indivíduo é μ^{-1}) e natalidade, ambas iguais, obtém-se

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \mu N - \frac{\beta SI}{N} - \mu S \\ \frac{dI}{dt} = \frac{\beta SI}{N} - \mu I - \nu I = \frac{\beta SI}{N} - I(\mu + \nu) \\ \frac{dR}{dt} = \nu I - \mu R \end{cases} \quad (3)$$

onde:

- t representa o tempo;
- N representa o tamanho da população;
- $S(t)$ é o número de indivíduos suscetíveis no tempo t ;
- $I(t)$ é o número de indivíduos infecciosos no tempo t ;
- $R(t)$ é o número de indivíduos recuperados no tempo t ;
- β é a taxa de contato ou taxa de transmissão;

- ν é a taxa de recuperação;
- μ taxa de natalidade e mortalidade.

As unidades dos parâmetros envolvidos no modelo são: $[\mu] = [\beta] = [\nu] = [t]^{-1}$.
Ainda, $[S] = [I] = [R] = [\text{população}] = [P]$.

O termo $\frac{\beta SI}{N}$ representa a taxa total de transmissão para toda a população suscetível, onde considera-se que o número de contatos independe do tamanho da população e que todos interagem com igual probabilidade. O fator $\frac{\beta I}{N}$ é a taxa de transmissão por indivíduo suscetível e ela representa a força da infecção (KEELING; ROHANI, 2007).

A população total é considerada sempre constante, ou seja, $N(t) = N$, pois:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} + \frac{dI}{dt} + \frac{dR}{dt} &= \mu N - \frac{\beta SI}{N} - \mu S + \frac{\beta SI}{N} - \mu I - \nu I + \nu I - \mu R \\ \frac{d[S + I + R]}{dt} &= \mu N - \mu(S + I + R) \\ \frac{dN}{dt} &= \mu N - \mu N \\ \frac{dN}{dt} &= 0. \end{aligned}$$

A fim de representar a proporção de indivíduos Suscetíveis, Infectados e Recuperados em relação a população total, realiza-se uma normalização do sistema (3). Para isso, considera-se:

$$\begin{aligned} s &= \frac{S}{N} \Rightarrow S = s \cdot N \\ i &= \frac{I}{N} \Rightarrow I = i \cdot N \\ r &= \frac{R}{N} \Rightarrow R = r \cdot N \end{aligned}$$

Substituindo no modelo (3), obtém-se o modelo normalizado:

$$\begin{cases} \frac{ds}{dt} = \mu - \beta si - \mu s \\ \frac{di}{dt} = \beta si - \mu i - \nu i = \beta si - i(\mu + \nu) \\ \frac{dr}{dt} = \nu i - \mu r \end{cases}, \quad (4)$$

onde tem-se que $s \in [0, 1]$, $i \in [0, 1]$, $r \in [0, 1]$ e $s(t) + i(t) + r(t) = 1$. Será utilizado o modelo (4) para a determinação dos pontos de equilíbrio e a análise de estabilidade.

2.3.1 Pontos de equilíbrio

O modelo (4) possui dois pontos de equilíbrio. Um deles é o equilíbrio livre da doença e o outro é o equilíbrio endêmico. Estes pontos de equilíbrio, conforme descrito acima, são determinados fazendo o estudo dos valores de s , i e r que satisfazem $\frac{ds}{dt} = 0$, $\frac{di}{dt} = 0$ e $\frac{dr}{dt} = 0$. Assim:

$$\mu - \beta si - \mu s = 0 \quad (5)$$

$$\beta si - i(\mu + \nu) = 0 \quad (6)$$

$$\nu i - \mu r = 0 \quad (7)$$

Da Equação (6), obtém-se $i = 0$ ou $s = \frac{\mu + \nu}{\beta}$.

Considerando $i = 0$ nas Equações (5) e (7), obtém-se $s = 1$ e $r = 0$ e, portanto, tem-se o ponto de equilíbrio livre da doença

$$P_1^* = (1, 0, 0). \quad (8)$$

Considerando $s = \frac{\mu + \nu}{\beta}$ nas Equações (5) e (7), obtém-se $i = \frac{\mu}{\beta} \left(\frac{\beta}{(\nu + \mu)} - 1 \right)$ e $r = \frac{\nu}{\beta} \left(\frac{\beta}{(\nu + \mu)} - 1 \right)$ e, portanto, tem-se o ponto de equilíbrio endêmico

$$P_2^* = \left(\frac{\nu + \mu}{\beta}, \frac{\mu}{\beta} \left(\frac{\beta}{(\nu + \mu)} - 1 \right), \frac{\nu}{\beta} \left(\frac{\beta}{(\nu + \mu)} - 1 \right) \right). \quad (9)$$

Observe que este ponto de equilíbrio só tem sentido biológico (ou biologicamente viável) se $\frac{\beta}{\nu + \mu} - 1 > 0$, ou seja, se $\frac{\beta}{\nu + \mu} > 1$.

2.3.2 Análise da estabilidade e o R_0

Nesta subseção, é feita a análise de estabilidade de cada um dos pontos de equilíbrio do sistema (4) que são: ponto de equilíbrio livre da doença, representado pela expressão (8) e o equilíbrio endêmico, representado pela expressão (9). Nesta análise pode-se desconsiderar o compartimento da população dos indivíduos recuperados já que a população total é sempre constante e r pode ser determinado fazendo $r = 1 - s - i$.

Assim, o sistema considerado é dado por

$$\begin{cases} \frac{ds}{dt} = \mu - \beta si - \mu s \rightarrow f(s, i, r) \\ \frac{di}{dt} = \beta si - \mu i - \nu i = \beta si - i(\mu + \nu) \rightarrow g(s, i, r) \end{cases} \quad (10)$$

Para fazer a análise de estabilidade de um sistema não linear e autônomo, é pre-

ciso fazer uma linearização do sistema em torno do ponto de equilíbrio. Ao se fazer isso, obtém-se um sistema linear cuja matriz dos coeficientes é dada pela Matriz Jacobiana aplicada no ponto de equilíbrio (BOYCE; DIPRIMA, 2010).

A Matriz Jacobiana para este sistema não linear é dada por:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial s} & \frac{\partial f}{\partial i} \\ \frac{\partial g}{\partial s} & \frac{\partial g}{\partial i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\beta i - \mu & -\beta s \\ \beta i & \beta s - (\mu + \nu) \end{bmatrix}. \quad (11)$$

2.3.2.1 Ponto de equilíbrio livre da doença

Considerando o ponto de equilíbrio $P_1^*(s^*, i^*, r^*) = (1, 0, 0)$ e substituindo ele na Matriz Jacobiana (11), obtém-se

$$J(1, 0, 0) = \begin{bmatrix} -\beta \cdot 0 - \mu & -\beta \cdot 1 \\ \beta \cdot 0 & \beta \cdot 1 - (\mu + \nu) \end{bmatrix}$$

ou seja,

$$J(1, 0, 0) = \begin{bmatrix} -\mu & -\beta \\ 0 & \beta - (\mu + \nu) \end{bmatrix}.$$

Para que este ponto de equilíbrio seja estável, é preciso os autovalores tenham parte real negativa. Para determinar os autovalores x , é preciso resolver a equação característica dada por $\det[J(1, 0, 0) - xI^*] = 0$, onde $P(x) = \det[J(1, 0, 0) - xI^*]$ é o polinômio característico e I^* é a matriz identidade. Assim:

$$P(x) = \det[J(1, 0, 0) - xI^*] = \det \begin{bmatrix} -\mu - x & -\beta \\ 0 & \beta - (\mu + \nu) - x \end{bmatrix}$$

e, portanto, o polinômio característico é dado por:

$$P(x) = (-\mu - x)(\beta - \mu - \nu - x). \quad (12)$$

Resolvendo $P(x) = 0$, obtém-se $-\mu - x = 0$ ou $\beta - \mu - \nu - x = 0$, ou seja, $x = -\mu$ ou $x = \beta - \mu - \nu$. Considere $x_1 = -\mu$ e $x_2 = \beta - \mu - \nu$.

Observe que $x_1 = -\mu < 0$ e que $x_2 = \beta - \mu - \nu < 0$ se $\frac{\beta}{\mu + \nu} < 1$. Assim, existe uma condição para que o ponto de equilíbrio livre da doença seja estável e ela é dada por

$$\frac{\beta}{\mu + \nu} < 1$$

e, portanto, pode-se considerar o número básico de reprodução como:

$$R_0 = \frac{\beta}{\mu + \nu}. \quad (13)$$

Assim, sempre que tiver parâmetros de tal maneira que a razão $\frac{\beta}{\mu + \nu}$ seja menor que 1, tem-se que o equilíbrio livre da doença será estável e, como consequência, não se tem uma epidemia.

Pode-se observar que R_0 é adimensional já que:

$$[R_0] = \frac{[\beta]}{[\mu] + [\nu]} = \frac{[t]^{-1}}{[t]^{-1}} = 1.$$

2.3.2.2 Ponto de equilíbrio endêmico

Considerando o ponto de equilíbrio endêmico dado pela Equação (9), é possível reescrevê-lo em função do valor de R_0 dado pela expressão (13). Assim, o ponto de equilíbrio endêmico fica da seguinte forma:

$$P_2^*(s^*, i^*, r^*) = \left(\frac{1}{R_0}, \frac{\mu}{\beta} (R_0 - 1), \frac{\nu}{\beta} (R_0 - 1) \right). \quad (14)$$

Observe que este ponto de equilíbrio é biologicamente viável se $R_0 > 1$.

Substituindo o ponto (14) na Matriz Jacobiana (11), obtém-se

$$J \left(\frac{1}{R_0}, \frac{\mu}{\beta} (R_0 - 1), \frac{\nu}{\beta} (R_0 - 1) \right) = \begin{bmatrix} -\beta \left(\frac{\mu}{\beta} (R_0 - 1) \right) - \mu & -\beta \left(\frac{1}{R_0} \right) \\ \beta \left(\frac{\mu}{\beta} (R_0 - 1) \right) & \beta \left(\frac{1}{R_0} \right) - (\nu + \mu) \end{bmatrix}$$

ou seja,

$$J \left(\frac{1}{R_0}, \frac{\mu}{\beta} (R_0 - 1), \frac{\nu}{\beta} (R_0 - 1) \right) = \begin{bmatrix} -\mu R_0 & \left(\frac{-\beta}{R_0} \right) \\ \mu R_0 - \mu & 0 \end{bmatrix}.$$

Para que este ponto de equilíbrio seja estável, é preciso que os autovalores tenham parte real negativa. Para determinar os autovalores x , é preciso resolver a equação característica dada por $\det \left[J \left(\frac{1}{R_0}, \frac{\mu}{\beta} (R_0 - 1), \frac{\nu}{\beta} (R_0 - 1) \right) - xI^* \right] = 0$, onde $P(x) = \det \left[J \left(\frac{1}{R_0}, \frac{\mu}{\beta} (R_0 - 1), \frac{\nu}{\beta} (R_0 - 1) \right) - xI^* \right]$ é o polinômio característico. Assim:

$$P(x) = \det \left[J \left(\frac{1}{R_0}, \frac{\mu}{\beta} (R_0 - 1), \frac{\nu}{\beta} (R_0 - 1) \right) - xI^* \right] = \det \begin{bmatrix} -\mu R_0 - x & \frac{-\beta}{R_0} \\ \mu R_0 - \mu & -x \end{bmatrix}$$

e, portanto, o polinômio característico é dado por:

$$P(x) = x^2 + \mu R_0 x + \left(\beta \mu - \frac{\beta \mu}{R_0} \right)$$

que pode ser escrito como

$$P(x) = x^2 + \mu R_0 x + \frac{\beta \mu}{R_0} (R_0 - 1). \quad (15)$$

Para o estudo da parte real das soluções da equação característica

$$x^2 + \mu R_0 x + \frac{\beta \mu}{R_0} (R_0 - 1) = 0$$

é necessário analisar apenas o termo $\frac{\beta \mu}{R_0} (R_0 - 1)$, uma vez que a estabilidade local do sistema pode ser estudada de acordo com as condições de Routh-Hurwitz (MURRAY, 1989). De acordo com essas condições, um polinômio de grau 2 possui raízes cuja parte real é negativa se o termo independente for positivo e o coeficiente do termo de maior grau também for positivo. Como o coeficiente do termo de maior grau é 1, então ele é positivo. Para que o termo independente seja positivo é necessário que $R_0 > 1$.

Portanto, para que o ponto de equilíbrio endêmico seja estável é necessário que R_0 seja maior que 1 e, neste caso, se tem uma epidemia.

2.4 Estudo do modelo SEIR

O principal objetivo desta seção é analisar a estabilidade do modelo SEIR e os seus pontos de equilíbrio. A diferença entre este modelo e o apresentado na seção anterior é a presença do compartimento E, que representa os indivíduos expostos.

O modelo SEIR pode ser representado pelo seguinte sistema de EDO's:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS}{dt} = \mu N - \frac{\beta SI}{N} - \mu S \\ \frac{dE}{dt} = \frac{\beta SI}{N} - \epsilon E - \mu E = \frac{\beta SI}{N} - E(\mu + \epsilon) \\ \frac{dI}{dt} = \epsilon E - \mu I - \nu I = \epsilon E - I(\mu + \nu) \\ \frac{dR}{dt} = \nu I - \mu I \end{array} \right. \quad (16)$$

onde:

- t representa o tempo;
- N representa o tamanho da população;

- $S(t)$ é o número de indivíduos suscetíveis no tempo t ;
- $E(t)$ é o número de indivíduos expostos no tempo t ;
- $I(t)$ é o número de indivíduos infecciosos no tempo t ;
- $R(t)$ é o número de indivíduos recuperados no tempo t ;
- β é a taxa de contato ou taxa de transmissão;
- ν é a taxa de recuperação;
- ϵ é a taxa de incubação;
- μ taxa de natalidade e mortalidade.

As unidades dos parâmetros envolvidos no modelo são: $[\mu] = [\beta] = [\epsilon] = [\nu] = [t]^{-1}$. Ainda, $[S] = [I] = [E] = [R] = [\text{população}] = [P]$. A população total é sempre constante, ou seja, $N(t) = N$.

Normalizando o sistema (16), tem-se que:

$$\begin{aligned} s &= \frac{S}{N} \Rightarrow S = s \cdot N \\ e &= \frac{E}{N} \Rightarrow E = e \cdot N \\ i &= \frac{I}{N} \Rightarrow I = i \cdot N \\ r &= \frac{R}{N} \Rightarrow R = r \cdot N \end{aligned}$$

Assim, modelo (16) fica da seguinte forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{ds}{dt} = \mu - \beta si - \mu s \\ \frac{de}{dt} = \beta si - \epsilon e - \mu e = \beta si - e(\mu + \epsilon) \\ \frac{di}{dt} = \epsilon e - \nu i - \mu i = \epsilon e - i(\mu + \nu) \\ \frac{dr}{dt} = \nu i - \mu r \end{array} \right. \quad (17)$$

onde tem-se que $s \in [0, 1]$, $e \in [0, 1]$, $i \in [0, 1]$, $r \in [0, 1]$ e $s(t) + e(t) + i(t) + r(t) = 1$.

2.4.1 Pontos de equilíbrio

O modelo (17) apresenta dois pontos de equilíbrio. Um deles é o equilíbrio livre da doença e o outro é equilíbrio endêmico. Para determinar esses pontos de equilíbrio,

precisa-se determinar os valores de s , e , i e r que satisfazem $\frac{ds}{dt} = 0$, $\frac{de}{dt} = 0$, $\frac{di}{dt} = 0$ e $\frac{dr}{dt} = 0$. Assim:

$$\mu - \beta si - \mu s = 0 \quad (18)$$

$$\beta si - \epsilon e - \mu e = 0 \quad (19)$$

$$\epsilon e - \nu i - \mu i = 0 \quad (20)$$

$$\nu i - \mu r = 0 \quad (21)$$

Resolvendo o sistema, obtém-se $i = 0$ ou $i = \frac{\mu}{\beta} \left(\frac{\epsilon\beta}{(\nu + \mu)(\epsilon + \mu)} - 1 \right)$.

Se $i = 0$, então tem-se o ponto de equilíbrio livre da doença:

$$P_1^*(s^*, e^*, i^*, r^*) = (1, 0, 0, 0). \quad (22)$$

Se $i = \frac{\mu}{\beta} \left(\frac{\epsilon\beta}{(\nu + \mu)(\epsilon + \mu)} - 1 \right)$, tem-se:

$$\begin{aligned} s &= \frac{(\nu + \mu)(\epsilon + \mu)}{\epsilon\beta} \\ e &= \frac{\mu}{(\mu + \epsilon)} \left(1 - \frac{(\nu + \mu)(\epsilon + \mu)}{\epsilon\beta} \right) \\ r &= \frac{\nu}{\beta} \left(\frac{\epsilon\beta}{(\nu + \mu)(\epsilon + \mu)} - 1 \right) \end{aligned}$$

e portanto, obtém-se o ponto de equilíbrio endêmico

$$\begin{aligned} P_2^*(s^*, e^*, i^*, r^*) &= \left(\frac{(\nu + \mu)(\epsilon + \mu)}{\epsilon\beta}, \frac{\mu}{(\mu + \epsilon)} \left(1 - \frac{(\nu + \mu)(\epsilon + \mu)}{\epsilon\beta} \right), \right. \\ &\quad \left. \frac{\mu}{\beta} \left(\frac{\epsilon\beta}{(\nu + \mu)(\epsilon + \mu)} - 1 \right), \frac{\nu}{\beta} \left(\frac{\epsilon\beta}{(\nu + \mu)(\epsilon + \mu)} - 1 \right) \right), \quad (23) \end{aligned}$$

que é biologicamente viável se $\frac{\epsilon\beta}{(\nu + \mu)(\epsilon + \mu)} > 1$.

2.4.2 Análise da estabilidade e o R_0

Nesta subseção, faremos a análise de estabilidade de cada um dos pontos de equilíbrio do sistema (17) que são: ponto de equilíbrio livre da doença, representado pela expressão (22) e o equilíbrio endêmico, representado pela expressão (23). Nesta análise também pode-se desconsiderar o compartimento da população dos indivíduos recuperados já que a população total é sempre constante e r pode ser determinado fazendo $r = 1 - s - e - i$.

Assim, o sistema considerado é dado por

$$\begin{cases} \frac{ds}{dt} = \mu - \beta si - \mu s \rightarrow f(s, e, i, r) \\ \frac{de}{dt} = \beta si - \epsilon e - \mu e = \beta si - e(\mu + \epsilon) \rightarrow g(s, e, i, r) \\ \frac{di}{dt} = \epsilon e - \mu i - \nu i = \epsilon e - i(\mu + \nu) \rightarrow h(s, e, i, r) \end{cases} \quad (24)$$

A análise de estabilidade do sistema (24) é feita através da matriz dos coeficientes, e é dada pela Matriz Jacobiana aplicada nos pontos de equilíbrio. A Matriz Jacobiana para o sistema (24) é dada por:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial s} & \frac{\partial f}{\partial e} & \frac{\partial f}{\partial i} \\ \frac{\partial g}{\partial s} & \frac{\partial g}{\partial e} & \frac{\partial g}{\partial i} \\ \frac{\partial h}{\partial s} & \frac{\partial h}{\partial e} & \frac{\partial h}{\partial i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\beta i - \mu & 0 & -\beta s \\ \beta i & -\epsilon - \mu & \beta s \\ 0 & \epsilon & -\nu - \mu \end{bmatrix}. \quad (25)$$

2.4.2.1 Ponto de equilíbrio livre da doença

Considerando o ponto de equilíbrio $P_1^*(1, 0, 0, 0)$. Substituindo este ponto na Matriz Jacobina (25), obtém-se

$$J(P_1^*) = \begin{bmatrix} -\beta \cdot 0 - \mu & 0 & -\beta \cdot 1 \\ \beta \cdot 0 & -\epsilon - \mu & \beta \cdot 1 \\ 0 & \epsilon & -\nu - \mu \end{bmatrix}$$

ou seja,

$$J(P_1^*) = \begin{bmatrix} -\mu & 0 & -\beta \\ 0 & -\epsilon - \mu & \beta \\ 0 & \epsilon & -\nu - \mu \end{bmatrix}$$

Para que este ponto de equilíbrio seja estável, é preciso que seus autovalores tenham parte real negativa. Para determinar os autovalores x , precisa-se resolver a equação característica dada por $\det[J(P_1^*) - xI^*] = 0$, onde $P(x) = \det[J(P_1^*) - xI^*]$ é o polinômio característico. Assim:

$$P(x) = \det[J(P_1^*) - xI^*] = \det \begin{bmatrix} -\mu - x & 0 & -\beta \\ 0 & -\epsilon - \mu - x & \beta \\ 0 & \epsilon & -\nu - \mu - x \end{bmatrix}$$

e, portanto, o polinômio característico é dado por:

$$P(x) = (-\mu - x)(-\epsilon - \mu - x)(-\nu - \mu - x) - \epsilon\beta(-\mu - x). \quad (26)$$

que pode ser reescrito como:

$$P(x) = (-\mu - x)[(-\epsilon - \mu - x)(-\mu - \nu - x) - \epsilon\beta]. \quad (27)$$

Resolvendo a equação característica

$$(-\mu - x)[(-\epsilon - \mu - x)(-\mu - \nu - x) - \epsilon\beta] = 0 \quad (28)$$

obtém-se $-\mu - x = 0$ ou $(-\epsilon - \mu - x)(-\mu - \nu - x) - \epsilon\beta = 0$, ou seja, $x = -\mu$ ou $x^2 + [(\epsilon + \mu) + (\mu + \nu)]x + (\epsilon + \mu)(\mu + \nu) - \epsilon\beta = 0$.

