

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PELOTAS
Instituto de Física e Matemática
Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática



Dissertação

**Homogeneização Matemática de Meios Unidimensionais Microperiódicos
Lineares e Não Lineares**

Roberto Martins da Silva Décio Júnior

Pelotas, 2019

Roberto Martins da Silva Décio Júnior

**Homogeneização Matemática de Meios Unidimensionais Microperiódicos
Lineares e Não Lineares**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática da Universidade Federal de Pelotas, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Modelagem Matemática

Orientador: Prof. Dr. Leslie Darien Pérez Fernández

Pelotas, 2019

Universidade Federal de Pelotas / Sistema de Bibliotecas
Catalogação na Publicação

J11h Décio Júnior, Roberto Martins da Silva

Homogeneização matemática de meios unidimensionais microperiódicos lineares e não lineares / Roberto Martins da Silva Décio Júnior ; Leslie Darien Pérez Fernández, orientador. — Pelotas, 2019.

144 f. : il.

Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática, Instituto de Física e Matemática, Universidade Federal de Pelotas, 2019.

1. Homogeneização assintótica. 2. Meios microperiódicos. 3. Materiais lineares e não lineares. 4. Materiais compósitos. 5. Contato perfeito e imperfeito. I. Fernández, Leslie Darien Pérez, orient. II. Título.

CDD : 511.8

**Homogeneização Matemática de Meios Unidimensionais Microperiódicos Lineares e Não
Lineares**

por

Roberto Martins da Silva Décio Júnior

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática, PPGMMat, do Instituto de Física e Matemática da Universidade Federal de Pelotas, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de

Mestre em Modelagem Matemática

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Leslie Darien Pérez Fernández – Orientador (UFPel)

Prof. Dr. Alexandre Molter (UFPel)

Prof. Dra. Camila Pinto da Costa (UFPel)

Profa. Dra. Rejane Pergher (UFPel)

Prof. Dr. Mário Lúcio Moreira (UFPel)

Pelotas, 23 de abril de 2019.

**Dedico este trabalho ao pequeno Roberto,
que sempre acreditou em si mesmo e nas "continhas" que amava fazer.**

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente à minha mãe, Cátia, e aos seus pais, meus queridos avós Lueci e Alvacir, por todo amor, carinho, sacrifícios e exemplo que sempre me deram. O que aprendi com vocês é a base do meu ser hoje e sempre será.

Agradeço também aos meus tios e tias (Andressa, Tatiane, Vagner, Rodrigo) e amigos (Gustavo, Bruna, Camila, Iulli, Lukas, Bianca e Anderson), entre outros, que infelizmente a vida levou para mais longe, mas ainda moram no meu coração (e eu no deles). Vocês todos são pra mim exemplo, diversão, apoio e proteção.

Agradeço ao meu orientador, Prof. Dr. Leslie, por há 5 anos ter dado crédito à minha vontade de estudar matemática, e ter me orientado neste caminho louco, mas maravilhoso, da Homogeneização. Muito obrigado pelo conhecimento compartilhado, parceria, compreensão e xícaras de café.

Agradeço à minha amiga, e chefia, Prof. Dra. Idel Milani, pelo carinho, aprendizado, exemplo e pelas tantas liberações. Teu apoio profissional e emocional com certeza tornaram essa jornada mais leve.

Agradeço aos meus outros professores: Andrea Morgado, Camila Costa, Cláudio Petersen, Andrei Bourchtein, Lioudmila Bourchtein, Fabiane Viana e Sileni Mohnsam pelos ensinamentos e amizade. E também aos colegas que tive prazer de encontrar nessa jornada: Amanda Mallue, Leticia Kaufman, Daiane Frighetto, Rafaela Sehenm e Matheus Goulart.

Agradeço ao Programa de Pós-graduação em Modelagem Matemática por me proporcionar as ferramentas necessárias para o desenvolvimento deste trabalho, além de todo conhecimento extra adquirido nestes dois anos.

Por fim, agradeço à Universidade Federal de Pelotas por ser meu local de estudo, pesquisa e trabalho, há 7 anos. Que continue sempre uma universidade pública, gratuita e de qualidade.

Nuvens não são como esferas, montanhas não são como cones, litorais não são círculos, e a casca das árvores não é lisa, assim como o raio não viaja em linha reta.

BENOÎT MANDELBROT (1924-2010)

RESUMO

DÉCIO JÚNIOR, Roberto Martins da Silva. **Homogeneização Matemática de Meios Unidimensionais Microperiódicos Lineares e Não Lineares**. 2019. 144 f. Dissertação (Mestrado em Modelagem Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática, Instituto de Física e Matemática, Universidade Federal de Pelotas, Pelotas, 2019.

O Método de Homogeneização Assintótica (MHA) tem se mostrado como uma ótima ferramenta para a resolução de problemas envolvendo meios com propriedades rapidamente oscilantes, como os microperiódicos, pois nele o material original é considerado fisicamente equivalente a um determinado material homogêneo (diante de hipóteses acerca da sua microestrutura), cujos problemas são mais fáceis de resolver. Neste trabalho, o MHA é aplicado em meios microperiódicos unidimensionais, lineares e não lineares. Primeiro foram considerados meios com propriedades continuamente diferenciáveis, com o objetivo de obter aproximações assintóticas para a solução exata do problema original, que reproduzam seus comportamentos locais. Tanto para a linearidade quanto para a não linearidade, as aproximações assintóticas (de primeira e segunda ordem) se mostraram como boas aproximações, percebendo-se que em determinados casos foi necessário considerar o termo de segunda ordem para uma reprodução mais fiel dos detalhes locais da solução exata. Depois, foram considerados meios com propriedades constantes por partes, representando materiais compósitos, considerando-se os casos de contato perfeito e imperfeito entre as fases, agora com o objetivo de avaliar o fluxo efetivo, uma outra aplicação do método. O MHA se também se mostrou eficaz para esta determinação, permitindo avaliar o comportamento global de diferentes tipos de compósitos (incluindo lineares e não lineares). Por fim, ainda no contexto de compósitos, utilizou-se o modelo não linear de Volokh para as fases do material, para modelar o seu comportamento mecânico global. Este modelo traz resultados mais realísticos em comparação aos utilizados anteriormente. Observou-se que nesta situação o compósito apresentou comportamento efetivo que, qualitativamente, seguiu também o modelo de Volokh, tanto em condições de contato perfeito e imperfeito. Diante desses resultados, concluiu-se que MHA é uma ferramenta útil na modelagem do comportamento de meios microperiódicos em diversas situações, que foram ilustradas neste trabalho, e que mais situações devem ser consideradas nos modelos a fim de consolidar os resultados aqui obtidos.

Palavras-chave: Homogeneização assintótica, Meios microperiódicos, Materiais lineares e não lineares, Materiais compósitos, Contato perfeito e imperfeito.

ABSTRACT

DÉCIO JÚNIOR, Roberto Martins da Silva. **Mathematical Homogenization of Microperiodic Linear and Nonlinear One-dimensional Media**. 2019. 144 f. Dissertação (Mestrado em Modelagem Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática, Instituto de Física e Matemática, Universidade Federal de Pelotas, Pelotas, 2019.

The Asymptotic Homogenization Method (AHM) has been presented as a good tool for solving problems in media with rapidly oscillating properties, such as micro periodic media, because in it the original material is taken as physically equivalent to a certain homogeneous material (before hypotheses about its micro structure), whose problems are easier to solve. In this work, AHM is applied in one-dimensional, linear and non-linear micro periodic media. First of all, we took the continuously differentiable properties media, with the objective of approaching the asymptotic ones to an exact solution of the original problem, which reproduced their local behaviors. For both linearity and non-linearity cases, the asymptotic approximations (first and second order) were presented as good approximations, it was observed that in some cases were determined with the second-order term for a more faithful reproduction of the local details of the solution accurate. Afterwards, we took the constant in parts media, that is a composite material's representant, considering the cases of perfect and imperfect contact between the phases, in order to evaluate the effective flow, another application of this method. The AHM proved like effective for this determination, for the different types of compounds (including linear and non-linear ones). At the end, in the context of composites, the non-linear Volokh model was used for the phases of the material to model its global behavior. This model presents more realistic results compared to the one used previously. It was observed that this situation, the composite presented an effective behaviour, in a qualitative way, also followed the Volokh model, both in conditions of perfect contact and imperfect. The final result is that AHM is a useful measure in modeling the behavior of micro periodic media in several situations, which were illustrated in this work, and that the more situations should be used in models to consolidate the results obtained here.

Keywords: Asymptotic homogenization, Microperiodic media, Linear and nonlinear materials, Composite materials, Perfect and imperfect contact.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Principais tipos de materiais heterogêneos (do autor).	17
Figura 2	Separação de escalas (do autor).	18
Figura 3	Hipótese de Homogeneidade Equivalente (do autor).	19
Figura 4	Ilustração do comportamento rapidamente oscilante de um coeficiente $K\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = 1 + \frac{1}{4} \text{sen}\left(2\pi\frac{x}{\varepsilon}\right)$	26
Figura 5	Meio microperiódico unidimensional com propriedade funcionalmente graduada (do autor).	27
Figura 6	Ilustração gráfica das soluções u^ε e v_0 e da assintótica $u^{(1)}$ para $\varepsilon = \frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$ referentes ao exemplo em (2.123).	48
Figura 7	Ilustração gráfica das soluções u^ε e v_0 e da assintótica $u^{(1)}$ para $\varepsilon = \frac{1}{8}$ e $\frac{1}{16}$, referentes ao exemplo em (2.123).	49
Figura 8	Solução exata u^ε do problema em (3.41), para $\varepsilon = 1/4$ e diferentes valores de n	61
Figura 9	Ilustração gráfica das soluções u^ε e v_0 e das assintóticas $u^{(1)}$ e $u^{(2)}$, para $\varepsilon = \frac{1}{2}$ e $n = 1/7$, referentes ao exemplo em (3.41).	64
Figura 10	Ilustração gráfica das soluções u^ε e v_0 e das assintóticas $u^{(1)}$ e $u^{(2)}$, para $\varepsilon = \frac{1}{16}$ e $n = 1/7$, referentes ao exemplo em (3.41).	64
Figura 11	Ilustração do comportamento rapidamente oscilante de um coeficiente periódico e constante por partes, para diferentes valores de ε	65
Figura 12	Meio microperiódico, bifásico e unidimensional, com propriedade constante por partes (do autor).	66
Figura 13	Avaliação do fluxo efetivo de um compósito bifásico linear sob condição de contato perfeito, para diferentes concentrações dos materiais constituintes.	86
Figura 14	Avaliação do fluxo efetivo de um compósito bifásico linear sob condição de contato imperfeito, para diferentes valores do parâmetro β , em comparação ao caso de contato perfeito.	86
Figura 15	Análise mais detalhada da influência do parâmetro β no fluxo efetivo de um compósito bifásico linear sob condição de contato imperfeito.	87
Figura 16	Avaliação do fluxo efetivo sob diferentes concentrações das fases constituintes de um compósito bifásico não linear com relação constitutiva em (4.147).	99

