UNIVERSIDADE FEDERAL DE PELOTAS
Instituto de Física e Matemática
Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática

Dissertação

Solução da Equação de Advecção-Difusão Estocástica para Simular a Concentração e Deposição de Amônia em Confinamento Bovino

Dominiki Ribas

Pelotas, 2022

Dominiki Ribas

Solução da Equação de Advecção-Difusão Estocástica para Simular a Concentração e Deposição de Amônia em Confinamento Bovino

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática da Universidade Federal de Pelotas, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Modelagem Matemática

Orientador: Dr. Glênio Gonçalves

Pelotas, 2022

Universidade Federal de Pelotas / Sistema de Bibliotecas
Catalogação na Publicação

S237s Santos, Dominiki Ribas dos

Solução da equação de advecção-difusão estocástica para simular a concentração e deposição de amônia em confinamento bovino / Dominiki Ribas dos Santos ; Glênio Aguiar Gonçalves, orientador. — Pelotas, 2021.

54 f. : il.

Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós-Graduação Profissional em Administração Pública em Rede Nacional, Centro de Ciências Socio-Organizacionais, Universidade Federal de Pelotas, 2021.

1. Modelagem matemática. 2. Equação de advecção-difusão. 3. Amônia. 4. Solução analítica. I. Gonçalves, Glênio Aguiar, orient. II. Título.

CDD : 510.212

Elaborada por Aline Herbstrith Batista CRB: 10/1737

SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE ADVECÇÃO-DIFUSÃO ESTOCÁSTICA PARA SIMULAR A CONCENTRAÇÃO E DEPOSIÇÃO DE AMÔNIA EM CONFINAMENTO BOVINO

por

Dominiki Ribas dos Santos

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática, PPGMMat, do Instituto de Física e Matemática da Universidade Federal de Pelotas, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de

Mestre em Modelagem Matemática

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Glênio Aguiar Gonçalves – Orientador (UFPel)

Prof. Dr. Jonas da Costa Carvalho (UFPel)

Prof. Dr. Lidiane Buligon (UFSM)

Profa. Dra. Igor da Cunha Furtado (IFSul)

Pelotas, 15 de dezembro de 2021.

Dedico este trabalho a minha mãe, que me ensinou através do exemplo a nunca desistir.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer a todas as pessoas que entenderam a minha ausência e me incentivaram a continuar, em especial minha família: meu pai, Nereu Ribas por todo o seu apoio incondicional, ao meu irmão Felipe Ribas, pelas longas conversas de incentivo, a minha avó, Maria de Lourdes Ribas por todas as suas orações, a minha tia Glaucia Ribas e minha afiliada Maria Clara Ribas pelos belos momentos de descontração, muitas vezes necessários.
Aos meus amigos tantas vezes presentes e preocupados, vocês são pessoas de luz.
Ao meu orientador Glênio Gonçalves por ser essa pessoa tão humana em um mundo não tão legal.

Pois não posso, não devo
Não quero viver como toda essa gente insiste em viver,
Não posso aceitar sossegado
Qualquer sacanagem ser coisa normal
— MILTON NASCIMENTO E FERNANDO BRANT

RESUMO

RIBAS, Dominiki. **Solução da Equação de Advecção-Difusão Estocástica para Simular a Concentração e Deposição de Amônia em Confinamento Bovino**. 2022. 54 f. Dissertação (Mestrado em Modelagem Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática, Instituto de Física e Matemática, Universidade Federal de Pelotas, Pelotas, 2022.

Há uma preocupação em relação a danos ambientais devido ao aumento considerável da poluição do ar, em grande medida, provocada pela agricultura e pecuária intensiva. Em particular, as grandes propriedades que se dedicam à criação intensiva de animais liberam quantidades consideráveis de amônia, NH_3, tanto na atmosfera, que age como um precursor de gases de efeito estufa, como no solo, cujo efeito em períodos prolongados de tempo é a elevação da acidez. O presente trabalho tem como objetivo quantificar a concentração no ar, juntamente com o fluxo de deposição no solo, da amônia emitida por um confinamento bovino. Para tal fim, apresenta-se o desenvolvimento e aplicação de um modelo matemático, usando a equação de advecção-difusão tridimensional, em regime transiente, adotando um perfil de vento com componente estocástica e coeficientes de difusão turbulenta dependentes da altura, que simula a dispersão do poluente na atmosfera.Também considera-se condições atmosféricas instáveis e estáveis. O modelo desenvolvido usa a combinação do método GILTT (*Generalized Integral Laplace Transform Technique*) com o método de separação de variáveis na solução da equação de advecção-difusão. Esse uso conjunto de métodos apresenta vantagens em relação aos demais métodos que utilizam somente a técnica GILTT por não necessitar inversão numérica da transformada de Laplace, demandando menor esforço computacional. Foram realizadas simulações e comparadas com o experimento realizado em Victória, Austrália, indicando uma boa concordância entre os dados simulados e experimentais.

Palavras-chave: Modelagem Matemática, Equação de Advecção-Difusão, Amônia, Solução Analítica.

ABSTRACT

RIBAS, Dominiki. **Solution of the Stochastic Advection-Diffusion Equation to Simulate Ammonia Concentration and Deposition in Bovine Confinement.**. 2022. 54 f. Dissertação (Mestrado em Modelagem Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática, Instituto de Física e Matemática, Universidade Federal de Pelotas, Pelotas, 2022.

There is concern about environmental damage due to the considerable increase in air pollution, largely caused by intensive agriculture and livestock. In particular, large properties dedicated to intensive animal husbandry release considerable amounts of ammonia, NH_3, both into the atmosphere, which acts as a precursor of greenhouse gases, and into the soil, whose effect over prolonged periods of time is the rise in acidity. The present work aims to quantify the concentration in the air, together with the flux of deposition in the soil, of the ammonia emitted by a bovine feedlot. To this end, we present the development and application of a mathematical model, using the three-dimensional advection-diffusion equation, in a transient regime, adopting a wind profile with a stochastic component and height-dependent turbulent diffusion coefficients, which simulates the dispersion. of the pollutant in the atmosphere. It is also considered unstable and stable atmospheric conditions. The model developed uses the combination of the GILTT method (*Generalized Integral Laplace Transform Technique*) with the method of separation of variables in the solution of the advection-diffusion equation. This joint use of methods has advantages over other methods that use only the GILTT technique, as it does not require numerical inversion of the Laplace transform, requiring less computational effort. Simulations were performed and compared with the experiment carried out in Victoria, Australia, indicating a good agreement between the simulated and experimental data.

Keywords: Mathematical Modelling, Advection-Diffusion Equation, Ammonia, Analytical Solution.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 Esquema ilustrativo representando o poluente em fonte baixa. . . . 22
Figura 2 Esquema ilustrativo de um modelo de dispersão considerando segmentos de plumas 30

Figura 3 Utilização da terra e localização dos amostradores de NH_3. 35

Figura 4 Gráfico ilustrativo da concentração observada e a concentração simulada em diferentes distâncias da fonte emissora no mês de abril 42
Figura 5 Gráfico ilustrativo da concentração observada e a concentração simulada em diferentes distâncias da fonte emissora no mês de maio 42
Figura 6 Gráfico ilustrativo da concentração observada e a concentração simulada em diferentes distâncias da fonte emissora no mês de junho 43

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 Dados Meteorológicos no período de abril a junho do experimento do Victória. 35
Tabela 2 Dados das concentrações médias diurnas e noturnas relatadas no Experimento de Victória. 36
Tabela 3 Fluxo de deposição de NH_3 relatados no experimento de Victória, Austrália. 37
Tabela 4 Concentração observada no experimento de Victória (O) e concentração (S), desvio padrão (σ), Máximos (M), Mínimos (m) e Mediana (M_d)da concentração gerada pelo modelo no mês de abril no período diurno. 40
Tabela 5 Concentração observada no experimento de Victória (O) e concentração (S), desvio padrão (σ), Máximos (M), Mínimos (m) e Mediana (M_d)da concentração gerada pelo modelo no mês de maio no período diurno. 40
Tabela 6 Concentração observada no experimento de Victória (O) e concentração (S), desvio padrão (σ), Máximos (M), Mínimos (m) e Mediana (M_d)da concentração gerada pelo modelo no mês de junho no período diurno. 41
Tabela 7 Concentração observada no experimento de Victória (O) e concentração (S), desvio padrão (σ), Máximos (M), Mínimos (m) e Mediana (M_d)da concentração gerada pelo modelo no mês de abril no período noturno. 41
Tabela 8 Concentração observada no experimento de Victória (O) e concentração (S), desvio padrão (σ), Máximos (M), Mínimos (m) e Mediana (M_d)da concentração gerada pelo modelo no mês de maio no período noturno. 41
Tabela 9 Concentração observada no experimento de Victória (O) e concentração simulada (S), desvio padrão (σ), Máximos (M), Mínimos (m) e Mediana (M_d)da concentração gerada pelo modelo no mês de junho no período noturno. 42
Tabela 10 Deposição (D) observada no experimento de Victória (O) e Simulada (S), desvio padrão (σ), Máximos (M), Mínimos (m) e Mediana (M_d) do fluxo de deposição gerada pelo modelo no mês de abril . . 43
Tabela 11 Deposição (D) observada no experimento de Victória (O) e Simulada (S), desvio padrão (σ), Máximos (M), Mínimos (m) e Mediana (M_d) do fluxo de deposição gerada pelo modelo no mês de maio . . 43

Tabela 12 Deposição (D) observada no experimento de Victória (O) e Simulada (S), desvio padrão (σ), Máximos (M), Mínimos (m) e Mediana (M_d) do fluxo de deposição gerado pelo modelo no mês de junho . 44
Tabela 13 Avaliação Estatística do Modelo: Comparação da Concentração de amônia diurna. 44
Tabela 14 Avaliação Estatística do Modelo: Comparação da Concentração de amônia Noturna 44
Tabela 15 Avaliação Estatística do Modelo: Fator de Correlação em relação ao tempo 44

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

Caracteres arábicos

$3D - GILTT$ *Three-Dimensional Generalized Integral Laplace Transform Technique*

$ADMM$ *Advection Diffusion Multilayer Model*

C Concentração média de um poluente passivo (g/m^3)

CLC Camada Limite Convectiva

CLE Camada Limite Estável

CLP Camada Limite Planetária

CLR Camada Limite Residual

CO_2 Dióxido de Carbono

C_o Concentração Observada (g/m^3)

C_p Concentração Predita (g/m^3)

D Fluxo de Deposição $(g/(m^2 s))$

d Deslocamento no plano zero (m)

EDO Equação Diferenciais Ordinária

$F(y)$ Concentração média do poluente sobre o eixo y (g/m^3)

G Solução de Green para a concentração (g/m^3)

GEE Gás de Efeito Estufa

$GITT$ *Generalized Integral Transform Technique*

$GIADMT$ *Generalized Integral Advection Diffusion Multilayer Technique*

$GILTT$ *Generalized Integral Laplace Transform Technique*

H_S Altura da fonte (m)

h Altura da camada limite (m)

k Constante de Von-Kármán

k_0 Constante

K_x Coeficiente de difusão na direção x (m^2/s)

K_y Coeficiente de difusão na direção y (m^2/s)

K_z Coeficiente de difusão na direção z (m^2/s)

L Comprimento de Monin-Obukov (m)

m Intensidade atmosférica

N Nitrogênio

n Rugosidade da superfície

NH_3 Amônia

N_2O Óxido Nitroso

ONU Organização das Nações Unidas

Q Intensidade da fonte (g/s)

SO_2 Dióxido de enxofre

T Temperatura (K)

t Tempo (s)

u Velocidade média do vento orientado na direção x (m/s)

u_* Velocidade de fricção (m/s)

u' Flutuação na velocidade do vento orientado na direção x (m/s)

V_g Velocidade de deposição do poluente (m/s)

v Velocidade média do vento na direção y (m/s)

v' Flutuação na velocidade do vento orientado na direção y (m/s)

w_* Velocidade convectiva (m/s)

x Distância da fonte (m)

z Altura acima da superfície (m)

z_0 Comprimento de rugosidade aerodinâmico (m)

z_1 Altura em que os fatores desejados são avaliados (m)

z_t Altura Pretendida (m)

Caracteres gregos

α Intensidade da turbulência na direção x

β Intensidade da turbulência na direção y

γ Intensidade da turbulência na direção z

δ Função delta de Dirac

η Autovalor do problema

υ Autovalor do problema

κ Autovalor do problema

λ Autovalor do problema

τ Tempo de liberação da pluma instantânea (s)

ψ_κ Autofunção do problema

ψ Função estabilidade

φ_λ Autofunção do problema

ϕ_α Autofunção do problema

σ_θ Desvio padrão da direção do vento

χ Número randônico

ρ_u Parâmetro de intercorrelação

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 14

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA 17
2.1 Experimentos de medida de concentração de amônia 20

3 MODELO MATEMÁTICO 22
3.1 Solução da equação de advecção-difusão 23
3.2 Determinação da solução para as condições inicial e de fonte 25
3.3 Solução considerando uma fonte contínua 27
3.4 Solução de Green 28
3.4.1 Solução com fonte de Heaviside 28
3.5 Modelo meteorológico com condições variáveis 29

4 DADOS PARA A VALIDAÇÃO DO MODELO 31
4.1 Parametrizações da Turbulência 31
4.1.1 Parametrizações para Condições Estáveis 31
4.1.2 Parametrizações para Condições Instáveis 32
4.1.3 Flutuações do Vento 34
4.2 Experimento de Victória-Austrália 34
4.3 Índices Estatísticos 37

5 RESULTADOS 39
5.1 Discussão dos Resultados 44

6 CONCLUSÃO 47

REFERÊNCIAS 48

1 INTRODUÇÃO

As consequências da exploração do meio ambiente estão sendo testemunhadas pelos seres humanos com maior percepção nas últimas décadas. Os poluentes atmosféricos possuem características com efeitos nocivos à população e ao ambiente. Conforme a Organização das Nações Unidas (ONU, 2019), 90% da população mundial respira ar poluído. Como consequência da poluição do ar, as doenças respiratórias tiveram aumento significativo nas últimas décadas.

