ESTUDO DAS CONDIÇÕES DE CONTORNO PARA O MHA APLICADO A UM PROBLEMA ELÍPTICO UNIDIMENSIONAL

DOUGLAS MACHADO DA SILVA[1]; LESLIE D. PÉREZ FERNÁNDEZ[2]; ALEXANDRE MOLTER[3], JULIÁN BRAVO CASTILLERO[4]

[1]Universidade Federal de Pelotas, PPGMMAT– Doumach99@gmail.com
[2]Universidade Federal de Pelotas, IFM-leslie.fernandez@ufpel.edu.br
[3]Universidade Federal de Pelotas, IFM – alexandre.molter@ufpel.edu.br
[4] Universidade Nacional Autónoma de México, IIMAS- julian@mym.iimas.unam.mx

1. INTRODUÇÃO

O emprego de técnicas analíticas para o encontro de soluções ou aproximações de modelos matemáticos é de grande utilidade no sentido de descrever de forma precisa algum fenômeno encontrado na natureza. Neste trabalho será abordado alguns aspectos do método de homogeneização assintótica (MHA) (BAKHVALOV; PANASENKO, 1989). Tem-se que dado um problema sobre um meio micro-periódico com escala de heterogeneidade $\varepsilon, 0 < \varepsilon \ll 1$ e com coeficiente rapidamente oscilante, o MHA propõe uma aproximação da solução do problema original sobre um meio homogêneo, ou seja, quando $\varepsilon \to 0^+$, chamada solução do problema homogeneizado.

Dentre as etapas fundamentais da aplicação do MHA, está a de considerar uma solução assintótica forma (SAF) (BAKHVALOV; PANASENKO, 1989) da solução original do problema de forma a se ter uma boa aproximação. Para isto, constrõe-se soluções locais 1-periódicas, de forma a acompanhar a ε-periodicidade do problema, onde estas souções estão presentes na expressão para a SAF. E para construir estas soluções, utilizasse um Lema que garante a existência destas e além disso, as suas 1-periodicidades. E isso, impondo condições de unicidade para estas.

No entanto, para alguns modelos a SAF encontrada via MHA é uma boa aproximação no interior do domínio, mas ruim no contorno, sendo necessário considerar uma SAF de corte. Pensando nisto, o presente trabalho propõe o estudo de quais tipos de condições pode-se considerar de forma a se ter uma SAF que aproxima bem a solução original no interior do domínio e no contorno do problema.

2. METODOLOGIA

Para cada $\varepsilon, 0 < \varepsilon \ll 1$, procura-se uma SAF da solução de valores de contorno $u^\varepsilon \in C^2(0,1) \cap C[0,1],\ u^\varepsilon = u(x,\varepsilon)$

$$Lu^\varepsilon \equiv -\frac{d}{dx}\left(a^\varepsilon(x)\frac{du^\varepsilon}{dx}\right) = f(x), \quad x \in (0,1) \tag{1}$$

com $a^\varepsilon(x) = a(x/\varepsilon) \in C[0,1],\ \varepsilon$-periódica, positiva e limitada, e $f \in C[0,1]$.

Para a Eq.(1), considera-se primeiramente condições de Dirichlet no contorno e depois em $x = 1$ uma condição de Neumann.

Assim, encontrada a SAF via MHA, verifica-se se as condições oriundas de substituir a SAF na Eq.(1) para as soluções locais garantem a 1-periodicidade das mesmas, e além disso, verificar se as soluções locais são as mesmas obtidas usando as condições de unicidade do Lema1.

Lema 1: Sejam $a(y)$ e $F(y)$ funções diferenciáveis e 1-periódicas, $a(y)$ estritamente positive e limitada. Então uma condição necessária e suficiente para a existência de soluções $N(y)$ 1-periódicas da equação LN=F, é que $< F >\equiv \int_0^1 F(y)dy = 0$. Ainda, a solução 1-periódica é única salvo uma constante aditiva, ou seja, $N(y, C) = \tilde{N}(y) + C$ em que $\hat{N}(0) = 0$ ou $< N(y) >= 0$.

E para auxiliar o estudo, utiliza-se a seguinte proposição

Proposição 1: Seja $f(y)$ uma função 1-periódica, então uma condição necessária e suficiente para que uma atiderivada $F(y)$ de $f(y)$ seja também 1-periódica é que a media de $f(y)$ seja nula, ou seja, $< f(y) >= 0$.