O primeiro autovalor obtido, $x = -\mu$, é sempre negativo. Os outros autovalores são obtidos resolvendo a equação $x^2 + [(\epsilon + \mu) + (\mu + \nu)]x + (\epsilon + \mu)(\mu + \nu) - \epsilon\beta = 0$ e, pelas condições de Routh-Hurwitz, eles possuirão parte real negativa se o termo independente e o coeficiente do termo de maior grau forem positivo. O termo de maior grau é 1 e, portanto, é positivo. Já, o termo independente $(\epsilon + \mu)(\mu + \nu) - \epsilon\beta$ será positivo se

$$\frac{\epsilon\beta}{(\epsilon + \mu)(\mu + \nu)} < 1.$$

Assim, existe uma condição para que o ponto de equilíbrio livre da doença seja estável e, portanto, pode-se considerar o número básico de reprodução como:

$$R_0 = \frac{\epsilon\beta}{(\mu + \epsilon)(\mu + \nu)}. \quad (29)$$

Assim, sempre que tiver parâmetros de tal maneira que a razão $\frac{\epsilon\beta}{(\mu + \epsilon)(\mu + \nu)}$ seja menor que 1, o equilíbrio livre da doença será estável e, como consequência, não se tem uma epidemia.

Pode-se observar que R_0 é adimensional já que:

$$[R_0] = \frac{[\epsilon][\beta]}{([\mu] + [\epsilon])([\mu] + [\nu])} = \frac{[t]^{-1}[t]^{-1}}{[t]^{-1}[t]^{-1}} = 1.$$

2.4.2.2 Ponto de equilíbrio endêmico

O ponto de equilíbrio endêmico (23) pode ser reescrito em função do R_0 da seguinte forma:

$$P_2^*(s^*, e^*, i^*, r^*) = \left(\frac{1}{R_0}, \frac{\mu}{\epsilon + \mu} \left(1 - \frac{1}{R_0} \right), \frac{\mu}{\beta}(R_0 - 1), \frac{\nu}{\beta}(R_0 - 1) \right) \quad (30)$$

que será biologicamente viável se $R_0 > 1$. Além disso, ele será estável se $R_0 > 1$ e esta afirmação pode ser verificada através na análise da estabilidade. Assim,

considerando a Matriz Jacobiana aplicada no ponto de equilíbrio endêmico:

$$J(P_2^*) = \begin{bmatrix} -\mu R_0 & 0 & -\frac{\beta}{R_0} \\ \mu(R_0 - 1) & -\epsilon - \mu & \frac{\beta}{R_0} \\ 0 & \epsilon & -\nu - \mu \end{bmatrix}$$

obtém-se o polinômio característico $P(x) = \det[J(P_2^*) - xI^*]$:

$$P(x) = -x^3 - (\mu R_0 + \epsilon + \nu + 2\mu)x^2 - \mu R_0(\epsilon + \nu + 2\mu)x - \mu\epsilon\beta \left(1 - \frac{1}{R_0}\right)$$

A equação característica é dada por:

$$-x^3 - (\mu R_0 + \epsilon + \nu + 2\mu)x^2 - \mu R_0(\epsilon + \nu + 2\mu)x - \mu\epsilon\beta \left(1 - \frac{1}{R_0}\right) = 0$$

ou seja,

$$x^3 + (\mu R_0 + \epsilon + \nu + 2\mu)x^2 + \mu R_0(\epsilon + \nu + 2\mu)x + \mu\epsilon\beta \left(1 - \frac{1}{R_0}\right) = 0 \quad (31)$$

Pelas condições de Routh-Hurwitz, uma equação da forma $x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$ possuirá raízes com parte real negativa se:

$$a_1 > 0,$$

$$a_3 > 0,$$

$$a_1a_2 - a_3 > 0.$$

Assim, a equação característica (31) possuirá autovalores com parte real negativa se

$$\mu R_0 + \epsilon + \nu + 2\mu > 0, \quad (32)$$

$$\mu\epsilon\beta \left(1 - \frac{1}{R_0}\right) > 0, \quad (33)$$

$$(\mu R_0 + \epsilon + \nu + 2\mu)(\mu R_0(\epsilon + \nu + 2\mu)) - \mu\epsilon\beta \left(1 - \frac{1}{R_0}\right) > 0. \quad (34)$$

A desigualdade (32) é sempre satisfeita.

A desigualdade (33) será satisfeita se $1 - \frac{1}{R_0} > 0$, ou seja, se $R_0 > 1$.

A desigualdade (34) é sempre satisfeita.

Portanto, o ponto de equilíbrio endêmico será estável se $R_0 > 1$.

3 MODELO MATEMÁTICO PARA O ESTUDO DA VARÍOLA

O modelo matemático utilizado nesta dissertação é um modelo SEIR modificado, descrito por (FENNER et al., 1988), formado pelo seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS}{dt} = \chi_1(1 - \varepsilon_1)C_i - \beta(\varphi + \rho - \varphi\rho)SI \\ \frac{dI}{dt} = \alpha(1 - \theta)E_n - \gamma I \\ \frac{dE_n}{dt} = \beta\varphi(1 - \rho)SI - \alpha E_n \\ \frac{dQ}{dt} = \alpha(1 - \varepsilon_2)E_i + \alpha\theta E_n - \chi_2 Q \\ \frac{dE_i}{dt} = \beta\varphi\rho SI - (\chi_1\varepsilon_2 + \alpha(1 - \varepsilon_2))E_i \\ \frac{dU}{dt} = \gamma I + \chi_2 Q \\ \frac{dC_i}{dt} = \beta\rho(1 - \varphi)SI - \chi_1 C_i \\ \frac{dV}{dt} = \chi_1(\varepsilon_2 E_i + \varepsilon_1 C_i) \end{array} \right. \quad (35)$$

Neste modelo, se considera a população constante, ou seja, $S(t) + I(t) + E_n(t) + Q(t) + E_i(t) + U(t) + C_i(t) + V(t) = N$.

onde:

- t representa o tempo;
- N representa o tamanho da população;
- $S(t)$ é o número de indivíduos suscetíveis no tempo t ;
- $I(t)$ é o número de indivíduos infecciosos no tempo t ;
- $E_n(t)$ representa a proporção de indivíduos latentes não rastreados no tempo t ;
- $Q(t)$ representa a proporção em quarentena no tempo t ;

- $E_i(t)$ representa a proporção de contatos latentes rastreados no tempo t ;
- $U(t)$ representa a proporção de mortos e recuperados no tempo t ;
- $C_i(t)$ representa a proporção de contatos não infectados rastreados no tempo t ;
- $V(t)$ representa a proporção protegida pela vacina no tempo t ;
- α é taxa média na qual os indivíduos latentes se tornam infecciosos;
- β é a taxa de ocorrência de contatos potencialmente infectados;
- γ é a taxa na qual a proporção de indivíduos infecciosos na comunidade se recuperam ou morrem;
- χ_1 é a taxa de contatos rastreados vacinados com sucesso e liberados na comunidade;
- χ_2 é taxa de casos infecciosos não vacinados e que se recuperam ou morrem;
- ε_1 é a taxa de vacinados não infectados;
- ε_2 é a taxa de vacinados infectados;
- ρ é a proporção de contatos encontrados por meio de rastreamento de contato;
- θ é a proporção de indivíduos infecciosos de E_n que estão em quarentena;
- φ é a proporção de contatos infectados;
- β é a taxa de ocorrência de contatos potencialmente infectados.

3.1 Validação do modelo matemático

Na sequência são apresentados resultados e estes são validados com dados da literatura. Inicialmente apresenta-se uma análise quantitativa do modelo SEIR através do estudo do surto de varíola que aconteceu em Kosovo em 1972 (FENNER et al., 1988). Em seguida foi feita uma comparação dos resultados simulados com o modelo proposto, utilizando dados de um cenário de ataque em larga escala por varíola (MACINTYRE et al., 2019).

3.1.1 Surto em Kosovo, 1972

Em 1972 na província de Kosovo, um viajante que retornou de uma região endêmica adoeceu com sintomas de fadiga, tremores e febre, achando que seria devido à viagem, sem apresentar erupções na pele. Poucos dias após seu retorno, 11 pessoas que tiveram contato com ele contraíram a doença. Após um grande esforço,

que foi desde quarentena dos infectados e de pessoas que tiveram contato, até a vacinação em massa de cerca de 95% da população, o surto foi contido. A epidemia de varíola em Kosovo afetou 123 pessoas e causou 26 mortes. A epidemia de varíola foi declarada erradicada em todo o mundo em maio de 1980 (FENNER et al., 1988).

Na Figura 10 observa-se o gráfico da evolução dos casos acumulados de varíola na província de Kosovo. Nota-se que o valor máximo atinge a marca de 123 pessoas infectadas no final do período.

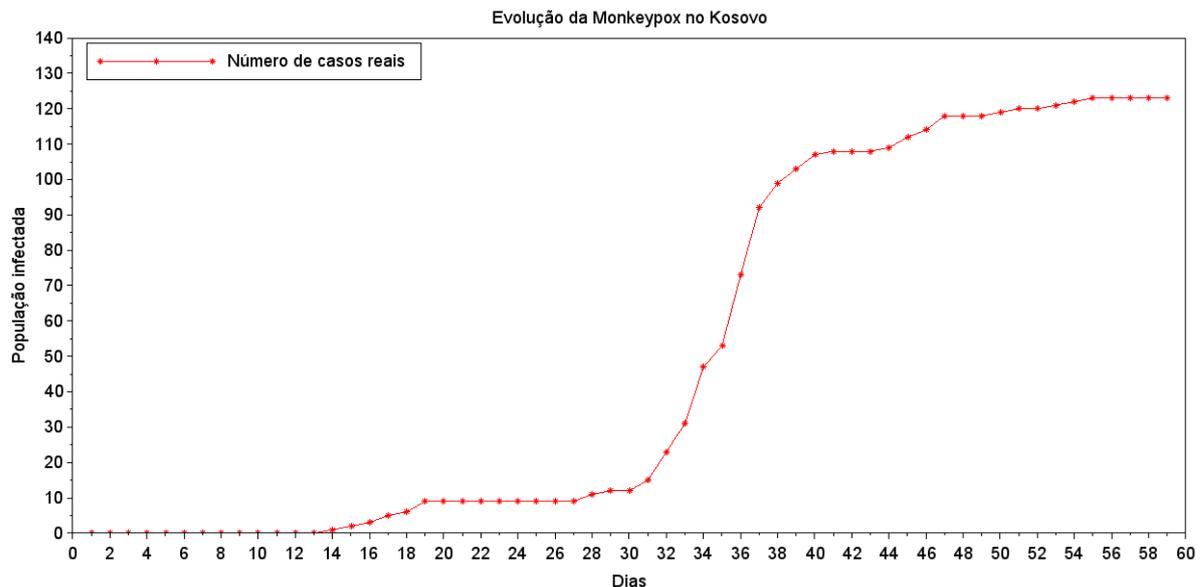


Figura 10: Casos acumulados de varíola em Kosovo – 1972.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Na Figura 11 o gráfico mostra a incidência de casos, onde é possível observar dois picos ao longo de 60 dias de epidemia.

3.1.2 Simulação numérica do surto de Kosovo

O Surto de varíola em Kosovo foi modelado usando o sistema (35), cujo conjunto de equações diferenciais adequadamente parametrizadas, as quais foram resolvidas pelo método de Runge-Kuta de quarta ordem com um passo de tempo de 0,1 dias (ver Anexo B sobre o método numérico). Nas Tabelas 1 e 2, apresentam-se os dados sobre a população de Kosovo e os parâmetros utilizados nas simulações.

Na sequência, a Figura 13 mostra a comparação entre os dados simulados e os do surto (CORI et al., 2013) (THOMPSON et al., 2019).

Tabela 1: Parâmetros de entrada no modelo.

Surto	População	Suscetíveis	Letalidade	R_0	Referência
Kosovo (1972)	2.200.000	1.100.000	10%	10,8	(FENNER et al., 1988)

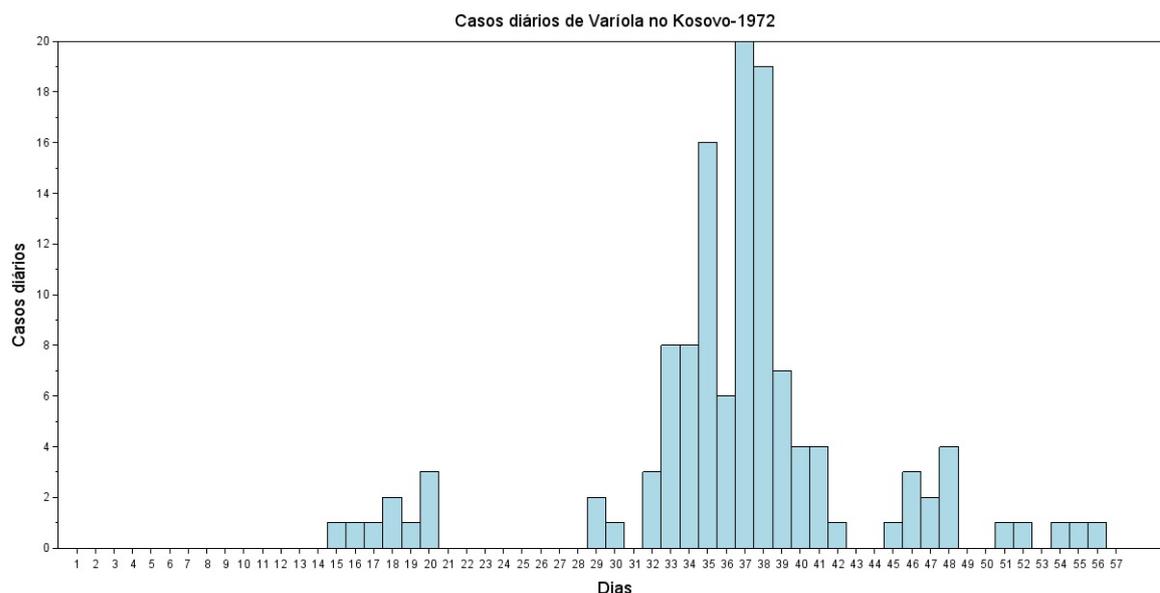


Figura 11: Incidência de casos de varíola em Kosovo - 1972.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Tabela 2: Intervenções impostas durante o surto de varíola em Kosovo, 1972.

Parâmetros	valor	Referência
χ_1	0,06 dias ⁻¹	(FRANZ, 1997)
χ_2	0,04 dias ⁻¹	(FENNER et al., 1988)
ε_1	0,975	(MACK et al., 1972), (MACK, 1972)
ε_2	0,30	(MACK et al., 1972), (FENNER et al., 1988)
ρ	0,975	(FENNER et al., 1988)
θ	0,95	(FENNER et al., 1988)

Nas simulações realizadas, utilizou-se o número de reprodução diário R_t do surto de Kosovo ao invés do R_0 médio, disponível em (CORI et al., 2013) (THOMPSON et al., 2019). Isto foi necessário devido ao aumento abrupto de casos após os 30 dias do surto. Com a utilização de um R_0 único (médio), o modelo não conseguiria reproduzir este salto no número de casos (comportamento evidenciado na Figura 13).

Na Figura 12, apresenta-se o R_t durante o surto, ilustrando o atraso potencialmente longo entre o primeiro caso e o momento em que é razoável começar a estimar o R do vírus (CORI et al., 2013) (THOMPSON et al., 2019). Os autores (CORI et al., 2013) (THOMPSON et al., 2019) pertencem ao *Imperial College* de Londres, e apresentam um código para estimar R : App EpiEstim. Esta ferramenta computacional vem sendo utilizada desde 2020 pelo grupo de pesquisadores GDISPEN da UFPel, onde este trabalho de mestrado foi desenvolvido.

Na Figura 13 apresenta-se uma simulação do quadro de casos acumulados da doença obtidos pelo (35), onde é feito uma comparação entre os resultados considerando um R_0 médio e considerando o R_t dos casos acumulados da doença.

Através da análise dos dados foi possível entender o comportamento da epidemia

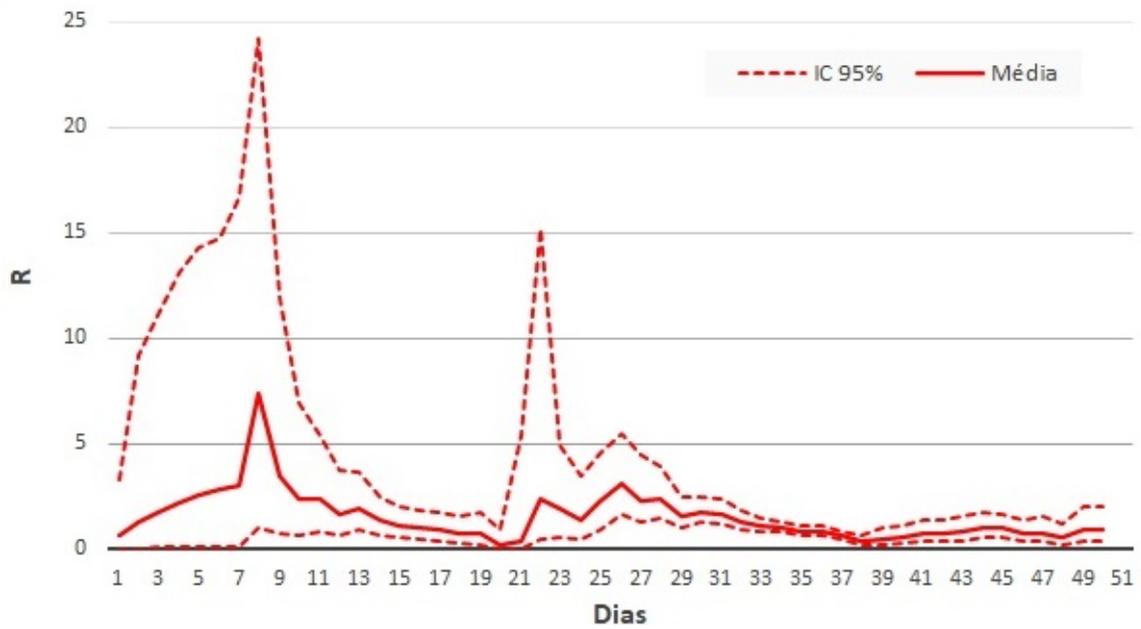


Figura 12: Número de reprodução da varíola em Kosovo - fevereiro a abril de 1972.
Fonte: Elaborado pelo autor.

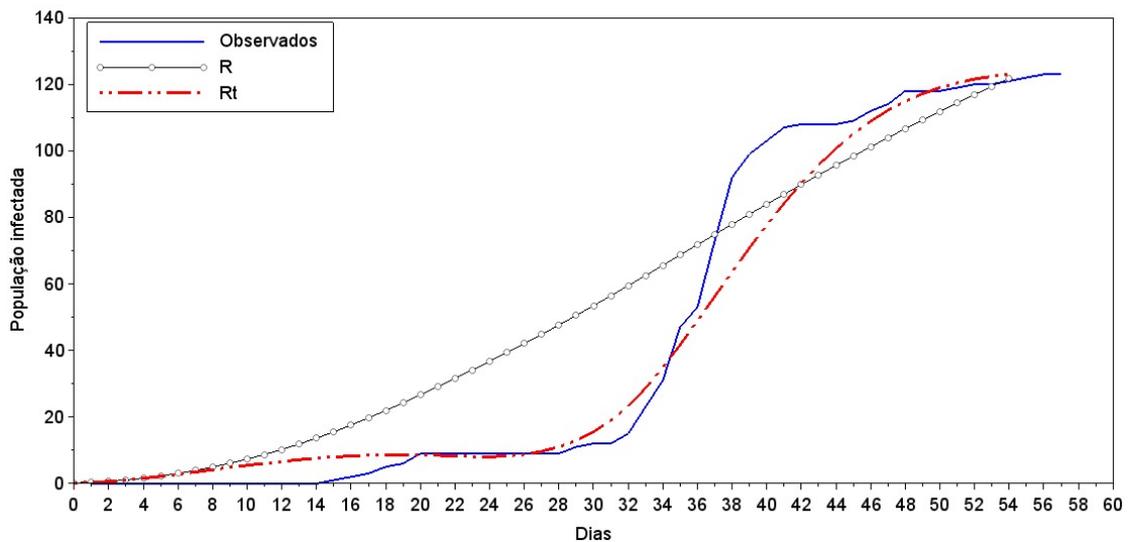


Figura 13: Dados observados no surto de Kosovo comparados com a simulação do modelo (35) para o R_0 médio e o R_t .
Fonte: Elaborado pelo autor.

de varíola na Província de Kosovo e validar o modelo SEIR utilizado.