Um dos principais responsáveis por essa situação é a produção intensiva da agricultura e a pecuária, sendo a pecuária responsável por 51% de todas as emissões de gases de efeito estufa no mundo de acordo com o relatório da Organização de Alimentos e Agricultura das Nações Unidas (OMS, 2016). Os confinamentos intensivos de gado são fontes de emissão de amônia (NH_3) que, além dos efeitos nocivos ao sistema respiratório, podem ocasionar reforço aos nutrientes no ambiente, levando ao aumento de certas produções e provocando modificações em todo o ecossistema tanto terrestre quanto aquático.

A origem da contaminação do ar pode ser descrita de forma antropogênica, causada pela produção intensiva agrícola e animal ou por emissões industriais e automotivas, por exemplo. Já a poluição atmosférica causada por consequências naturais, tal como uma erupção vulcânica (SO_2), não possui forma alguma de controle, ao contrário das emissões antropogênicas que podem ser contidas (BUSKE, 2008). O resultado da emissão desequilibrada por parte da população pode ocasionar problemas irreversíveis ao equilíbrio ecológico.

A modelagem matemática é uma importante ferramenta no entendimento da dispersão de poluentes na atmosfera. Além de prever o impacto ambiental, a modelagem pode ser utilizada para reconhecer a fonte poluidora, avaliar zonas com maiores risco ou também estimar os valores máximos que serão emitidos pela fonte e evitar a ocorrência de riscos à população vizinha. Na modelagem de um fenômeno relacionado à dispersão de um poluente, os conceitos meteorológicos são de suma relevância. Consequentemente, torna-se indispensável o entendimento dos processos primordiais meteorológicos, como a termodinâmica básica, variáveis de estado, conceitos de

estabilidade estática e equações fundamentais de conservação de energia, massa e momentum (WEYMAR, 2016).

Arya (1999), descreve a classificação dos movimentos atmosféricos e fenômenos meteorológicos quanto às dimensões, são elas: microescala (escala horizontal de até $10\,km$), mesoescala (escala horizontal até $100\,km$) e macroescala (escala horizontal de até $1000\,km$). O transporte e a dispersão de poluentes emitidos por fontes próximas à superfície terrestre e suas características são determinadas pelos processos que ocorrem em pequena escala, situados na camada limite planetária (CLP), localizada na parte inferior da troposfera. Estes fenômenos que se dão em pequena escala são estudados pela micrometeorologia, área da meteorologia.

Os estudos realizados em micrometeorologia geralmente se utilizam de modelos matemáticos para a descrição do fenômeno investigado. Os modelos são úteis na compreensão do transporte, da dispersão e da transformação físico-química dos contaminantes presentes na atmosfera, possibitando a previsão e predição da concentração de poluentes em locais de interesse.

O estudo da dispersão, difusão e transporte de poluentes, é uma questão complexa e é geralmente descrita em referenciais Lagrangeano ou Euleriano. No referencial Lagrangeano, o fluído acompanha o movimento da atmosfera, enquanto o referencial Euleriano é pautado em um referencial fixo no espaço para a medição do movimento do fluído. O modelo de pluma gaussiana, um modelo Euleriano com descrição simplificada, é a forma mais empregada para a simulação ou reprodução dos dados de concentração observados. Um exemplo de modelo Euleriano de dispersão de escalares, conhecida como equação de advecção-difusão, é baseado na conservação de massa (STEFANELLO, 2017).

Outra forma de diferenciação entre modelos é que estes podem ser classificados em determinísticos e estocásticos. Nos modelos determinísticos os resultados são definidos por parâmetros pré-determinados, enquanto nos modelos estocásticos, os parâmetros seguem uma distribuição de probabilidades.

Uma das dificuldades de se estudar a poluição do ar esta relacionada à complexidade da CLP, que é diretamente influenciada pela superfície terrestre. O aquecimento diurno ofertado pelo sol e o resfriamento noturno causam escoamentos altamente turbulentos, Stull (1988) explica o ciclo da turbulência da seguinte forma: ao nascer do sol a atmosfera é aquecida pelo fluxo de calor turbulento da superfície do solo, que forma uma nova camada que possui mais turbulência chamada camada de mistura ou camada limite convectiva (CLC), que é limitada superiormente pela zona de entranhamento. No final do dia, com o pôr do sol, inicia-se o resfriamento terrestre que provoca um fluxo de calor negativo, no qual a superfície extrai energia cinética dos grandes turbilhões das camadas. Esta nova camada que se forma é menos turbulenta que a CLC e é chamada de camada limite estável (CLE), sendo limitada superiormente pela

camada limite residual (CLR).

Com a diminuição da velocidade do vento, as complexidades da camada limite tornam-se mais evidentes, aumentando o grau de instabilidade atmosférica. Os instrumentos de medidas convencionais não funcionam adequadamente em situações de baixa velocidade do vento (ZANNETTI, 1990).

Neste trabalho, utiliza-se de um modelo desenvolvido por meio da equação de advecção-difusão transiente, tridimensional e estocástica, solucionada de forma analítica, empregando a técnica de separação de variáveis em conjunto com o método GILTT (*Generalized Integral Laplace Transform Technique*). Este modelo apresenta parâmetros difusivos em diferentes condições de estabilidade.

A presente dissertação encontra-se estruturada em seis capítulos: O segundo capítulo apresenta a revisão bibliográfica com ênfase voltada à soluções analíticas da equação de advecção-difusão, sobretudo, os modelos relacionados a técnica GILTT, juntamente com os trabalhos e artigos associados à concentração e fluxo de deposição de amônia. O capítulo três apresenta o desenvolvimento do modelo matemático de pluma segmentada para a solução da equação de advecção-difusão com uma abordagem tridimensional, em regime transiente e usando parâmetros estocásticos. No quarto capítulo é abordada a parametrização da turbulência com o intuito de representar de forma adequada os resultados de dispersão de amônia e, também, é feito um breve relato do experimento no confinamento de Victória. No quinto capítulo serão expostos os resultados encontrados em comparação com o experimento realizado em Victória, Austrália, a fim de comparar e validar a técnica desenvolvida neste trabalho com os dados experimentais. Encontra-se no último capítulo a conclusão e perspectivas futuras do trabalho.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Os efeitos da poluição passaram a ser intensamente discutidos a partir de 1960. Acompanhando esses efeitos, a comunidade científica dedicou-se a determinar o comportamento dos poluentes no ar por meio de modelos matemáticos. A equação de advecção-difusão passou a ser de extrema importância para as pesquisas relacionadas ao tema.

A primeira solução para a equação foi elaborada por Fick no século XIX para simulação envolvendo casos de difusão de matéria ou energia, e, posteriormente, foi utilizada para simular a dispersão de poluentes, a partir de uma solução gaussiana. As condições de contorno, nesta solução, são consideradas de fluxos nulos nos extremos superior e inferior da CLP e o coeficiente de difusão e a velocidade do vento são constantes (PEREIRA, 2016).

A solução bidimensional para a equação de advecção-difusão foi apresentada por Roberts (1923), considerando uma fonte ao nível do solo e eventos em que a velocidade do vento e o coeficiente de difusão vertical são dadas por uma lei de potências, representada por:

$$u = u_1 \left(\frac{z}{z_1}\right)^m ; \tag{1}$$

$$K = K_z \left(\frac{z}{z_1}\right)^n . \tag{2}$$

onde z_1 é uma altura de referência na qual os parâmetros necessários à solução são medidos e m e n variam de 0 a 1, em que m está relacionado com a intensidade atmosférica e n está relacionado com a rugosidade da superfície.

Rounds (1955) desenvolveu uma solução bidimensional para fontes acima do nível do solo, mas somente para coeficientes de difusão lineares. Utilizando a lei de potências, Smith (1957a) propõe uma nova solução para a equação bidimensional, determinando u e K_z segundo a Lei Conjugada de Smith ($\alpha = 1 - \beta$). No mesmo ano, Smith (1957b) aponta uma nova solução com u constante e K_z dado por:

$$K_z = k_0 \, z^{\alpha} (h - z)^{\beta} \tag{3}$$

no qual k_0 é uma constante e α e β variam de 0 a 1, conforme a altura da camada limite.

Amplamente utilizada no Reino Unido, a solução apresentada por Scriven R.and Fisher (1975) , o vento médio é constante e K_z (coeficiente de difusão) é descrito como:

$$K_z \equiv z,\ para\ 0 \leq z \leq z_t \qquad e \qquad K_z = K_z(z_t),\ para\ z_t \leq z \leq h \tag{4}$$

sendo z_t pré determinada, geralmente coincidente com a altura da camada limite. Esta solução admite condições de contorno não nulas, do tipo:

$$K_z \frac{\partial C}{\partial Z} = V_g C \tag{5}$$

em que V_g é a velocidade de deposição (m/s).

Yeh e Huang (1975) e Berlyand (1975) consideraram fontes elevadas para a resolução da equação de advecção-difusão em que u e K_z são dados por perfis de potência e condição de contornor $K_z \frac{\partial C}{\partial Z} = 0$ em $z = \infty$. Demuth (1978) apresentou uma solução em termos de funções de Bessel, considerando uma camada verticalmente limitada.

Ao utilizar a teoria de Monin-Obukhov, Ulden (1978) idealizou um modelo para fontes elevadas, apropriado para fontes dentro da camada limite superficial. Esse modelo considera o vento e o coeficiente de difusão seguindo perfis de similaridade.

As soluções apresentadas até o momento são da forma analítica, ou seja, não há aproximação ao longo da derivação da solução. Nas últimas décadas surgiram outros modelos analíticos ou semi-analíticos não Gaussianos e com coeficientes de difusão arbitrários. Dentre estes, destacam-se principalmente: ADMM (*Advection Diffusion Multilayer Model*); GITT (*Generalized Integral Transform Technique*), GIADMT (*Generalized Integral Advection Diffusion Multilayer Technique*), GILTT (*Generalized Integral Laplace Transform Technique*) e 3D-GILTT (*Three- Dimensional Generalized Integral Laplace Transform Technique*).

No método ADMM a equação de advecção-difusão é resolvida semi analiticamente. A ideia básica do método ADMM é baseada na discretização da CLP em N subcamadas, em que em cada subcamada a equação de advecção-difusão é resolvida pela técnica da transformada de Laplace considerando-se valores médios para o coeficiente de difusão e perfil de vento. Assim, o problema com coeficiente variável foi substituído por um conjunto de problemas com coeficientes constantes (coeficientes médios), acoplados por condições de continuidade de concentração e fluxo de contaminante nas interfaces. A solução semi-analítica é dada em forma integral e tem sido amplamente empregada em problemas relacionados à dispersão de poluição atmosférica. Uma revisão completa desse método pode ser encontrada no trabalho de Moreira et al. (2006). Podemos citar ainda: Moura, Vilhena e Degrazia (1995), Vilhena et al. (1998), Degrazia, Moreira e Vilhena (2001), Neto (2003), Costa, Moreira

e Vilhena (2004), Moreira e Tirabassi (2004), Moreira, Carvalho e Tirabassi (2005), Moreira, Neto e Carvalho (2005), Moreira et al. (2005) e Buligon, Moreira e Vilhena (2006).

O método GITT tem sido empregado em soluções lineares e não-lineares de diferentes problemas de difusão e advecção-difusão. Suas principais etapas incluem a elaboração do problema auxiliar de Sturm-Liouville associado ao problema original, a determinação de uma série através da técnica de transformada integral usando como base as autofunções que constituem a solução do problema de Sturm-Liouville e a subtituição dessa série no problema original. Esse procedimento resulta em uma equação diferencial ordinária, que é resolvida numericamente (COSTA et al., 2006). Esse método é utilizado nos trabalhos de Cataldi et al. (2000), Ribeiro et al. (2000), Storch e Pimentel (2003), Velloso et al. (2004), Cotta e Barros (2007) e Guerrero et al. (2012).

Os métodos GITT e ADMM foram usados de forma combinada na solução da equação de advecção-difusão, obtendo o chamado método GIADMT (COSTA et al., 2006; VILHENA et al., 2008; COSTA et al., 2012; COSTA et al., 2012). O conceito do método consiste na transformação de uma equação tridimensional em bidimensional pela aplicação da técnica GITT na variável y. Para resolver o problema bidimensional, aplica-se o método ADMM.

O método GILTT tem uma formulação similar ao método GITT, com a diferença importante de que o sistema de equações diferenciais ordinárias é resolvido de forma analítica por meio da transformada de Laplace. Esta técnica é desenvolvida de forma analítica, exceto pelo erro de truncamento da solução em série. O método GILTT foi empregado na simulação de um amplo espectro de problemas de advecção-difusão. Uma revisão do método pode ser encontrada no trabalho de Moreira et al. (2009). Podemos citar ainda: Wortmann et al. (2005), Moreira et al. (2006), Buske et al. (2007), Buske et al. (2007), Tirabassi et al. (2008).

Mais recentemente uma solução da equação de advecção-difusão combinando o método de separação de variáveis e o método GILTT foi obtida pelos autores Goncalves et al. (2018), Weymar et al. (2018), Favero et al. (2020), Favero (2020) e Buske et al. (2020). Através dessa metodologia é encontrada uma solução analítica sem a necessidade de inversão numérica no tempo (os problemas transientes que utilizam somente a GILTT possuem uma inversão numérica no tempo).