Figura 17	Avaliação do fluxo efetivo sob condição de contato imperfeito, para diferentes valores de β , de um compósito bifásico não linear com relação constitutiva em (4.147), em comparação ao caso de contato perfeito.	100
Figura 18	Avaliação do fluxo efetivo sob diferentes concentrações das fases constituintes de um compósito bifásico não linear com relação constitutiva em (4.169).	103
Figura 19	Avaliação do fluxo efetivo sob condição de contato imperfeito, para diferentes valores de β , de um compósito bifásico não linear com relação constitutiva em (4.169), em comparação ao caso de contato perfeito.	103
Figura 20	Ensaio de tração realizado em PERALTA et al. (2016).	105
Figura 21	Comportamento da energia de deformação no modelo de Volokh ($\Psi(\epsilon)$) em comparação com o modelo tradicional correspondente ($W(\epsilon)$).	108
Figura 22	Curva tensão vs deformação para o modelo de Volokh.	109
Figura 23	Comparação do comportamento mecânico segundo o modelo de Volokh das fases consituientes do Compósito 1.	112
Figura 24	Lei efetiva da tensão do Compósito 1 sob condição de contato perfeito, para diferentes concentrações.	113
Figura 25	Comparação do comportamento mecânico segundo o modelo de Volokh das fases consituientes do Compósito 2.	114
Figura 26	Lei efetiva da tensão do Compósito 2 sob condição de contato perfeito, para diferentes concentrações.	115
Figura 27	Lei efetiva da tensão do Compósito 1, sob condição de contato imperfeito, para $c_1=0.3$ e diferentes valores de β	116
Figura 28	Lei efetiva da energia de deformação $\hat{\Psi}$ do Compósito 1, sob condição de contato imperfeito, para $c_1=0.3$ e diferentes valores de β	117
Figura 29	Lei efetiva da tensão do Compósito 2, sob condição de contato imperfeito, para $c_1=0.3$ e diferentes valores de β	117
Figura 30	Lei efetiva da energia de deformação $\hat{\Psi}$ do Compósito 2, sob condição de contato imperfeito, para $c_1=0.3$ e diferentes valores de β	118

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	Significado físico dos principais termos da equação difusiva para diferentes contextos de aplicação.	30
Tabela 2	Estimativa da proximidade de v_0 e das assintóticas $u^{(1)}$ e $u^{(2)}$ em relação à solução exata u^ε de (2.123).	50
Tabela 3	Estimativa da proximidade de v_0 e das assintóticas $u^{(1)}$ e $u^{(2)}$ em relação à solução exata u^ε de (3.41), para $\varepsilon = 1/2$ e diferentes valores de n	62
Tabela 4	Estimativa da proximidade de v_0 e das assintóticas $u^{(1)}$ e $u^{(2)}$ em relação à solução exata u^ε de (3.41), para $\varepsilon = 1/4$ e diferentes valores de n	62
Tabela 5	Estimativa da proximidade de v_0 e das assintóticas $u^{(1)}$ e $u^{(2)}$ em relação à solução exata u^ε de (3.41), para $\varepsilon = 1/16$ e diferentes valores de n	63
Tabela 6	Estimativa da energia crítica efetiva ($\hat{\Phi}$) para as concentrações consideradas do Compósito 1.	113
Tabela 7	Estimativa da energia crítica efetiva ($\hat{\Phi}$) para as concentrações consideradas do Compósito 2.	115

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CP	Contato perfeito
ERV	Elemento Representativo de Volume
EA	Expansão Assintótica
MHA	Método de Homogeneização Assintótica
PVC	Problemas de Valores de Contorno
SAF	Solução Assintótica Formal

LISTA DE SÍMBOLOS

β	Parâmetro positivo que representa o contato imperfeito entre as fases de um compósito, pode ser entendido como uma condutância desta interface
B_ε	Espaço normado definido sobre Ω , parametrizado por ε
$\ \cdot\ _B$	Norma de um espaço B
ε	Parâmetro positivo, pequeno, que caracteriza a separação de escalas
$C^n(\overline{\Omega})$	Espaço das funções n vezes continuamente diferenciáveis em um compacto $\overline{\Omega}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$)
c_i	Concentração de uma fase i em um meio bifásico
c_1	Ponto de interface na célula periódica $[0, 1]$ na microescala y
E	Módulo de elasticidade (ou módulo de Young)
$K^\varepsilon(x)$	Propriedade física rapidamente oscilante do material microperiódico
\hat{K}	Propriedade macroscópica, efetiva ou global (sinônimos)
K_r	Coefficiente de resistência para um material plástico
K_{nl}	Propriedade física não linear de um material não linear
K_1, K_2	Propriedades físicas das fases de um compósito bifásico
$L^2(\overline{\Omega})$	Espaço das funções com quadrado integrável, em um compacto $\overline{\Omega}$
l	Comprimento macroscópico de uma barra microperiódica
l_{ERV}	Comprimento do ERV de uma barra microperiódica
$\langle \cdot \rangle$	Operador média sobre a célula periódica ($\langle \cdot \rangle = \int_0^y \cdot dy$)
$L_{\alpha\beta}(\cdot)$	Operador diferencial $L_{\alpha\beta}(\cdot) = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(K(y) \frac{\partial(\cdot)}{\partial \beta} \right)$, onde $\alpha, \beta \in \{x, y\}$
L_ε	Operador diferencial $L_\varepsilon(\cdot) = \frac{d}{dx} [K^\varepsilon(x) \frac{d(\cdot)}{dx}]$
P_O	Problema original
P_L	Problema local
P_L^η	Família uniparamétrica de problemas locais, com um parâmetro η
P_H	Problema homogeneizado
$u^{(\infty)}(x, \varepsilon)$	Expansão assintótica de uma função $u(x, \varepsilon)$

$u^{(n)}(x, y)$	Solução assintótica formal de ordem n ($n = 0, 1, 2, \dots$)
$u_n(x, y)$	$(n + 1)$ -ésimo da solução assintótica formal ($n = 0, 1, 2, \dots$)
u^ε	Solução exata (ou sua aproximação direta) do PVC original
v_0	Solução do problema homogeneizado
x	Variável global ou macroscópica
y	Variável local ou microscópica, com $(y = x/\varepsilon)$
$W(\varepsilon)$	Energia de deformação na formulação quadrática tradicional
χ_i	Função indicadora fase i
Γ^ε	Conjunto dos pontos de interface de um meio bifásico microperiódico com parâmetro pequeno ε
Ω	Conjunto genérico, sobre o qual definiu-se domínios de interesse do trabalho
$\partial\Omega$	Fronteira do conjunto Ω
ε	Gradiente de u^ε , que assume o significado de deformação no Capítulo 5
$\bar{\varepsilon}$	Valor médio do gradiente de u^ε , que assume o significado de deformação macroscópica no Capítulo 5
$[[\eta]]_{x=x^*}$	Salto da grandeza $\eta(x)$ em um ponto $x = x^*$
Φ	Energia crítica de falha mecânica de um material
$\hat{\Phi}$	Energia de deformação efetiva de um compósito, na formulação de Volokh
$\Psi(\varepsilon)$	Energia de deformação na formulação de Volokh
$\hat{\Psi}$	Energia crítica efetiva de falha mecânica de um material compósito
$\bar{\varepsilon}_R$	Raiz real do polinômio cúbico em (4.161)
σ^ε	Variável tipo fluxo em um meio microperiódico com parâmetro pequeno ε , que assume o significado de tensão de deformação no Capítulo 5
$\bar{\sigma}$	Fluxo efetivo, que assume o significado de tensão efetiva no Capítulo 5
$\hat{\sigma}$	Lei efetiva para o fluxo efetivo, que assume o significado de lei para tensão efetiva no Capítulo 5
σ_i	Fluxo de uma fase i em um meio bifásico

SUMÁRIO

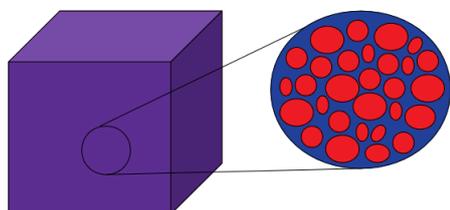
1	INTRODUÇÃO	17
1.1	Conceitos iniciais	17
1.2	Revisão bibliográfica	21
1.3	Objetivos	24
2	INTRODUÇÃO AO MÉTODO DE HOMOGENEIZAÇÃO ASSINTÓTICA	26
2.1	Conceitos e ideias preliminares	26
2.1.1	Descrição Matemática de um meio microperiódico unidimensional	26
2.1.2	Ordem	28
2.1.3	Expansão assintótica e solução assintótica formal	28
2.1.4	Introdução ao formalismo do MHA	29
2.2	Aplicação do MHA no caso da Equação de Difusão estacionária, linear, com coeficiente continuamente diferenciável	31
2.2.1	Caracterização do problema e Solução Analítica	31
2.2.2	Construção da SAF	32
2.2.3	Relação de proximidade	42
2.2.4	Aplicação a um exemplo	46
3	ESTIMAÇÃO DA SOLUÇÃO DE UM PVC COM FLUXO NÃO LINEAR, RAPIDAMENTE OSCILANTE E CONTINUAMENTE DIFERENCIÁVEL, COM O MHA	51
3.1	Formalismo do MHA	51
3.1.1	Construção da SAF	51
3.2	Aplicação em exemplo	57
3.2.1	Formulação do problema e solução exata	57
3.2.2	Construção da SAF	58
3.2.3	Resultados Computacionais	61
4	DETERMINAÇÃO DO FLUXO EFETIVO EM MEIOS MICROPERIÓDICOS COM PROPRIEDADES CONSTANTES POR PARTES, ATRAVÉS DO MHA	65
4.1	Descrição matemática de um meio microperiódico unidimensional com propriedades constantes por partes	65
4.2	Homogeneização da equação de difusão estacionária, linear, com coeficientes constantes por partes	67
4.2.1	Formulação do problema e sua solução exata	67
4.2.2	Construção da SAF	69
4.2.3	Relação de proximidade	75
4.2.4	Determinação do fluxo efetivo	77

4.2.5	Influência do contato imperfeito no comportamento efetivo	78
4.2.6	Análise dos resultados	85
4.3	Homogeneização da equação de difusão estacionária, não linear, com fluxo continuamente diferenciável por partes	88
4.3.1	Caracterização do Problema e construção da SAF	88
4.3.2	Determinação do fluxo efetivo	93
4.3.3	Influência do contato imperfeito no comportamento efetivo	94
4.3.4	Exemplo 1: Fluxo potencial	97
4.3.5	Exemplo 2: Caso do fluxo polinomial	100
5	APLICAÇÃO DO MHA NO ESTUDO DE FALHAS MECÂNICAS EM COMPÓSITOS: O MODELO DE VOLOKH	104
5.1	Contextualização	104
5.1.1	Comportamento mecânico dos materiais	104
5.1.2	O modelo de Volokh	107
5.2	Aplicação do MHA	109
5.2.1	Caso de contato perfeito entre as fases	111
5.2.2	Caso de contato imperfeito entre as fases	115
6	CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS	119
7	PRODUÇÃO CIENTÍFICA	121
	REFERÊNCIAS	122
APÊNDICE A	DETALHES DA OBTENÇÃO DOS TERMOS U_1 E U_2 PARA O CASO DO COMPÓSITO BIFÁSICO LINEAR, COM CONTATO IMPERFEITO ENTRE AS FASES	131
APÊNDICE B	DETALHES DA OBTENÇÃO DOS TERMOS U_1 E U_2 PARA O CASO DO COMPÓSITO BIFÁSICO NÃO LINEAR, COM CONTATO IMPERFEITO ENTRE AS FASES	135
B.1	Demonstração do Lema 10	135
B.2	Obtenção de u_1, u_2	137
APÊNDICE C	MÉTODOS NUMÉRICOS	139
C.1	Método de bissecção	139
C.2	Regra de Simpson $1/3$	141
C.3	Método de Newton (ou Newton-Raphson)	143

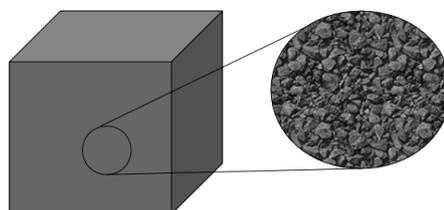
1 INTRODUÇÃO

1.1 Conceitos iniciais

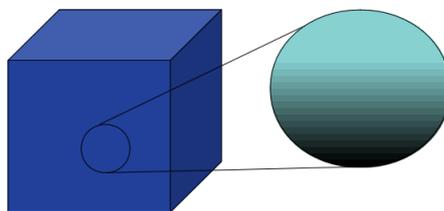
Materiais heterogêneos podem ser considerados como aqueles formados pela união de dois ou mais materiais homogêneos (os quais serão chamados de suas fases), como no caso dos compósitos (Figura 1a); ou pelo mesmo material, mas com características cristalográficas diferentes, (TORQUATO, 2001) (Figura 1b); ou ainda, que apresentam uma transição gradual em suas propriedades, os materiais funcionalmente graduados (SADD, 2014) (Figura 1c).