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Aplicando o MHA na Eq.(1) introduzindo uma nova variável $y = x/\varepsilon$ inicialmente independente de x, temos com $\varepsilon = 1/n$ onde $n \in \mathbb{N}$, que a SAF de ordem 2 terá a forma

$$u^{(2)}(x,\varepsilon) = u_0(x) + \varepsilon N_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{du_0}{dx} + \varepsilon^2 N_2\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{d^2u_0}{dx^2}, \tag{2}$$

onde as funções $N_1(y)$ e $N2\,(y)$ são funções 1-periódicas e são soluções das respectivas equações do primeiro e segundo problemas locais

$$\frac{d}{dy}\left(a(y) + a(y)\frac{dN_1}{dy}\right) = 0, \qquad y \in (0,1) \tag{3}$$

$$\frac{d}{dy}\left(a(y)N_1(y) + a(y)\frac{dN_2}{dy}\right) = 0, \qquad y \in (0,1) \tag{4}$$

e a função $u_0(x)$ é solução da equação do problema homogeneizado

$$-\hat{a}\frac{d^2u_0}{dx^2} = f(x), \qquad x \in (0,1) \tag{5}$$

em que $\hat{a}$ é o coeficiente efetivo definido por $< a^{-1}(y) >^{-1}$.

E para completar a construção da SAF na Eq.(2) precisamos de condições para as soluções locais e a solução do problema homogeneizado. E estas surgem de considerar condições para o problema original na Eq.(1) e substituir estas na SAF na Eq.(2).

3.1.CONDIÇÕES DE DIRICHLET

Para a Eq.(1) considere as condições de Dirichlet no contorno

$$u^{\varepsilon}(x) = 0, \qquad x \in \{0,1\} \tag{6}$$

De aplicar a Eq.(6) na Eq.(2), obtém-se que

$$u^{(2)}(0,\varepsilon) = 0 \Leftrightarrow u_0(0) = 0, N_1(0) = 0, N_2(0) = 0; \tag{7}$$
$$u^{(2)}(1,\varepsilon) = 0 \Leftrightarrow u_0(1) = 0, N_1(n) = 0, N_2(n) = 0. \tag{8}$$

E assim tem-se as condições para completar o problema homogeneizado, onde as condições para as soluções locais são garantidas de considerar a condição de que $N_k(0) = 0, k = 1,2$, no Lema 1. E as condições de que $N_k(n) = 0, k = 1,2$, são garantidas pela 1-periodicidade das soluções locais.

Portanto, temos que $u_0(x)$ deve ser solução do problema homogeneizado dado pela Eq.(5) e as condições nas Eq.(7) e (8). Além disso, com a condição de que $N_k(0) = 0, k = 1,2$, tem-se das Eq.(3) e (4) que as soluções locais têm a seguinte expressão analítica

$$N_1(y) = \int_0^y \left(\frac{\hat{a}}{a(s)} - 1\right) ds \qquad (9)$$

$$N_2(y) = \int_0^y \left(\frac{\hat{a}}{a(s)} < N_1(y) > -N_1(s)\right) ds \qquad (10)$$

onde além do Lema 1, a proposição 1 garante a 1-periodicidade desta funções. E tem-se que com $u_0(x)$ satisfazendo o problema homogeneizado e $N_1(y)$ e $N_2(y)$ dadas nas Eqs.(9) e (10), a SAF em Eq.(2) é uma boa aproximação de u^ε
e além disso, satisfaz as condições de contorno.

No entanto, se não utilizarmos as condições do Lema 1 e procurarmos condições a partir de substituir as condições na Eq.(6) na SAF em Eq.(2), obtemos as mesmas condições para $u_0(x)$ e que as soluções locais devem satisfazer as condições $N_k(0) = 0, N_k(n) = 0, k = 1,2$. E com essas condições, devemos verificar se as soluções locais ainda serão 1-periódicas.

Da Eq.(3) obtemos que

$$N_1(y) = \int_0^y \left(\frac{C_1}{a(s)} - 1\right) ds + C_2,$$

onde de considerar as condições, obtemos que $C_1 = \hat{a}$ e $C_2 = 0$. Obtendo assim, a mesma expressão em Eq.(9).

Da Eq.(4) obtemos que

$$N_2(y) = \int_0^y \left(\frac{C_1}{a(s)} - N_1(s)\right) ds + C_2$$

onde de considerar as condições, obtemos que $C_1 = \hat{a} < N_1(y) >$ e $C_2 = 0$. Obtendo assim, a mesma expressão em Eq.(10).