Para resolver a equação de advecção-difusão tridimensionais de forma analítica, em 2009, surgiu o método 3D-GILTT. A técnica GILTT é aplicada na variável y de forma a tornar a equação bidimensional cuja solução já é conhecida. Alguns trabalhos consideram que o coeficiente de difusão é variável com o tempo. Podemos citar: Buske, Vilhena M. T. Bodmann e Tirabassi (2012), Buske et al. (2012c), Buske et al. (2009); Buske, Vilhena e Moreira (2009); Buske et al. (2011a), Buske et al. (2011b),

Buske et al. (2012a), Buske et al. (2012b), Vilhena et al. (2012) e Silveira et al. (2018).

2.1 Experimentos de medida de concentração de amônia

As consequências da emissão de amônia na atmosfera, além de produzir substâncias nocivas à saúde humana, contribui com efeitos deletérios ao ecossistema planetário, incluindo a eutrofização do solo, alteração na biodiversidade e efeitos químicos na água. Embora a amônia não seja um gás de efeito estufa (GEE), ela tem um implicações indiretas, sendo um precursor na formação de gases de efeito estufa, como óxido nitroso (N_2O), que tem consequências importantes para o aquecimento global, com impacto aproximadamente 300 vezes maior que o CO_2 (HRISTOV et al., 2011). As consequências da amônia para o ecossistema incluem a eutrofização do solo, mudanças na biodiversidade e interferência na química da água.

Fowler et al. (1998) relataram em seu estudo medições de concentrações de NH_3 próximas a uma unidade avícola com aproximadamente 120.000 frangos de corte, localizada no sul da Escócia. Ao quantificar o destino das emissões de amônia da granja foram utilizadas as concentrações medidas e a relação entre a resistência do dossel e a concentração do NH_3 no ambiente das medições de fluxo intensivo. Os resultados mostram que ocorre diminuição da concentração conforme aumenta a distância da granja.

Hao et al. (2006) estudou a sorção de amônia pelo solo e por áreas com grama perene em condições a favor do vento. O estudo foi realizado em Alberta, no Canadá e contou com dois lotes com 25000 cabeças de gado cada, no período de junho a outubro de 2002. Foi constatado que 19% de toda a emissão de NH_3 disponibilizada pelos lotes ficam depositadas em uma área de até $1700m$ de distância das fontes. Com isso, concluíram que o NH_3 atmosférico de operações de gado podem contribuir com nitrogênio (N) para o solo e vegetação local, podendo desequilibrar o ecossistema da região.

Foi publicado por Shen et al. (2016) um artigo relatando o fluxo de deposição o e amônia em Victória, Austrália. O estudo foi realizado para medir o fluxo de deposição seco de NH_3 em um confinamento comercial de gado de corte. A área analisada foi de $1km$ da borda do confinamento no período de abril a junho. Para as análises foi utilizado um modelo de troca de NH_3 bidirecional chamado de modelo de ponto de compensação do dossel de duas camadas, já os dados de fluxo da deposição no local foram medidos por um sistema *denuder*. Os resultados expuseram que a taxa de amônia depositada em torno do confinamento proporciona uma entrada significativa de nitrogênio nos ecossistemas circunstantes.

Ao analisarem uma fazenda leiteira com ventilação natural, na República Tcheca, Zapletal M. (2019) compararam as medidas das emissões inferidas de concentração

de NH_3 para obter dados para a derivação da relação emissão-deposição. Os autores correlacionaram o padrão diário de uma fonte com a temperatura na fazenda, o que resultou em um padrão diário da fonte em uma combinação da temperatura em uma concentração de fonte e o efeito da taxa de ventilação do edifício. A concentração e o fluxo total de deposição tiveram padrões espaciais semelhantes, diminuíram exponencialmente conforme o aumento da distância do celeiro.

3 MODELO MATEMÁTICO

Considera-se poluição todo lançamento de moléculas ao ambiente que possa causar desequilíbrio na constituição atmosférica. Uma fonte libera substâncias químicas a uma altura H_s, com uma taxa de emissão de poluente Q (gs^{-1}), de acordo com a ilustração da Figura 1. A variável h representa a altura da camada limite e $u(z)$ é a velocidade média do vento.

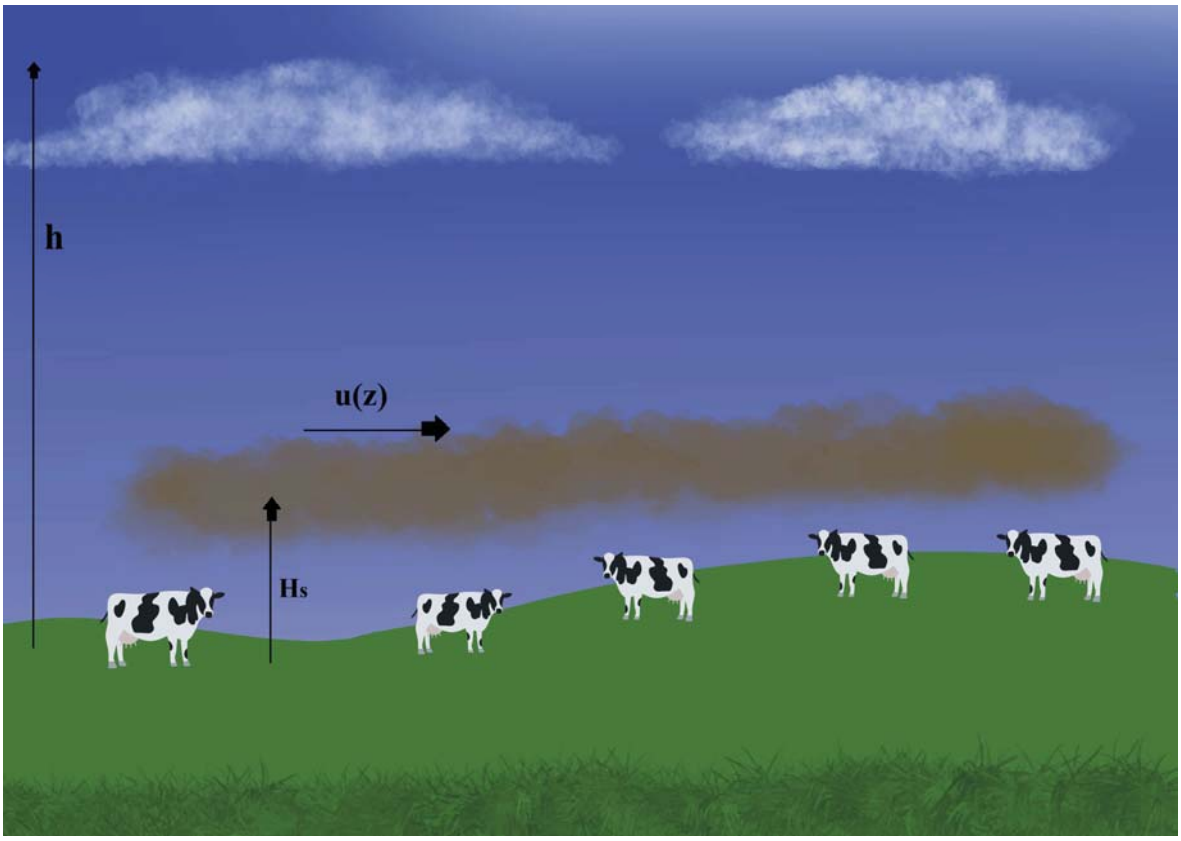


Figura 1: Esquema ilustrativo representando o poluente em fonte baixa.
Fonte: da autora.

A equação tridimensional transiente apresentada por Businger et al. (1971), advectiva nas direções horizontais e difusiva na direção vertical, que descreve a concentração C de poluentes na atmosfera, liberado por uma fonte Q, no tempo inicial $t = 0$, é

descrita como:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u\frac{\partial C}{\partial x} + v\frac{\partial C}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial z}\left(K_z\frac{\partial C}{\partial z}\right), \tag{6}$$

na qual $C(t, x, y, z)$ representa a concentração média do poluente (g/m^3), $K_z(m^2/s)$ é o coeficiente de difusão vertical do transporte turbulento, u e v são velocidades médias (m/s) nas direções longitudinal e transversal, respectivamente.

A condição de contorno a qual a equação estará sujeita terá condições de fluxo nulo no solo (ou ao nível da rugosidade z_0) e no topo da camada limite (h):

$$K_z\frac{\partial C}{\partial z} = 0 \qquad em\ z = h\ e\ z = z_0. \tag{7}$$

Para a solução do problema aqui proposto, considerou-se a condição inicial, em $t = 0$, e a condição de fonte , $x = 0$, sendo dadas respectivamente por:

$$uC(0, 0, y, z) = Q(0)F(y)\delta(z - H_s); \tag{8}$$

$$uC(t, 0, y, z) = Q(t)F(y)\delta(z - H_s). \tag{9}$$

em que $H_s(m)$ é a altura, $Q(g/s)$ é a taxa de emissão da fonte e $F(y)$ é uma concentração arbitrária do poluente sobre o eixo y.

3.1 Solução da equação de advecção-difusão

Utiliza-se a técnica de separação de variáveis para obter uma solução analítica para o modelo de disperção tridimensional transiente aqui desenvolvido. Inicialmente considera-se u e v constantes e o coeficiente de difusão vertical $K_z = K_z(z)$. Pela técnica de separação de variáveis, as autofunções que compõem a solução são resultados da resolução das seguintes equações diferenciais ordinárias:

$$\frac{d}{dt}T_\nu = -\nu T_\nu, \tag{10}$$

$$u\frac{d}{dx}X_\eta = \eta X_\eta, \tag{11}$$

$$v\frac{d}{dy}Y_\kappa = -\kappa Y_\kappa, \tag{12}$$

$$\frac{d}{dz}\left(K_z\frac{d}{dz}Z\right) = [\eta - (\kappa + \nu)]Z. \tag{13}$$

De forma mais conveniente, expressa-se os autovalores das equações acima:

$$\kappa = \lambda - \nu, \tag{14}$$

$$\nu = -\kappa + \lambda, \tag{15}$$

$$\eta = \alpha + \lambda \Rightarrow \eta - (\kappa + \nu) = \alpha. \tag{16}$$

Substituindo no sistema de equações diferenciais, reescrevê-se da seguinte maneira os autovalores:

$$\frac{d}{dt}T_{\kappa\lambda} = (\kappa - \lambda)T_{\kappa\lambda}, \tag{17}$$

$$u\frac{d}{dx}X_{\alpha\lambda} = (\alpha + \lambda)X_{\alpha\lambda}, \tag{18}$$

$$v\frac{d}{dy}Y_{\kappa} = -\kappa Y_{\kappa}, \tag{19}$$

$$\frac{d}{dz}\left(K_z(z)\frac{d}{dz}Z_{\alpha}\right) = \alpha Z_{\alpha}. \tag{20}$$

As soluções para as equações (17), (18) e (19) são, respectivamente:

$$T_{\kappa\lambda}(t) = T_{\kappa}(t)T_{\lambda}(t) = e^{\kappa t}e^{-\lambda t}, \tag{21}$$

$$X_{\alpha\lambda}(x) = X_{\alpha}(x)X_{\lambda}(x) = e^{(\alpha+\lambda)\frac{x}{u}}, \tag{22}$$

$$Y_{\kappa}(y) = e^{\frac{-\kappa}{v}y}. \tag{23}$$

Na equação (20) é aplicado o método GILTT (MOREIRA et al. 2009) e, pelo método da separação de variáveis, a solução do problema é dada na forma de um produto de autofunções:

$$C_{\kappa\lambda\alpha}(t,x,y,z) = [T_{\kappa}(t)Y_{\kappa}(y)][T_{\lambda}(t)X_{\lambda}(x)][X_{\alpha}(x)GILTT_{\alpha}(z)]. \tag{24}$$

Tratando de forma individual cada um dos fatores que compõe a solução, agrupando as autofunções com o mesmo autovalor associado, pode-se reescrever:

$$\psi_{\kappa}(t,y) = T_{\kappa}(t)Y_{\kappa}(y) = e^{\frac{-\kappa}{v}(y-vt)}, \tag{25}$$

$$\varphi_{\lambda}(t,x) = T_{\lambda}(t)X_{\lambda}(x) = e^{-\lambda\left(t-\frac{x}{u}\right)}, \tag{26}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(K(z)\frac{\partial}{\partial z}\phi_{\alpha}(x,z)\right) = u\frac{\partial}{\partial x}\phi_{\alpha}(x,z). \tag{27}$$

Para se chegar na equação (27), a partir da equação (20), considera-se que

$$\phi_{\alpha}(x,z) = X_{\alpha}(x)Z_{\alpha}(z). \tag{28}$$

A solução geral da equação de advecção-difusão é uma combinação linear do produto das autofunções:

$$C(t,x,y,z) = \int_0^\infty A(\kappa)\psi_\kappa(t,y)d\kappa \int_0^\infty B(\lambda)\varphi_\lambda(t,x)d\lambda GILTT(x,z), \tag{29}$$

em que $\kappa(m)$ e $\lambda(1/s)$ são autovalores contínuos no intervalo $[0,\infty[$.

Expressando $\xi(x,z)$ como solução da equação (27) pelo método GILTT, é possível representar a concentração média da seguinte forma:

$$C(t,x,y,z) = \psi(t,y)\varphi(t,x)\xi(x,z). \tag{30}$$

onde:

$$\psi(t,y) = \int_0^\infty A(\kappa)\psi_\kappa(t,y)d\kappa, \tag{31}$$

$$\varphi(t,x) = \int_0^\infty B(\lambda)\varphi_\lambda(t,x)d\lambda. \tag{32}$$

Para determinar os coeficientes de expansão $A(\kappa)$ e $B(\lambda)$ será necessário considerar a condição inicial e a condição em $x = 0$, chamada condição de fonte.