(a) Compósito



(b) Policristal



(c) Material funcionalmente graduado

Figura 1: Principais tipos de materiais heterogêneos (do autor).

Exemplos de tais materiais podem ser encontrados tanto na natureza (solo, rochas, madeira, ossos, sangue, etc), como em materiais manufaturados (concreto, materiais

reforçados por fibras ou partículas, emulsões, plásticos, etc). A microestrutura destes materiais, que é a estrutura na escala das heterogeneidades, tem um papel importante no seu comportamento físico macroscópico. De fato, tal comportamento depende dos fenômenos físicos que ocorrem na escala microscópica, a qual pode ser da ordem de nanômetros (no caso de géis) ou até metros (se tratando de rochas ou outro meio geológico) (TORQUATO, 2001). Desta forma, é extremamente necessário conhecer as relações existentes entre a microestrutura e as propriedades físicas do material.

Entretanto, quando apresentam microestrutura complexa, a avaliação de tais relações fica muito difícil. Devido a isso, é usual considerar apenas uma porção do material cuja estrutura e comportamento representem satisfatoriamente o material como um todo (ZEMAN, 1999). A esta amostra se dá o nome de Elemento Representativo de Volume (ERV). Logo, o material heterogêneo original é representado de forma aproximada por uma replicação periódica do ERV, e assim a média volumétrica calculada sobre todo o corpo equivale a calculá-la apenas sobre o ERV (ZEMAN; SEJNOHA, 2001). E por isso, é relevante o estudo de estruturas periódicas.

Neste trabalho o foco será dado aos materiais periódicos em relação à microestrutura, caracterizando-se assim uma microperiodicidade. A existência da microestrutura significa que a hipótese de separação de escalas estruturais é satisfeita, isto é, a escala microscópica é muito menor que a escala macroscópica. Tal separação é caracterizada por um parâmetro pequeno $\varepsilon > 0$, que pode ser tomado como a razão de um comprimento l_{ERV} , característico do ERV, pelo comprimento l do material como um todo, $\varepsilon \ll 1$. Além disso, será considerado que a hipótese do contínuo é satisfeita, ou seja, a escala microscópica (a partir da qual o material é considerado contínuo) é muito maior que a escala atômica/molecular, em que a matéria é naturalmente discreta. Tais ideias são ilustradas na Figura 2.

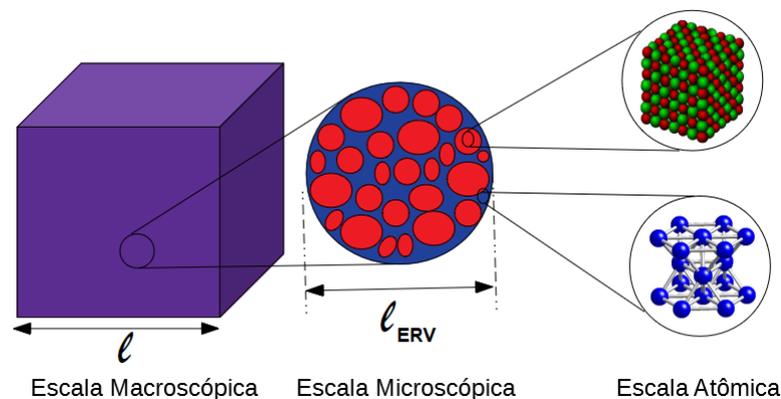


Figura 2: Separação de escalas (do autor).

Diante dessas duas hipóteses, as equações diferenciais envolvidas na modelagem do comportamento físico desta classe de materiais apresentarão coeficientes

rapidamente oscilantes em relação à macroescala. Isto dificulta a resolução através da aplicação direta de métodos numéricos usuais (como Diferenças Finitas ou Elementos Finitos), já que as malhas teriam que ser tomadas tão finas quanto menor for o parâmetro ε , para que se acompanhe com precisão a oscilação rápida dos coeficientes. Por outro lado, como consequência dessas duas hipóteses garante-se que a hipótese de homogeneidade equivalente seja satisfeita, e o material poderá ser considerado macroscopicamente homogêneo. Mais precisamente, o material micro-heterogêneo será fisicamente equivalente a um determinado material homogêneo ideal, cujo comportamento físico é modelado por equações diferenciais com coeficientes constantes. Assim, as propriedades macroscópicas (ou efetivas) do material heterogêneo original serão as propriedades do material homogêneo equivalente (PANASENKO, 2008). O processo de obtenção deste material equivalente chama-se de homogeneização. Claramente, as equações diferenciais para os materiais heterogêneo e homogêneo equivalente são complementadas por condições de contorno ou iniciais (e ainda de contato, no caso de compósitos), definindo assim os chamados problemas original e homogeneizado, respectivamente. Assim, do ponto de vista matemático, a homogeneidade equivalente significa que a solução u^ε do problema original seja ε -próxima da solução v_0 do problema homogeneizado com relação à norma do espaço de funções em que elas são procuradas. Em outras palavras, a sequência $\{u^\varepsilon\}_{\varepsilon \in (0,1)}$ de soluções da família de problemas originais indexada por ε tende para a solução v_0 do problema homogeneizado quando $\varepsilon \rightarrow 0^+$ na norma do espaço de funções correspondente (Figura 3).

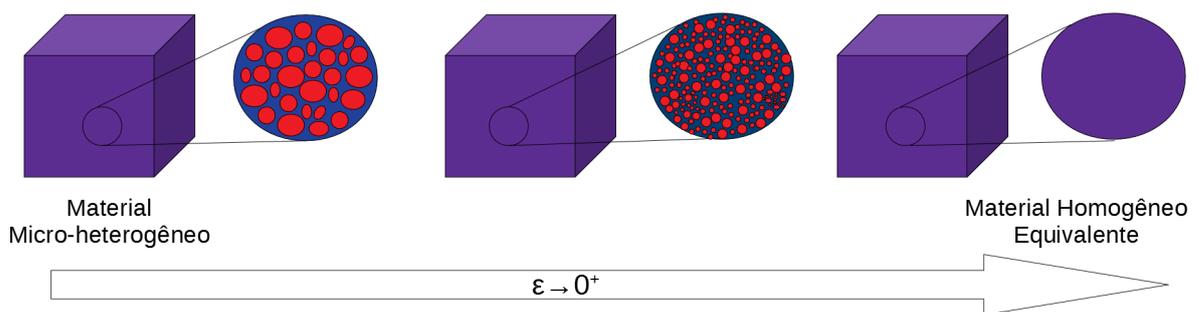


Figura 3: Hipótese de Homogeneidade Equivalente (do autor).

Tradicionalmente, aparecem duas aplicações da homogeneização: determinar o comportamento efetivo do material heterogêneo (através do comportamento do material homogêneo equivalente), e encontrar uma aproximação satisfatória para a solução do problema original, resolvendo o problema referente ao material homogêneo equivalente (o problema homogeneizado). A primeira aplicação tem a ver com as propriedades intrínsecas do material heterogêneo, das quais dependem a sua forma de reagir

às influências externas. Já a segunda é a reação de fato do material heterogêneo a tais influências, sejam elas de natureza mecânica, térmica ou eletromagnética. Neste trabalho serão abordados estes dois usos.

Dentre os vários métodos de homogeneização matemática, neste trabalho emprega-se o Método de Homogeneização Assintótica (MHA) (BAKHVALOV; PANASENKO, 1989), o qual considera uma aproximação assintótica da solução exata do problema original, em forma de série de potências de ε e em dupla escala (macro e micro). Ao aplicar esta série assintótica no problema original, obtém-se uma sequência recorrente de problemas para os coeficientes das potências de ε , que darão origem à problemas locais cujas soluções serão os termos da série assintótica. O MHA é relevante quando o material apresenta microestrutura periódica, e permite estudar fenômenos de diversas naturezas, como vibrações elásticas, fluxo de calor, difusão, interações fluido e estrutura, oscilações eletromagnéticas, dinâmicas populacionais, entre outros (mais detalhes na seção 1.2 da revisão bibliográfica). Entretanto, pode ser estendido para casos onde não se tem periodicidade, através do método de dois espaços (KELLER, 1980). Dentre suas vantagens, destacam-se os fatos de apresentar baixo custo computacional no uso de métodos numéricos para resolver os problemas da sequência recorrente, e produzir boas aproximações da solução exata do problema original.

Tradicionalmente, é utilizada a solução assintótica de primeira ordem (a série assintótica truncada na primeira potência de ε) para aproximar a solução exata do problema original, por esta também apresentar ε -proximidade e incluir informação microscópica. Contudo, em determinadas situações esta assintótica não consegue reproduzir alguns detalhes locais da solução exata do problema original, sendo necessário então considerar soluções assintóticas de ordem superior (SU et al., 2011a,b; DONG; CAO, 2014).

Por outro lado, considerável progresso tem sido obtido com a aplicação de métodos de homogeneização matemática nos casos em que o material heterogêneo apresenta comportamento linear, por exemplo a Lei de Hooke no caso mecânico, a Lei de Fourier no caso térmico e a Lei de Nernst para o fluxo de partículas de um gás (modelos matematicamente equivalentes (HASHIN, 1983)). Entretanto, existem muitos fenômenos físicos de natureza não linear, os quais não podem ser estudados através de modelos lineares, por exemplo: plasticidade, viscoelasticidade, hiperelasticidade, eletrostrição, magnetostricção, termoplasticidade, entre outros (PONTE-CASTAÑEDA; SUQUET, 1998). Ainda como exemplo de não linearidade, tem-se um modelo para hiperelasticidade com amolecimento, o modelo de Volokh (VOLOKH, 2007), o qual ajusta o modelo linear tradicional (Lei de Hooke) a fim de trazer resultados mais próximos do comportamento mecânico real de um material. Dessa forma, procura-se então obter, para materiais não lineares, resultados tão proeminentes quanto os

obtidos para os casos lineares.

Outra peculiaridade é o caso dos compósitos que apresentam imperfeições na interface das suas fases. A maioria da literatura existente considerava que os materiais constituintes eram perfeitamente ligados, implicando na continuidade da solução do problema nesta interface (HASHIN, 1983), sendo esta uma situação ideal em relação ao que ocorre realmente. Na prática, a adesão entre as fases do material não satisfaz essas condições, fazendo-se então extremamente necessário considerar condições de descontinuidade (ou de contato imperfeito) nos problemas que modelam algum fenômeno nestes materiais. De fato, algum contato elétrico ou térmico na interface pode diminuir consideravelmente a respectiva condutividade efetiva de algum material, ou algum descolamento entre as fases, prejudicar o comportamento elástico efetivo do compósito (TORQUATO; RINTOUL, 1995).

Essas imperfeições estruturais podem ser compreendidas tanto sob o ponto de vista estrutural e morfológico ou puramente mecânico, sendo algumas das causas encontradas na literatura (LIPTON; VERNESCU, 1996; LEVY NETO, 2012): ocorrência de processos químicos na interface (como oxidação), características da microestrutura como atração eletrostática entre as fases, problemas na adesão mecânica dos materiais devido à presença de porosidades ou rugosidades na sua superfície, entre outros.