Portanto, para condições de Dirichlet as condições obtidas substituindo as condições na SAF garantem que as soluções locais seja 1-periódicas, já que as expressões obtidas são as mesmas obtidas utilizando as condições do Lema 1.

3.3.CONDIÇÕES DE NEUMANN

Se agora considerarmos uma condição de Neumann em $x = 1$, obtemos as condições de contorno

$$u^\varepsilon(0) = 0, \frac{du^\varepsilon}{dx}|_{x=1} = 0. \qquad (11)$$

Temos que a SAF em Eq.(2) não satisfaz a condição de contorno em $x = 1$ se considerarmos as condições impostas pelo Lema 1, uma vez que da Eq.(2)

$$\frac{du^{(2)}}{dx} = \left(1 + \frac{dN_1}{dy}\right)\frac{du_0}{dx} + \varepsilon\left(N_1(y) + \frac{dN_2}{dy}\right)\frac{d^2u_0}{dx^2} + \varepsilon^2 N_2(y)\frac{d^3u_0}{dx^3}. \qquad (12)$$

Aplicando a Eq.(12) em $x = 1$, lembrando que $y = x/\varepsilon$, $N_1(y)$ é 1-periódica e utilizando as expressões nas Eqs.(9) e (10), temos

$$\frac{du^{(2)}}{dx}|_{x=1} = \frac{\hat{a}}{a(0)}\frac{du_0}{dx}|_{x=1} + \varepsilon\frac{\hat{a} < N_1(y) >}{a(0)}\frac{d^2u_0}{dx^2}|_{x=1} \neq 0, \qquad (13)$$

uma vez que foi escolhida $N_1(y)$ tal que $N_1(0) = 0$ e não $< N_1(y) >= 0$. E se fosse, não poderiamos garantir que $N_1(n) = 0$, ocasionando também no descumprimento da condição de contorno. Vale ressaltar que das condições de contorno, obtemos duas condições para $u_0(x)$. Então não faria sentido impor que $u''(0) = 0$.

Como procuramos um assintótica que satisfaça as condições de contorno, de substituir as condições da Eq.(11) na Eq.(2) obtemos as seguintes condições para as soluções locais

$$N_1(y): N_1(0) = 0, \frac{dN_1}{dy}|_{y=n} = k;\ N_2(y): N_2(0) = 0, \frac{dN_2}{dy}|_{y=n} = -N_1(n)\,, \quad (14)$$

onde k é uma constante qualquer.

De resolver a Eq.(3) substituindo as condições na Eq.(14), obtemos que

$$N_1(y) = \int_0^y \left(\frac{a(0)(k+1)}{a(s)} - 1\right) ds, \qquad (15)$$

onde a 1-periodicidade de $N_1(y)$ só é garantida pela proposição 1 se $k = \left(\frac{\hat{a}}{a(0)} - 1\right)$. Mas isso implicaria que as Eqs.(9) e (15) fossem iguais, onde assim obteríamos as mesmas funções $N_1(y)$. E observando a Eq.(9), temos que a condição na Eq.(14) é satisfeita. Portanto, isso mostra que se $k \neq \left(\frac{\hat{a}}{a(0)} - 1\right)$, então não conseguimos garantir a 1-periodicidade de $N_1(y)$ e que esta condição surge naturalmente de considerar as condições do Lema 1. Vale ressaltar que com este k, a expressão para $N_2(y)$ coincide com a Eq.(10) quando utilizadas as condições na Eq.(14).

4.CONCLUSÕES

Com base no exposto acima, pode-se concluir que se as condições de contorno não forem condições de Dirichlet, não conseguimos construir uma SAF que satisfaça as condições de contorno, não importando quais condições sejam impostas para as soluções locais. Isso decorre do fato mostrado que as únicas condições que produzem soluções locais 1-periódicas, são as impostas pelo Lema 1, na qual estas não satisfazem as condições de contorno.

A importância deste tipo de estudo se dá pelo interesse matemático de encontrar uma SAF que além de ser uma boa aproximação, satisfaça as condições de contorno, visto que para contornar tal situação, se faz necessário o uso de técnicas adicionais, como o das assintóticas de corte.

5.REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BAKHVALOV, N.S.; PANASENKO, G.P. **Homogenisation: averaging processes in periodic media**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1989.