3.2 Determinação da solução para as condições inicial e de fonte

Inicialmente será utilizada a condição inicial que foi prescrita ao problema. Tomamos:

$$uC(0,x,y,z) = Q(0)F(y)\delta(z - H_u) = u\psi(0,y)\varphi(0,x)\varepsilon(x,z). \tag{33}$$

Desta forma se estabelece as seguintes igualdades:

$$\begin{cases} \psi(0,y) = F(y) \\ \varphi(0,x) = Q(0) \\ \varepsilon(x,z) = \frac{\delta(z-H_s)}{u} \end{cases} \tag{34}$$

Com a determinação das igualdades, torna-se possível encontrar o coeficiente de expansão $A(\kappa)$. Para isso, resolve-se a integral (31), fazendo a substituição da autofunção pela sua forma encontrada na equação (25).

$$\psi(t.y) = \int_0^\infty A(\kappa)\psi_\kappa(t,y)d\kappa = \int_0^\infty A(\kappa)e^{\frac{-\kappa}{v}(y-vt)}d\kappa. \tag{35}$$

Por intermédio das igualdades em (34) e considerando a condição inicial em $t = 0$:

$$\psi(0,y) = F(y) = \int_0^\infty A(\kappa)e^{\frac{-\kappa y}{v}}d\kappa, \tag{36}$$

$$\psi(0,y) = F(y) = \int_0^\infty vA(\kappa)e^{\frac{-\kappa y}{v}}\frac{1}{v}d\kappa. \tag{37}$$

Para simplificar se faz a mudança: $\mu = \frac{\kappa}{v}$, $d\mu = \frac{1}{v}d\kappa$ e $vA(\kappa) = D(\mu)$. Desta forma:

$$\psi(0, y) = F(y) = \int_0^\infty D(\mu)e^{-\mu y}d\mu. \tag{38}$$

Ao observar esta equação é possível estabelecer que $\psi(0, y)$ pode ser escrita como uma transformada de Laplace. E sendo assim:

$$D(\mu) = \mathcal{L}^{-1}[F(y), y \to \mu], \tag{39}$$

em que $\mathcal{L}^{-1}$ é a representação da transformada inversa de Laplace. Então:

$$\psi(t, y) = \int_0^\infty \mathcal{L}^{-1}[F(y), y \to \mu]e^{-\mu(y-vt)}d\mu = F(y - vt). \tag{40}$$

Para se obter a solução completa do problema, utiliza-se a condição de fonte, em que $x = 0$. Assim:

$$uC(t, 0, y, z) = Q(t)F(y - vt)\delta(z - H_s) = u\psi(t, y)\varphi(t, 0)\xi(0, z). \tag{41}$$

Empregando mais uma vez o procedimento aplicado na equação (35), teremos as seguintes igualdades:

$$\begin{cases} \varphi(t, 0) = Q(t) \\ u\xi(0, z) = \delta(z - H_s) \end{cases} \tag{42}$$

De forma análoga ao processo aplicado à condição $t = 0$, a solução para φ é dada por:

$$\varphi(t, x) = \int_0^\infty B(\lambda)\varphi_\lambda(t, x)d\lambda = \int_0^\infty B(\lambda)e^{-\lambda(t-\frac{x}{u})}d\lambda. \tag{43}$$

E, analisando em $x = 0$, resulta em:

$$\varphi(t, 0) = \int_0^\infty B(\lambda)e^{-\lambda t}d\lambda. \tag{44}$$

Observa-se que a expressão dada em (44) também se trata de uma transformada de Laplace e desta forma poderemos determinar o coeficiente $B(\lambda)$.

$$\varphi(t, 0) = Q(t), \tag{45}$$

$$\varphi(t, 0) = Q(t) = \mathcal{L}\{B(\lambda), \lambda \to t\}, \tag{46}$$

$$L^{-1}\{Q(t), t \to \lambda\} = \mathcal{L}^{-1}\{\{B(\lambda), \lambda \to t\}, t \to \lambda\} = B(\lambda). \tag{47}$$

Os coeficientes de expansão $B(\lambda)$ são determinadas pela transformada inversa de Laplace do termo de fonte:

$$\varphi(t, x) = \int_0^\infty \mathcal{L}^{-1}\{Q(t), T \to \lambda\}e^{-\lambda\left(t-\frac{x}{u}\right)}d\lambda = Q\left(t - \frac{x}{u}\right). \tag{48}$$

Isto posto, a solução é um produto das equações (40) e (48) e a solução de $\xi(x, z)$ que é obtida pelo método GILTT. Consequentemente, a solução é dada por:

$$C(t, x, y, z) = F(vt - y)Q\left(t - \frac{x}{u}\right)\xi(x, z). \tag{49}$$

3.3 Solução considerando uma fonte contínua

Ao se considerar como fonte uma função delta de Dirac, pode se escrever $Q(t) = Q\delta(t)$ e $F(y) = \delta(y)$ e a concentração de poluentes então é dada por:

$$C(t,x,y,z) = 2Q\delta(vt-y)\delta\left(t-\frac{x}{u}\right)\xi(x,z). \tag{50}$$

A delta de Dirac é uma função infinitamente concentrada e pode ser aproximada pelo seguinte limite:

$$\delta\left(t-\frac{x}{u}\right) = \lim_{b\to 0}\frac{1}{\sqrt{\pi b}}e^{-\frac{(t-\frac{x}{u})^2}{b}}. \tag{51}$$

ou,

$$\delta\left(t-\frac{x}{u}\right) = u\delta\left(ut-x\right) = \lim_{b\to 0}\frac{u}{\sqrt{\pi b}}e^{-\frac{(ut-x)^2}{b}}. \tag{52}$$

De modo análogo para $\delta(vt-y)$, chega-se à expressão:

$$\delta(vt-y) = \lim_{c\to 0}\frac{1}{\sqrt{\pi c}}e^{-\frac{(vt-y)^2}{c}}. \tag{53}$$

Agora, pode-se determinar que os termos b e c, até aqui arbitrários, sejam dados por $b = 4K_x\frac{x}{u}$ e $c = 4K_y\frac{x}{u}$. Assim, é possível reescrever as igualdades (51) e (53) da forma:

$$\delta\left(t-\frac{x}{u}\right) = \lim_{K_x\to 0}\frac{u}{\sqrt{4\pi K_x\frac{x}{u}}}e^{-\frac{(ut-x)^2}{4K_x\frac{x}{u}}}, \tag{54}$$

$$\delta(vt-y) = \lim_{K_y\to 0}\frac{1}{\sqrt{4\pi K_y\frac{x}{u}}}e^{-\frac{(vt-y)^2}{4K_y\frac{x}{u}}}, \tag{55}$$

Então:

$$Q(t)\delta(vt-y)\delta\left(t-\frac{x}{u}\right) = \lim_{K_y\to 0}\lim_{K_x\to 0}\frac{Q(t)u}{\sqrt{16\pi^2K_xK_y(\frac{x}{u})^2}}e^{\frac{-(vt-y)^2}{4K_y\frac{x}{u}}}e^{\frac{-(ut-x)^2}{4K_x\frac{x}{u}}}. \tag{56}$$

E a expressão que determina a concentração é, então, representada por:

$$C(t,x,y,z) = \lim_{K_y\to 0}\lim_{K_x\to 0}\frac{Q(t)u}{\sqrt{16\pi^2K_xK_y(\frac{x}{u})^2}}e^{\frac{-(vt-y)^2}{4K_y\frac{x}{u}}}e^{\frac{-(ut-x)^2}{4K_x\frac{x}{u}}}\xi(x,z). \tag{57}$$

Fisicamente, para modelar fenômenos de dispersão, é importante considerar a difusão nas direções horizontais. Para isso, é necessário relaxar os limites de K_y e K_x.

$$C(t,x,y,z) = \frac{Q(t)u}{\sqrt{16\pi^2K_xK_y(\frac{x}{u})^2}}e^{\frac{-(vt-y)^2}{4K_y\frac{x}{u}}}e^{\frac{-(ut-x)^2}{4K_x\frac{x}{u}}}\xi(x,z). \tag{58}$$

3.4 Solução de Green

A solução de uma fonte delta de Dirac é também uma solução de Green, G. Uma das características dessa solução é que, uma vez conhecida, é possível encontrar soluções para diferentes formas de fontes dependente do tempo. Para isso, a fonte $Q(t)$ é posta como $\delta(t-\tau)$. Substituíndo a fonte na equação (56).

$$Q\delta\left((t-\tau)-\frac{x}{u}\right)\delta(v(t-\tau)-y) = \\ = \lim_{K_y,K_x\to 0}\frac{Q(\tau)u}{\sqrt{4\pi K_x K_y(\frac{x}{u})^2}}e^{\frac{-(u(t-\tau)-x)^2}{4K_x\frac{x}{u}}}e^{\frac{-(v(t-\tau)-y)^2}{4K_y\frac{x}{u}}}. \tag{59}$$

Como feito anteriormente, para representar melhor o fenômeno da dispersão, deve-se relaxar os limites de K_x e K_y e, inserindo a fonte (59) na igualdade (58), encontra-se a solução concentração para uma fonte puntual e instantânea liberando poluente no instante τ:

$$C(t,\tau,x,y,z) = \frac{2Q(\tau)u}{\sqrt{16\pi^2 K_x K_y(\frac{x}{u})^2}}e^{\frac{-(v(t-\tau)-y)^2}{4K_y\frac{x}{u}}}e^{\frac{-(u(t-\tau)-x)^2}{4K_x\frac{x}{u}}}\xi(x,z). \tag{60}$$

Esta solução é denominada solução de Green e tem a vantagem que, ao levar em conta a situação de uma fonte arbitrária $Q(t)$, emitindo poluentes em um intervalo de tempo (t_0,t), a solução é determinada pela integral em τ no intervalo $[t_0,t]$. É importante ressaltar que essa solução para a concentração possui um comportamento difusivo nas direções horizontais, conferido pela relaxação nos limites dos coeficientes de difusão nessas direções.

$$C(t,x,y,z) = \int_{t_0}^{t} G(t,\tau,x,y,z)d\tau = \frac{2}{\sqrt{16\pi^2 K_x K_y(\frac{x}{u})^2}} \\ .\int_{t_0}^{t} uQ(\tau)e^{-\frac{(u(t-\tau)-x)^2}{4K_x\frac{x}{u}}}e^{-\frac{(v(t-\tau)-y)^2}{4K_y\frac{x}{u}}}d\tau\xi(x,z) \tag{61}$$

3.4.1 Solução com fonte de Heaviside

Considerando a solução de Green, que possibilita expressar a solução usando uma fonte arbitrária, neste ponto, pode-se assumir uma fonte do tipo Heaviside que confere a característica dessa fonte ser acionada em um tempo t e seguir emitindo após esse instante. A fonte de Heaviside tem a seguinte forma:

$$QH(t-t_0) = \begin{cases} 0 \text{ se } t < t_0 \\ \frac{Q}{2} \text{ se } t = 0 \\ Q \text{ se } t > t_0 \end{cases} \tag{62}$$

Onde H denota a função de Heaviside. Ao substituir a função de Heaviside na equação (60), a solução é dada pela seguinte forma:

$$C(t,x,y,z) = \frac{2}{\sqrt{16\pi^2 K_x K_y (\frac{x}{u})^2}} \int_{t_0}^{t} uQe^{\frac{-(v(t-\tau)-y)^2}{4K_y \frac{x}{u}}} e^{\frac{-(u(t-\tau)-x)^2}{4K_x \frac{x}{u}}} d\tau \xi(x,z). \tag{63}$$

Após alguma manipulação algébrica, considerando que $A = u^2 + v^2$, $B = 2u(x - ut) + 2v(y - vt)$, $C = (x - ut)^2 + (y - vt)^2$ e $D = 16(\frac{x}{u})^2 K_x K_y$, escreve-se a equação (62) como:

$$C(t,x,y,z) = \frac{2Qu}{\pi D} \int_{t_0}^{t} e^{-\frac{A\tau^2 + B\tau + C}{D}} d\tau \xi(x,z). \tag{64}$$

Desta forma, a solução para a equação (63) é dada por:

$$C(t,x,y,z) = \frac{Que^{\frac{-4CA+B^2}{4DA}}}{\sqrt{\pi DA}} \left[erf\left(\frac{(2At+B)}{2\sqrt{AD}}\right) - erf\left(\frac{(2At_0+B)}{2\sqrt{AD}}\right)\right] \xi(x,z). \tag{65}$$

em que erf é a função erro. Esta solução exprime a evolução temporal de uma pluma de poluente a partir da liberação no tempo t_0 até o tempo t.

3.5 Modelo meteorológico com condições variáveis

As condições meteorológicas são instáveis, podendo variar em curtos períodos de tempo. Utilizando a equação (64), é possível analisar a integração em um curto período, ou na duração que se deseja, segmentando a pluma, conforme a ilustração da Figura 2. A pluma é, então, formada por segmentos de pluma que levam em conta as condições meteorológicas específicas de um intervalo de tempo $\Delta t = [t_{j-1}, t_j]$, em que j é o j-ésimo intervalo, em $t_0 = 0$ e $t_N = t$. Desta forma, a concentração média do poluente é descrita como:

$$C(t,x,y,z) = \sum_{j=1}^{N} \frac{Q_j u_j}{\sqrt{\pi D_j A_j}} e^{-\frac{4C_j A_j + {B_j}^2}{4A_j D_j}} \left\{ \left[erf\left(\frac{2A_j t_j + B_j}{2\sqrt{A_j D_j}}\right) - erf\left(\frac{2A_j t_{j-1} + B_j}{2\sqrt{A_j D_j}}\right)\right]\right\} \xi(x,t) \tag{66}$$

Ressaltando que essa solução é composta por segmentos de pluma, equação (66), e será usada para calcular a concentração da amônia neste trabalho.