3.2 Exercício Mataika

Nesta seção é feito um estudo sobre uma possível epidemia de varíola, onde o sistema (35) foi usado para simular o comportamento da doença em um determinado período de tempo. Em 16 de agosto de 2018, foi realizado o Exercício Mataika para testar a preparação para o pior cenário de um ataque de varíola que começa no Pacífico e é seguido por um ataque em maior escala em um país asiático altamente populoso. Este teste foi realizado para saber se o estoque de vacinas da OMS é suficiente para controlar uma possível epidemia de varíola no mundo, uma vez que a OMS tinha na época cerca de 34 milhões de doses, principalmente da segunda geração ACAM2000 (MACINTYRE et al., 2019).

Na Figura 14 apresenta-se a simulação do cenário hipotético descrito em (MACINTYRE et al., 2019) e utilizado como referência para estudar o caso onde não são tomadas medidas de contenção para a doença, tomando uma determinada parcela da população infectada. É possível perceber que quanto maior é a população inicial infecciosa, maior é o número de casos acumulados, chegando a atingir quase toda a população.

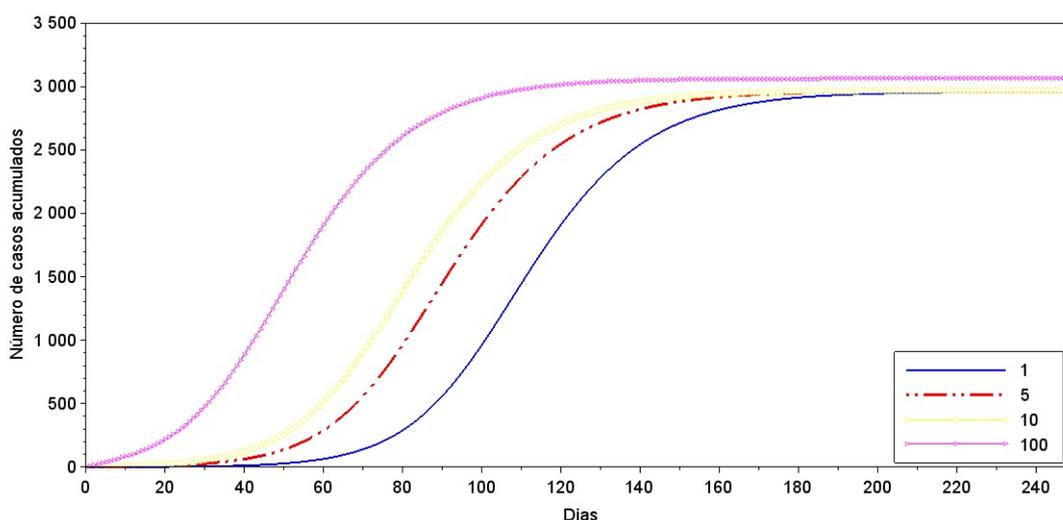


Figura 14: Curva epidêmica sem intervenção por número inicial de infectados do cenário hipotético.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Na Figura 15 apresenta-se uma simulação da influência do tempo de resposta para 90% da população vacinada, sendo usado a estratégia de vacinação em anel (Neste cenário foi considerado rastreamento de contato e vacinação como intervenção combinada, ou seja, foi realizada a vacinação em anel: são vacinadas pessoas que vivem e

que tiveram contato com paciente positivo na tentativa de bloquear a disseminação do vírus). É possível perceber que quanto mais tempo se demora a vacinar a população, maior é a incidência de infectados, ou seja, quanto mais pessoas sem imunidade estiverem expostas ao vírus mais catastrófica será a epidemia.

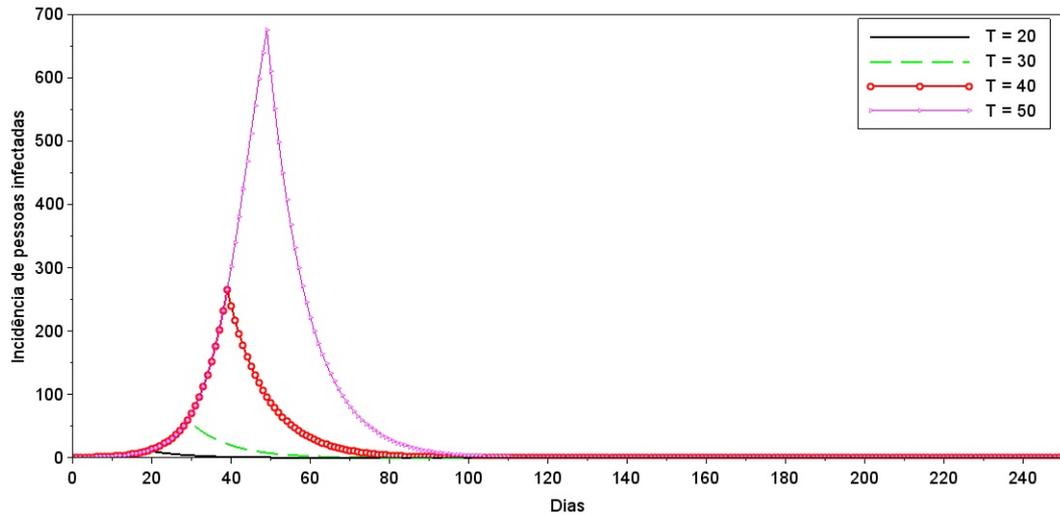


Figura 15: Influência do tempo para início da resposta, com 90% de vacinação.
Fonte: Elaborado pelo autor.

Na Figura 16 apresenta-se a simulação da população de recuperados, considerando as medidas de contenção adotadas. É possível observar que quanto mais tempo se demora a tomar as medidas de contenção, maior é o número de recuperados, isso acontece porque mais pessoas estão contraindo a doença. Por isso é importante a vacinação o mais rápido possível, de modo a diminuir o número de infecções.

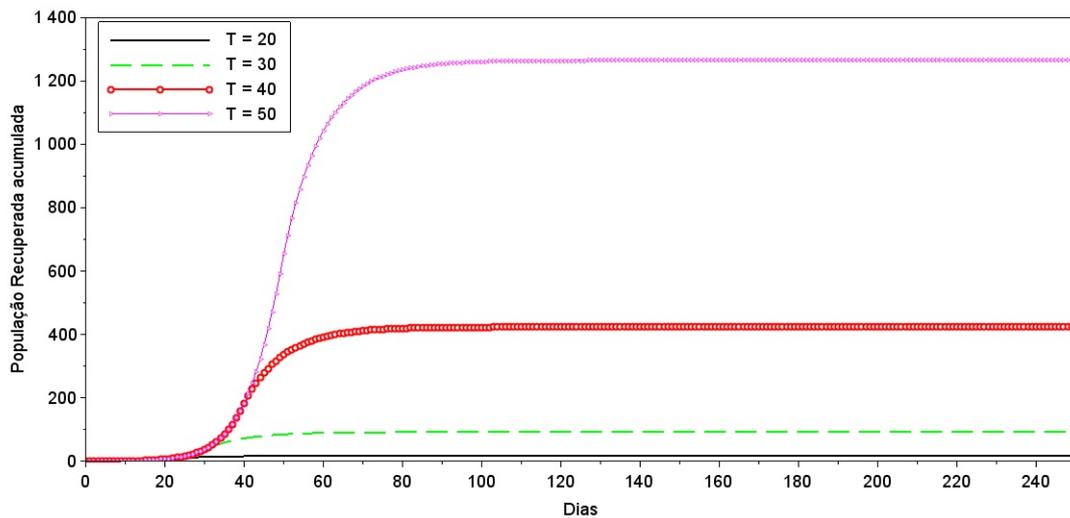


Figura 16: Recuperados após a tomada de medidas de contenção.
Fonte: Elaborado pelo autor.

4 RESULTADOS

Neste capítulo faz-se uma breve análise de sensibilidade dos parâmetros vacinação e quarentena utilizados no modelo. Por último, a simulação de casos do surto de mpox no Brasil em 2022 é apresentada.

4.1 Análise Quantitativa do Modelo

Na sequência são apresentados os resultados de 6 cenários hipotéticos, variando os parâmetros de quarentena e vacinação da população. Para esta análise foram simulados os dados usando uma situação hipotética com uma população de 3000 habitantes em um tempo de 150 dias, onde foi feita a análise dos infectados e recuperados.

- Cenário 1: sem medidas de vacinação ou quarentena;
- Cenário 2 (suscetível x quarentena): 0%, 30% e 60% da população é colocada em quarentena;
- Cenário 3 (suscetível x vacinação): 0%, 30% e 60% da população é vacinada;
- Cenário 4 (infectados x vacinação): 0%, 30% e 60% da população é vacinada;
- Cenário 5 (recuperados x vacinados): 0%, 30% e 60% da população é vacinada;
- Cenário 6 (recuperados e quarentena): 0%, 30% e 60% da população é colocada em quarentena;

Na Figura 17, apresenta-se um cenário (Cenário 1) sem a tomada de medidas de vacinação ou quarentena. É possível observar que sem a tomada de medidas de contenção toda a população suscetível, é exposta e infectada.

Na Figura 18, apresenta-se o cenário 2, em que a população é colocada em quarentena. É possível observar que à medida que aumenta a população em quarentena, mais demorado é o tempo em que a população fica suscetível. Isso se dá porque como

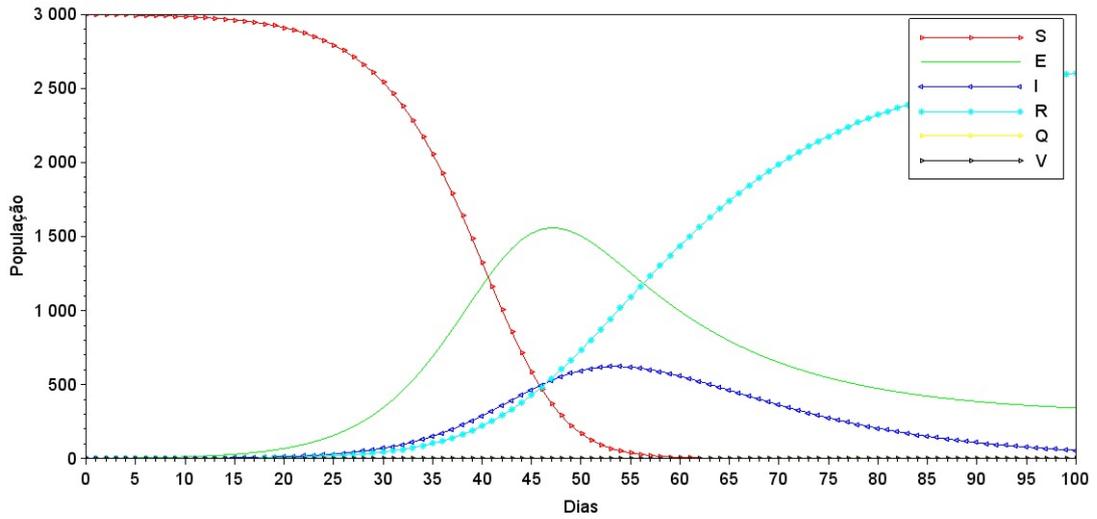


Figura 17: Cenário 1: sem tomada de medidas de vacinação ou quarentena.
 Fonte: Elaborado pelo autor.

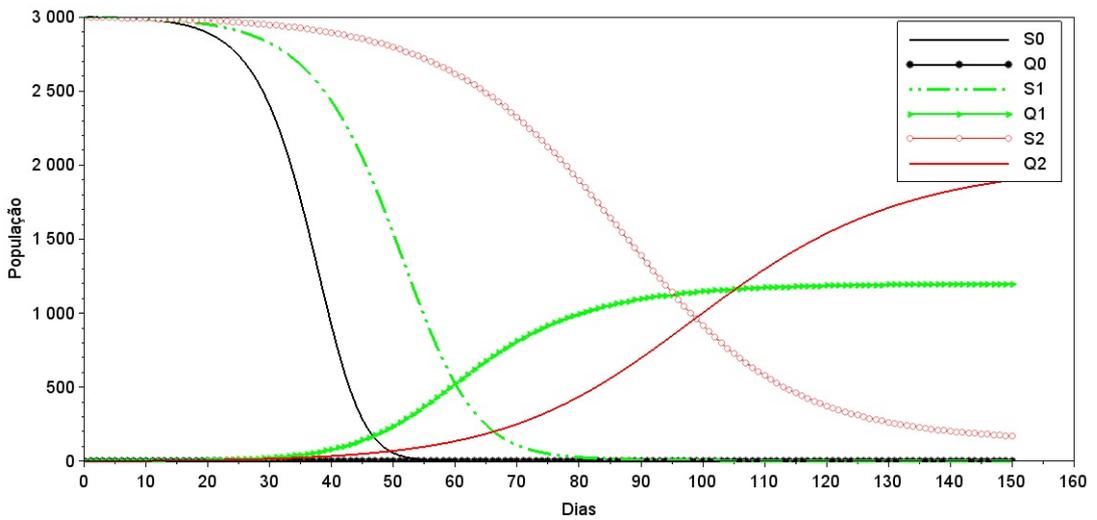


Figura 18: Cenário 2: população é colocada em quarentena.
 Fonte: Elaborado pelo autor.

está havendo o monitoramento, então quem está infectado é colocado em quarentena, e quem não está, volta à população suscetível novamente.

Na Figura 19, apresenta-se o cenário 3, onde a população é vacinada. É possível observar que à medida que aumenta o percentual da população vacinada, maior é o número de suscetíveis.

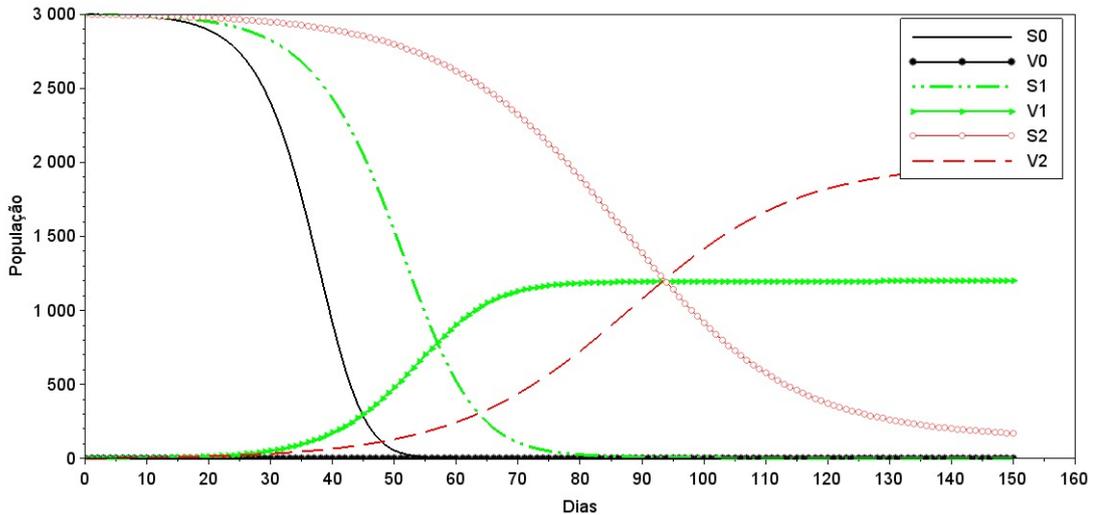


Figura 19: Cenário 3: população é vacinada.
Fonte: Elaborado pelo autor.

Na Figura 20, apresenta-se um cenário (Cenário 4) em que a vacinação inicial é zero. Logo depois vacina-se 30% e 60% da população. É possível observar que a população de infectados vai caindo à medida em que a população vacinada aumenta.

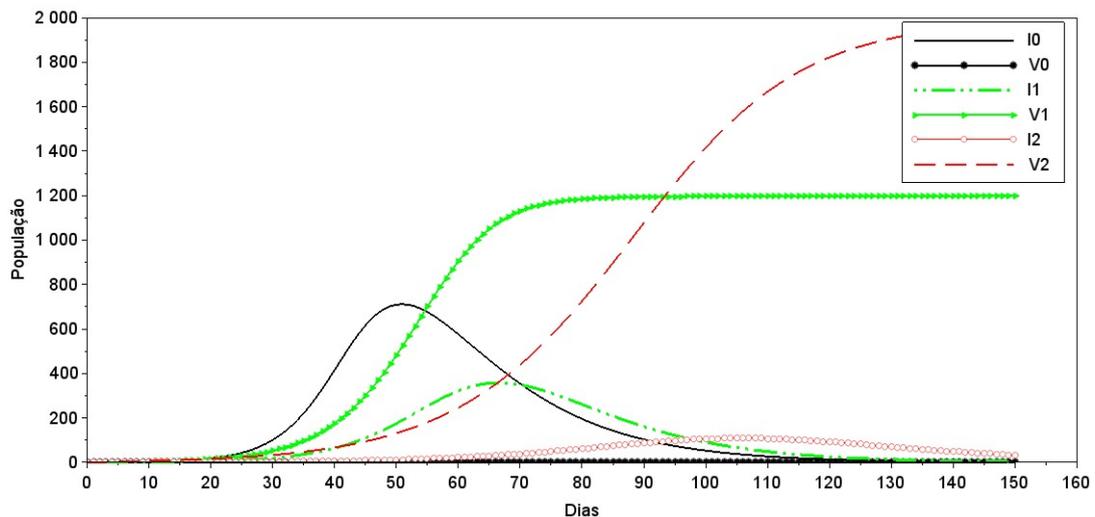


Figura 20: Cenário 4: vacinação inicial é zero, e depois aumenta gradativamente.
Fonte: Elaborado pelo autor.

Na Figura 21, apresenta-se o Cenário 5, com recuperados e vacinados. É possível observar que à medida que aumenta o percentual de população vacinada, o número

de recuperados cai significativamente. Isso se dá porque à medida que se vacina a população menos pessoas irão contrair a doença (pois para o estudo deste modelo, não se considera a reinfeção).

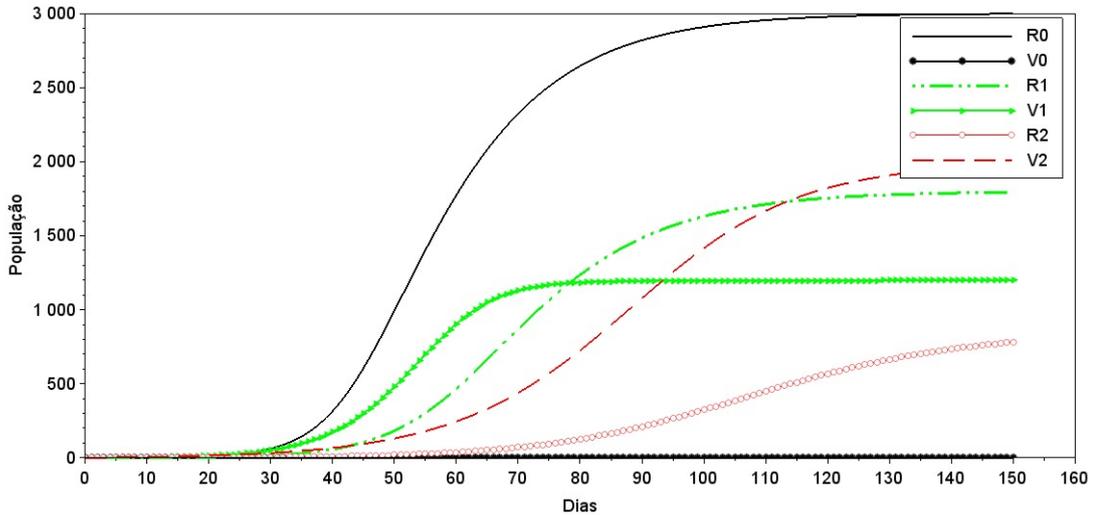


Figura 21: Cenário 5: com recuperados e vacinados.
Fonte: Elaborado pelo autor.

Na Figura 22, tem-se um cenário com recuperados e quarentena, o comportamento é similar ao estudado na Figura 21, pois à medida que uma pessoa infectada é colocada em quarentena essa mesma não transmite mais o vírus, fazendo com que o número de recuperados diminua.