Neste trabalho, de forma geral, pretende-se aplicar o MHA em meios microperiódicos, unidimensionais, lineares e não lineares para: (i) encontrar soluções assintóticas de primeira e segunda ordens para problemas de valores de contorno, com coeficientes continuamente diferenciáveis, pretendo-se assim integrar e generalizar-se os estudos realizados em LEITZKE (2017) e LIMA (2016); (ii) determinar a lei efetiva em problemas de valores de contorno com coeficientes constantes por partes, sob condições de contato perfeito e imperfeito, fazendo ainda o estudo de um caso específico de não linearidade, com relevante significado físico: o Modelo de Volokh.

1.2 Revisão bibliográfica

Materiais heterogêneos têm sido objeto de vasto estudo de cientistas (matemáticos, físicos, engenheiros, etc) há aproximadamente dois séculos (KACHANOV; SEVOSTIANOV, 2013). Os primeiros trabalhos sobre o assunto datam do início do século XIX, com o estudo das propriedades dielétricas e magnéticas efetivas de meios homogêneos com inclusões esféricas, envolvendo notáveis cientistas como POISSON (1824), FARADAY (1838), MAXWELL (1873), LORENZ (1880), RAYLEIGH (1892), entre outros. No século XX, inicia-se o estudo das propriedades mecânicas destes materiais, com o trabalho de Einstein (EINSTEIN, 1906), onde é determinada a viscosidade efetiva de um líquido com micropartículas esféricas em suspensão. A partir destes, houve uma explosão na literatura sobre o assunto, devido ao desafio e à ri-

queza de resultados envolvidos nos problemas referentes a estes materiais, e também à sua importância tecnológica (TORQUATO, 2001).

O MHA surge mais tarde, tendo, como trabalhos pioneiros e norteadores, os de SANCHEZ-PALENCIA (1970), SANCHEZ-PALENCIA (1980), DE GIORGI; SPAGNOLO (1973), MARCHENKO; KHRUSLOV (1974), BAKHVALOV (1974), BAKHVALOV (1975a), BAKHVALOV (1975b), OLEINIK (1975), BERDICHEVSKY (1975), BABUSKA (1976a), BABUSKA (1976b), BABUSKA (1976c), BENSOUSSAN; LIONS; PAPANICOLAU (1978), CHRISTENSEN (1979) e BAKHVALOV; PANASENKO (1989). Atualmente, o método tem sido aplicado com sucesso em problemas das mais diversas naturezas e aplicações, mostrando sua versatilidade e eficácia. Alguns exemplos interessantes serão comentados a seguir.

Aplicações na determinação de propriedades mecânicas são encontrados em abundância na literatura, como em FRANCFORT; MURAT (1986), LEE; GHOSH (1999), KAMIŃSKI (2008) e PENTA; GERISCH (2017), onde o MHA é aplicado na determinação do tensor elástico efetivo para diferentes geometrias e tipos de materiais. Fenômenos de natureza mista também são estudados com o MHA, como em WAN; FAN; YU (2013) onde são estudadas as características eletro-mecânicas de um filme piezoelétrico celular, ou em SHABANA; WANG (2013) onde são avaliadas propriedades termoelásticas de matrizes poliméricas reforçadas por nanofibras.

O método também é aplicado em problemas envolvendo a mecânica de fluídos. Em DIMITRIENKO (1997), a fim de obter a expressão para a transferência de massa que ocorre no fluxo de gás em um meio poroso, determinaram-se os coeficientes efetivos de permeabilidade, elasticidade e expansão térmica (entre outros). Em LEMAIRE et al. (2013), o fluxo de nutrientes em estruturas ósseas é estudado através da difusão eletromecânica efetiva, obtida via MHA, considerando um meio poroso com canais muito finos. Outra aplicação interessante é em problemas envolvendo difusão ecológica, nos quais a complexidade natural dos ambientes reais torna possível (e necessária) a aplicação de métodos multiescala, inclusive do MHA. Em GARLICK et al. (2011), o método é utilizado em um modelo de difusão simples para uma espécie de veado, e em DUNCAN et al. (2017), para determinar a taxa de espalhamento de plantas invasivas.

Por outro lado o método pode ser aplicável ainda em fenômenos envolvendo a classe dos metamateriais (ROHAN; NAILI; NGUYEN, 2016), caracterizados por apresentarem propriedades que não são encontradas na natureza, obtidas através de microestruturas minimamente idealizadas. Como exemplo, tem-se os polímeros quirais, cujo estudo tem se intensificado nos últimos anos, dado seu potencial de aplicação no ramo de metamateriais com índice de refração negativo (NOWACKI et al., 2017). Em FIETZ (2013), tem-se o MHA aplicado no estudo do comportamento de um compósito bifásico, cujo um dos constituintes apresenta quiralidade, podendo representar assim

a presença de uma matriz polimérica quiral no material.

Tratando-se ainda da versatilidade do método, além de ser aplicável em problemas de diversos contextos, o MHA produz resultados satisfatórios também em diferentes tipos de microestruturas, por exemplo: compósitos multilaminados (SIXTO-CAMACHO et al., 2013), em meios porosos (SVIERCOSKI; TRAVIS; HYMAN, 2008), ou ainda em casos unidimensionais. Este último, por mais que pareça simples, se faz importante pois, além de representar muitos fenômenos que ocorrem em uma dimensão, serve de base para casos multidimensionais mais complexos e fornece resultados analíticos que dificilmente são obtidos nos outros casos. É o que ocorre nos seguintes trabalhos: CHAPMAN; MCBURNIE (2011) e PERALTA et al. (2016). Neste último, que trata do comportamento mecânico de peças de alvenaria, além de se utilizar exemplos unidimensionais para obtenção de resultados analíticos, são realizados testes de compressão cujos resultados validam aqueles obtidos via MHA.

Sobre as aproximações assintóticas consideradas na aplicação do MHA, os trabalhos de SU et al. (2011a), SU et al. (2011b) e DONG; CAO (2014) trazem resultados interessantes sobre considerar termos de ordem superior. Em SU et al. (2011a) foi obtida uma aproximação para a solução de uma equação parabólica com coeficientes rapidamente oscilantes através do MHA, e em SU et al. (2011b), através de elementos finitos mostrou-se que só a assintótica de segunda ordem reproduziu detalhes locais da solução do problema original. Resultado similar foi encontrado em DONG; CAO (2014), onde aplicou-se o MHA para a equação da onda em um domínio perfurado, obtendo-se também que o termo de ordem 2 da assintótica foi necessário para aproximar melhor a solução exata do problema.

Atenção tem sido dada também aos materiais com comportamento não linear, como em: KILIC; HAJ-ALI (2003), MERODIO; OGDEN (2005), SONG; GAO; LI (2015) e PADMANABHAN; PRABU; ALI (2018), onde surgem importantes resultados que relacionam a não linearidade com o comportamento global do material. Inclusive, com a aplicação de métodos de homogeneização matemática, como em: PONTE-CASTAÑEDA; WILLIS (1999), IDIART; PONTE-CASTAÑEDA (2003), KHISAEVA; OSTOJA-STARZEWSKI (2007), TRAN; MONCHIET; BONNET (2014) e PÉREZ-FERNÁNDEZ et al. (2018). Em KHISAEVA; OSTOJA-STARZEWSKI (2007), por exemplo, ao aplicar homogeneização em materiais micro-heterogêneos com propriedades termoelásticas não lineares, constata-se que as formulações local e efetiva da energia não coincidem, o que ocorre no caso da linearidade infinitesimal. Resultados novos e desafiadores assim reforçam a importância de se estudar materiais que apresentam comportamento não linear.

Em relação à imperfeição na interface, muitos resultados publicados vêm mostrando a importância de considerar esta característica nos problemas envolvendo compósitos, dada a sua influência no comportamento local e macroscópico. Em

BRAVO-CASTILLERO et al. (2001); LÓPEZ-REALPOZO et al. (2008); LÓPEZ et al. (2013); LÓPEZ-RUIZ et al. (2015); PENTA; GERISCH (2017) os resultados são obtidos de forma teórica considerando esta imperfeição nos problemas que modelam o comportamento físico destas matérias. Já em GAO et al. (2012); MARA; BEYERLEIN (2014); ROHINI; KATTI; BOSE (2015), a influência do contato imperfeito entre as fases é avaliado experimentalmente, onde o tipo de imperfeição é variado de acordo com o processo de fabricação das peças utilizadas nos testes.

Teoricamente, o caso de contato imperfeito tem sido abordado praticamente de duas formas: considerando a interface como uma outra fase, com características intermediárias entre as das fases vizinhas (como em ANDRIANOV; TOPOL; WEICHERT (2011)), ou então considerando condições de contato para a solução do problema e o respectivo fluxo, que representam o "salto" realizado pela respectiva grandeza ao passar pela interface (como em ALVAREZ-BORGES et al. (2018)). Surgindo em diferentes contextos, pode ser interpretada como um capacitor que gera uma diferença de potencial em um contexto eletro-mecânico, uma barreira no fluxo de um fluido em um meio poroso, ou então uma barreira térmica entre as fases do material

1.3 Objetivos

Este trabalho foi desenvolvido com o objetivo geral de utilizar o MHA em problemas de valores de contorno referentes a meios microperiódicos e não lineares, em duas situações principais:

1. Problemas cujas equações, lineares ou não lineares, apresentam coeficientes continuamente diferenciáveis, a fim de obter aproximações da solução exata do problema original;
2. Problemas cujas equações, lineares ou não lineares, sob condições de contato perfeito ou imperfeito, apresentam coeficientes constantes por partes a fim de obter estimativas do fluxo efetivo do meio.

Assim, foram traçados os seguintes objetivos específicos, para o objetivo geral 1:

- Resolver analiticamente o PVC original, com coeficientes continuamente diferenciáveis, para o caso da relação constitutiva linear;
- Aplicar o MHA neste PVC, formular e resolver os problemas locais e homogeneizado, a fim de encontrar de forma analítica as soluções, e determinar as aproximações assintóticas de ordens 1 e 2;
- Aplicar o MHA ao caso da relação constitutiva não linear de forma genérica;

- Obter os problemas locais e homogeneizado, garantindo existência e unicidade das respectivas soluções;
- Considerar um exemplo de não linearidade a fim de resolver os problemas, e determinar as soluções assintóticas de primeira e segunda ordens;
- Atráves de implementações numéricas, avaliar o erro destas aproximações com a solução exata do problema original obtida de forma analítica no caso linear, e numérica no caso não linear; para investigar a influência do termo de segunda ordem da solução assintótica.

E para o objetivo geral 2:

- Resolver analiticamente o PVC original com coeficientes constantes por partes, contato perfeito e relação constitutiva linear;
- Aplicar o MHA neste PVC, formular e resolver os problemas locais e homogeneizado, a fim de encontrar de forma analítica as soluções, e determinar as aproximações assintóticas de ordens 1 e 2;
- Utilizar o desenvolvimento do método neste caso para determinar uma fórmula para o fluxo efetivo do meio;
- Aplicar o MHA neste PVC linear, mas com contato imperfeito entre as fases, e utilizar do desenvolvimento do método para determinar uma fórmula para o fluxo efetivo do meio, comparando com os resultados de contato perfeito;
- Aplicar o MHA ao caso do PVC com coeficientes constantes por partes, contato perfeito e relação constitutiva não linear de forma genérica;
- Obter os problemas locais e homogeneizado, garantindo existência e unicidade das respectivas soluções;
- Utilizar deste desenvolvimento do método para determinar o fluxo efetivo no meio;
- Considerar exemplos de não linearidade na relação constitutiva motivadas por situações físicas reais, a fim de determinar o fluxo efetivo nestas situações;
- Aplicar o MHA a este PVC não linear, mas com contato imperfeito, e utilizar do desenvolvimento do método para determinar uma fórmula para o fluxo efetivo do meio, comparando com os resultados de contato perfeito;
- Explorar os resultados obtidos com a aplicação do MHA, para um compósito bifásico, não linear, cujas fases seguem o modelo de Volokh.