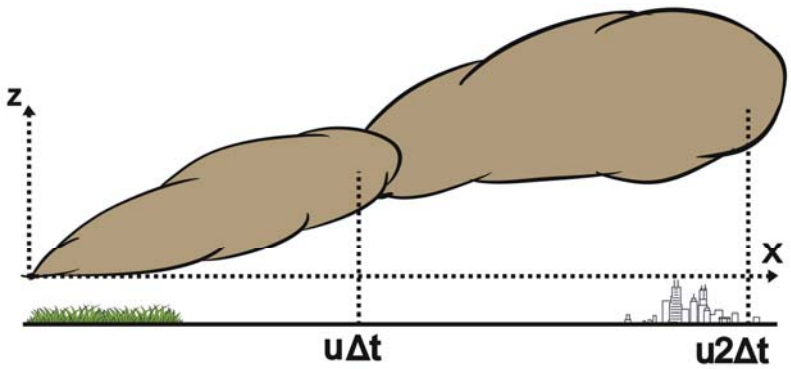


Figura 2: Esquema ilustrativo de um modelo de dispersão considerando segmentos de plumas

Fonte: da autora.

4 DADOS PARA A VALIDAÇÃO DO MODELO

Uma fase importante do processo de modelagem e simulação é a validação dos modelos matemáticos, pois avalia a qualidade do modelo utilizado em função do objetivo estabelecido. A finalidade dos métodos de validação é comparar resultados de dados reais com as saídas simuladas nos modelos identificados no experimento. Uma das características dos processos de estudos atmosféricos é o perfil aleatório dos dados devido às mudanças continuas de natureza meteorológica, que resulta em uma inerente incerteza para a avaliação do modelo.

4.1 Parametrizações da Turbulência

Em modelos matemáticos, as parametrizações desempenham um papel relevante na descrição da complexa dinâmica da atmosfera.

Com o nascer do sol a atmosfera passa a ser aquecida pelo fluxo de calor turbulento da superfície do solo, essa nova camada que se forma é muito turbulenta e instável. De forma contrária a esse processo, pouco tempo antes do pôr do sol, começa a formação do resfriamento da superfície terrestre, extraindo a energia dos grandes turbilhões, ficando apenas os turbilhões pequenos, esse processo possui características mais estáveis.

Com as transformações ocorridas durante a transição do dia para a noite, as parametrizações utilizadas levam em consideração, de forma distinta, os períodos noturno e diurno. Para o dia foi considerado o período iniciando às 6 horas (amanhecer) até às 17 horas (anoitecer), com duração de 11 horas. Consequentemente, para o período da noite foi considerado a partir das 17 horas (anoitecer) até às 6 horas do dia seguinte (amanhecer), constatando um período de 13 horas.

4.1.1 Parametrizações para Condições Estáveis

Os coeficientes de difusão devem ser considerados como funções não só de turbulência, com escala de velocidade e com comprimento de turbilhões, mas considerando também a distância da fonte. Ao se considerar as direções do vento em x, y e z, temos

que assumir a importância dos efeitos da difusão nestas direções, onde a velocidade do vento não é nula. Desta forma, os coeficientes de difusão K, são funções lineares da distância da fonte, de acordo com as seguintes expressões:

$$K_x = \alpha ux,\ K_y = \beta ux,\ K_z = \gamma ux \tag{67}$$

em que x representa a distância da fonte na direção do vento e os termos α, β e γ são os parâmetros turbulentos, que modificam conforme a estabilidade atmosférica. Os parâmetros turbulentos foram estimados a partir da teoria da similaridade e representam a intensidade da ocorrência da turbulência.

A parametrização depende da velocidade de fricção, u_*, em condições estáveis. A seguinte parametrização proposta por Sharan, Yadav e Modani (2002), é a utilizada nesse trabalho para estimar K_z:

$$\gamma = 1.69\left(\frac{u_*}{u}\right)^2 \tag{68}$$

As parametrizações de K_x e K_y foram obtidas por Sharan e Yadav (1996), onde α e β são definidas pelas seguintes expressões:

$$\alpha = u[\cosh(\sigma_\theta^2) - 1]^{1/2} \tag{69}$$

$$\beta = u[\sinh(\sigma_\theta^2)]^{1/2} \tag{70}$$

Quanto ao perfil do vento, Businger et al. (1971) utilizou a seguinte equação para estimar o perfil do vento na direção longitudinal:

$$u(z) = \frac{u_*}{k}\left(ln\frac{z}{z_0} + 0,74\frac{z - z_0}{L}\right) \tag{71}$$

onde z_0 é altura da rugosidade e k é a constante de Von Kárman. O parâmetro u_* é a velocidade de fricção e L é o comprimento de Monin-Obukov e são calculados conforme as equações:

$$u_* = k\frac{u}{log(z_1 - z_0)} \tag{72}$$

$$L = 1100(u_*)^2 \tag{73}$$

4.1.2 Parametrizações para Condições Instáveis

Os coeficientes de difusão nas direções x e y são descritos de forma idênticas às condições estáveis. Para a direção veritical z, o coeficiente de difusão K_z possui comportamento mais complexo em condições não estáveis, Degrazia, Velho e Carvalho (1997) a descreveu matematicamente da seguinte maneira:

$$K_z = 0.22w_*h\left(\frac{z}{h}\right)^{\frac{1}{3}}\left(1 - \frac{z}{h}\right)^{\frac{1}{3}}\left[1 - e^{\frac{-4z}{h}} - 0.0003e^{\frac{8z}{h}}\right] \tag{74}$$

onde w_* representa a escala de velocidade convectiva (m/s) dada por:

$$w_* = u_* \left(\frac{h}{kL}\right)^{\frac{1}{3}} \tag{75}$$

e:

$$h = 2300(u_*)^{\frac{2}{3}} \tag{76}$$

em que L representa o comprimento de Monin-Obukov e u_* a velocidade de fricção e são calculados a partir de:

$$u_* = \frac{k(u)}{log\left(\frac{z_1}{z_0}\right)} \tag{77}$$

$$L = \frac{-u_*^3 + 1004.8T}{k\ 9.81 \cdot 150} \tag{78}$$

onde o valor de 1004.8 (J/Kg) é o calor latente, T é a temperatura (K), a aceleração gravitacional é dada por 9.81 (m/s^2) e o fluxo de calor sensível é de 150 (J/KgK), de acordo com Monteiro et al. (2014).

Para a parametrização do perfil do vento, as equações para calcular o vento médio descritas por Panofsky e Dutton (1984) são as de similaridade:

$$u = \frac{u_*}{k}\left[ln\frac{z-d}{z_0} - \psi\frac{z-d}{L}\right]\ se\ z \leq z_b \tag{79}$$

$$u = u(z_b)\ se\ z > z_b \tag{80}$$

em que $z_b = min[|L|, 0.1h]$, z_0 representa a rugosidade do terreno. O termo d é o deslocamento do plano zero e representa uma altura acima da superfície em que a velocidade do vento é zero devido à presença de obstáculos. Conforme as relações de Businger et al. (1971), a função estabilidade será expressa por:

$$\psi_m\left(\frac{z}{L}\right) = -4.7\frac{z}{L} \qquad para\ \frac{1}{L} \geq 0; \tag{81}$$

$$\psi\left(\frac{z}{L}\right) = ln\left(\frac{1+x^2}{2}\right) + ln\left(\frac{1+x}{2}\right)^2 - 2arctanx + \frac{\pi}{2} \qquad para\frac{1}{L} < 0 \tag{82}$$

com $x = \left(1 - \frac{15z}{L}\right)^{\frac{1}{4}}$.

4.1.3 Flutuações do Vento

Um dos atributos do método aqui utilizado é seu carácter estocástico. E isso se deve a um acréscimo à velocidade média do vento de um termo de perturbação que segue uma função densidade de probabilidade. Essa perturbação se reflete em outros parâmetros usados tais como a velocidade de fricção, o comprimento de Monin-Obukov, escala de velocidade convectiva e altura da camada limite, reforçando o caracter estocásico do modelo.

Em 2001, Oettl, Almbauer e Sturm (2001) propuseram uma relação entre as funções de autocorelações eulerianas e as flutuações nas direções horizontais x e y. Esta relação é dadas por:

$$u'(t + \Delta t) = \rho_u u'(t) + \sigma_u (1 - \rho u^2)^{1/2} \chi \tag{83}$$

$$v'(t + \Delta t) = \rho_u v'(t) + \sigma_v (1 - \rho v^2)^{1/2} \chi \tag{84}$$

em que u' e v' são flutuções das velocidades, os desvios padrões das velocidades são dados por σ_u, σ_v e χ é um número randônico que, neste trabalho, segue uma distribuição de probabilidade de student, com desvio padrão igual a um e média zero e ρ_u é um parâmetro de intercorrelação, dado pela seguinte equação:

$$\rho_{(u,v)} = \frac{A}{\sigma_\theta + B} - 0,9 \tag{85}$$

em que *A* e *B* são constantes fundamentais de modo empírico e possuem valores de $0,5$ e $0,2$, respectivamente. Δt é um intervalo de tempo aleatório em que as velocidades horizontais do vento são constantes. As flutuações do vento são utilizadas tanto em condições estáveis como instáveis.

4.2 Experimento de Victória-Austrália

Com a autoria de Shen et al. (2016), o experimento realizado em Victória na Austrália em um típico confinamento bovino com aproximadamente $93ha$, contendo currais, estoques de esterco, solo descoberto, estrada e lagoas de efluentes. A fazenda comporta aproximadamente 17500 cabeças de gado com idade entre $1 - 1,5$ anos de idade, de raças predominantemente europeias, principalmente Angus e cruzamento de Angus, com peso corporal aproximado de $396kg$. O gado consome certa de $10,2kg$ de matéria seca por dia de uma ração com cevada, além de feno e capim.

A região de realização do estudo possui clima mediterrâneo, com longos verões quentes e invernos amenos e úmidos. Durante a realização do experimento, meses de abril, maio e junho de 2015, as temperaturas médias relatadas estão disponíveis na Tabela 1, juntamente com as velocidades médias do vento e umidade relativa do ar para os três meses relatados do experimento.

Tabela 1: Dados Meteorológicos no período de abril a junho do experimento do Victória.

Meses	Temperatura Máxima	Temperatura Mínima	Velocidade Média do Vento	Umidade
Abril	21,9ºC*	6,4ºC**	4,3 m/s	61,1 %
Maio	19,8ºC	3,5ºC	2,6 m/s	81,1%
Junho	13,5ºC	5,3ºC	1,9 m/s	71,8%

*Média dos valores máximos da temperatura. **Média dos valores mínimos da temperatura
Fonte: dados disponibilizados pelo experimento de Victória de autoria de Shen et al. (2016)

Para a realização deste experimento foram coletados dados de cinco locais a favor do vento com uma distância máxima de $1km$ da borda do confinamento. Essa distância foi dividida nas seguintes medidas: $50m$, $100m$, $200m$, $500m$ e $1000m$. Os dados foram coletados com o auxílio de um denuder (aparelho que separa gases de parciculas em aerossol) e de uma bomba de baixo volume, a bomba puxava o ar com uma taxa de $0,2 - 0,4\ L\ min^{-1}$, e os denuders, conectados em série, absorviam o NH_3. Os denuders foram trocados duas vezes ao dia respeitando os ciclos diurnos e noturnos.

Em torno da área do confinamento há uma região de cultivo agrícola, predominantemente trigo e ao nordeste pastagem de ovelhas e pastagem ao sul, conforme a figura 3. As terras cultivadas com trigo recebiam fertilizações a base de nitrogênio e eram semeadas em junho e colhidas em outubro e semeadas novamente em novembro e colhidas em maio do ano seguinte. As terras destinadas para pastagem e grama cresciam geralmente nos meses de junho a setembro.

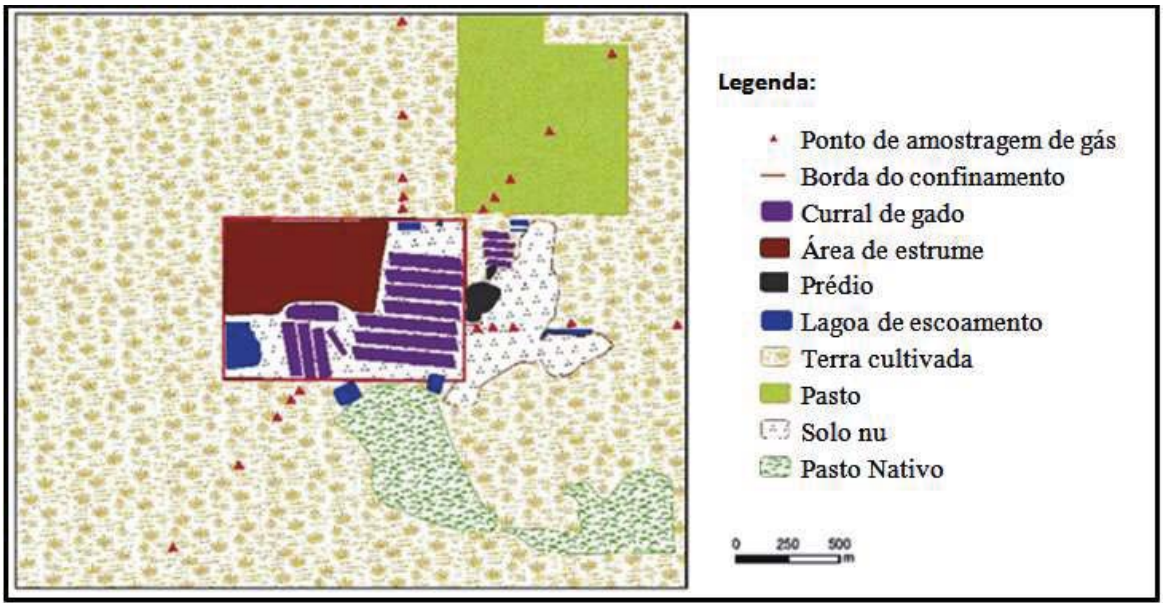


Figura 3: Utilização da terra e localização dos amostradores de NH_3.
Fonte: Shen et al. (2016)

Os amostradores foram submetidos a avaliações diurnas e noturnas, devido a complexidade nas mudanças que ocorrem na atmosfera. O ciclo diurno foi dado como o período entre $8:00$ e $17:00$ e o ciclo noturno como período entre $17:00$ e $08:00$ do dia seguinte. Os denuders relataram uma taxa de emissão de $104\ g\ NH_3 - Ncabea^{-1}dia^{-1}$, ou seja, aproximadamente $21,06\ g\ NH_3 - Ns^{-1}$ para a ocupação média de 17500 animais. As concentrações médias tiveram uma variação considerável entre o período diurno e noturno, conforme relata a Tabela 2.