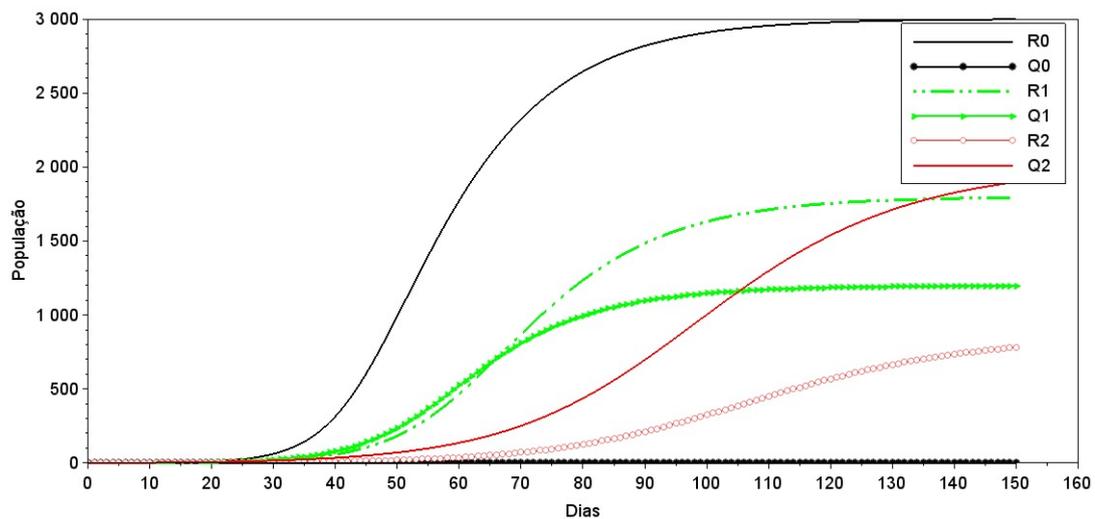


Figura 22: Cenário 6: com recuperados e quarentena.
Fonte: Elaborado pelo autor.

4.2 Mpox no Brasil

Nesta seção, realiza-se um estudo de caso do comportamento referente a um surto de mpox no Brasil, iniciado em 2022. Para isto foram coletados dados referentes ao surto que aconteceu no país como um todo, na cidade de São Paulo, no Distrito Federal e no Rio Grande do Sul. Todos os dados foram coletados diretamente nas respectivas páginas da Secretaria Estadual de Saúde de cada estado (SAÚDE, 2022). Na sequência, simulações com o sistema de EDO's (35) são apresentadas, utilizando os dados coletados.

No dia 23 de julho de 2022, a OMS declarou o surto de mpox como emergência de saúde pública, isso devido aos mais de 16 mil casos notificados em 75 países. O surto de mpox matou 140 pessoas em 111 países, e em maio de 2023 a OMS declarou o fim da emergência de saúde (Agência Brasil, 2023) (OPAS, 2023).

Segundo o Ministério da Saúde, o Brasil teve seu primeiro caso de mpox confirmado no dia 09 de junho de 2022 e o caso foi registrado no estado de São Paulo pelo laboratório de referência Adolfo Lutz, após análise metagenômica (Ministério da Saúde, 2022). A partir desta data inúmeros casos foram registrados em diversas áreas do país. Apesar da maioria dos casos não serem graves a situação do surto causou preocupação nas autoridades de saúde pública.

O Distrito Federal confirmou o primeiro caso no dia 22 de julho. No Rio Grande do Sul, segundo a Secretaria Estadual de Saúde, o estado registrou seu primeiro caso de infecção por mpox no dia 12 de junho de 2022 e o resultado foi confirmado laboratorialmente por RT-PCR pelo Instituto Adolfo Lutz de São Paulo (IAL/SP). A cidade São Paulo registrou o primeiro caso de mpox em um bebê, e, de acordo com a SMS (Secretaria Municipal de Saúde), o bebê, do sexo masculino, tinha 10 meses e começou a apresentar os sintomas da mpox em 11 de agosto de 2022.

No Brasil, até 13 de março, foram notificados 50.803 casos suspeitos para a mpox. Destes, 10.301 casos (20,3%) foram confirmados, 339 (0,7%) classificados como prováveis, 3.665 (7,2%) suspeitos e 36.498 (71,8%) descartados. Desde setembro de 2022, porém, o número de casos no país está em declínio considerável. A curva epidêmica dos casos confirmados e prováveis teve sua maior frequência registrada no período de 17 de julho a 20 de agosto de 2022 (G1, 2023).

Para entender o comportamento do surto de mpox no Brasil foi feito um estudo dos casos confirmados de mpox até a data de 31/01/2023. Após, simulações com o modelo SEIR foram realizadas (sistema de equações (35)) e os resultados comparados com os dados disponíveis.

4.2.1 Dados da mpox no Brasil

Os gráficos apresentados nas Fig. 23 a 26, mostram o comportamento do surto de mpox no Brasil, na cidade de São Paulo, no Distrito Federal e no Rio Grande do Sul, respectivamente. Os dados foram tabelados considerando que o primeiro caso registrado aconteceu na data de publicação dos boletins informativos pelos órgãos de saúde. Na Tabela 3 apresentam-se os casos diários de mpox em cada região estudada.

Tabela 3: Dados de casos de mpox dos boletins informativos em 31/01/2023.

Região	Data	Nº de Casos	Casos diários
Brasil	31/01/2023	10745	13
São Paulo	31/01/2023	2944	9
Distrito Federal	31/01/2023	350	2
Rio Grande do Sul	31/01/2023	327	0

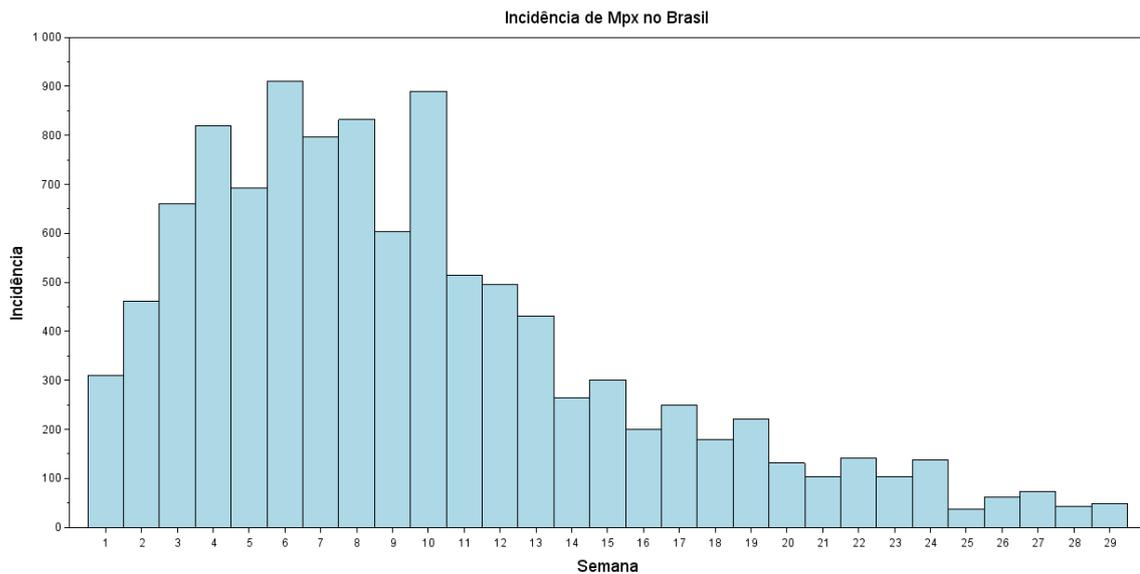


Figura 23: Casos diários de mpox no Brasil até 31/01/2023.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Através dos dados apresentados, verifica-se que a curva de casos acumulados confirmados teve o seu pico e seguiu em queda, mantendo uma incidência de casos pequena no final de janeiro de 2023. Vale ressaltar que esse resultado se dá porque pessoas que testam positivo entram em isolamento.

Na sequência são apresentadas as simulações com o modelo SEIR, uma vez que já se validou o modelo através do surto ocorrido em Kosovo e do exercício Mataika.

4.2.2 Simulação do surto de MPox no Brasil

O sistema de EDO's (35) foi usado para modelar o surto de mpox que aconteceu no Brasil em 2022. As simulações foram realizadas de modo a estudar a curva de in-

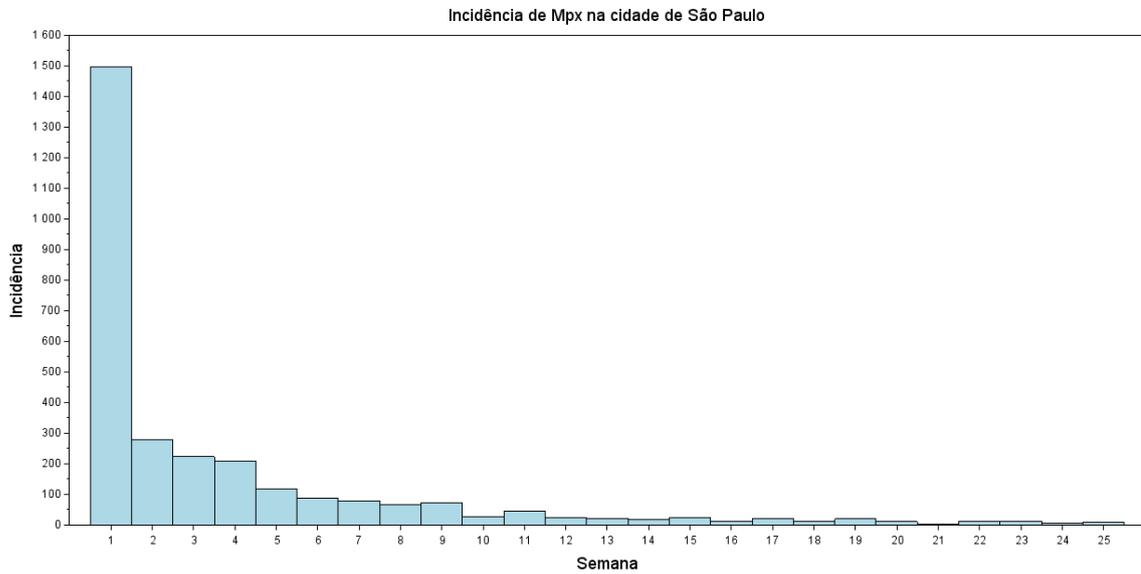


Figura 24: Casos diários de mpx na cidade de São Paulo até 31/01/2023.
 Fonte: Elaborado pelo autor.

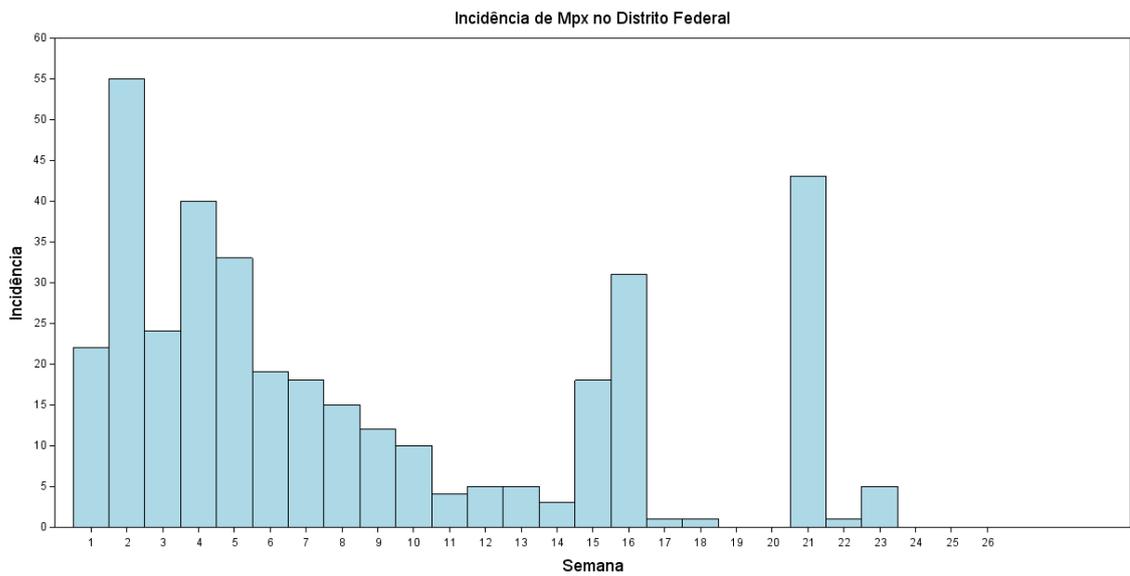


Figura 25: Casos diários de mpx no Distrito Federal até 31/01/2023.
 Fonte: Elaborado pelo autor.

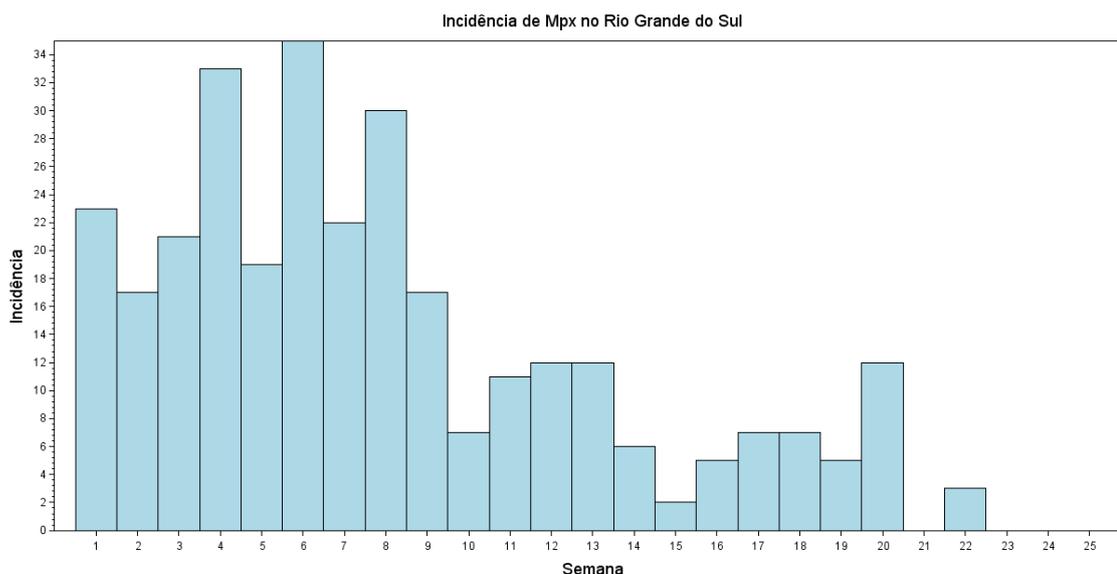


Figura 26: Casos diários de mpx no Rio Grande do Sul até 31/01/2023.

Fonte: Elaborado pelo autor.

fectados, sendo possível compreender o comportamento do surto, possibilitando uma possível tomada de decisão para o controle deste, como foi feito em Kosovo. Uma das medidas possíveis é a vacinação da população, e neste trabalho foi simulado um cenário onde o percentual da população vacinada será mais eficaz para controlar o surto. Cabe ressaltar que no final de janeiro de 2023 a vacina ainda não estava disponível para a população.

Nas tabelas seguintes são mostrados todos os parâmetros adotados nas simulações. A população total de cada região foi definida pela estimativa do IBGE para o ano de 2022. Utilizou-se um R_0 médio nas simulações. Para as simulações a nível nacional, o dado de R_t semanal também foi testado, uma vez que a divulgação dos dados no país não ocorreu de forma contínua (nos 7 dias da semana), o que prejudica a utilização do dado com R_t diário. Devido a este motivo foram realizadas simulações com R_0 médio e R_t semanal afim de comparação (ver Anexo A). Nas Tabelas 4 e 5 apresentam-se os parâmetros adotados nas simulações.

Tabela 4: Parâmetros populacionais para a análise de mpx.

Região	População	Suscetíveis	Letalidade(%)	Estimativa R_0
Brasil (2022)	215.000.000	N - I_0	0,1	1,6
Rio Grande do Sul (2022)	11.000.000	N - I_0	0,1	1,4
Distrito Federal (2022)	3.094.325	N - I_0	0,1	1,4
São Paulo (2022)	12.396.372	N - I_0	0,1	1,2

Na Figura 27, é possível perceber a evolução de casos no Brasil desde o primeiro dia de notificação até a data de 31/01/2023. Percebe-se que a curva dos dados simulados tem a mesma característica da curva que representa os dados reais.

Tabela 5: Parâmetros adotados no modelo para a simulação do surto de mpox.

Parâmetros	Significado	valor
χ_1	(Período de quarentena do contato) ⁻¹	0
χ_2	(Período de quarentena infeccioso) ⁻¹	0
ε_1	Eficácia da vacina quando não infectado	0,0
ε_2	Eficácia da vacina quando infectado e latente	0,0
ρ	Proporção de contatos encontrados	0,02
θ	Proporção de indivíduos infecciosos de E_n em quarentena	0,0
α	Período de latência	0,0685
γ	Período infeccioso	0,116

Os parâmetros foram ajustados de tal maneira que o modelo possa representar o que aconteceu na realidade. Como no Brasil, no final de janeiro de 2023, ainda não havia medidas de imposição de quarentena e vacinação para os casos de mpox, usou-se inicialmente o valor 0 ("zero") para os parâmetros ε_1 e ε_2 . A proporção de contatos encontrados por meio do rastreamento de contatos utilizada foi $\rho = 0,02$ e a proporção de indivíduos infecciosos de E_n que estão em quarentena foi $\theta = 0$. Estes parâmetros serão usados para a simulação de casos do Distrito Federal, da cidade de São Paulo e do Rio Grande do Sul. A proporção de contatos infectados é definida como $\varphi = 0,05$, a taxa de ocorrência de contatos potencialmente infectados é representada por β que pode ser calculada através da seguinte expressão:

$$\beta = \frac{R_0 \times \gamma}{\varphi \times N} \quad (36)$$

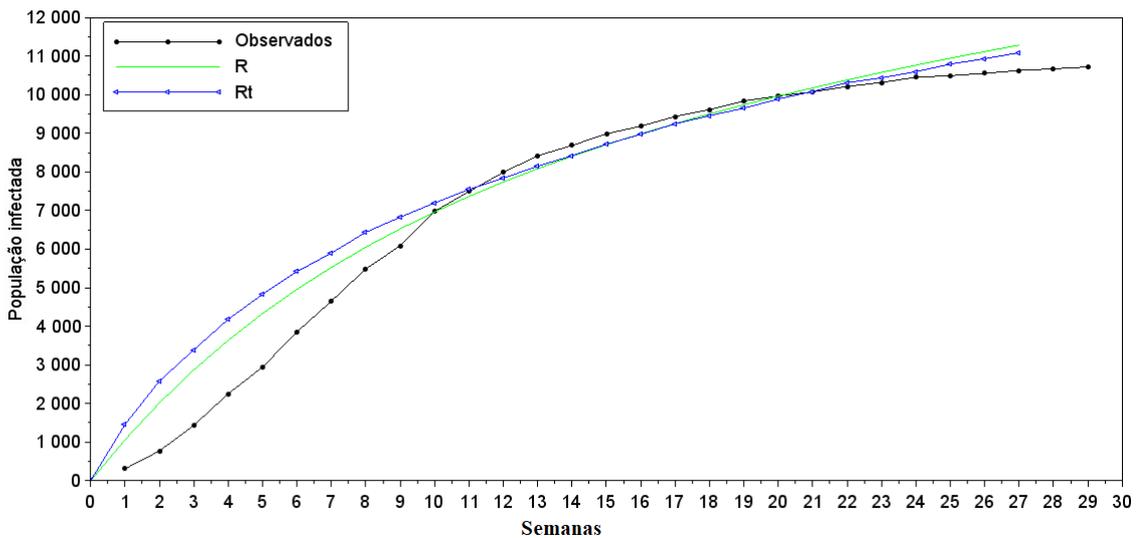


Figura 27: Simulação dos casos de mpox no Brasil até 31/01/2023.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Na Figura 28 é possível observar a evolução dos casos de mpox da cidade de São Paulo. Observa-se que como há uma maior concentração de casos em divulgação

diária, a simulação se tornou mais realística quando comparada com as outras regiões simuladas (a secretaria de saúde divulgou os dados com mais frequência desde o início do surto). É possível perceber que a curva dos dados simulados tem um bom ajuste aos dados reais. A curva considerando um R_t semanal não teve um bom ajuste, provavelmente devido a algum erro na geração do dado.