2 INTRODUÇÃO AO MÉTODO DE HOMOGENEIZAÇÃO ASINTÓTICA

2.1 Conceitos e ideias preliminares

2.1.1 Descrição Matemática de um meio microperiódico unidimensional

Como meio unidimensional pode-se idealizar uma barra de comprimento l , representada por um intervalo $[0, l] \subset \mathbb{R}$. Sendo uma estrutura microperiódica, ou ainda, ε -periódica (com $0 < \varepsilon \ll 1$), terá como ERV (ou célula periódica ou básica) o intervalo $[0, \varepsilon]$. As propriedades do material (elasticidade, condutividade térmica, etc) serão representadas por funções $K(x/\varepsilon)$, claramente também ε -periódicas. A partir de agora, será considerada a seguinte notação para as funções que dependam de ε : $F^\varepsilon(x) = F(x/\varepsilon)$. Logo, escreve-se $K^\varepsilon(x)$ no lugar de $K(x/\varepsilon)$.

Abaixo, ilustra-se o seu comportamento rapidamente oscilante tomando

$$K\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = 1 + \frac{1}{4} \operatorname{sen}\left(2\pi \frac{x}{\varepsilon}\right), \quad (2.1)$$

para alguns valores de ε .

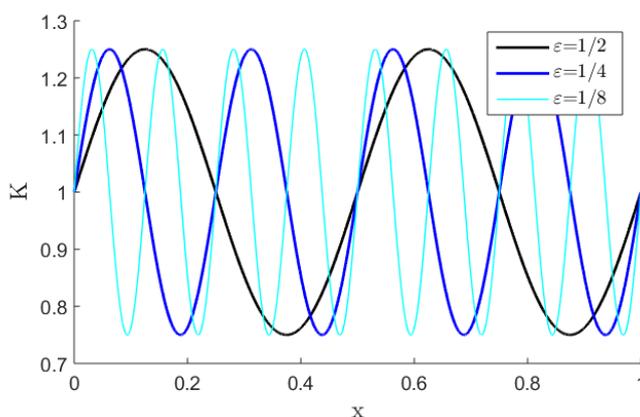


Figura 4: Ilustração do comportamento rapidamente oscilante de um coeficiente $K\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = 1 + \frac{1}{4} \operatorname{sen}\left(2\pi \frac{x}{\varepsilon}\right)$.

A separação de escalas se dará da seguinte forma: x será a variável global ou lenta, característica da macroescala, enquanto que $y = \frac{x}{\varepsilon}$, será a variável local ou rápida, característica da microescala. Sendo assim, a célula básica $[0, \varepsilon]$ será equivalente ao intervalo $[0, 1]$ na microescala. Na Figura 5, estão ilustradas as ideias até aqui explanadas.

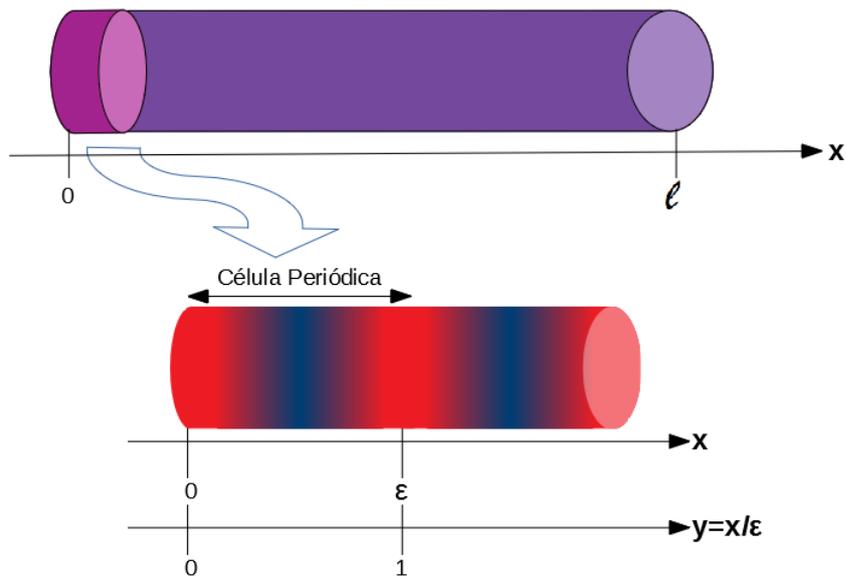


Figura 5: Meio microperiódico unidimensional com propriedade funcionalmente graduada (do autor).

Outro aspecto importante de se esclarecer é o do operador média. Considerando uma grandeza $\rho^\varepsilon(x)$, ε -periódica e contínua em $[0, l]$, o seu valor médio neste domínio será:

$$\frac{1}{l} \int_0^l \rho^\varepsilon(x) dx . \quad (2.2)$$

Porém, é visto que diante da condição de ε -periodicidade, tem-se $l = n\varepsilon$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Logo, obtém-se para a média em (2.2):

$$\frac{n}{l} \int_0^\varepsilon \rho^\varepsilon(x) dx = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon \rho^\varepsilon(x) dx , \quad (2.3)$$

ou seja, a média sobre todo o meio equivale à média sobre a célula básica (integral da direita em (2.3)).

Fazendo-se agora uma mudança de variável para $y = x/\varepsilon$, a média se reduz à integral

$$\int_0^1 \rho(y) dy . \quad (2.4)$$

Assim define-se o operador média sobre a célula básica como $\langle \cdot \rangle$, ou seja,

$$\langle \cdot \rangle = \int_0^1 \cdot dy. \quad (2.5)$$

2.1.2 Ordem

Sejam $B_\varepsilon(\Omega)$ um espaço normado, e $u(x, \varepsilon) \in B_\varepsilon(\Omega)$, com $\Omega \subset \mathbb{R}$, cuja norma $\|u(x, \varepsilon)\|_{B_\varepsilon(\Omega)}$ é definida para cada $\varepsilon > 0$, suficientemente pequeno. A notação $\|u(x, \varepsilon)\|_{B_\varepsilon(\Omega)} = O(\varepsilon^N)$, para algum $N \in \mathbb{N}$, enquanto $\varepsilon \rightarrow 0^+$ na norma de $B_\varepsilon(\Omega)$, significa que existem constantes $A, \varepsilon_0 > 0$, tal que $\|u(x, \varepsilon)\|_{B_\varepsilon(\Omega)} \leq A\varepsilon^N$ para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, o que em outras palavras quer dizer que $u(x, \varepsilon)$ é da ordem de ε^N .

2.1.3 Expansão assintótica e solução assintótica formal

Uma expansão assintótica (EA) de uma função $u(x, \varepsilon)$ ($u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$) é uma série assintótica (não necessariamente convergente), na forma

$$u(x, \varepsilon) \sim u^{(\infty)}(x, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u_k(x, \varepsilon), \quad (2.6)$$

com $u_k(x, \varepsilon) \in B_\varepsilon(\Omega)$, onde $\forall N \in \mathbb{N}$, existe $M(N) > 0$ tal que, $\forall m > M$,

$$\|u(x, \varepsilon) - u^{(m)}(x, \varepsilon)\|_{B_\varepsilon(\Omega)} = O(\varepsilon^N), \quad (2.7)$$

na norma de $B_\varepsilon(\Omega)$ quando $\varepsilon \rightarrow 0^+$. Ou seja, é possível aproximar a função $u(x, \varepsilon)$ com um erro da ordem de ε^N , tomando um certo número m ($> M(N)$) de termos da sua EA.

Agora, seja L_ε um operador diferencial que opere de $B_{1\varepsilon}(\Omega)$ para $B_{2\varepsilon}(\Omega)$ (ambos espaços normados), e a equação

$$L_\varepsilon u = f, \quad (2.8)$$

com $f(x, \varepsilon) \in B_{2\varepsilon}(\Omega)$. Denota-se por solução assintótica formal (SAF) de (2.8) a série assintótica $u(x, \varepsilon)^{(\infty)} = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u_k(x, \varepsilon) \in B_{1\varepsilon}(\Omega)$ tal que $\forall N \in \mathbb{N}$, existe $M(N) > 0$ tal que, $\forall m > M$,

$$\|L_\varepsilon u^{(m)} - f\|_{B_{2\varepsilon}(\Omega)} = O(\varepsilon^N), \quad (2.9)$$

na norma de $B_{2\varepsilon}(\Omega)$ quando $\varepsilon \rightarrow 0^+$.

É visto que os conceitos de EA e SAF são semelhantes, entretanto, tratam de ideias diferentes. Pode-se dizer que a diferença está no fato que uma EA trata de aproximar uma função através de uma série, com um erro de determinada ordem, e uma SAF, aproximar a solução de uma determinada equação diferencial. Entretanto, não se pode dizer sempre que ao considerar uma SAF, esta será uma EA da solução do referido problema.

No caso em que L_ε linear, por exemplo, tal propriedade é garantida caso se tenha uma estimativa¹ do tipo $\|u\|_{B_{1\varepsilon}(\Omega)} \leq c_1 \varepsilon^{c_2} \|f\|_{B_{2\varepsilon}(\Omega)}$, onde $c_1 > 0$ e c_2 são constantes que não dependem de ε . Neste caso, segue da SAF em (2.9) que $\forall N \in \mathbb{N}$ existe $M > 0$ tal que $\|u - u^{(m)}\|_{B_{1\varepsilon}} = O(\varepsilon^N)$, com $\varepsilon \rightarrow 0^+$, $\forall m \geq M$. Ou seja, a SAF é uma EA da solução exata do problema (BAKHVALOV; PANASENKO, 1989).

2.1.4 Introdução ao formalismo do MHA

O MHA aqui considerado se baseia em considerar uma SAF em dupla escala para a solução exata u^ε de um PVC, na forma:

$$u^{(\infty)}(x, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u_k(x, y), \quad (2.10)$$

com $y = x/\varepsilon$, $u_0(x, y) \in C^3(\overline{\Omega})$, $u_k(x, y) \in C^2(\overline{\Omega})$ para $k \geq 1$, 1-periódicas em y (devido à ε -periodicidade), e Ω o domínio considerado.

Ao assumir esta SAF para algum problema com equações diferenciais, passa-se a tratá-lo em duas variáveis, sendo necessário considerar nas derivações a regra da cadeia. A saber, para uma função de duas variáveis $F(h_1, h_2)$, com $h_1 = h_1(x)$ e $h_2 = h_2(x)$, tem-se (ILYIN; POZNYAK, 1982):

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial h_1} \frac{\partial h_1}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial h_2} \frac{\partial h_2}{\partial x}. \quad (2.11)$$

Considerando então $u_k(x, y)$, onde x e y são funções de x , da regra da cadeia em (2.11) obtém-se que:

$$\frac{\partial u_k}{\partial x} = \frac{\partial u_k}{\partial x} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial u_k}{\partial y}. \quad (2.12)$$

A fim de mostrar como se procede no MHA, nos problemas deste trabalho, será considerada a equação elíptica que modela o estado estacionário de um fenômeno difusivo e unidimensional, em um meio micro-heterogêneo, a saber,

$$\frac{d}{dx} \left[\sigma^\varepsilon \left(x, \frac{du^\varepsilon}{dx} \right) \right] = f(x), \quad (2.13)$$

onde u^ε , a solução, é variável do tipo densidade, e σ^ε , do tipo fluxo. Além disso, se tratando de um caso em que a relação constitutiva para o fluxo é linear, tem-se:

$$\sigma^\varepsilon \left(x, \frac{du^\varepsilon}{dx} \right) = K^\varepsilon(x) \frac{du^\varepsilon}{dx}, \quad (2.14)$$

onde K^ε é o coeficiente rapidamente oscilante da equação. Para cada fenômeno

¹Se faz interessante comentar que não existe tal estimativa generalizada para problemas elásticos bi e tridimensionais. Mas no caso unidimensional, pode-se aplicar esta (WHEELER, 1996).

difusivo, u^ε , σ^ε e K^ε terão um significado físico específico, dos quais estão citados os principais na Tabela 2.1.4, conforme HASHIN (1983):

Tabela 1: Significado físico dos principais termos da equação difusiva para diferentes contextos de aplicação.