Tabela 2: Dados das concentrações médias diurnas e noturnas relatadas no Experimento de Victória.

Distância (m)	Concentração Diurna ($\mu g N m^{-3}$)	Concentração Noturna ($\mu g N m^{-3}$)
50	300	370
100	217	324
200	117	245
500	61,5	181
1000	27,2	94,2

Fonte: Shen et al. (2016)

Durante o período do experimento a profundidade da camada de mistura oscilou entre $100m$ e $1500m$, e a precipitação média foi de $355mm$. Estes dados, além de contribuírem para os resultados das concentrações de N na atmosfera, também são de extrema importância para os dados do fluxo de deposição do nitrogênio no solo. A deposição de N no solo acarreta consequências graves a biodiversidade do solo e da fauna e flora existentes nestes locais. A velocidade de deposição é calculada como:

$$V_d = \frac{u_*^2}{u} \tag{86}$$

e o fluxo de deposição sendo

$$D = V_d C \tag{87}$$

onde C é a concentração do poluente na atmosfera e foi medido a $1,5\ m$ de altura, conforme Mcginn et al. (2016). O fluxo de deposição de NH_3 relatada no estudo pode ser observada conforme a tabela 3.

As variações deste estudo em comparação com outros estudos destinados à determinação do fluxo de deposição de NH_3 são pequenas e podem ser justificadas pela variação da temperatura média que foi $4°C$ inferior a de anos anteriores, como a temperatura do ar e a taxa de emissão estão correlacionadas, desta forma o fluxo de deposição pode estar subestimado.

O estudo concluiu que havia alta taxa de deposição de NH_3 ao redor do confinamento do gado, valor mais alto que a maioria das cargas críticas de deposição de N

Tabela 3: Fluxo de deposição de NH_3 relatados no experimento de Victória, Austrália.

Distância (m)	Fluxo de Deposição $(kgNha^{-1}ano^{-1})$
50	614
100	496
200	322
500	210
1000	106

Fonte: Shen et al. (2016)

dos ecossistemas naturais ou seminaturais. O aumento do N atmosférico pode ocasionar a perda da biodiversidade, acidação do solo e aumento das emissões de N_2O do solo, conforme este estudo e estudos anteriores com assuntos relacionados.

4.3 Índices Estatísticos

Geralmente, procura-se avaliar a performance dos modelos através da utilização de índices estatísticos que descrevem a capacidade de representar dados observados. Para a elaboração desta análise estatística, emprega-se aqui um programa desenvolvido por Hanna (1989). Estes índices estatísticos são recomendados para validação e comparação de modelos, pela Agência de Proteção Ambiental Americana (USEPA), pela Força Aérea Americana (*US Air Force*), pelo Instituto Americano do Petróleo (API), bem como pela comunidade científica da área de dipersão de poluentes na atmosfera após o *Workshop* "*Operational Short-Range Atmospheric Dispersion Models for Environmental Impact Assesments in Europa*", realizado na Bélgica em 1994 (OLESEN, 1995).

As notações utilizadas para os índices o e p indicam, respectivamente, as quantidades observadas e preditas, ou simuladas, C é a concentração de poluentes, e σ é o desvio padrão.

Os índices estatísticos aplicados são definidos do seguinte modo:

1. Erro quadrático médio normalizado: NMSE = $\frac{\overline{(C_o - C_p)^2}}{\overline{C_o}\,\overline{C_p}}$
   informa sobre todos os desvios entre as concentrações dos modelos e as concentrações observadas. É uma estatística adimensional, e seu valor deve ser o menor possível para um bom modelo.

2. Coeficiente de correlação: COR = $\frac{\overline{(C_o - \overline{C_o})(C_p - \overline{C_p})}}{\sigma_o \sigma_p}$
   descreve o grau de associação ou concordância entre as variáveis. Para um boa performance, o seu valor deve ser 1.

3. Fator de dois: FA2

fração de dados ($\%$ normalizados a 1) que estão entre $0,5 \leq \frac{C_p}{C_o} \leq 2$. Quanto mais próximo de 1 este valor estiver, maior é a confiabilidade no modelo.

4. Fração de Inclinação: FB = $\frac{\overline{C_o}-\overline{C_p}}{0{,}5(\overline{C_o}+\overline{C_p})}$
   informa a tendência do modelo de superestimar ou subestimar as concentrações observadas. O valor ótimo é zero.

5. Desvio fracional padrão: FS = $\frac{\sigma_0-\sigma_p}{0{,}5(\sigma_0+\sigma_p)}$
   O valor ótimo é zero.

5 RESULTADOS

Neste ponto, por meio do modelo matemático desenvolvido e descrito no Capítulo 3, examina-se a questão da dispersão atmosférica de amônia em condições instáveis e estáveis, ao longo de diferentes distâncias, na direção do vento, entre ponto emissor e receptor. Os dados micrometeorológicos utilizados foram relatados no experimento de Victória-Austrália e as parametrizações da turbulência estão apresentadas no capítulo anterior.

Para atingir os resultados, e posteriormente comparar com os dados observados no experimento, foram aplicados 500 eventos em 11 ângulos diferentes, de $-5°$ a $5°$ e centralizado na direção do vento, totalizando 5500 dados de saída nos quais foram realizados a média aritmética e comparado com os dados observados no experimento. A rugosidade considerada é de $0,02m$, as concentrações e fluxos de deposição são medidos na altura z de $1,5m$ e o tempo de duração de cada evento é de $110min$ em cada turno, em cada um dos meses considerados. Neste tempo, são feitas 3 simulações de concentração, aos $70min$, $90min$ e $110min$, e então a concentração de saída é a média dessas medições. A pluma é segmentada a cada $3min$, ou seja, cada um desses segmentos pode ser influenciado por diferentes condições meteorológicas através de diferentes perturbações na velocidade do vento. Os resultados obtidos pela simulação consideram como fonte uma região circular de $50m$ de raio, interna ao confinamento, totalizando uma área de aproximadamente $7854m^2$. Dentro dessa região circular é escolhida aleatoriamente uma fonte puntual para cada um dos 500 eventos realizados. Isto permite trabalhar com fontes área e ter um modelo que representa melhor a realidade das fontes emissoras de um confinamento. A altura da fonte é de $2m$ e o centro da fonte circular está localizado à distância de $250m$ da cerca que limita o confinamento. Além disso, as emissões diurnas e noturnas são consideradas distintas, seguindo a proporção média de emissões publicadas por Mcginn et al. (2016).

O modelo de dispersão foi escrito na linguagem Fortran 4.0 e executado no sistema Windows 10. Na simulação, o número usado de autovalores, associados às autofunções que compõem a solução pelo método GILTT, é de $n = 40$.

Para a execução do modelo são consideradas seis situações distintas, sendo três

Tabela 4: Concentração observada no experimento de Victória (O) e concentração (S), desvio padrão (σ), Máximos (M), Mínimos (m) e Mediana (M_d)da concentração gerada pelo modelo no mês de abril no período diurno.

	50	100	200	500	1000
O	235,00	157,00	101,00	51,00	15,00
S	259,88	213,85	155,92	78,54	38,33
σ	22,65	15,66	8,98	2,93	1,03
M	327,70	259,39	182,74	86,91	41,25
m	208,48	176,98	132,92	70,90	35,40
M_d	257,11	213,02	155,98	78,53	38,38

Fonte: da autora.

Tabela 5: Concentração observada no experimento de Victória (O) e concentração (S), desvio padrão (σ), Máximos (M), Mínimos (m) e Mediana (M_d)da concentração gerada pelo modelo no mês de maio no período diurno.

	50	100	200	500	1000
O	480,00	260,00	120,00	76,00	17,00
S	326.90	266,86	189,09	95,30	51,27
σ	28,18	21,65	11,90	3,53	1,14
M	416,31	319,52	226,05	105,10	54,41
m	258,80	216,65	161,95	86,33	47,79
M_d	324,60	265,54	188,39	95,17	51,30

Fonte: da autora.

delas em condições estáveis e as outras três em condições instáveis, conforme as situações apresentadas no experimento realizado: instáveis no período diurno e estáveis no período noturno. No experimento as duas situações foram avaliadas nos diferentes meses do ano, de abril a junho.

Nas Tabelas 4 a 9 são apresentados os resultados das simulações, considerando as médias das concentrações dos 5500 dados de saída, além dos valores de máximo e mínimo, desvio padrão e a mediana. Também são apresentados os valores observados pelo experimento de Victória, para comparação, nas distâncias de $50\ m$, $100\ m$, $200\ m$, $500\ m$ e $1000\ m$. Especificamente, nas Tabelas 4, 5 e 6, os dados, observados e simulados, são referentes ao período diurno e nas Tabelas 7, 8 e 9 são expostas as concentrações nos períodos noturnos, para os mesmos meses de abril a junho.

As Figuras 4 a 6 mostram os gráficos relativos às tabelas para que se tenha mais clareza do comportamento e concordância dos resultados obtidos

As Tabelas 10 a 12 apresentam os fluxos de deposição de NH_3 obtidos pelo modelo e pelo experimento, com a simulação considerando a altura de $1,5\ m$. Os valores simulados são obtidos da seguinte forma: o cálculo da deposição é feito conforme as equações (83) e (84). Para melhor compreensão, as tabelas apresentam as médias aritméticas dos fluxos de deposição, os desvios padrões, valores de máximo e mínimo

Tabela 6: Concentração observada no experimento de Victória (O) e concentração (S), desvio padrão (σ), Máximos (M), Mínimos (m) e Mediana (M_d)da concentração gerada pelo modelo no mês de junho no período diurno.

	50	100	200	500	1000
O	301,00	235,00	172,00	108,00	62,00
S	379,94	310,37	225,39	132,57	92,78
σ	35,87	24,88	14,27	4,15	1,77
M	506,47	390,14	267,43	145,21	97,62
m	281,18	245,14	187,61	120,53	87,69
M_d	378,47	309,89	224,25	132,48	92,79

Fonte: da autora.

Tabela 7: Concentração observada no experimento de Victória (O) e concentração (S), desvio padrão (σ), Máximos (M), Mínimos (m) e Mediana (M_d)da concentração gerada pelo modelo no mês de abril no período noturno.

	50	100	200	500	1000
O	248,00	215,00	148,00	112,00	50,00
S	619,62	505,03	344,53	119,98	120,17
σ	117,05	55,07	22,90	7,58	7,76
M	1037,32	711,53	416,09	220,65	147,85
m	346,38	397,62	283,54	160,29	83,64
M_d	681,79	499,99	343,25	199,93	120,41

Fonte: da autora.

Tabela 8: Concentração observada no experimento de Victória (O) e concentração (S), desvio padrão (σ), Máximos (M), Mínimos (m) e Mediana (M_d)da concentração gerada pelo modelo no mês de maio no período noturno.

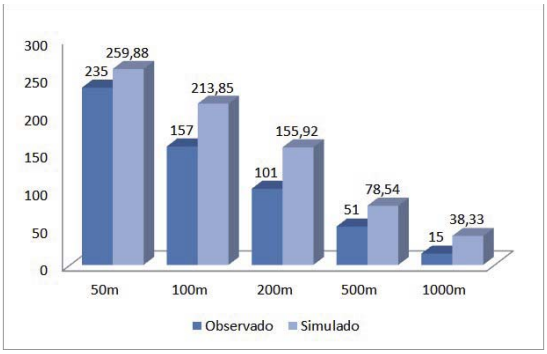
	50	100	200	500	1000
O	465,00	395,00	243,00	200,00	66.00
S	687,51	505,79	345,18	199,24	120,49
σ	106,77	56,60	22,30	7,52	10,08
M	992,54	744,14	411,06	219,70	174,76
m	391,94	370,36	280,00	173,78	69,79
M_d	676,14	498,73	344,29	199,16	120,48

Fonte: da autora.

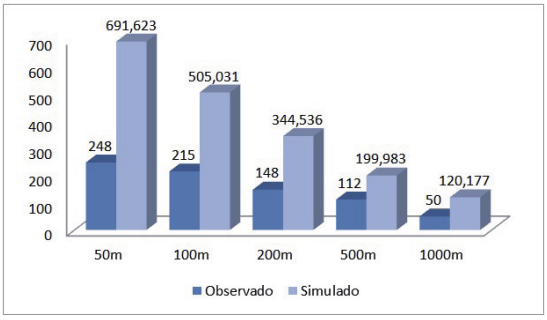
Tabela 9: Concentração observada no experimento de Victória (O) e concentração simulada (S), desvio padrão (σ), Máximos (M), Mínimos (m) e Mediana (M_d)da concentração gerada pelo modelo no mês de junho no período noturno.