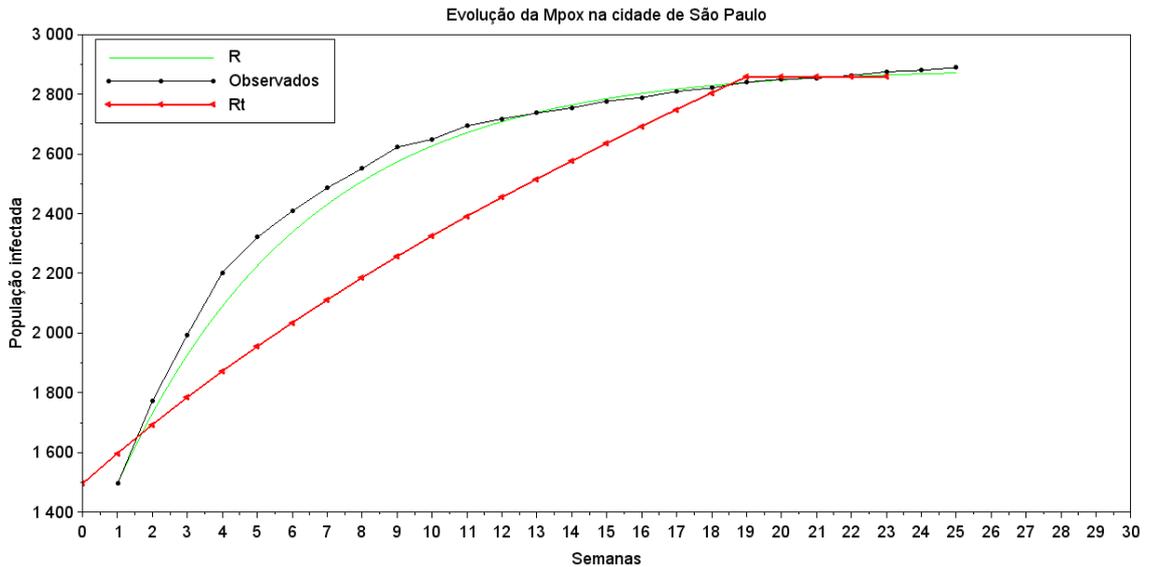


Figura 28: Simulação dos casos de mpox na cidade de São Paulo até 31/01/2023.
Fonte: Elaborado pelo autor.

A Figura 29 mostra a evolução de casos no Distrito Federal. É possível perceber que os dados simulados se assemelham aos casos reais, para ambos os R utilizados. Como a Secretaria de Saúde não divulgou o boletim todos os dias a simulação foi feita com um tempo menor que o tempo para a simulação feita com os dados do Brasil como um todo.

Na Figura 30 é possível observar a simulação de como aconteceu o surto no Rio Grande do Sul. Nesta simulação é possível perceber que a curva de casos simulados apresenta um comportamento próximo ao da curva de casos observados, para ambos os R , o que pode ser devido aos dados coletados serem semanais. Cabe lembrar que nas simulações se utilizou um R_0 médio, e um R_t semanal, onde é possível observar a comparação.

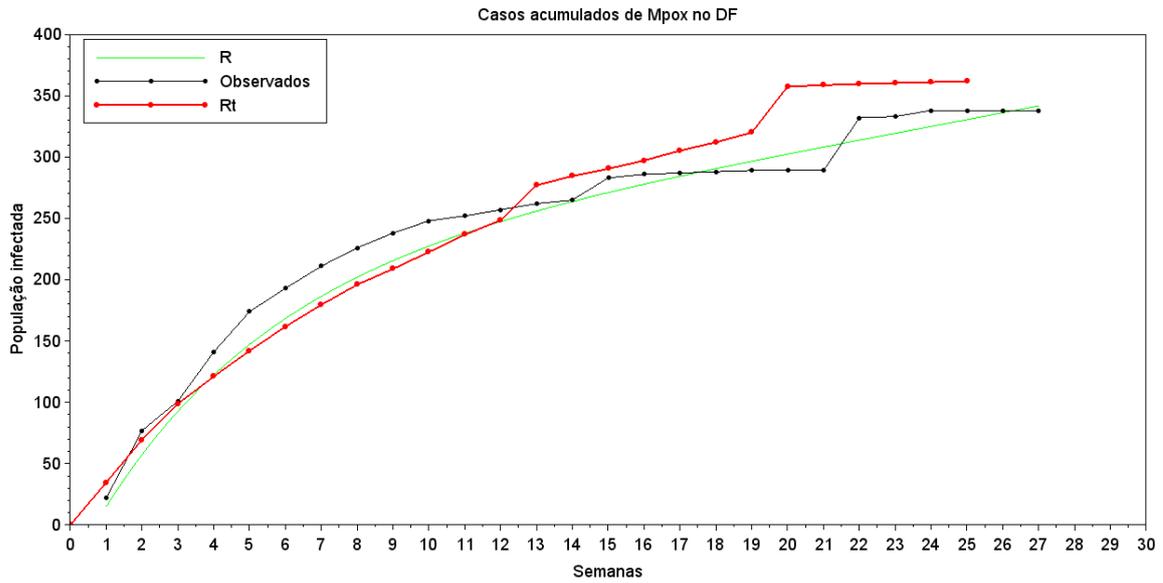


Figura 29: Simulação dos casos de mpox no Distrito Federal até 31/01/2023.
 Fonte: Elaborado pelo autor.

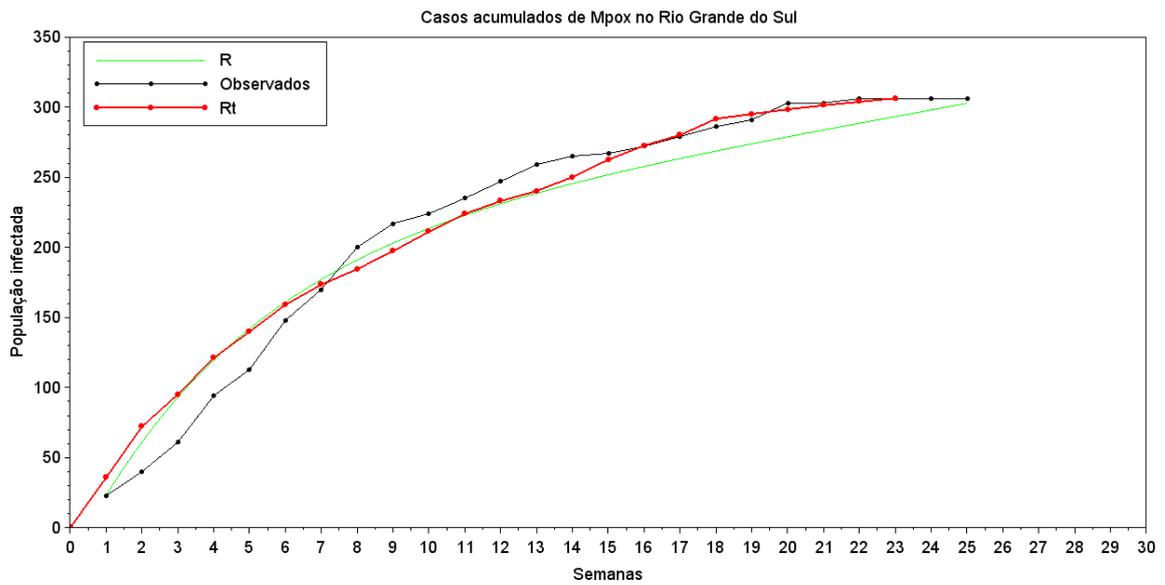


Figura 30: Simulação dos casos de mpox no Rio Grande do Sul até 31/01/2023.
 Fonte: Elaborado pelo autor.

5 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS

Este trabalho se fundamentou no surto de varíola que aconteceu na província de Kosovo. Primeiro foi feito um estudo bibliográfico sobre o assunto, onde se estudou os modelos epidemiológicos e sua importância para a modelagem matemática. Em seguida foi feita uma análise do modelo (35), encontrando seus pontos de equilíbrio e realizando a análise de estabilidade.

Em seguida foi feita a validação do modelo estudado, através da simulação do surto epidêmico que aconteceu em Kosovo, assim como do exercício Mataika em que foi simulado o tempo de resposta em um cenário com população vacinada, onde foi possível obter resultados semelhantes aos registrados. Assim foi possível dar continuidade aos estudos. A análise dos dados foram obtidos através das referências. Com esses dados, foi possível realizar uma análise quantitativa do modelo, essa análise se deu através da simulação de cenários com vacinação e quarentena, em que foi possível observar um excelente comportamento para os dados analisados.

E conseqüentemente foi feito o estudo do atual surto de mpox no Brasil, em que estudou-se a curva de casos para o Brasil, Rio Grande do Sul, Distrito Federal e a cidade de São Paulo, Nesse estudo foram gerados curvas que comparou-se os casos reais em relação aos dados simulados com um R_t semanal e um R_0 médio, onde mostrou-se que é possível descrever o comportamento do surto epidêmico de mpox que aconteceu no país em 2022 através do modelo (35).

Neste trabalho foi feita uma simulação com vacinação e quarentena, onde foi possível observar que não é necessário vacinar ou colocar toda a população em quarentena. Verificou-se que com um percentual de 60% da população vacinada já é possível conter uma eventual epidemia de mpox no Brasil. Vale ressaltar que o tema é de suma importância para a sociedade em geral, e é um tema que abre um leque de opções para área acadêmica, firmando assim o compromisso de continuar estudando e aperfeiçoando a pesquisa.

É importante lembrar que a vacinação contra a mpox é muito importante, pois só assim é possível extinguir a doença, lembrando que não existe ainda comprovação científica de que a vacina contra a varíola ofereça total proteção. Por este motivo,

além de simular a curva de infectados o modelo também simulou um cenário ideal de imunização para que a curva de infectados caísse.

REFERÊNCIAS

Agência Brasil. **OMS declara fim da emergência em saúde por mpox.** Disponível em <https://agenciabrasil.ebc.com.br/saude/noticia/2023-05/oms-declara-fim-da-emergencia-em-saude-por-mpox>.

ANVISA. **NOTA TÉCNICA GVIMS/GGTES/ANVISA Nº 03/2020.** Disponível em <https://www.gov.br/anvisa/pt-br/centraisdeconteudo/publicacoes/servicosdesaude/notas-tecnicas/2020/nota-tecnica-gvims-ggtes-anvisa-n-03-2020.pdf/view>.

ANVISA. **NOTA TÉCNICA Nº 81/2022/SEI/COVIG/GGPAF/DIRE5/ANVISA.** Disponível em <https://www.gov.br/anvisa/pt-br/assuntos/monkeypox>.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática:** uma nova estratégia. São Paulo: Editora Contexto, 2002.

BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno.** Rio de Janeiro: LTC, 2010.

BRAUER, F.; CHAVEZ, C. C. **Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology.** New York: Springer, 2010.

BRAUER, F.; DRIESSCHE, P.; WU, J. **Mathematical Epidemiology.** New York: Springer, 2008.

CORI, A. **EpiEstim:** a demonstration. Disponível em <https://cran.r-project.org/web/packages/EpiEstim/vignettes/demo.html>.

CORI, A.; FERGUSON, N. M.; FRASER, C.; CAUCHEMEZ, S. A New Framework and Software to Estimate Time-Varying Reproduction Numbers During Epidemics. **American Journal of Epidemiology**, v.178, n.9, p.1505–1512, 2013.

CÂMARA, F. P. **Glossário de Epidemiologia.** Disponível em <http://www.abpbrasil.org.br> <https://encurtador.com.br/yMSU7>.

FENNER, F.; HENDERSON, D. A.; ARITA, I.; JEZEK, Z.; LADNYI, I. **Smallpox and its Eradication**. Geneva: World Health Organization, 1988.

FRANCO, A. F. **Métodos Numéricos Aplicados à Engenharia**: Introdução aos métodos de diferença finitas e de volumes finitos. Curitiba: UTFPR, 2011.

FRANZ, D. R. Reconhecimento clínico e manejo de pacientes expostos a agentes de guerra biológica. **The Journal of Infectious Diseases**, v.278, n.5, p.399–411, 1997.

G1. **Cidade de SP começa a vacinar nesta quarta-feira contra mpox adultos com mais risco de desenvolver a doença**. Disponível em <https://g1.globo.com/sp/sao-paulo/noticia/2023/03/22/cidade-de-sp-comeca-a-vacinar-nesta-quarta-feira-contram-pox-adultos-com-mais-risco-de-desenvolver-a-doenca.ghtml> .

GIESECKE, J. **Modern Infectious Disease Epidemiology**. Florida: CRC Press, 2017.

HETHCOTE, H. W. The Mathematics of Infectious Diseases. **Mathematical Biosciences**, v.42, n.4, p.599–653, 2000.

KEELING, M. J.; ROHANI, P. **Modeling Infectious Diseases in Humans and Animals**. New Jersey: Princeton University Press, 2007. 408p.

LIMA, J. P. O. Sistemas Complexos aplicado a modelos epidemiológicos. **Physicae Organum**, v.7, n.1, p.59–71, 2021.

MACIEL, E. L. N. **A Epidemiologia no enfrentamento da pandemia de coronavírus - parte 7**. Disponível em <https://coronavirus.ufes.br/conteudo/epidemiologia-no-enfrentamento-da-pandemia-de-coronavirus-parte-7>.

MACINTYRE, C. R.; COSTANTINO, V.; MOHANTY, B.; NAND, D.; KUNASEKARAN, M. P. Epidemic size, duration and vaccine stockpiling following a largescale attack with smallpox. **Global Biosecurity**, v.1, n.1, p.1–8, 2019.

MACK, T. M. Smallpox in Europe, 1950–1971. **The Journal of Infectious Diseases**, v.125, n.2, p.161–169, 1972.

MACK, T. M.; THOMAS, D. B.; ALI, A.; KHAN, M. M. Epidemiology of smallpox in west Pakistan: I. Acquired Immunity and the distribution of disease. **American Journal of Epidemiology**, v.95, n.2, p.157–168, 1972.

Ministério da Saúde. **Brasil confirma primeiro caso de monkeypox**. Disponível em <https://www.gov.br/saude/pt-br/canais-de-atendimento/sala-de-imprensa/notas-a-imprensa/2022/brasil-confirma-primeiro-caso-de-monkeypox>.

MURRAY, J. D. “**Mathematical Biology**”, in **Biomathematics Texts**, vol. 19. Berlin: Springer-Verlang, 1989.

OLIVEIRA, I. M. **Modelos epidemiológicos SEIR**. 2008. Dissertação de mestrado — Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, Porto/Portugal.

OPAS. **Organização Mundial da Saúde declara fim da Emergência de Saúde Pública de Importância Internacional**. Disponível em <https://www.paho.org/pt/noticias/11-5-2023-mpox-organizacao-mundial-da-saude-declara-fim-da-emergencia-saude-publica>.

Organização Pan-Americana da Saúde. **Módulos de Princípios de Epidemiologia para o Controle de Enfermidades**. Disponível em https://bvsmis.saude.gov.br/bvs/publicacoes/modulo_principios_epidemiologia_2.pdf.

SABETI, M. **Modelo Epidêmico Discreto SIR com Estrutura Etária e Aplicação de Vacinação em Pulsos e Constante**. 2011. Tese de Doutorado — Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, Recife/PE.

SAÚDE, M. da. **SITUAÇÃO EPIDEMIOLÓGICA NO BRASIL**.
file:///C:/Users/marco/Downloads/300123CARD

THOMPSON, R. N.; STOCKWIN, J. E.; GAALLEN, R. D. van; POLONSKY, J. A.; AL et. Improved inference of time-varying reproduction numbers during infectious disease outbreaks. **Epidemics**, v.29, p.100356, 2019.

WALDMAN, E. A.; ROSA, T. E. C. **Vigilância em Saúde Pública. Série Saúde e Cidadania**. São Paulo: Editora Fundação Peirópolis Ltda, 1998.

ANEXO A TABELA DE R_0

Os dados de R_0 foram gerados diretamente no app EpiEstim, do *Imperial College London*, disponível no site <https://shiny.dide.imperial.ac.uk/epiestim/>, e para tanto foram utilizadas as incidências de casos registrados durante o surto de mpox no Brasil até 31/01/2023. A descrição da metodologia, bem como o funcionamento do app, são descritos no site (CORI, 2021) e nos artigos (CORI et al., 2013) (THOMPSON et al., 2019).

Devido a não divulgação diária de dados foi necessário adaptar as planilhas de incidência. Assim uma média semanal dos dados foi realizada. Para gerar o R_0 foram utilizadas janelas de período 1 (equivalente a semanal e utilizada na comparação numérica na sessão dos resultados), 4 (equivalente ao mês) e 7 (equivalente a 7 semanas). Por exemplo, para a geração do R_0 , usando a janela de período 4, o programa desconsidera o primeiro dado (ou aqueles iniciais onde se tem uma instabilidade maior, com vários períodos sem dados, por exemplo) e depois faz a média de 4 em 4 dados. Quanto maior a janela, mais homogênea é a curva, levando a perda de informação (motivo pelo qual a janela de tamanho 1 foi utilizada nas simulações, ou seja, R_t semanal). Na sequência são apresentados os gráficos que representam as janelas, gerados no app EpiEstim.

As tabelas (6), (7) e (8) representam essas janelas no Brasil, respectivamente, já as tabelas (9), (10), (12) e (11) representam as janelas para a cidade de São Paulo, as tabelas (13), (15) e (14) representam as janelas no Distrito Federal e as tabelas (16), (18) e (17) para o Rio Grande do Sul.

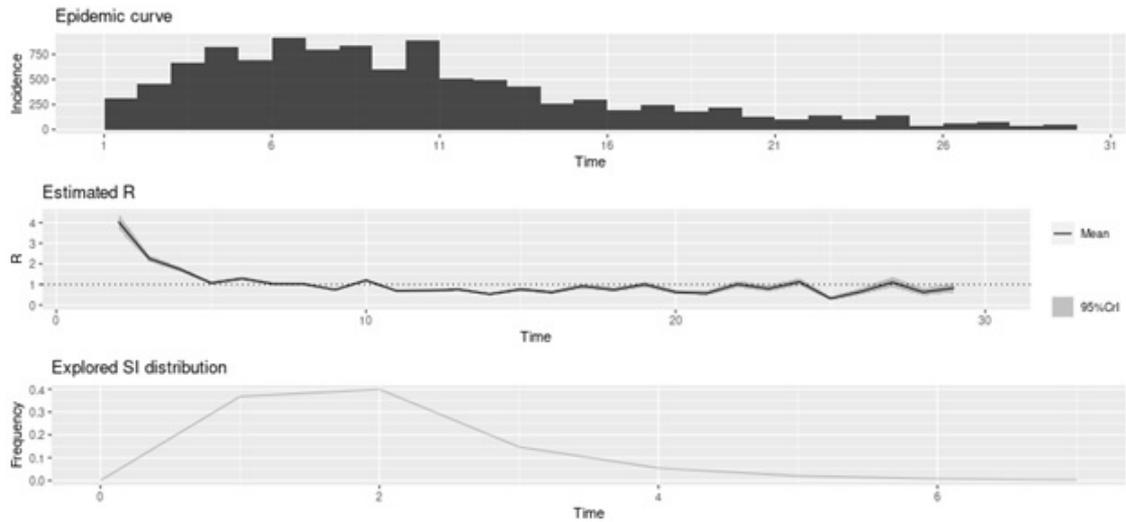


Figura 31: R_0 com janela 1 para o Brasil.
Fonte: App EpiEstim.

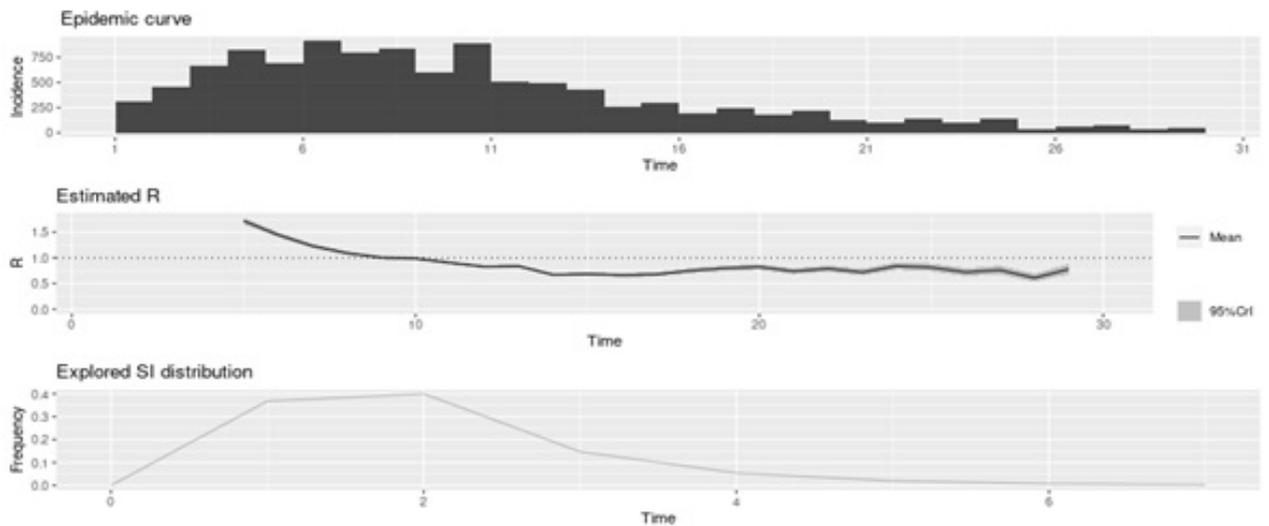


Figura 32: R_0 com janela 4 para o Brasil.
Fonte: App EpiEstim.