Contexto	σ^ε	u^ε	du^ε/dx	K^ε
Mecânico	Tensão de deformação	Deslocamento	Deformação	Rigidez
Condução térmica	Fluxo de calor	Temperatura	Gradiente	Condutividade térmica
Condução Elétrica	Corrente	Potencial elétrico	Campo elétrico	Condutividade elétrica
Eletrostática	Indução elétrica	Potencial elétrico	Campo elétrico	Permissividade elétrica
Magnetostática	Indução magnética	Potencial magnético	Campo magnético	Permeabilidade magnética

Detendo-se no caso linear (equação (2.16)) nesta seção, será tomada uma notação para um operador diferencial, que simplificará consideravelmente as grandes expressões que surgirão no desenvolvimento da metodologia, sendo esta:

$$L_{\alpha\beta}(\cdot) = \frac{\partial}{\partial\alpha} \left(K(y) \frac{\partial(\cdot)}{\partial\beta} \right), \quad \alpha, \beta \in \{x, y\}. \quad (2.15)$$

Agora, toma-se uma porção finita da SAF de u^ε , como

$$u^{(m)}(x, \varepsilon) = \sum_{k=0}^m \varepsilon^k u_k(x, y), \quad (2.16)$$

com $m \in \mathbb{N}$ e aplica-se em (2.13). No momento, os detalhes do procedimento serão omitidos, a fim de mostrar de forma mais breve o funcionamento do método. Então, utilizando a regra da cadeia (2.12), e organizando os termos de acordo com as potências de ε , obtém-se a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} L_{xx}u^{(m)} - f(x) &= \varepsilon^{-2} (L_{yy}u_0) + \varepsilon^{-1} (L_{yy}u_1 + L_{xy}u_0 + L_{yx}u_0) + \\ &+ \varepsilon^0 (L_{yy}u_2 + L_{xy}u_1 + L_{yx}u_1 + L_{xx}u_0 - f(x)) + \\ &\quad \varepsilon^1 (L_{yy}u_3 + L_{xy}u_2 + L_{yx}u_2 + L_{xx}u_1) + , \\ &+ \dots + \varepsilon^i (L_{yy}u_{i+2} + L_{xy}u_{i+1} + L_{yx}u_{i+1} + L_{xx}u_i) + \dots + \\ &+ \varepsilon^{m-1} (L_{xy}u_m + L_{yx}u_m + L_{xx}u_{m-1}) + \varepsilon^m L_{xx}u_m \end{aligned} \quad (2.17)$$

com $i \in \mathbb{N}$. Lembrando do conceito de SAF, observa-se que para $u^{(m)}$ cumprir (2.9), é necessário que coeficientes das potências de ε com expoente menor que $m - 1$ sejam nulos, incluindo os das potências que não tendem para 0 quando $\varepsilon \rightarrow 0^+$, para daí ter-se que:

$$\|L_{xx}u^{(m)} - f(x)\|_{B_{2\varepsilon}(\Omega)} = O(\varepsilon^{m-1}). \quad (2.18)$$

Dessa forma, terá-se que $N = m - 1$, logo, tomando $M(N) = N + 1$ conclui-se que

$$\forall N \in \mathbb{N}, \exists M(N) = N + 1 > 0 : \forall m > M \Rightarrow \|L_{xx}u^{(m)} - f(x)\|_{B_{2\varepsilon}(\Omega)} = O(\varepsilon^N). \quad (2.19)$$

Especificamente, (2.16), será uma SAF se existirem $u_k(x, y)$ 1-periódicas em y que satisfaçam as seguintes condições:

$$\varepsilon^{-2} : L_{yy}u_0 = 0, \quad (2.20)$$

$$\varepsilon^{-1} : L_{yy}u_1 = -L_{yx}u_0 - L_{xy}u_0, \quad (2.21)$$

$$\varepsilon^0 : L_{yy}u_2 = -L_{xy}u_1 - L_{yx}u_1 - L_{xx}u_0 - f(x), \quad (2.22)$$

$$\varepsilon^1 : L_{yy}u_3 = -L_{xy}u_2 - L_{yx}u_2 - L_{xx}u_1, \quad (2.23)$$

\vdots

$$\varepsilon^i : L_{yy}u_{i+2} = -L_{xy}u_{i+1} - L_{yx}u_{i+1} - L_{xx}u_i, \quad (2.24)$$

\vdots

$$\varepsilon^{m-2} : L_{yy}u_{m-2} = -L_{xy}u_{m-1} - L_{yx}u_{m-1} - L_{xx}u_{m-2}, \quad (2.25)$$

as quais formam uma sequência recorrente de equações diferenciais, de onde obtém-se os termos $u_i(x, y)$ ($i = 1, \dots, m$) da SAF considerada em (2.16).

Na prática, geralmente é considerada uma SAF de segunda ordem, ou seja, $u^{(2)}(x, y)$. Isto acontece porque, observando as equações, é necessário considerar a potência ε^2 na SAF para que se tenha a equação (2.22), pois é desta que extrai-se o problema para encontrar $u_0(x, y)$, como será visto mais adiante. Nas próximas seções, onde o MHA será aplicado a diferentes casos, tais conceitos serão explanados com mais detalhes, assim como serão mostrados os detalhes dos cálculos dos principais resultados da aplicação do MHA.

2.2 Aplicação do MHA no caso da Equação de Difusão estacionária, linear, com coeficiente continuamente diferenciável

2.2.1 Caracterização do problema e Solução Analítica

Será considerado um PVC para a equação elíptica em (2.13), o qual será chamado de Problema Original (P_O), a saber:

$$P_O : \begin{cases} \frac{d}{dx} \left[K^\varepsilon(x) \frac{du^\varepsilon}{dx} \right] = f(x), & x \in (0, l) \\ u^\varepsilon|_{x=0} = g_1 \\ u^\varepsilon|_{x=l} = g_2 \end{cases}, \quad (2.26)$$

onde $K^\varepsilon(x) \in C^1([0, l])$, ε -periódico em x , positivo e estritamente limitado em $[0, l]$, além de $f(x) \in C([0, l])$. Sob essas hipóteses, a solução geral da equação deste problema pode ser obtida por integração direta, chegando-se a:

$$u^\varepsilon(x) = \int_0^x \left[\frac{\int_0^s f(t)dt + C_1}{K^\varepsilon(s)} \right] ds + C_2, \quad (2.27)$$

visto que, pela continuidade de $K^\varepsilon(x)$ e $f(x)$, é garantida a existência das integrais em (2.27).

As constantes de integração C_1 e C_2 são obtidas através das condições de contorno do problema, a saber,

$$C_1 = \left[\int_0^l \frac{1}{K^\varepsilon(s)} ds \right]^{-1} \left(g_2 - g_1 - \int_0^l \frac{\int_0^s f(t)dt}{K^\varepsilon(s)} ds \right), \quad C_2 = g_1. \quad (2.28)$$

Atenta-se para o fato de que da hipótese de $K^\varepsilon(x) > 0$, terá-se que $\int_0^l \frac{1}{K^\varepsilon(s)} ds > 0$, garantido o cálculo de C_1 em (2.28). Sendo assim, através de (2.27) e (2.28), obtém-se a solução exata do P_O em (2.26).

2.2.2 Construção da SAF

Agora, iniciando a abordagem do MHA, propõe-se uma SAF em dupla escala para a solução $u^\varepsilon(x)$, como em (2.16), porém de segunda ordem, ou seja,

$$u^\varepsilon \sim u^{(2)}(x, \varepsilon) = u_0(x, y) + \varepsilon u_1(x, y) + \varepsilon^2 u_2(x, y), \quad y = \frac{x}{\varepsilon}, \quad (2.29)$$

onde $u_k(x, y)$ são 1-periódicas em y (para $k = 0, 1, 2$).

O próximo passo é aplicar $u^{(2)}$ no problema P_O em (2.26). Como será admitida a separação de escalas, as derivadas ordinárias tornarão-se parciais, obtendo-se, pela regra da cadeia em (2.12):

$$\frac{du^\varepsilon}{dx} \approx \frac{du^{(2)}}{dx} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial u_0}{\partial y} + \varepsilon \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} + \varepsilon^2 \frac{\partial u_2}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial u_2}{\partial y}. \quad (2.30)$$

Considerando agora equação em (2.26), aplicando a regra de cadeia, obtém-se

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} \left[K(y) \frac{\partial u^{(2)}}{\partial x} \right] &= \frac{\partial}{\partial x} \left(K(y) \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) + \varepsilon^{-1} \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(K(y) \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) \right] + \\
&+ \varepsilon^{-1} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(K(y) \frac{\partial u_0}{\partial y} \right) \right] + \varepsilon^{-2} \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(K(y) \frac{\partial u_0}{\partial y} \right) \right] + \quad (2.31) \\
&+ \varepsilon^0 \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(K(y) \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) \right] + \varepsilon^0 \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(K(y) \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \right] + \\
&+ \varepsilon^{-1} \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(K(y) \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \right] + \varepsilon^0 \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(K(y) \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) \right] + O(\varepsilon) .
\end{aligned}$$

Agora, subtraindo $f(x)$ em ambos os lados de (2.31), e reorganizando de acordo com as potências de ε , pode-se escrever

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} \left[K^\varepsilon(x) \frac{du^\varepsilon}{dx} \right] - f(x) &\approx \frac{\partial}{\partial x} \left[K(y) \frac{\partial u^{(2)}}{\partial x} \right] - f(x) = \varepsilon^{-2} \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(K(y) \frac{\partial u_0}{\partial y} \right) \right] + \\
&+ \varepsilon^{-1} \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(K(y) \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(K(y) \frac{\partial u_0}{\partial y} \right) \right] + \quad (2.32) \\
&+ \varepsilon^0 \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(K(y) \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K(y) \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) - f(x) \right] + \\
&+ O(\varepsilon) .
\end{aligned}$$

Dessa forma, reescrevendo (2.32) na notação do operador $L_{\alpha\beta}$, tem-se

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} \left[K^\varepsilon(x) \frac{du^\varepsilon}{dx} \right] - f(x) &\approx \varepsilon^{-2} (L_{yy}u_0) + \varepsilon^{-1} (L_{yy}u_1 + L_{xy}u_0 + L_{yx}u_0) + \quad (2.33) \\
&+ \varepsilon^0 (L_{yy}u_2 + L_{xy}u_1 + L_{yx}u_1 + L_{xx}u_0 - f(x)) + O(\varepsilon) .
\end{aligned}$$

Retomando o que foi explanado na Seção 2.1.4, a fim de que a SAF u^2 seja uma EA da solução exata do P_O em (2.26), é necessário que os coeficientes das potências de ε em (refeq: eau6) se anulem. Dessa forma, obtém-se as seguintes equações, para cada potência de ε

$$\varepsilon^{-2} : L_{yy}u_0 = 0; \quad (2.34)$$

$$\varepsilon^{-1} : L_{yy}u_1 + L_{yx}u_0 + L_{xy}u_0 = 0; \quad (2.35)$$

$$\varepsilon^0 : L_{yy}u_2 + L_{xy}u_1 + L_{yx}u_1 + L_{xx}u_0 - f(x) = 0. \quad (2.36)$$

Satisfazendo as equações acima, garante-se que $u^{(2)}$ é uma EA da solução exata u^ε . Ou seja, encontrando u_0, u_1 e u_2 , soluções 1-periódicas em y destas equações, obtém-se uma solução aproximada tal que

$$\|L_{xx}u^{(2)} - f(x)\|_{C^2[0,l]} = O(\varepsilon), \quad (2.37)$$

conforme foi discutido na Seção 2.1.4.