	50	100	200	500	1000
O	402,00	390,00	365,00	230,00	153,00
S	682,22	505,06	344,52	199,46	119,22
σ	107,57	52,89	20,99	7,28	10,19
M	980,15	692,85	410,27	223,62	184,55
m	412,71	393,27	278,54	165,95	40,07
M_d	669,09	501,70	343,77	199,58	119,68

Fonte: da autora.



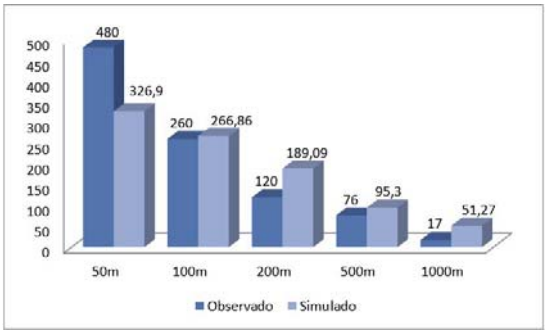
Período Diurno



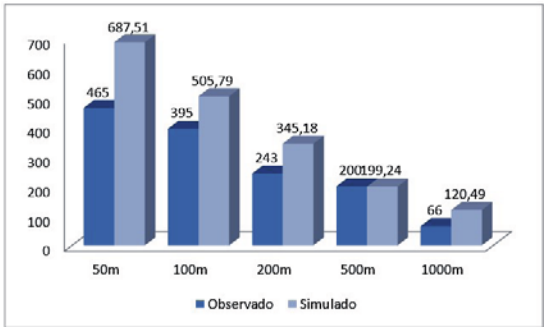
Período Noturno

Figura 4: Gráfico ilustrativo da concentração observada e a concentração simulada em diferentes distâncias da fonte emissora no mês de abril

Fonte: da autora



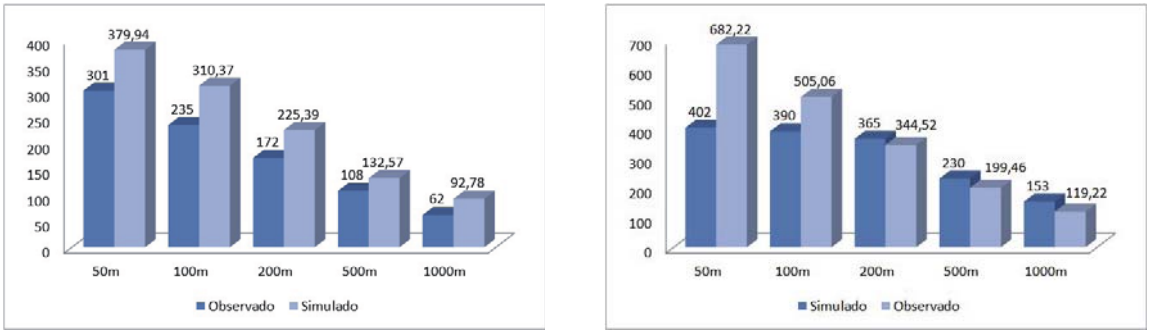
Período Diurno



Período Noturno

Figura 5: Gráfico ilustrativo da concentração observada e a concentração simulada em diferentes distâncias da fonte emissora no mês de maio

Fonte: da autora



Período Diurno Período Noturno

Figura 6: Gráfico ilustrativo da concentração observada e a concentração simulada em diferentes distâncias da fonte emissora no mês de junho

Fonte: da autora

Tabela 10: Deposição (D) observada no experimento de Victória (O) e Simulada (S), desvio padrão (σ), Máximos (M), Mínimos (m) e Mediana (M_d) do fluxo de deposição gerada pelo modelo no mês de abril

	50		100		200		500		1000	
	S	O	S	O	S	O	S	O	S	O
D	5,93	1,45	4,71	1,15	3,18	0,79	1,45	0,50	0,65	0,23
σ	0,74	0,45	0,65	0,28	0,72	0,19	0,60	0,19	0,34	0,10
M	8,42	2,90	6,15	1,50	4,61	1,20	2,25	1,10	1,06	0,40
m	4,36	0,40	3,11	0,40	1,83	0,30	0,63	0,10	0,22	0,10
M_d	5,88	1,40	4,74	1,20	3,29	0,85	1,78	0,50	0,60	0,20

Fonte: Shen et al. com contribuições da autora.

Tabela 11: Deposição (D) observada no experimento de Victória (O) e Simulada (S), desvio padrão (σ), Máximos (M), Mínimos (m) e Mediana (M_d) do fluxo de deposição gerada pelo modelo no mês de maio

	50		100		200		500		1000	
	S	O	S	O	S	O	S	O	S	O
D	5,45	2,09	4,24	1,57	2,77	0,77	1,28	0,55	0,72	0,18
σ	1,14	0,82	0,60	0,55	0,32	0,34	0,23	0,37	0,11	0,12
M	9,09	4,20	6,25	3,10	4,49	1,50	1,64	1,35	1,04	0,80
m	3,69	0,90	2,68	0,80	1,85	0,20	0,58	0,10	0,19	0,05
M_d	5,24	2,00	4,18	1,50	2,75	0,80	1,37	0,50	0,70	0,15

Fonte: Shen et al. com contribuições da autora.

e mediana.

As Tabelas 13 e 14 apresentam os resultados dos índices estátisticos, propostos por Hanna (1989). Estes índices são obtidos por meio da comparação entre os dados simulados e observados do experimento de Victória. Já a Tabela 15 os dados disponibilizados são referente ao fator de correlação para os períodos diurnos e noturnos

Tabela 12: Deposição (D) observada no experimento de Victória (O) e Simulada (S), desvio padrão (σ), Máximos (M), Mínimos (m) e Mediana (M_d) do fluxo de deposição gerado pelo modelo no mês de junho

	50		100		200		500		1000	
	S	O	S	O	S	O	S	O	S	O
D	5,97	2,05	4,34	1,80	3,04	1,43	1,77	0,88	1,07	0,56
σ	0,90	0,43	0,54	0,42	0,19	0,47	0,06	0,35	0,05	0,24
M	8,66	3,00	6,05	2,70	3,62	2,50	1,96	1,60	1,31	1,10
m	4,17	1,10	2,96	0,70	2,53	0,40	1,55	0,20	0,86	0,20
M_d	5,88	2,10	4,29	1,80	3,02	1,40	1,78	0,90	1,01	0,50

Fonte: Shen et al. com contribuições da autora.

Tabela 13: Avaliação Estatística do Modelo: Comparação da Concentração de amônia diurna.

	NMSE	COR	FA2	FB	FS
Simulação	0,12	0,901	0,867	-0,164	0,164

Fonte: da autora.

Tabela 14: Avaliação Estatística do Modelo: Comparação da Concentração de amônia Noturna

	NMSE	COR	FA2	FB	FS
Simulação	0,33	0,814	0,733	-0,382	-0,470

Fonte: da autora.

Tabela 15: Avaliação Estatística do Modelo: Fator de Correlação em relação ao tempo

Meses	Diurno	Noturno
Abril	0,98	0,97
Maio	0,94	0,97
Junho	0,99	0,90

Fonte: da autora.

para os meses em que o experimento foi realizado.

5.1 Discussão dos Resultados

As concentrações de amônia obtidas pelas simulações do modelo aqui apresentado mostram uma boa concordância com os resultados experimentais, principalmente quando se observa o período diurno.

No período diurno, os índices estatísticos mostram uma correlação de $0,901$ e $86,7\%$ das concentrações simuladas estão no intervalo de um fator de dois quando comparados aos dados observados. O modelo mostra uma ligeira superestimação

dos resultados, $FB = -0,164$. O decaimento exponencial com a distância da fonte também tem uma represenação adequada aos dados observados. Os valores que apresentam maior discrepância são os medidos na posição $x = 1000m$, nos meses de abril e maio. Considerando todas as concentrações medidas e simuladas no período diurno, o valor médio das concentrações simuladas é $17,9\%$ maior do que a média dos valores medidos de concentração no experimento.

Os resultados simulados no período noturno, em condições estáveis, apresentam uma correlação de $0,814$ e fator de dois de $73,3\%$ em relação aos dados observados. Nesse período, há uma superstimativa mais expressiva das concentrações previstas pelo modelo, $FB = -0,382$. Também a linha de tendência de decaimento exponencial das concentrações simuladas estão em consonância com as medidas do experimento. A comparação entre as médias de concentração de todas as medidas, simuladas e experimentais, nesse período, mostra que os resultados simulados têm uma superstimativa de $47,1\%$. Também no período noturno, há uma maior variabilidade dos resultados simulados que se reflete em um intervalo mais amplo entre os valores mínimo e máximo, [m, M]. Sabidamente, existe uma maior dificuldade em modelar matematicamente e tratar processos dispersivos em condições estáveis.

O fator de correlação, quando calculado mês a mês apresenta resultados com melhor desempenho do que o realizado de de forma mais abrangente, realizado com os resultados de todos os meses do experimento. No mês de abril os fatores de correlação foram próximos ao valor de um, valor desejado, além de apresentarem pouca variação entre o período diurno e noturno. Para o mês de maio, o período diurno teve resultados mais abrangentes que o período noturno, o que demonstra a relevância do cálculo de cada mês. O periodo diurno do mês de junho obteve o melhor resultado, mas também a maior variação para o período noturno.

Para a deposição de amônia, os resultados simulados estão entre duas a três vezes os valores dos dados observados. Essa diferença também se deve ao fato das equações usadas para calcular a deposição simulada e observada serem distintas.

As diferenças comparativas mostradas entre os resultados da simulação e os dados observados podem encontrar explicações em várias componentes signficativas de incerteza na entrada de dados da simulação: incertezas associadas à taxa de emissão e à estimativa para rugosidade do solo (durante o experimento houve medições em diferentes tipos de uso de cultivo da terra). A variação na direção e intensidade do vento durante a execução do experimento também são fontes de erros, os quais o modelo tenta mitigar através da adoção de um perfil estocástico do vento. Pelo lado técnico da execução do experimento, há imprecisões nas medidas de concentração e os valores apresentados também se mostraram subestimados em relação a outros experimentos em confinamento bovino. Por exemplo, Shen et al. (2016) estimou que o confinamento é responsáveis por cerca de $8,1\%$ da deposição anual de NH_3, en-

quanto Hao et al. (2006) estimou a deposição de aproximadamente 16% do NH_3, para um confinamento de 25000 cabeças de gado, aproximadamente 16% do NH_3 a $1\ Km$ do confinamento.

6 CONCLUSÃO

O modelo proposto, em geral, mostrou um desempenho adequado, quando comparado aos dados observados no experimento de Victória, tendo boa concordância com os valores relativos à concentração do poluente e ao fluxo de deposição. A linearidade da equação de advecção-difusão permite a aproximação de uma fonte área através de um conjunto de fontes puntuais, atuando de forma individual e em localização aleatória, escolhida através de uma distribuição uniforme, dentro da região fonte. Essa escolha aleatória ocorre para cada um dos eventos simulados. Isso é um ponto importante no desenvolvimento do modelo porque a fonte de emissão em um confinamento pode ter uma área não desprezível quando comparada às distâncias de interesse para as medidas de concentração e deposição. Outro ponto relevante dentro desse desenvolvimento é a aplicação de um modelo estocástico, segmentando a pluma em sub plumas que possibilita uma melhor reprodução da complexidade do fenômeno de dispersão atmosférica e que permite, a cada evento, que parâmetros sejam escolhidos segundo uma distribuição de probabilidade.

Trabalhos futuros devem estar voltados para estudar parametrizações da turbulência que correspondam melhor aos resultados observados para a concentração e deposição, principalmente no período noturno.

REFERÊNCIAS

ARYA, S. P. *Air pollution meteorology and dispersion*. New York: Oxford University Press, 1999.

BERLYAND, M. *Contemporary problems of atmospheric diffusion and polution of the atmosphere.* Raleigh, NC, USA: translated version by NERC, USEPA, 1975.

BULIGON, L.; MOREIRA, D. M.; VILHENA, M. T. Uma solução semi-analítica da dispersão de poluentes com a equação do telégrafo e fluxo contra-gradiente. *Revista Brasileira de Meteorologia*, v. 21, p. 77–85, 2006.

BUSINGER, J. A. et al. Flux–profile relationships in theatmospheric surface layer. *Journal of the Atmospheric Sciences*, v. 28, p. 181–189, 1971.

BUSKE, D. *Solução GILTT Bidimensional em Geometria Cartesiana.* Tese (Tese de Doutorado) — Programa de pós-graduação em Engenharia Mecânica, UFRGS, Porto Alegre, 2008.

BUSKE, D. et al. A new segmented plume approach for pollutant dispersion modelling. *International Journal of Development Research*, v. 10, p. 42644–42653, 2020.

BUSKE, D. et al. An unsteady two-dimensional analytical solution for modeling air pollution dispersion and turbulent dry deposition. *Proceedings do* 19th *Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica*, 2007.

BUSKE, D. et al. Simulação analítica da dispersão de poluentes atmosféricos tridimensional. *Ciência e Natura*, v. 1, p. 29–32, 2009.

BUSKE, D.; VILHENA, M.; MOREIRA, D. A 3d analytical solution of the advection-diffusion equation applied to pollutant dispersion in atmosphere. *Proceedings do Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica*, 2009.