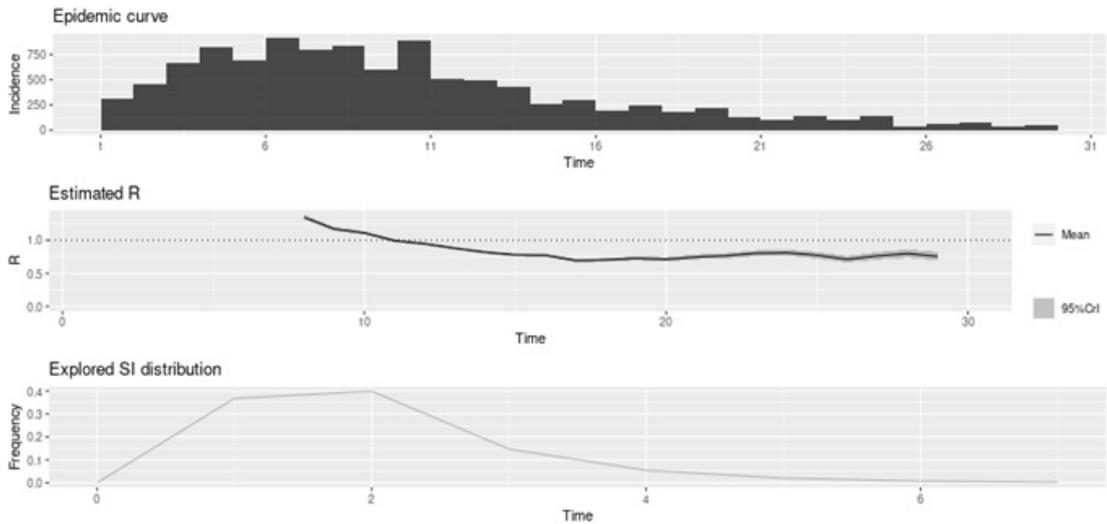


Figura 33: R_0 com janela 7 para o Brasil.
Fonte: App EpiEstim.

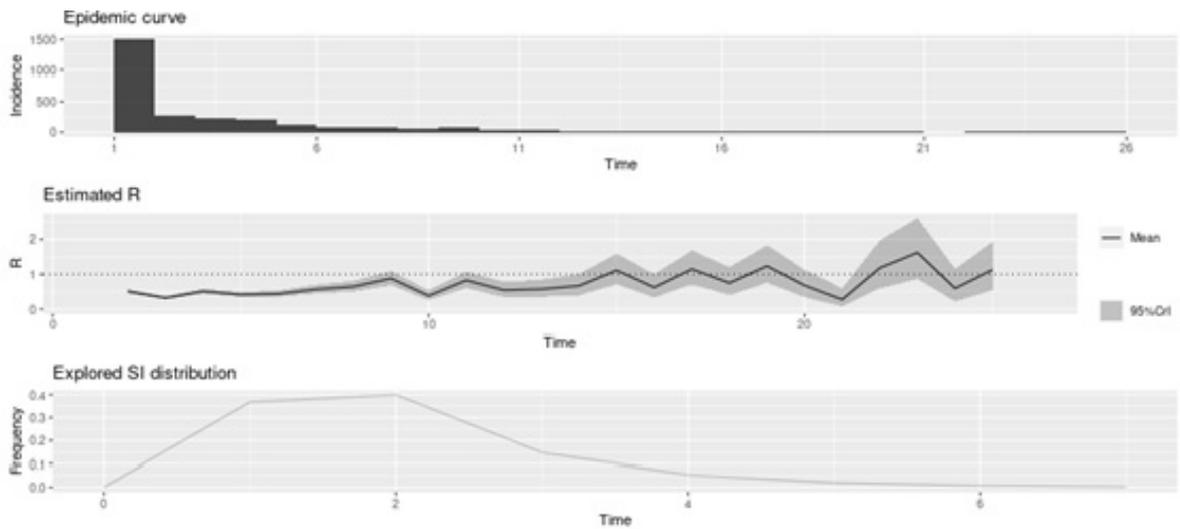


Figura 34: R_0 com janela 1 para a cidade de São Paulo.
Fonte: App EpiEstim.

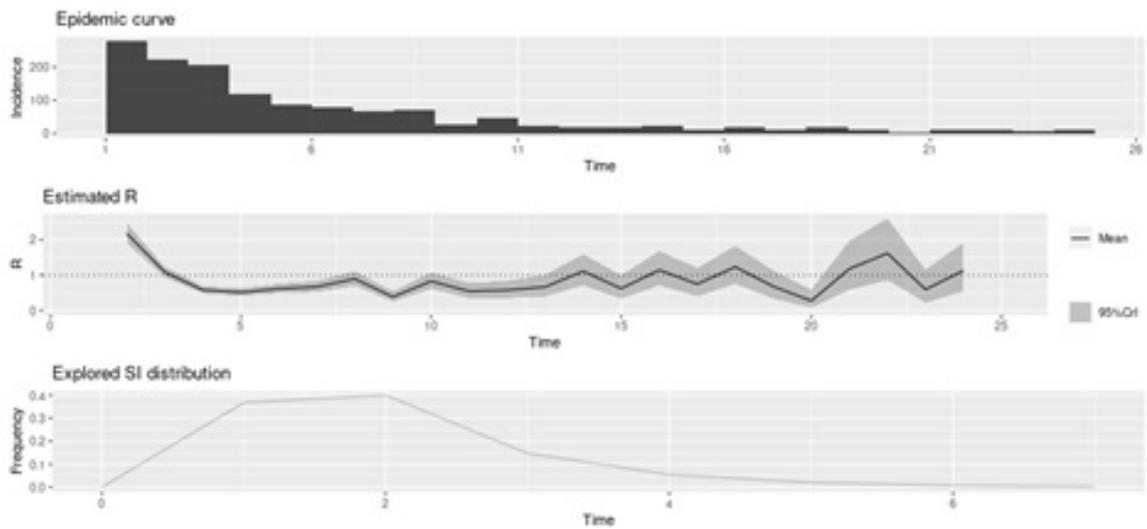


Figura 35: R_0 com janela 1 desconsiderando o maior valor para a cidade de São Paulo.
Fonte: App EpiEstim.

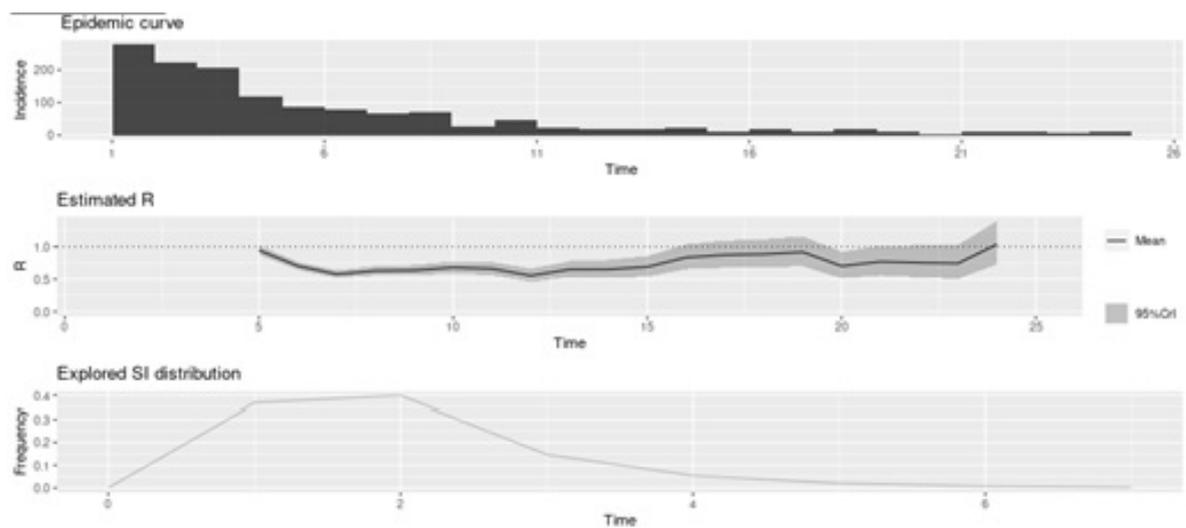


Figura 36: R_0 com janela 4 para a cidade de São Paulo.
Fonte: App EpiEstim.

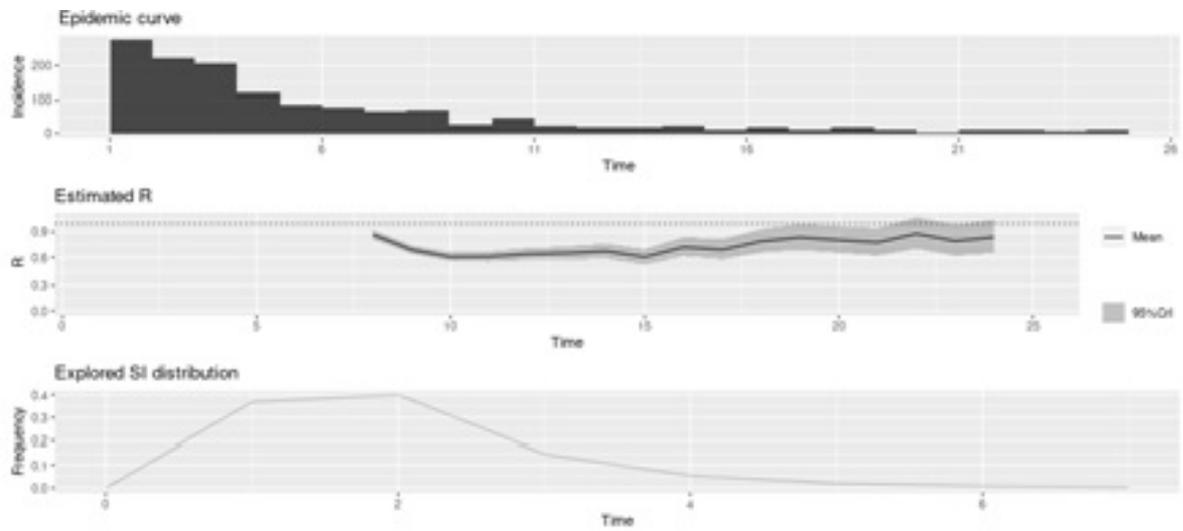


Figura 37: R_0 com janela 7 para a cidade de São Paulo.
Fonte: App EpiEstim.

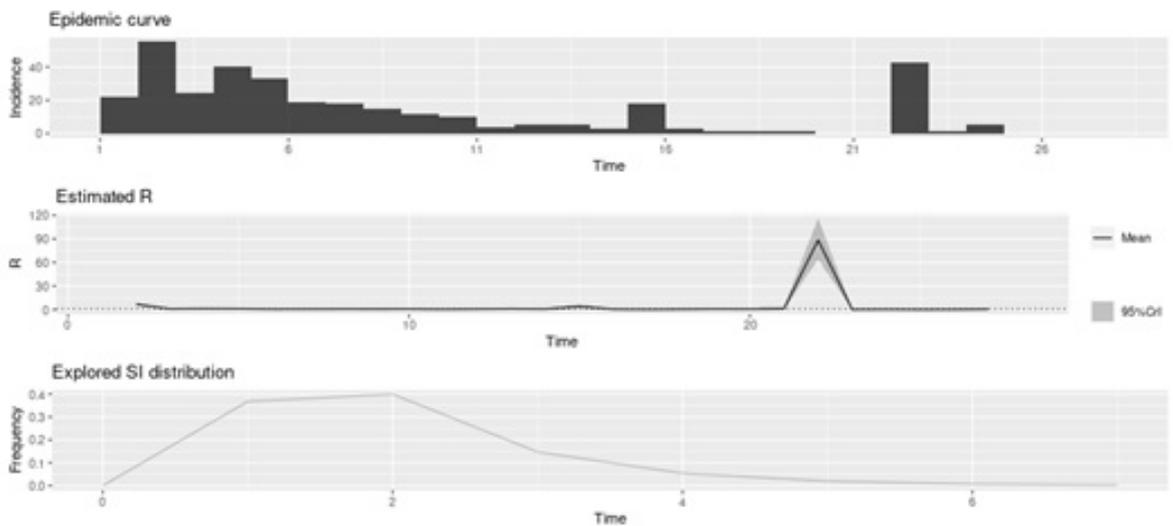


Figura 38: R_0 com janela 1 para o Distrito Federal.
Fonte: App EpiEstim.

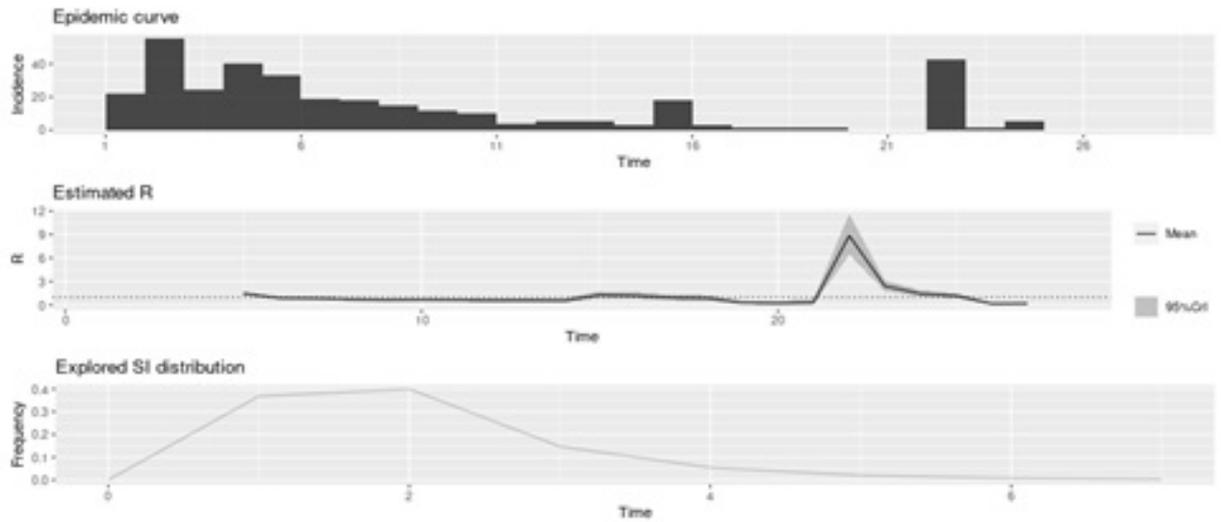


Figura 39: R_0 com janela 4 para o Distrito Federal.
Fonte: App EpiEstim.

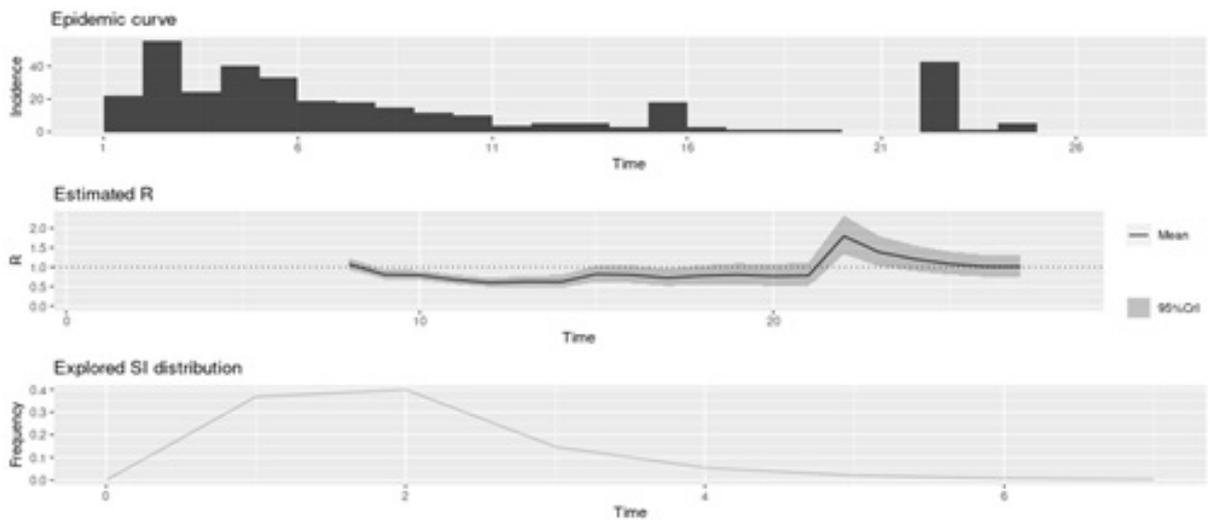


Figura 40: R_0 com janela 7 para o Distrito Federal.
Fonte: App EpiEstim.

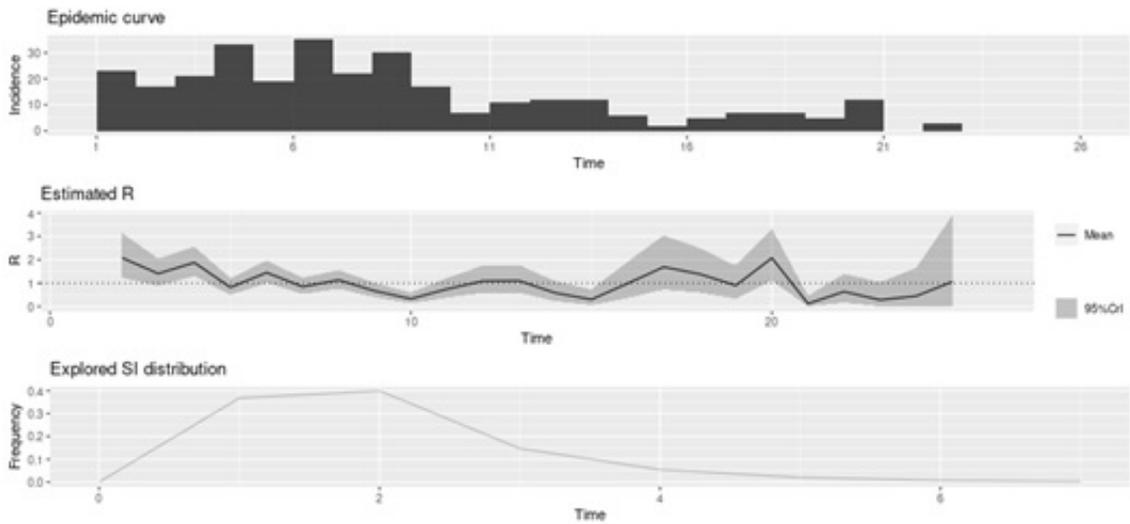


Figura 41: R_0 com janela 1 para o Rio Grande do Sul.
Fonte: App EpiEstim.

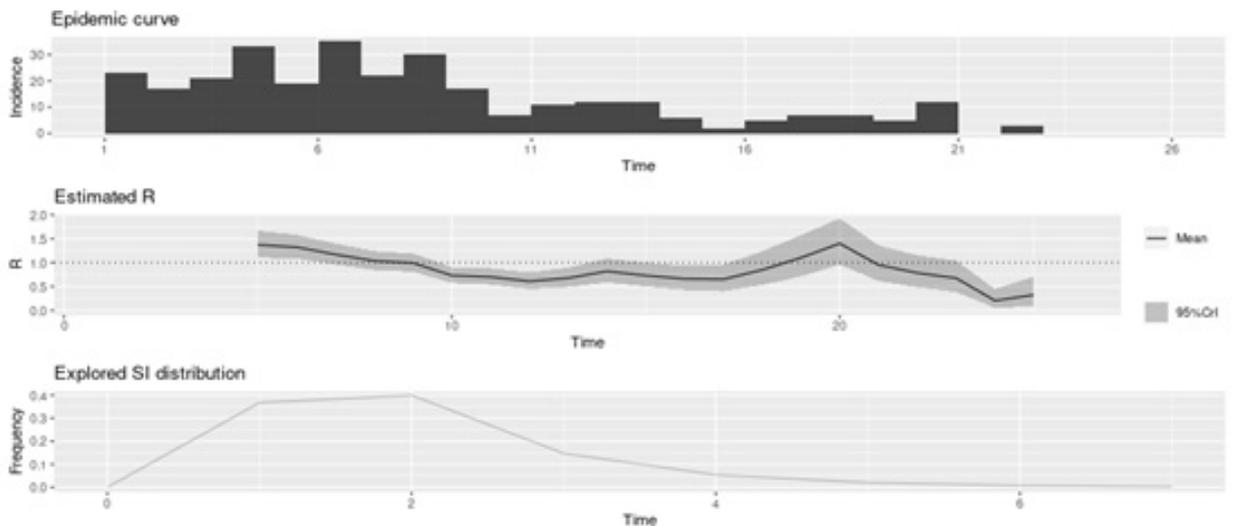


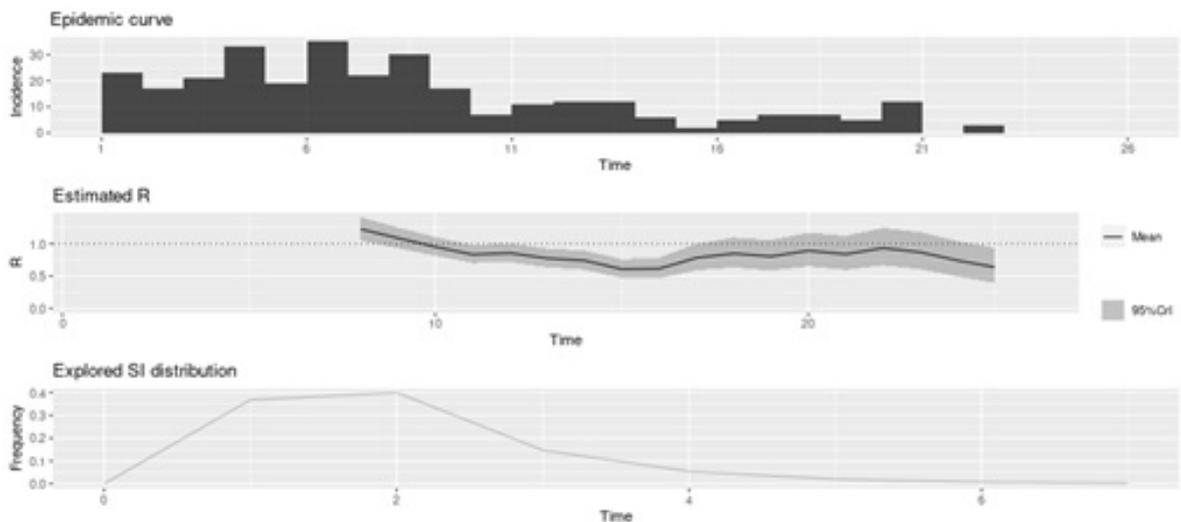
Figura 42: R_0 com janela 4 para o Rio Grande do Sul.
Fonte: App EpiEstim.