Analisando agora o problema para ε^{-2} em (2.34), tem-se

$$\left[\frac{\partial}{\partial y} \left(K(y) \frac{\partial u_0}{\partial y} \right) \right] = 0, \quad (2.38)$$

observando-se daí que $K(y) \frac{\partial u_0}{\partial y}$ não depende de y , logo

$$K(y) \frac{\partial u_0}{\partial y} = C(x), \quad (2.39)$$

e da hipótese de $K^\varepsilon(x) > 0$, será possível isolar $\partial u_0 / \partial y$ em (2.39), obtendo

$$\frac{\partial u_0}{\partial y} = \frac{C(x)}{K(y)}. \quad (2.40)$$

Aplicando agora o operador média em (2.40), terá-se

$$\int_0^1 \frac{\partial u_0}{\partial y} dy = C(x) \int_0^1 \frac{1}{K(y)} dy. \quad (2.41)$$

Da integral da esquerda, pela 1-periodicidade de u_0 em y , tem-se

$$\int_0^1 \frac{\partial u_0}{\partial y} dy = u_0|_{y=1} - u_0|_{y=0} = 0, \quad (2.42)$$

levando ao fato de que $C(x) \int_0^1 (K(y))^{-1} dy = 0$. Disto segue que $C(x) = 0$, pois sendo $K(y) > 0$, tem-se $\langle K^{-1} \rangle > 0$.

Dessa forma, de reescrever (2.40), agora considerando $C(x) = 0$, conclui-se que

$$\frac{\partial u_0}{\partial y} = 0, \quad (2.43)$$

ou seja, u_0 não depende da microescala, e então é possível denotar $u_0(x, y) \equiv v_0(x)$. Este é um resultado muito interessante, pois implica que, na construção da SAF $u^{(2)}$, o primeiro termo descreve apenas o fenômeno na macroescala do material, não sendo influenciado pela microescala.

Então, considerando (2.43), as equações (2.35) e (2.36) podem ser simplificadas como segue:

$$\varepsilon^{-1} : L_{yy}u_1 = -L_{yx}v_0, \quad (2.44)$$

$$\varepsilon^0 : L_{yy}u_2 = -L_{xy}u_1 - L_{yx}u_1 - L_{xx}v_0 + f(x). \quad (2.45)$$

As equações diferenciais em (2.44) e (2.45) fornecem os termos u_1 e u_2 da SAF

considerada inicialmente. Sendo assim, de forma análoga a P_O em (2.26), espera-se que os problemas para determinar tais funções tenham condições de contorno. Assim, deve-se aplicar a SAF (2.29) também nas condições de contorno de (2.26), obtendo-se:

$$u^{(2)}(0, 0) = v_0(0) + \varepsilon u_1(0, 0) + \varepsilon^2 u_2(0, 0) \approx g_1, \quad (2.46)$$

$$u^{(2)}\left(l, \frac{l}{\varepsilon}\right) = v_0(l) + \varepsilon u_1\left(l, \frac{l}{\varepsilon}\right) + \varepsilon^2 u_2\left(l, \frac{l}{\varepsilon}\right) \approx g_2. \quad (2.47)$$

Entretanto, lembrando que $l = n\varepsilon$ ($n \in \mathbb{N}$), é válido dizer que $u_k\left(l, \frac{l}{\varepsilon}\right) = u_k(l, n)$, com $k = 1, 2$. Além disso, da 1-periodicidade em y de u_k , conclui-se que $u_k(l, n) = u_k(l, 1) = u_k(l, 0)$, e assim $u_k\left(l, \frac{l}{\varepsilon}\right) = u_k(l, 0)$, para $k = 1, 2$. Assim, (2.47) pode ser reescrita como:

$$v_0(l) + \varepsilon u_1(l, 0) + \varepsilon^2 u_2(l, 0) \approx g_2. \quad (2.48)$$

Observe que as condições de contorno do problema original sejam de ordem macroscópica, por não dependerem de ε , tem-se $g_1, g_2 = O(1)$, e então faz sentido atribuí-las exclusivamente ao termo v_0 da SAF. Dessa forma, originam-se de (2.46) e (2.48) novas condições de contorno, a saber

$$v_0(0) = g_1, \quad v_0(l) = g_2; \quad (2.49)$$

$$u_1(0, 0) = u_1(l, 0) = 0; \quad (2.50)$$

$$u_2(0, 0) = u_2(l, 0) = 0. \quad (2.51)$$

Tomando nesse momento $v_0(x)$ como um termo conhecido, formula-se a partir de (2.44) e (2.50), (2.45) e (2.51), os seguintes problemas:

$$\begin{cases} L_{yy}u_1 = -L_{yx}v_0 \\ u_1(0, 0) = u_1(l, 0) = 0 \end{cases}, \quad (2.52)$$

$$\begin{cases} L_{yy}u_2 = -L_{xy}u_1 - L_{yx}u_1 - L_{xx}v_0 + f(x) \\ u_2(0, 0) = u_2(l, 0) = 0 \end{cases}, \quad (2.53)$$

os quais são os problemas para determinar os termos u_1 e u_2 de $u^{(2)}$.

Agora, tomando x como um parâmetro, os problemas acima que envolvem derivadas parciais se tornam problemas diferenciais ordinários, cujo formato é:

$$\begin{cases} \frac{d}{dy} \left[K(y) \frac{dN}{dy} \right] = F(y), \quad y \in (0, 1) \\ N(0) = 0 \end{cases}, \quad (2.54)$$

sendo $N(y)$ a solução 1-periódica procurada.

A existência (assim como a unicidade) desta solução é garantida por uma condição

necessária e suficiente. Disto trata o Lema que será enunciado e demonstrado a seguir:

Lema 1. (BAKHVALOV; PANASENKO, 1989) *Sejam $K(y)$ uma função 1-periódica, positiva, limitada e continuamente diferenciáveis em $[0, 1]$, e $F(y)$ contínua e 1-periódica. Então, uma condição necessária e suficiente para que exista uma solução $N(y)$ 1-periódica da equação*

$$\frac{d}{dy} \left[K(y) \frac{dN}{dy} \right] = F(y) \quad (2.55)$$

é que $\langle F \rangle = 0$.

Além disso, $N(y)$ é única a não ser por uma constante aditiva, ou seja, $N(y) = \tilde{N}(y) + C$, onde \tilde{N} é uma solução 1-periódica de (2.55) tal que $\tilde{N}(0) = 0$, e C é uma constante arbitrária.

A demonstração deste Lema é interessante por trazer detalhes para a determinação de $N(y)$ que serão úteis posteriormente.

Demonstração. (Necessidade) Seja $N(y)$ 1-periódica uma solução de (2.55), de aplicar o operador média obtém-se:

$$\left(K(y) \frac{dN}{dy} \right) \Big|_{y=0}^{y=1} = \langle F \rangle, \quad (2.56)$$

e da 1-periodicidade de $K(y)$ e $N(y)$, tem-se que $\langle F \rangle = 0$.

(Suficiência) Agora deve-se considerar de partida que $\langle F \rangle = 0$. Assim, integrando (2.55), tem-se

$$\left(K(y) \frac{dN}{dy} \right) + C_1 = \int_0^y F(s) ds \quad (2.57)$$

em que $C_1 = \left(K(s) \frac{dN}{ds}(s) \right) \Big|_{s=0}$.

Lembrando que $K(y) > 0$, obtém-se de (2.57) que

$$\frac{dN}{dy} = (K(y))^{-1} \left[C_1 + \int_0^y F(t) dt \right], \quad (2.58)$$

e, por integração, chega-se a seguinte expressão para $N(y)$:

$$N(y) = \int_0^y (K(s))^{-1} \left[C_1 + \int_0^s F(t) dt \right] ds + C_2, \quad (2.59)$$

em que $C_2 = N(0)$.

Da continuidade de $K(y)$ e $F(y)$, é garantida a existência das integrais em (2.59). Assim prova-se a existência de $N(y)$. Entretanto, ainda é preciso mostrar que $N(y)$ é

1-periódica, ou seja,

$$N(y+1) - N(y) = 0. \quad (2.60)$$

É interessante observar que, do fato de $F(y)$ ser 1-periódica, para $G(y) = \int_0^y F(t)dt$ tem-se

$$G(y+1) - G(y) = \int_y^{y+1} F(t)dt = \int_0^1 F(y)dy = \langle F \rangle. \quad (2.61)$$

Assim, da condição de partida de que $\langle F \rangle = 0$, conclui-se que $G(y+1) = G(y)$, ou seja, $G(y)$ é 1-periódica. Dessa forma, o integrando em (2.59) também será 1-periódico, fazendo com que

$$N(y+1) - N(y) = \left\langle (K(y))^{-1} \left[C_1 + \int_0^y F(t)dt \right] \right\rangle. \quad (2.62)$$

A fim de se obter $N(y+1) - N(y) = 0$, pela linearidade do operador média, conclui-se que

$$C_1 = -\langle K^{-1} \rangle^{-1} \left\langle (K(y))^{-1} \left[\int_0^y F(t)dt \right] \right\rangle, \quad (2.63)$$

sendo então esta a definição para C_1 o que assegura a 1-periodicidade de $N(y)$.

Por fim, da integração em (2.58), tem-se uma constante independente C_2 referente à respectiva antiderivada no ponto $y = 0$. Assim, conforme enunciado, terá-se $N(y) = \tilde{N}(y) + C$, com $C \equiv C_2$, e

$$\tilde{N}(y) = \int_0^y (K(s))^{-1} \left[-\langle K^{-1} \rangle^{-1} \left\langle (K(y))^{-1} \left[\int_0^y F(t)dt \right] \right\rangle + \int_0^s F(t)dt \right] ds \quad (2.64)$$

□

Agora, em posse do Lema 1, é possível avaliar a existência da solução nos problemas (2.52) e (2.53). Começando por (2.52), é visto que tem-se $N(y) = u_1(x, y)$ (lembrando que x está sendo considerado como fixo) e $F(y) = -L_{yx}v_0$. Dessa forma, para que este problema tenha solução 1-periódica é necessário e suficiente que $\langle -L_{yx}v_0 \rangle = 0$, ou seja,

$$\int_0^1 \frac{d}{dy} \left[K(y) \frac{dv_0}{dx} \right] dy = 0. \quad (2.65)$$

Da independência de $v_0(x)$ em relação a y , e de resolver a integral em (2.65), obtém-se

$$\int_0^1 \frac{d}{dy} \left[K(y) \frac{dv_0}{dx} \right] dy = \frac{dv_0}{dx} K(y) \Big|_{y=0}^{y=1}, \quad (2.66)$$

e como $K(y)$ é 1-periódica, tem-se que $K(y) \Big|_{y=0}^{y=1} = 0$, concluindo assim que $\langle -L_{yx}v_0 \rangle = 0$. Ou seja, a condição do Lema 1 está satisfeita, então existe $u_1(x, y)$ 1-periódica em

y , solução do problema em (2.52).

Observando novamente a equação (2.52), tem-se

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[K(y) \frac{\partial u_1}{\partial y} \right] = -\frac{dv_0}{dx} \frac{\partial K}{\partial y}. \quad (2.67)$$

O formato do lado direito de (2.67) sugere que $u_1(x, y)$ seja uma função de variáveis separadas, ou ainda, que pode ser tomada na forma $u_1(x, y) = N_1(y) \frac{dv_0}{dx}$, observando que $N_1(y)$ deve ser 1-periódica. Diante disso, e considerando $\frac{d^2 v_0}{dx^2} \neq 0$, do problema (2.52) obtém-se o que será denotado por $P_L^{(1)}$, o Problema Local para encontrar $N_1(y)$, a saber

$$P_L^{(1)} : \begin{cases} \frac{d}{dy} \left[K(y) \frac{dN_1}{dy} \right] = -\frac{dK}{dy}, & y \in (0, 1) \\ N_1(0) = N_1(1) = 0 \end{cases}, \quad (2.68)$$

cuja solução 1-periódica é garantida pelo Lema 1, fazendo $F = -dK/dy$.