BUSKE, D. et al. A general analytical solution of the advection-diffusion equation for fickian closure. In: HARRIS, C. C. P. (Ed.). *Integral Methods in Science and Engineering: Techniques and Applications*. Boston: Birkhauser, 2011a. p. 25–34.

BUSKE, D. et al. Modelo analítico tridimensional de dispersão de poluentes na camada limite atmosférica. *Ciência e Natura*, v. 1, p. 115–118, 2011b.

BUSKE, D. et al. A closed form solution for pollutant dispersion in atmosphere considering nonlocal closure of the turbulent diffusion. In: LONGHURST, J.; BREBBIA, C. (Ed.). *Air Pollution XX*. United Kingdom: WIT Press, 2012a. p. 59–69.

BUSKE, D. et al. Air pollution steady-state advection-diffusion equation: the general three-dimensional solution. *Journal of Environmental Protection*, v. 3, p. 1124–1134, 2012b.

BUSKE, D. et al. An analytical solution for the steady-state two-dimensional diffusion-advection-deposition model by the giltt approach. In: POTAPENKO, C. C. S. (Ed.). *Integral Methods in Science and Engineering: Techniques and Applications*. Boston: Birkhauser, 2007. p. 27–36.

BUSKE, D. et al. Air pollution steady-state advection-diffusion equation: The general three-dimensional solution. *Journal of Environmental Protection*, p. 1–10, 2012c.

BUSKE, D.; VILHENA M. T. BODMANN, B.; TIRABASSI, T. Analytical model for air pollution in the atmospheric boundary layer. In: KHARE, D. M. (Ed.). *Air Pollution: Monitoring, Modelling and Health*. United Kingdom: InTech, 2012. p. 39–58.

CATALDI, M. et al. Estudo do transporte de poluentes na região da camada de superfície sob diversas condições de estabilidade atmosférica. *Proceedings do XI Congresso Brasileiro de Meteorologia*, v. 1, p. 2890–2899, 2000.

COSTA, C. et al. Semi-analytical solution of the steady three-dimensional advection-diffusion equation in the planetary boundary layer. *Atmospheric Environment*, v. 40, n. 29, p. 5659–5669, 2006.

COSTA, C. P.; MOREIRA, D. M.; VILHENA, M. T. Influência de efeitos não-locais na dispersão de poluentes na camada limite convectiva. *Proceedings do XIII Congresso Brasileiro de Meteorologia*, 2004.

COSTA, C. P. et al. A general formulation for pollutant dispersion in the atmosphere. *Journal of Engineering Mathematics*, v. 74, p. 159–173, 2012.

COTTA, R. M.; BARROS, F. P. J. Integral transforms for three-dimensional steady turbulent dispersion in rivers and channels. *Applied Mathematical Modelling*, v. 31, p. 2719–2732, 2007.

DEGRAZIA, G.; VELHO, H.; CARVALHO, J. Nonlocal exchange coefficients for the convective boundary layer derived from spectral properties. *Contributions to Atmospheric Physics*, p. 57–64, 1997.

DEGRAZIA, G. A.; MOREIRA, D. M.; VILHENA, M. T. Derivation of an eddy diffusivity depending on source distance for vertically inhomogeneous turbulence in a convective boundary layer. *Journal of Applied Meteorology*, p. 1233–1240, 2001.

DEMUTH, C. A. Contribution to the analytical steady solution of the diffusion equation for line sources. *Atmospheric Environment*, v. 12, p. 1255–1258, 1978.

FAVERO, C. *Modelo Pluma Segmento com Velocidades estocásticas para Aplicação em dispersão atmosférica em Condições de Vento Fraco*. Dissertação (Dissertação de Mestrado) — Programa de pós-graduação em Modelagem Matemática, UFPel, Pelotas, 2020.

FAVERO, C. et al. Modelo de pluma segmento com velocidades estocásticas para dispersão atmosférica em condições de vento fraco. *Ciência e Natura*, v. 42, p. e11, 2020.

FOWLER, D. et al. The mass budget of atmospheric ammonia in woodland within 1 km of livestock buildings. *Environmental Pollution*, v. 102, p. 343–348, 1998.

GONCALVES, G. et al. A new approach to solve the time-dependent three-dimensional advection-diffusion equation applied to model air pollution dispersion in the planetary boundary layer. *International Journal of Development research*, v. 8, p. 20535–20543, 2018.

GUERRERO, J. S. P. et al. A unified analytical solution of the steady-state atmospheric diffusion equation. *Atmospheric Environment*, v. 55, p. 201–212, 2012.

HANNA, S. R. Confidence limit for air quality models as estimated by bootstrap and jacknife resampling methods. *Atmospheric Environment*, v. 23, p. 1385–1395, 1989.

HAO, X. et al. Sorption of atmospheric ammonia by soil and peremial grass downwind from two large catle feedlots. *Jornal of Environmental Quality*, v. 35, p. 1960–1965, 2006.

HRISTOV, A. N. et al. Review: Ammonia emissions from dairy farms and beef feedlots. *Canadian Journal of Animal Science*, v. 91, p. 1–35, 2011.

MCGINN, S. M. et al. Ammonia emission from a beef cattle feedlot and its local dry deposition and re-emission. *Journal of Environmental Quality*, v. 45, p. 1178–1185, 2016.

MONTEIRO, P. et al. Estimativa dos componentes do balanço de energia e da evapotranspiração para áreas de cultivo de soja no sul do brasil utilizando imagens do sensor tm landsat5. *Bragantia*, v. 73 (1), p. 72–80, 2014.

MOREIRA, D.; TIRABASSI, T. Modelo matemático de dispersão de poluentes na atmosfera: um instrumento técnico para a gestão ambiental. *Ambiente e sociedade*, VII n.2, p. 159–172, 2004.

MOREIRA, D. et al. The state-of-art of the giltt method to simulate pollutant dispersion in the atmosphere. *Atmospheric Research*, v. 92, p. 1–17, 2009.

MOREIRA, D. M.; CARVALHO, J. C.; TIRABASSI, T. Plume dispersion simulation in low wind conditions in stable and convective boundary layers. *Atmospheric Environment*, v. 39, n. 20, p. 3643–3650, 2005.

MOREIRA, D. M.; NETO, P. V. F.; CARVALHO, J. C. Analytical solution of the eulerian dispersion equation for nonstationary conditions: development and evaluation. *Environmental Modelling and Software*, v. 20, p. 1159–1165, 2005.

MOREIRA, D. M. et al. The giltt solution of the advection–diffusion equation for an inhomogeneous and nonstationary pbl. *Atmospheric Environment*, v. 40, p. 3186–3194, 2006.

MOREIRA, D. M. et al. A semi-analytical model for the tritium dispersion simulation in the pbl from the angra i nuclear power plant. *Ecological Modelling*, v. 189, n. 3-4, p. 413–424, 2005.

MOREIRA, D. M. et al. Simulation of pollutant dispersion in atmosphere by the laplace transform: the admm approach. *Water, Air and Soil Pollution*, v. 177, p. 411–439, 2006.

MOURA, A.; VILHENA, M.; DEGRAZIA, G. Solução analítica para a dispersão vertical turbulenta em uma camada limite estável. *Proceedings do Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica*, 1995.

NETO, P. V. F. *Desenvolvimento de um modelo de dispersão de poluentes para o estudo de impacto ambiental em fontes isoladas*. Dissertação (Dissertação de mestrado) — Programa de pós-graduação em Engenharia Ambiental, ULBRA, 2003.

OETTL, D.; ALMBAUER, R. A.; STURM, P. J. A new method to estimate diffusion in stable, low-wind conditions. *Journal of Applied Meteorology*, v. 40, p. 259–268, 2001.

OLESEN, H. R. Datasets and protocol for model validation. *International Journal of Environment and Pollution*, v. 5, p. 693–701, 1995.

OMS. *WORLD HEALTH ORGANIZATION, Ambient air pollution: a global assessment of exposure and burden of disease*. Public health, environmental and social determinants of health (PHE). Disponível em: <https://www.who.int/phe/publications/air-pollution-global-assessment/en/>. Acesso em: 05 de nov. de 2020., 2016.

ONU. *ONU News: Poluição do ar provoca uma morte a cada cinco segundos*. Perspectiva Global Reportagens Humanas, 3 de jun. de 2019. Disponível em:< https : //news.un.org/pt/story/2019/06/1674651 >. Acesso em: 17 de fev. de 2021., 2019.

PANOFSKY, H.; DUTTON, J. *Atmospheric Turbulence.* New York: John Wiley Sons., 1984.

PEREIRA, L. S. *Assimilação de dados na estimativa de concentração de poluentes atmosféricos*. Dissertação (Dissertação de Mestrado) — Programa de pós-graduação em Modelagem Matemática, UFPel, Pelotas, 2016.

RIBEIRO, M. et al. Estudo da dispersão de poluentes na atmosfera via transformação integral. *Proceedings do XI Congresso Brasileiro de Meteorologia*, v. 1, p. 2969–2975, 2000.

ROBERTS, O. F. T. The theoretical scattering of smoke in a turbulent atmosphere. *Proceedings of the Royal Society of London*, v. 104, p. 640–648, 1923.

ROUNDS, W. Solutions of the two-dimensional diffusion equation. *American Geophysical Union*, v. 36, p. 395–405, 1955.

SCRIVEN R.AND FISHER, B. The long range transport of airborne material and its removal by deposition and washout-ii. the effect of turbulent diffusion. *Atmospheric Environment*, v. 9, p. 59–65, 1975.

SHARAN, M.; YADAV, A. K. Plume dispersion simulation in low-wind conditions using coupled plume segment and gaussian puff approaches. *American Meteorological Society*, p. 1625–1631, 1996.

SHARAN, M.; YADAV, A. K.; MODANI, M. Simulation of short-range diffusion experiment in low wind convective conditions. *Atmospheric Environment*, v. 36, p. 1901–1906, 2002.

SHEN, J. et al. Ammonia deposition in the neighbourhood of an intensive cattle feedlot in victoria. *Scientific Reports*, v. 6, p. 32793, 2016.

SILVEIRA, V. et al. Difusão de contaminantes em condições de vento fraco empregando um modelo estocástico lagrangeano. *Revista Brasileira de Meteorologia*, v. 8(2), p. 36–43, 2018.

SMITH, F. B. *Convection-diffusion processes below a stable layer*. London, 1957.

SMITH, F. B. The diffusion of smoke from a continuous elevated point source into a turbulent atmosphere. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 2, p. 49–76, 1957.

STEFANELLO, M. B. *Desenvolvimento de uma modelo Lagrangeano para estimar a dispersão de escalares passivos em condições de meandro do vento horizontal*. 62 f. Dissertação (Mestrado em Física) — Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2017.

STORCH, R.; PIMENTEL, L. Desenvolvimento de um modelo eulariano de dispersão de poluentes atmosféricos via gitt e modelos algébricos para os fluxos turbulentos. *Revista Ciência e Natura*, p. 103–106, 2003.

STULL, R. B. *An Introduction to Boundary Layer Meteorology*. Dordrecht, Holanda: Kluwer Academic Publishers, 1988.

TIRABASSI, T. et al. A two-dimensional solution of the advection-diffusion equation with dry deposition to the ground. *Journal of Applied Meteorology and Climatology*, p. 2096–2104, 2008.

ULDEN, A. van. simple estimates for vertical diffusion from sources near ground. *Atmospheric Environment*, v. 12, p. 2125–2129, 1978.

VELLOSO, M. F. et al. Estudo do transporte de poluentes na camada limite atmosférica a partir de dois modelos algébricos para o coeficiente de difusão turbulenta e transformação integral. *Proceedings do XIII Congresso Brasileiro de Meteorologia*, 2004.

VILHENA, M. et al. An analytical model with temporal variable eddy diffusivity applied to contaminant dispersion in the atmospheric boundary layer. *Physics A: Statistical Mechanics and its Applications*, v. 391, p. 2576–2584, 2012.

VILHENA, M. et al. An analytical air pollution model: Development and evalution. *Contributions to Atmospheric Physics*, v. 71, p. 315–320, 1998.

VILHENA, M. T. et al. A semi-analytical solution for the three-dimensional advection–diffusion equation considering non-local turbulence closure. *Atmospheric Research*, v. 90, p. 63–69, 2008.

WEYMAR, G. et al. Application of a new approach in an analytical model to simulate the dispersion of a radioactive pollutant. *International Journal of Development Research*, v. 8, p. 24738–24738, 2018.

WEYMAR, G. J. *Uma solução da equação multidimensional de advecção- difusão para a simulação da dispersão de contaminantes reativos na camada limite atmosférica*. Tese (Tese de doutorado) — Programa de pós-graduação em Engenharia Mecânica, UFRGS, Porto Alegre, 2016.

WORTMANN, S. et al. A new analytical approach to simulate the pollutant dispersion in the pbl. *Atmospheric Environment*, v. 39, p. 2171–2178, 2005.

YEH, G.; HUANG, C. Three-dimensional air pollutant modelling in the lower atmosphere. *Boundary Layer Meteorology*, v. 9, p. 381–390, 1975.

ZANNETTI, P. *Air Pollution Moddeling: theories, computational methods and available software*. 1. ed. New York: Springer, 1990.

ZAPLETAL M., M. P. Ammonia emssions and dry deposition in the vicinity of dairy farms. *Atmósfera*, v. 32, p. 337–350, 2019.

Solução da Equação de Advecção-Difusão Estocástica para Simular a Concentração e Deposição de Amônia em Confinamento Bovino – Dominiki Ribas

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PELOTAS
Instituto de Física e Matemática
Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática

Dissertação

Solução da Equação de Advecção-Difusão Estocástica para Simular a Concentração e Deposição de Amônia em Confinamento Bovino

DOMINIKI RIBAS

Pelotas, 2022