Tabela 6: R_0 com janela 1 para o Brasil.

t start	t end	Mean (R)	Std (R)	0,025 (R)	0,05 (R)	0,25 (R)	Median (R)	0,75 (R)	0,95 (R)	0,975 (R)
2	2	4,05	0,19	3,69	3,75	3,92	4,05	4,18	4,37	4,43
3	3	2,25	0,09	2,08	2,11	2,19	2,25	2,31	2,40	2,43
4	4	1,73	0,06	1,62	1,63	1,69	1,73	1,77	1,83	1,85
5	5	1,07	0,04	0,99	1,00	1,04	1,07	1,09	1,13	1,15
6	6	1,28	0,04	1,20	1,21	1,25	1,28	1,31	1,35	1,37
7	7	1,02	0,04	0,95	0,96	1,00	1,02	1,05	1,08	1,10
8	8	1,01	0,04	0,95	0,96	0,99	1,01	1,04	1,07	1,08
9	9	0,74	0,03	0,68	0,69	0,72	0,74	0,76	0,79	0,80
10	10	1,20	0,04	1,12	1,13	1,17	1,20	1,23	1,27	1,28
11	11	0,68	0,03	0,62	0,63	0,66	0,68	0,70	0,73	0,74
12	12	0,70	0,03	0,64	0,65	0,68	0,70	0,73	0,76	0,77
13	13	0,75	0,04	0,68	0,69	0,73	0,75	0,77	0,81	0,82
14	14	0,53	0,03	0,47	0,48	0,51	0,53	0,55	0,58	0,59
15	15	0,76	0,04	0,68	0,69	0,73	0,76	0,79	0,84	0,85
16	16	0,62	0,04	0,53	0,55	0,59	0,61	0,64	0,69	0,70
17	17	0,91	0,06	0,80	0,82	0,88	0,91	0,95	1,01	1,03
18	18	0,74	0,05	0,63	0,65	0,70	0,74	0,77	0,83	0,85
19	19	1,00	0,07	0,87	0,89	0,95	1,00	1,04	1,11	1,13
20	20	0,63	0,05	0,52	0,54	0,59	0,62	0,66	0,72	0,74
21	21	0,57	0,06	0,47	0,48	0,53	0,57	0,61	0,66	0,68
22	22	1,01	0,08	0,85	0,87	0,95	1,01	1,06	1,15	1,18
23	23	0,79	0,08	0,65	0,67	0,74	0,79	0,84	0,92	0,95
24	24	1,12	0,10	0,95	0,97	1,06	1,12	1,19	1,29	1,32
25	25	0,32	0,05	0,22	0,24	0,28	0,31	0,35	0,40	0,42
26	26	0,66	0,08	0,50	0,53	0,60	0,65	0,71	0,80	0,83
27	27	1,10	0,13	0,86	0,90	1,01	1,09	1,18	1,31	1,36
28	28	0,62	0,10	0,45	0,48	0,56	0,62	0,69	0,79	0,82
29	29	0,83	0,12	0,61	0,64	0,75	0,82	0,90	1,03	1,07

Tabela 7: R_0 com janela 4 para o Brasil.

t start	t end	Mean (R)	Std (R)	0,025 (R)	0,05 (R)	0,25 (R)	Median (R)	0,75 (R)	0,95 (R)	0,975 (R)
2	5	1,72	0,03	1,66	1,67	1,70	1,72	1,74	1,78	1,79
3	6	1,45	0,03	1,40	1,41	1,43	1,45	1,47	1,49	1,50
4	7	1,23	0,02	1,19	1,20	1,22	1,23	1,25	1,27	1,28
5	8	1,09	0,02	1,05	1,06	1,08	1,09	1,11	1,12	1,13
6	9	1,01	0,02	0,97	0,98	0,99	1,01	1,02	1,03	1,04
7	10	0,99	0,02	0,95	0,96	0,98	0,99	1,00	1,02	1,02
8	11	0,90	0,02	0,87	0,88	0,89	0,90	0,92	0,93	0,94
9	12	0,83	0,02	0,80	0,80	0,82	0,83	0,84	0,86	0,86
10	13	0,84	0,02	0,80	0,81	0,83	0,84	0,85	0,87	0,87
11	14	0,67	0,02	0,64	0,64	0,66	0,67	0,68	0,70	0,70
12	15	0,68	0,02	0,65	0,66	0,67	0,68	0,70	0,71	0,72
13	16	0,66	0,02	0,63	0,63	0,65	0,66	0,68	0,70	0,70
14	17	0,68	0,02	0,64	0,64	0,66	0,68	0,69	0,71	0,72
15	18	0,75	0,02	0,70	0,71	0,73	0,75	0,77	0,79	0,80
16	19	0,80	0,03	0,75	0,75	0,78	0,80	0,82	0,84	0,85
17	20	0,82	0,03	0,77	0,77	0,80	0,82	0,84	0,87	0,88
18	21	0,74	0,03	0,68	0,69	0,72	0,74	0,76	0,79	0,80
19	22	0,79	0,03	0,73	0,74	0,77	0,79	0,81	0,84	0,85
20	23	0,72	0,03	0,66	0,67	0,70	0,72	0,74	0,78	0,79
21	24	0,84	0,04	0,77	0,78	0,81	0,84	0,87	0,90	0,92
22	25	0,81	0,04	0,74	0,75	0,78	0,81	0,84	0,88	0,89
23	26	0,72	0,04	0,65	0,66	0,70	0,72	0,75	0,79	0,80
24	27	0,76	0,04	0,68	0,69	0,73	0,76	0,79	0,83	0,85
25	28	0,61	0,04	0,53	0,54	0,58	0,61	0,64	0,68	0,69
26	29	0,78	0,05	0,68	0,70	0,74	0,78	0,81	0,86	0,88

Figura 43: R_0 com janela 7 para o Rio Grande do Sul.

Fonte: App EpiEstim.

Tabela 8: R_0 com janela 7 para o Brasil.

t start	t end	Mean (R)	Std (R)	0,025 (R)	0,05 (R)	0,25 (R)	Median (R)	0,75 (R)	0,95 (R)	0,975 (R)
2	8	1,35	0,02	1,31	1,32	1,33	1,35	1,36	1,38	1,38
3	9	1,17	0,02	1,14	1,14	1,16	1,17	1,18	1,20	1,20
4	10	1,11	0,01	1,08	1,09	1,10	1,11	1,12	1,13	1,14
5	11	0,99	0,01	0,97	0,97	0,98	0,99	1,00	1,02	1,02
6	12	0,95	0,01	0,92	0,92	0,94	0,95	0,95	0,97	0,97
7	13	0,88	0,01	0,85	0,86	0,87	0,88	0,89	0,90	0,90
8	14	0,82	0,01	0,79	0,80	0,81	0,82	0,83	0,84	0,84
9	15	0,78	0,01	0,75	0,76	0,77	0,78	0,79	0,80	0,80
10	16	0,77	0,01	0,75	0,75	0,76	0,77	0,78	0,80	0,80
11	17	0,69	0,01	0,67	0,67	0,68	0,69	0,70	0,72	0,72
12	18	0,70	0,02	0,67	0,68	0,69	0,70	0,71	0,73	0,73
13	19	0,73	0,02	0,69	0,70	0,72	0,73	0,74	0,76	0,76
14	20	0,71	0,02	0,68	0,68	0,70	0,71	0,72	0,74	0,75
15	21	0,75	0,02	0,71	0,71	0,73	0,75	0,76	0,78	0,79
16	22	0,77	0,02	0,72	0,73	0,75	0,77	0,78	0,80	0,81
17	23	0,80	0,02	0,76	0,76	0,79	0,80	0,82	0,84	0,85
18	24	0,81	0,03	0,76	0,77	0,79	0,81	0,83	0,85	0,86
19	25	0,77	0,03	0,72	0,73	0,75	0,77	0,79	0,82	0,82
20	26	0,71	0,03	0,66	0,67	0,69	0,71	0,73	0,76	0,76
21	27	0,76	0,03	0,71	0,71	0,74	0,76	0,78	0,81	0,82
22	28	0,80	0,03	0,73	0,74	0,78	0,80	0,82	0,85	0,86
23	29	0,76	0,03	0,69	0,70	0,73	0,76	0,78	0,81	0,82

Tabela 9: R_0 com janela 1 para a cidade de São Paulo.

t start	t end	Mean (R)	Std (R)	0,025 (R)	0,05 (R)	0,25 (R)	Median (R)	0,75 (R)	0,95 (R)	0,975 (R)
2	2	0,50	0,03	0,45	0,46	0,48	0,50	0,53	0,56	0,57
3	3	0,32	0,02	0,28	0,28	0,30	0,32	0,33	0,35	0,36
4	4	0,51	0,04	0,44	0,45	0,48	0,51	0,53	0,57	0,58
5	5	0,41	0,04	0,34	0,35	0,39	0,41	0,44	0,48	0,49
6	6	0,44	0,05	0,35	0,36	0,40	0,43	0,47	0,51	0,53
7	7	0,56	0,06	0,44	0,46	0,52	0,56	0,60	0,67	0,69
8	8	0,64	0,08	0,50	0,52	0,59	0,64	0,69	0,78	0,81
9	9	0,88	0,10	0,69	0,71	0,80	0,87	0,94	1,05	1,09
10	10	0,38	0,07	0,25	0,27	0,33	0,38	0,43	0,51	0,53
11	11	0,82	0,12	0,60	0,63	0,74	0,82	0,90	1,03	1,08
12	12	0,54	0,11	0,35	0,37	0,46	0,53	0,61	0,73	0,78
13	13	0,57	0,12	0,35	0,38	0,48	0,56	0,65	0,79	0,84
14	14	0,66	0,16	0,39	0,43	0,55	0,65	0,76	0,94	1,00
15	15	1,11	0,23	0,71	0,76	0,95	1,09	1,25	1,51	1,60
16	16	0,62	0,17	0,33	0,37	0,50	0,60	0,72	0,92	1,00
17	17	1,14	0,25	0,71	0,77	0,97	1,13	1,30	1,58	1,68
18	18	0,75	0,21	0,40	0,44	0,60	0,73	0,87	1,12	1,20
19	19	1,23	0,28	0,75	0,82	1,04	1,21	1,41	1,72	1,83
20	20	0,68	0,20	0,34	0,38	0,53	0,66	0,80	1,04	1,13
21	21	0,27	0,14	0,07	0,09	0,17	0,25	0,35	0,52	0,59
22	22	1,18	0,36	0,59	0,66	0,92	1,14	1,40	1,82	1,97
23	23	1,62	0,45	0,86	0,96	1,30	1,58	1,90	2,42	2,61
24	24	0,59	0,24	0,22	0,26	0,42	0,56	0,73	1,04	1,15
25	25	1,13	0,36	0,54	0,61	0,87	1,09	1,34	1,77	1,93

Tabela 10: R_0 com janela 1 para a cidade de São Paulo desconsiderando o valor mais alto.

t start	t end	Mean (R)	Std (R)	0,025 (R)	0,05 (R)	0,25 (R)	Median (R)	0,75 (R)	0,95 (R)	0,975 (R)
2	2	2,18	0,15	1,91	1,95	2,08	2,18	2,28	2,43	2,48
3	3	1,09	0,08	0,94	0,96	1,03	1,08	1,14	1,21	1,24
4	4	0,58	0,05	0,48	0,49	0,54	0,58	0,61	0,67	0,69
5	5	0,51	0,05	0,41	0,42	0,47	0,51	0,55	0,60	0,62
6	6	0,61	0,07	0,48	0,50	0,56	0,61	0,66	0,73	0,75
7	7	0,67	0,08	0,52	0,54	0,61	0,67	0,72	0,81	0,84
8	8	0,89	0,11	0,70	0,73	0,82	0,89	0,96	1,07	1,11
9	9	0,38	0,07	0,25	0,27	0,33	0,38	0,43	0,51	0,54
10	10	0,83	0,12	0,60	0,64	0,74	0,82	0,90	1,04	1,08
11	11	0,54	0,11	0,35	0,37	0,46	0,53	0,61	0,74	0,78
12	12	0,57	0,12	0,35	0,38	0,48	0,56	0,65	0,79	0,84
13	13	0,66	0,16	0,39	0,43	0,55	0,65	0,76	0,94	1,00
14	14	1,11	0,23	0,71	0,77	0,95	1,09	1,25	1,51	1,60
15	15	0,62	0,17	0,33	0,37	0,50	0,60	0,72	0,92	1,00
16	16	1,14	0,25	0,71	0,77	0,97	1,13	1,30	1,58	1,68
17	17	0,75	0,21	0,40	0,44	0,60	0,73	0,87	1,12	1,20
18	18	1,23	0,28	0,75	0,82	1,04	1,21	1,41	1,72	1,83
29	19	0,68	0,20	0,34	0,38	0,53	0,66	0,80	1,04	1,13
20	20	0,27	0,14	0,07	0,09	0,17	0,25	0,35	0,52	0,59
21	21	1,18	0,36	0,59	0,66	0,92	1,14	1,40	1,82	1,97
22	22	1,62	0,45	0,86	0,96	1,30	1,58	1,90	2,42	2,61
23	23	0,59	0,24	0,22	0,26	0,42	0,56	0,73	1,04	1,15
24	24	1,13	0,36	0,54	0,61	0,87	1,09	1,34	1,77	1,93

Tabela 11: R_0 com janela 4 para a cidade de São Paulo.

t start	t end	Mean (R)	Std (R)	0,025 (R)	0,05 (R)	0,25 (R)	Median (R)	0,75 (R)	0,95 (R)	0,975 (R)
2	5	0,94	0,04	0,87	0,88	0,92	0,94	0,97	1,01	1,02
3	6	0,70	0,03	0,64	0,65	0,68	0,70	0,72	0,76	0,77
4	7	0,58	0,03	0,52	0,53	0,55	0,57	0,60	0,63	0,64
5	8	0,63	0,04	0,56	0,57	0,60	0,63	0,65	0,69	0,70
6	9	0,63	0,04	0,56	0,57	0,61	0,63	0,66	0,70	0,72
7	10	0,68	0,05	0,59	0,60	0,65	0,68	0,71	0,76	0,77
8	11	0,66	0,05	0,56	0,58	0,62	0,66	0,69	0,75	0,76
9	12	0,55	0,05	0,46	0,47	0,52	0,55	0,59	0,64	0,66
10	13	0,65	0,06	0,53	0,55	0,61	0,65	0,69	0,76	0,78
11	14	0,65	0,07	0,52	0,54	0,60	0,65	0,70	0,77	0,80
12	15	0,69	0,08	0,54	0,56	0,63	0,69	0,74	0,83	0,86
13	16	0,83	0,10	0,65	0,68	0,77	0,83	0,90	1,00	1,04
14	17	0,87	0,11	0,68	0,71	0,80	0,87	0,94	1,05	1,09
15	18	0,88	0,11	0,68	0,71	0,81	0,88	0,96	1,07	1,11
16	19	0,92	0,12	0,70	0,73	0,84	0,91	0,99	1,12	1,16
17	20	0,70	0,10	0,51	0,54	0,63	0,70	0,77	0,88	0,92
18	21	0,77	0,12	0,56	0,59	0,69	0,76	0,84	0,97	1,01
19	22	0,75	0,13	0,53	0,56	0,66	0,75	0,83	0,97	1,02
20	23	0,74	0,13	0,51	0,54	0,65	0,74	0,83	0,98	1,03
21	24	1,04	0,17	0,73	0,77	0,92	1,03	1,14	1,33	1,39

Tabela 12: R_0 com janela 7 para a cidade de São Paulo.

t start	t end	Mean (R)	Std (R)	0,025 (R)	0,05 (R)	0,25 (R)	Median (R)	0,75 (R)	0,95 (R)	0,975 (R)
2	8	0,87	0,03	0,81	0,82	0,85	0,87	0,89	0,92	0,93
3	9	0,69	0,03	0,64	0,64	0,67	0,69	0,71	0,73	0,74
4	10	0,60	0,03	0,55	0,56	0,58	0,60	0,62	0,65	0,66
5	11	0,61	0,03	0,55	0,56	0,59	0,61	0,63	0,66	0,67
6	12	0,64	0,04	0,57	0,58	0,61	0,64	0,66	0,70	0,71
7	13	0,65	0,04	0,57	0,58	0,62	0,65	0,67	0,71	0,73
8	14	0,67	0,04	0,59	0,60	0,64	0,67	0,70	0,75	0,76
9	15	0,60	0,05	0,52	0,53	0,57	0,60	0,63	0,68	0,70
10	16	0,72	0,06	0,61	0,63	0,68	0,72	0,76	0,82	0,83
11	17	0,69	0,06	0,58	0,59	0,65	0,69	0,73	0,79	0,81
12	18	0,79	0,07	0,66	0,68	0,74	0,79	0,83	0,91	0,93
13	19	0,83	0,08	0,69	0,71	0,78	0,83	0,88	0,97	0,99
14	20	0,80	0,08	0,65	0,68	0,75	0,80	0,86	0,94	0,97
15	21	0,78	0,08	0,62	0,64	0,72	0,77	0,83	0,92	0,95
16	22	0,88	0,09	0,70	0,73	0,81	0,87	0,94	1,04	1,07
17	23	0,79	0,09	0,62	0,64	0,73	0,79	0,85	0,95	0,98
18	24	0,84	0,10	0,65	0,68	0,77	0,83	0,90	1,01	1,05

Tabela 13: R_0 com janela 1 para o Distrito Federal.

t start	t end	Mean (R)	Std (R)	0,025 (R)	0,05 (R)	0,25 (R)	Median (R)	0,75 (R)	0,95 (R)	0,975 (R)
2	2	6,75	0,90	5,10	5,34	6,12	6,71	7,34	8,30	8,63
3	3	0,86	0,17	0,55	0,59	0,73	0,84	0,96	1,15	1,22
4	4	1,20	0,19	0,86	0,91	1,07	1,19	1,32	1,52	1,59
5	5	1,01	0,17	0,70	0,74	0,89	1,00	1,12	1,31	1,37
6	6	0,57	0,13	0,35	0,38	0,48	0,56	0,65	0,79	0,84
7	7	0,66	0,15	0,40	0,43	0,55	0,65	0,75	0,93	0,99
8	8	0,72	0,18	0,41	0,45	0,59	0,70	0,83	1,03	1,11
9	9	0,70	0,19	0,37	0,41	0,56	0,68	0,82	1,04	1,13
10	10	0,72	0,22	0,36	0,40	0,56	0,69	0,85	1,10	1,20
11	11	0,40	0,18	0,13	0,16	0,27	0,37	0,50	0,72	0,81
12	12	0,68	0,28	0,25	0,29	0,47	0,64	0,84	1,18	1,31
13	13	0,95	0,39	0,35	0,42	0,67	0,90	1,18	1,67	1,85
14	14	0,71	0,36	0,19	0,24	0,45	0,66	0,91	1,38	1,57
15	15	4,12	0,95	2,48	2,70	3,45	4,05	4,71	5,79	6,17
16	16	0,43	0,22	0,12	0,15	0,27	0,40	0,55	0,84	0,95
17	17	0,21	0,15	0,03	0,04	0,10	0,18	0,29	0,51	0,59
18	18	0,42	0,30	0,05	0,07	0,20	0,35	0,57	1,00	1,18
19	19	0,80	0,57	0,10	0,14	0,38	0,67	1,08	1,90	2,23
20	20	0,60	0,60	0,02	0,03	0,17	0,41	0,83	1,78	2,20
21	21	0,99	0,99	0,03	0,05	0,29	0,69	1,37	2,97	3,66
22	22	88,46	13,34	64,28	67,73	79,14	87,80	97,06	111,48	116,45
23	23	0,12	0,09	0,02	0,02	0,06	0,10	0,17	0,29	0,35
24	24	0,34	0,14	0,12	0,15	0,24	0,32	0,42	0,59	0,66
25	25	0,11	0,11	0,00	0,01	0,03	0,08	0,16	0,34	0,42
26	26	0,21	0,21	0,01	0,01	0,06	0,15	0,30	0,64	0,79
27	27	0,54	0,54	0,01	0,03	0,16	0,38	0,75	1,62	2,00

Tabela 14: R_0 com janela 4 para o Distrito Federal.

t start	t end	Mean (R)	Std (R)	0,025 (R)	0,05 (R)	0,25 (R)	Median (R)	0,75 (R)	0,95 (R)	0,975 (R)
2	5	1,46	0,12	1,24	1,27	1,38	1,45	1,54	1,66	1,70
3	6	0,89	0,08	0,73	0,76	0,83	0,88	0,94	1,03	1,05
4	7	0,84	0,08	0,69	0,72	0,79	0,84	0,90	0,98	1,01
5	8	0,72	0,08	0,58	0,60	0,67	0,72	0,77	0,85	0,88
6	9	0,62	0,08	0,48	0,50	0,57	0,62	0,67	0,75	0,78
7	10	0,66	0,09	0,50	0,52	0,60	0,66	0,72	0,81	0,85
8	11	0,61	0,09	0,44	0,47	0,55	0,61	0,68	0,78	0,81
9	12	0,58	0,10	0,40	0,42	0,51	0,58	0,65	0,76	0,80
10	13	0,59	0,12	0,38	0,41	0,50	0,58	0,66	0,79	0,84
11	14	0,55	0,13	0,33	0,35	0,46	0,54	0,63	0,78	0,83
12	15	1,29	0,23	0,88	0,94	1,13	1,28	1,44	1,69	1,77
13	16	1,19	0,22	0,81	0,86	1,04	1,18	1,33	1,57	1,66
14	17	0,92	0,18	0,60	0,65	0,79	0,91	1,04	1,24	1,31
15	18	0,88	0,18	0,56	0,60	0,75	0,86	0,99	1,19	1,26
16	19	0,28	0,10	0,11	0,13	0,20	0,26	0,34	0,47	0,52
17	20	0,23	0,11	0,06	0,08	0,14	0,21	0,29	0,44	0,50
18	21	0,32	0,19	0,07	0,09	0,19	0,29	0,42	0,67	0,77
19	22	8,85	1,32	6,45	6,79	7,92	8,78	9,70	11,12	11,61
20	23	2,40	0,36	1,75	1,85	2,15	2,39	2,64	3,02	3,16
21	24	1,44	0,20	1,07	1,12	1,29	1,43	1,57	1,79	1,86
22	25	1,17	0,17	0,87	0,91	1,06	1,17	1,28	1,46	1,52
23	26	0,15	0,06	0,06	0,07	0,11	0,14	0,18	0,25	0,28
24	27	0,18	0,08	0,07	0,08	0,13	0,17	0,23	0,32	0,36

Tabela 15: R_0 com janela 7 para o Distrito Federal.

t start	t end	Mean (R)	Std (R)	0,025 (R)	0,05 (R)	0,25 (R)	Median (R)	0,75 (R)	0,95 (R)	0,975 (R)
2	8	1,07	0,08	0,93	0,95	1,02	1,07	1,12	1,20	1,23
3	9	0,81	0,06	0,69	0,70	0,76	0,80	0,85	0,91	0,93
4	10	0,79	0,06	0,67	0,69	0,75	0,79	0,83	0,90	0,92
5	11	0,68	0,06	0,56	0,57	0,63	0,67	0,72	0,78	0,81
6	12	0,60	0,07	0,48	0,49	0,55	0,59	0,64	0,71	0,73
7	13	0,63	0,07	0,49	0,51	0,57	0,62	0,68	0,75	0,78
8	14	0,62	0,08	0,47	0,49	0,56	0,62	0,68	0,76	0,80
9	15	0,82	0,11	0,62	0,65	0,74	0,81	0,89	1,00	1,04
10	16	0,80	0,11	0,59	0,62	0,72	0,79	0,87	0,99	1,04
11	17	0,72	0,11	0,52	0,54	0,64	0,72	0,79	0,92	0,96
12	18	0,78	0,13	0,55	0,58	0,69	0,77	0,86	1,00	1,05
13	19	0,80	0,14	0,55	0,59	0,70	0,79	0,89	1,04	1,10
14	20	0,77	0,14	0,51	0,54	0,66	0,76	0,86	1,02	1,07
15	21	0,78	0,16	0,51	0,54	0,67	0,77	0,88	1,06	1,12
16	22	1,80	0,25	1,33	1,40	1,62	1,78	1,96	2,23	2,33
17	23	1,38	0,20	1,02	1,07	1,24	1,37	1,51	1,73	1,80
18	24	1,21	0,17	0,90	0,94	1,09	1,20	1,31	1,49	1,55
19	25	1,08	0,15	0,80	0,84	0,98	1,07	1,18	1,34	1,40
20	26	1,01	0,14	0,75	0,79	0,91	1,01	1,11	1,26	1,31
21	27	1,01	0,14	0,75	0,79	0,91	1,00	1,10	1,26	1,31

Tabela 16: R_0 com janela 1 para o Rio Grande do Sul.

t start	t end	Mean (R)	Std (R)	0,025 (R)	0,05 (R)	0,25 (R)	Median (R)	0,75 (R)	0,95 (R)	0,975 (R)
2	2	2,08	0,49	1,23	1,34	1,73	2,04	2,38	2,94	3,14
3	3	1,41	0,30	0,88	0,95	1,19	1,39	1,60	1,93	2,05
4	4	1,88	0,32	1,30	1,38	1,65	1,86	2,08	2,44	2,56
5	5	0,82	0,18	0,50	0,54	0,69	0,80	0,93	1,14	1,21
6	6	1,45	0,24	1,02	1,08	1,28	1,44	1,60	1,87	1,96
7	7	0,85	0,18	0,54	0,58	0,72	0,83	0,96	1,16	1,23
8	8	1,13	0,20	0,77	0,82	0,99	1,12	1,26	1,48	1,56
9	9	0,66	0,16	0,39	0,43	0,55	0,65	0,76	0,94	1,01
10	10	0,33	0,12	0,14	0,16	0,25	0,32	0,40	0,54	0,59
11	11	0,74	0,21	0,38	0,43	0,59	0,72	0,88	1,13	1,22
12	12	1,09	0,30	0,58	0,64	0,87	1,06	1,27	1,63	1,75
13	13	1,10	0,30	0,58	0,65	0,88	1,07	1,28	1,64	1,77
14	14	0,58	0,22	0,23	0,27	0,42	0,55	0,71	0,98	1,08
15	15	0,30	0,17	0,06	0,08	0,17	0,27	0,39	0,63	0,73
16	16	0,98	0,40	0,36	0,43	0,69	0,93	1,22	1,72	1,91
17	17	1,69	0,60	0,73	0,84	1,26	1,62	2,04	2,77	3,04
18	18	1,39	0,49	0,60	0,69	1,03	1,33	1,68	2,28	2,50
19	19	0,90	0,37	0,33	0,39	0,63	0,85	1,11	1,58	1,75
20	20	2,07	0,58	1,10	1,23	1,66	2,02	2,43	3,10	3,34
21	21	0,12	0,12	0,00	0,01	0,04	0,08	0,17	0,37	0,45
22	22	0,63	0,32	0,17	0,22	0,40	0,58	0,81	1,23	1,39
23	23	0,28	0,28	0,01	0,01	0,08	0,20	0,39	0,84	1,04
24	24	0,45	0,45	0,01	0,02	0,13	0,31	0,62	1,35	1,66
25	25	1,06	1,06	0,03	0,05	0,30	0,73	1,47	3,17	3,90

Tabela 17: R_0 com janela 4 para o Rio Grande do Sul.

t start	t end	Mean (R)	Std (R)	0,025 (R)	0,05 (R)	0,25 (R)	Median (R)	0,75 (R)	0,95 (R)	0,975 (R)
2	5	1,37	0,14	1,11	1,15	1,27	1,37	1,47	1,62	1,67
3	6	1,32	0,13	1,09	1,12	1,23	1,32	1,40	1,54	1,58
4	7	1,17	0,11	0,96	0,99	1,09	1,17	1,24	1,36	1,40
5	8	1,04	0,10	0,85	0,88	0,97	1,03	1,10	1,21	1,24
6	9	0,99	0,10	0,81	0,84	0,92	0,99	1,05	1,16	1,19
7	10	0,73	0,08	0,58	0,60	0,67	0,73	0,79	0,87	0,90
8	11	0,70	0,09	0,54	0,56	0,64	0,70	0,76	0,85	0,88
9	12	0,61	0,09	0,45	0,47	0,55	0,60	0,67	0,76	0,79
10	13	0,68	0,10	0,49	0,52	0,60	0,67	0,74	0,85	0,89
11	14	0,82	0,13	0,59	0,62	0,73	0,81	0,90	1,04	1,08
12	15	0,73	0,13	0,50	0,53	0,64	0,72	0,81	0,95	1,00
13	16	0,66	0,13	0,43	0,46	0,57	0,65	0,74	0,89	0,94
14	17	0,65	0,14	0,40	0,44	0,55	0,64	0,74	0,90	0,96
15	18	0,85	0,18	0,53	0,57	0,72	0,83	0,96	1,16	1,24
16	19	1,10	0,22	0,71	0,77	0,95	1,09	1,24	1,49	1,57
17	20	1,40	0,25	0,96	1,02	1,23	1,39	1,56	1,83	1,93
18	21	0,95	0,19	0,62	0,66	0,82	0,94	1,07	1,28	1,36
19	22	0,78	0,17	0,48	0,52	0,66	0,77	0,89	1,08	1,15
20	23	0,68	0,17	0,39	0,42	0,56	0,66	0,78	0,97	1,04
21	24	0,20	0,10	0,06	0,07	0,13	0,19	0,26	0,39	0,45
22	25	0,32	0,16	0,09	0,11	0,20	0,30	0,41	0,62	0,71

Tabela 18: R_0 com janela 7 para o Rio Grande do Sul.

t start	t end	Mean (R)	Std (R)	0,025 (R)	0,05 (R)	0,25 (R)	Median (R)	0,75 (R)	0,95 (R)	0,975 (R)
2	8	1,23	0,09	1,05	1,08	1,16	1,22	1,29	1,38	1,41
3	9	1,09	0,08	0,93	0,96	1,03	1,09	1,14	1,23	1,25
4	10	0,95	0,07	0,81	0,83	0,90	0,95	1,00	1,08	1,10
5	11	0,83	0,07	0,70	0,72	0,79	0,83	0,88	0,95	0,98
6	12	0,86	0,07	0,72	0,74	0,81	0,85	0,90	0,98	1,01
7	13	0,77	0,07	0,64	0,66	0,72	0,77	0,82	0,90	0,92
8	14	0,74	0,08	0,60	0,62	0,69	0,74	0,79	0,87	0,90
9	15	0,61	0,07	0,47	0,49	0,56	0,60	0,65	0,73	0,76
10	16	0,61	0,08	0,46	0,49	0,56	0,61	0,67	0,76	0,79
11	17	0,78	0,10	0,59	0,62	0,71	0,78	0,85	0,96	1,00
12	18	0,85	0,12	0,63	0,67	0,77	0,84	0,93	1,05	1,10
13	19	0,80	0,12	0,59	0,62	0,72	0,80	0,88	1,01	1,06
14	20	0,89	0,13	0,65	0,69	0,80	0,89	0,98	1,12	1,17
15	21	0,84	0,13	0,60	0,63	0,75	0,83	0,93	1,07	1,12
16	22	0,93	0,15	0,67	0,71	0,83	0,93	1,03	1,19	1,24
17	23	0,87	0,15	0,61	0,64	0,77	0,86	0,96	1,12	1,18
18	24	0,74	0,14	0,49	0,53	0,64	0,73	0,83	0,99	1,04
19	25	0,64	0,14	0,39	0,43	0,54	0,63	0,73	0,88	0,94

ANEXO B MÉTODO INICIAL DE RUNGE-KUTTA

B.1 Introdução

Método Numérico é um algoritmo composto por um número finito de operações envolvendo apenas números (operações aritméticas elementares, cálculo de funções, consulta de a uma tabela de valores, consulta a um gráfico, etc)

Modelagem é o processo de obtenção do modelo matemático que descreve o comportamento do sistema físico.

Solução numérica é a fase da obtenção dos resultados através da aplicação dos métodos numéricos

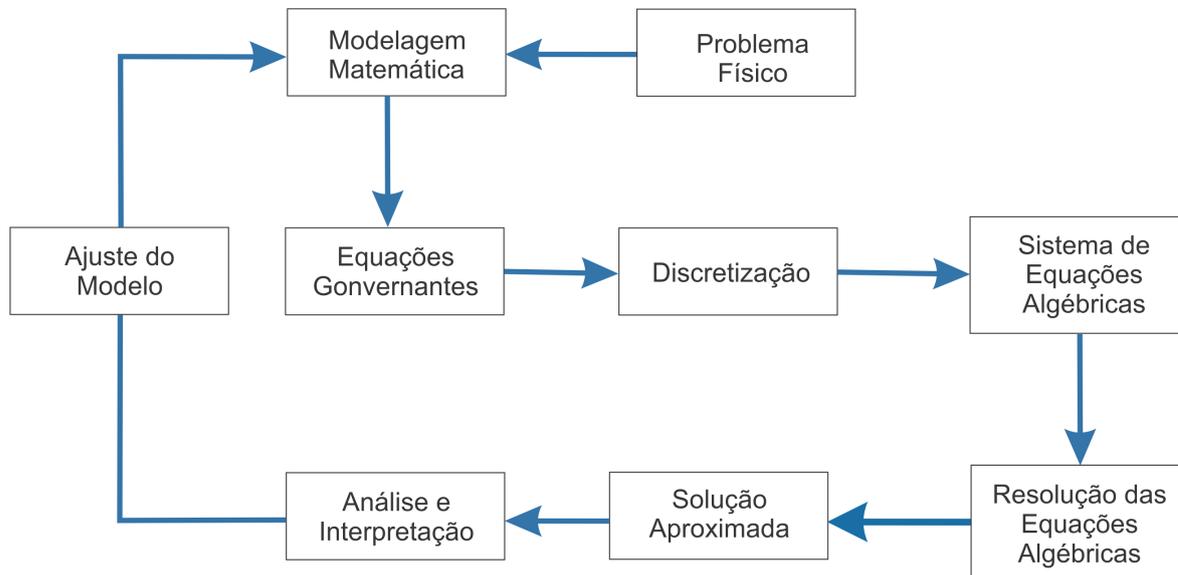


Figura 44: Etapas envolvidas na solução numérica de um problema físico.

Fonte: (FRANCO, 2011)

São conhecidos através da literatura inumeros métodos numéricos, dentre eles o Método de Runge-Kutta que é determinado a partir da Série de Taylor e sua expressão de recorrência é dada por:

$$y_{i+1} = y_i + \varphi(x_i, y_i, h)h$$

onde $\varphi(x_i, y_i, h)$ é chamada de função incremento e pode ser interpretada como uma inclinação média sobre o intervalo.

Genericamente:

$$\varphi(x_i, y_i, h) = a_1 k_1 + a_2 k_2 + \cdots + a_n k_n$$

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f(x_i + p_1 h, y_i + q_{11} k_1 h)$$

$$k_3 = f(x_i + p_2 h, y_i + q_{21} k_1 h + q_{22} k_2 h)$$

⋮

$$k_n = f(x_i + p_{n-1} h, y_i + q_{(n-1)1} k_1 h + q_{(n-1)2} k_2 h + \cdots + q_{(n-1)(n-1)} k_{n-1} h)$$

B.1.1 Derivação do Método de Runge-Kutta de Segundo Ordem

$$y_{i+1} = y_i + (a_1 k_1 + a_2 k_2) h \quad (37)$$

$$k_1 = f(x_i, y_i) \quad (38)$$

$$k_2 = f(x_i + p_1 h, y_i + q_{11} k_1 h) \quad (39)$$

Deve-se determinar os valores das constantes a_1, a_2, q_1 e q_{11} .

Expande-se y_{i+1} em Série de Taylor:

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i) h + f'(x_i, y_i) \frac{h^2}{2!} \quad (40)$$

Determina-se $f'(x_i, y_i)$ pela Regra da Cadeia:

$$f'(x_i, y_i) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} \quad (41)$$

Substituindo na expressão (40)

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i) h + \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} \right) \frac{h^2}{2!} \quad (42)$$

A estratégia do Método de Runge-Kutta é através de manipulações algébricas, tornar as expressões (37) e (42) equivalentes. Expande-se a expressão (39) em Série de Taylor:

$$f(x_i + p_1 h, y_i + q_{11} k_1 h) = f(x_i, y_i) + p_1 h \frac{\partial f}{\partial x} + q_{11} k_1 h \frac{\partial f}{\partial y} + O(h^2) \quad (43)$$

Substituindo (43) em (37)

$$y_{i+1} = y_i + a_1 h f(x_i, y_i) + a_2 h f(x_i, y_i) + a_2 p_1 h^2 \frac{\partial f}{\partial x} + a_2 q_{11} h^2 f(x_i, y_i) \frac{\partial f}{\partial y} + O(h^3) \quad (44)$$

Reagrupando os termos:

$$y_{i+1} = y_i + [a_1 f(x_i, y_i) + a_2 f(x_i, y_i)]h + \left[a_2 p_1 \frac{\partial f}{\partial x} + a_2 q_{11} f(x_i, y_i) \frac{\partial f}{\partial y} \right] h^2 + O(h^3) \quad (45)$$

Comparando os termos das equações (42) e (45)

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 &= 1 \\ a_2 p_1 &= \frac{1}{2} \\ a_2 q_{11} &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Observa-se que tem três soluções e quatro incógnitas, portanto tem-se infinitas soluções. Portanto existem infinitas formulações para o Método de Runge-Kutta de Segunda Ordem.

É importante realçar que o Método de Heun com uma iteração de correção e o Método de Euler Modificado podem ser classificados como Métodos de Runge-Kutta de Segunda Ordem.

B.1.1.1 Método de Heun

Assumindo:

$$\begin{aligned} a_1 &= a_2 = \frac{1}{2} \\ p_1 &= q_{11} = 1 \\ y_{i+1} &= y_i + \left(\frac{1}{2} k_1 + \frac{1}{2} k_2 \right) h \\ k_1 &= f(x_i, y_i) \\ k_2 &= f(x_i + h, y_i + k_1 h) \end{aligned}$$

- k_1 inclinação no início do intervalo;
- k_2 inclinação no fim do intervalo.

B.1.1.2 Método de Euler Modificado

Assumindo:

$$\begin{aligned} a_0 &= 0 \\ a_2 &= 1 \\ p_1 &= q_{11} = \frac{1}{2} \\ y_{i+1} &= y_i + k_2 h \\ k_1 &= f(x_i, y_i) \\ k_2 &= f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_1\right) \end{aligned}$$

O método de Runge-Kutta mais conhecido é o Método de Ralston. Este método propicia um limite mínimo para o erro de truncamento dos algoritmos de Runge-Kutta de Segunda Ordem.

B.1.1.3 Método de Ralston

Assumindo:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{3} \\ a_2 &= \frac{2}{3} \\ p_1 &= q_{11} = \frac{3}{4} \\ y_{i+1} &= y_i + \left(\frac{1}{3}k_1 + \frac{2}{3}k_2\right) h \\ k_2 &= f\left(x_i + \frac{3}{4}h, y_i + \frac{3}{4}hk_1\right) \end{aligned}$$

B.1.2 Método de Runge-Kutta de Quarta Ordem

De forma semelhante ao que se faz para o Método de Runge-Kutta de Segunda Ordem, pode-se determinar para ordens mais elevadas.

As formulações não são únicas. Apresenta-se a seguir umas das formulações mais utilizadas:

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + \left[\frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3)\right] h \\ k_1 &= f(x_i, y_i) \\ k_2 &= f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1 h\right) \\ k_3 &= f(x_i + h, y_i - hk_1 + 2hk_2) \end{aligned}$$

B.1.3 Método de Runge-Kutta de Quarta Ordem

$$\begin{aligned}y_{i+1} &= y_i + \left[\frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \right] h \\k_1 &= f(x_i, y_i) \\k_2 &= f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1h\right) \\k_3 &= f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hk_2\right) \\k_4 &= f(x_i + h, y_i + hk_3)\end{aligned}$$