Seguindo o procedimento feito no Lema 1 para encontrar a solução do problema, integra-se a equação em (2.68), obtendo-se

$$K(y) \frac{dN_1}{dy} = C_1 - K(y), \quad (2.69)$$

onde $C_1 = \left(K(y) \frac{dN_1}{dy} + K(y) \right) \Big|_{y=0}$.

Da hipótese de $K(y)$ ser positiva, (2.69) é simplificada para

$$\frac{dN_1}{dy} = \frac{C_1}{K(y)} - 1, \quad (2.70)$$

onde aplica-se o operador média, a fim de determinar a constante C_1 :

$$\int_0^1 \frac{dN_1}{dy} dy = \int_0^1 \left(\frac{C_1}{K(y)} - 1 \right) dy, \quad (2.71)$$

Resolvendo então (2.71), obtém-se

$$N_1(y) \Big|_{y=0}^{y=1} = C_1 \left\langle \frac{1}{K} \right\rangle - 1. \quad (2.72)$$

Da 1-periodicidade de $N_1(y)$, e da condição de contorno em $P_L^{(1)}$ em (2.68), o lado esquerdo de (2.72) será nulo. Assim, é possível enfim determinar C_1 , obtendo-se

$$C_1 = \langle K^{-1} \rangle^{-1} \equiv \hat{K}, \quad (2.73)$$

sendo \hat{K} é o chamado coeficiente efetivo do material, um conceito que ficará mais

esclarecido à frente (ver (2.86)).

Conhecendo agora C_1 , prossegue-se com a integração de (2.70), obtendo:

$$N_1(s)|_{s=0}^{s=y} = \int_0^y \left(\frac{\hat{K}}{K(s)} - 1 \right) ds, \quad (2.74)$$

e, da condição de contorno do problema, que será também a condição de unicidade, onde $N_1(0) = 0$, obtém-se finalmente a fórmula explícita para $N_1(y)$, a qual será

$$N_1(y) = \int_0^y \left(\frac{\hat{K}}{K(s)} - 1 \right) ds. \quad (2.75)$$

Logo, está determinado o termo u_1 da SAF $u^{(2)}$, a saber,

$$u_1(x, y) = \frac{dv_0}{dx} \int_0^y \left(\frac{\hat{K}}{K(s)} - 1 \right) ds. \quad (2.76)$$

Agora, voltando a atenção para o problema para determinar u_2 em (2.53), cuja resolução será análoga à seguida para u_1 , tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[K(y) \frac{\partial u_2}{\partial x} \right] = -\frac{\partial}{\partial x} \left[K(y) \frac{\partial u_1}{\partial y} \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[K(y) \frac{\partial u_1}{\partial x} \right] - \frac{\partial}{\partial x} \left[K(y) \frac{dv_0}{dx} \right] + f(x). \quad (2.77)$$

Considerando o caráter recorrente da sequência de problemas, aqui já pode ser considerada a forma com variáveis separadas de u_1 , transformando (2.77) em

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[K(y) \frac{\partial u_2}{\partial x} \right] = -K(y) \frac{dN_1}{dy} \frac{d^2 v_0}{dx^2} - \frac{d}{dy} [K(y) N_1(y)] \frac{d^2 v_0}{dx^2} - K(y) \frac{d^2 v_0}{dx^2} + f(x), \quad (2.78)$$

ou ainda,

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[K(y) \frac{\partial u_2}{\partial x} \right] = - \left[K(y) \left(1 + \frac{dN_1}{dy} \right) \right] \frac{d^2 v_0}{dx^2} - \frac{d}{dy} [K(y) N_1(y)] \frac{d^2 v_0}{dx^2} + f(x). \quad (2.79)$$

De (2.70) e (2.73), tem-se que

$$\hat{K} = K(y) \left(1 + \frac{dN_1}{dy} \right), \quad (2.80)$$

logo, é possível escrever (2.79) como

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[K(y) \frac{\partial u_2}{\partial x} \right] = -\hat{K} \frac{d^2 v_0}{dx^2} - \frac{d}{dy} [K(y) N_1(y)] \frac{d^2 v_0}{dx^2} + f(x). \quad (2.81)$$

Retomando agora o Lema 1, tem-se $N(y) = u_2(x, y)$ e $F(y)$ será o lado direito de

(2.81). Assim, a condição para existência da solução u_2 1-periódica em y será:

$$\int_0^1 \left(-\hat{K} \frac{d^2 v_0}{dx^2} - \frac{d}{dy} [K(y) N_1(y)] \frac{d^2 v_0}{dx^2} + f(x) \right) dy = 0. \quad (2.82)$$

Levando em conta que \hat{K} é uma constante, e que $v_0(x)$ e $f(x)$ não dependem de y , (2.82) equivale a

$$-\hat{K} \frac{d^2 v_0}{dx^2} - \frac{d^2 v_0}{dx^2} \int_0^1 \frac{d}{dy} [K(y) N_1(y)] dy = -f(x). \quad (2.83)$$

Observando a integral em (2.83), tem-se

$$\int_0^1 \frac{d}{dy} [K(y) N_1(y)] dy = [K(y) N_1(y)] \Big|_{y=0}^{y=1}, \quad (2.84)$$

e da 1-periodicidade de $K(y)$ e $N_1(y)$, seu resultado será 0. Assim, (2.83) pode ser simplificada para

$$\hat{K} \frac{d^2 v_0}{dx^2} = f(x). \quad (2.85)$$

Ou seja, enquanto que a condição do Lema 1 ocorre naturalmente no problema para u_1 , no caso de u_2 irá depender da existência da solução v_0 da equação diferencial em (2.85).

Ocorre que a equação (2.85) juntamente com as condições de contorno para v_0 em (2.49), formam o que é chamado de problema homogeneizado P_H , a saber,

$$P_H : \begin{cases} \hat{K} \frac{d^2 v_0}{dx^2} = f(x), & x \in (0, l) \\ v_0(0) = g_1 \\ v_0(l) = g_2 \end{cases}. \quad (2.86)$$

Este é o problema citado anteriormente, na descrição do MHA, que é limite da sequência recorrente de problemas para as potências de ε , quando $\varepsilon \rightarrow 0^+$, representando o material homogêneo equivalente ao micro-heterogêneo estudado. Dessa forma, o coeficiente efetivo \hat{K} representa a propriedade deste material ideal.

Como foi comentado, a obtenção de u_2 depende diretamente da existência de v_0 , que resolve P_H em (2.86). Acontece que nesse caso a obtenção de v_0 consiste em um problema simples de valor de contorno. Logo, integrando a equação de (2.86) em ambos os lados, tem-se

$$\frac{dv_0}{dx} = \frac{1}{\hat{K}} \int_0^x f(s) ds + A, \quad (2.87)$$

onde A corresponde a $\frac{dv_0}{dx} \Big|_{x=0}$. Repetindo este processo,

$$v_0(x) - v_0(0) = \frac{1}{\widehat{K}} \int_0^x \left(\int_0^s f(t) dt + A \right) ds. \quad (2.88)$$

Agora, das condições de contorno do P_H em (2.86), tem-se

$$g_2 - g_1 = \frac{1}{\widehat{K}} \int_0^l \left(\int_0^s f(t) dt + A \right) ds. \quad (2.89)$$

Assim sendo, isolando A na equação (refeq: n28a), a solução $v_0(x)$ será:

$$v_0(x) = \frac{1}{\widehat{K}} \left[\int_0^x \int_0^s f(t) dt ds + \frac{x}{l} \left(\widehat{K} (g_2 - g_1) - \int_0^l \int_0^s f(t) dt ds \right) \right] + g_1. \quad (2.90)$$

Da continuidade de $f(x)$, garante-se a existência das integrais em (2.90).

Considerando $v_0(x)$ solução de P_H em (2.86), a equação (2.81) pode ser reescrita como:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[K(y) \frac{\partial u_2}{\partial x} \right] = - \frac{d}{dy} [K(y) N_1(y)] \frac{d^2 v_0}{dx^2}. \quad (2.91)$$

Agora, observando o formato do problema para u_2 em (2.91), de forma análoga ao caso de u_1 , u_2 será tomada uma função de variáveis separadas, na forma

$$u_2(x, y) = N_2(y) \frac{d^2 v_0}{dx^2}, \quad (2.92)$$

e disto, a equação (2.91) pode ser reescrita como:

$$\frac{d}{dy} \left[K(y) \frac{dN_2}{dx} \right] \frac{d^2 v_0}{dx^2} = - \frac{d}{dy} [K(y) N_1(y)] \frac{d^2 v_0}{dx^2}. \quad (2.93)$$

Tomando $\frac{d^2 v_0}{dx^2} \neq 0$, (2.93) é simplificada para

$$\frac{d}{dy} \left[K(y) \frac{dN_2}{dx} \right] = - \frac{d}{dy} [K(y) N_1(y)]. \quad (2.94)$$

Sendo assim, levando em consideração que u_2 é 1-periódica em y , o problema em (2.53) é transformado no problema local para encontrar N_2 , denotado por $P_L^{(2)}$, sendo ele

$$P_L^{(2)} : \begin{cases} \frac{d}{dy} \left[K(y) \frac{dN_2}{dy} \right] = - \frac{d}{dy} [K(y) N_1(y)], & y \in (0, 1) \\ N_2(0) = N_2(1) = 0 \end{cases}, \quad (2.95)$$

cuja solução é garantida pelo Lema 1, fazendo $F = - \frac{d}{dy} [K(y) N_1(y)]$.

A fim de encontrar a fórmula para $N_2(y)$, integra-se a equação de (2.95), obtendo-

se

$$\frac{dN_2}{dy} = -N_1(y) + \frac{D_1}{K(y)}, \quad (2.96)$$

em que $D_1 = \left[-K(y) \frac{dN_2}{dy} \right] \Big|_{y=0}$.

Aplicando então o operador média, obtém-se:

$$N_2(y) \Big|_{y=0}^{y=1} = -\langle N_1 \rangle + D_1 \left\langle \frac{1}{K} \right\rangle, \quad (2.97)$$

sendo assim, da 1-periodicidade em y de N_2 , garantida pelo Lema 1, conclui-se que $D_1 = \langle N_1 \rangle \hat{K}$, lembrando que $\hat{K} = \langle K^{-1} \rangle^{-1}$.

Agora que se conhece uma expressão para D_1 , integra-se (2.96) novamente, chegando-se a:

$$N_2(s) \Big|_{s=0}^{s=y} = \int_0^y \left(\frac{\langle N_1 \rangle \hat{K}}{K(s)} - N_1(s) \right) ds, \quad (2.98)$$

e, lembrando que $N_2(0) = 0$, a equação (2.98) torna-se:

$$N_2(y) = \int_0^y \left(\frac{\langle N_1 \rangle \hat{K}}{K(s)} - N_1(s) \right) ds. \quad (2.99)$$

Assim, o termo u_2 de $u^{(2)}$ será da forma:

$$u_2(x, y) = \frac{d^2 v_0}{dx^2} \int_0^y \left(\frac{\langle N_1 \rangle \hat{K}}{K(s)} - N_1(s) \right) ds. \quad (2.100)$$

E dessa forma, obtém-se os 3 termos da SAF $u^{(2)}(x, \varepsilon)$.

2.2.3 Relação de proximidade

Como visto no contexto do MHA que foi explanado, é de interesse que a solução $v_0(x)$ do Problema Homogeneizado seja próxima da solução $u^\varepsilon(x)$ do Problema Original, e que a diferença entre estas diminua à medida que $\varepsilon \rightarrow 0^+$. Este fato quando garantido, justifica a aplicação do MHA: determinar uma solução de um problema para um meio homogêneo que seja suficientemente próxima da solução do problema para o meio micro-heterogêneo. Porém, para esta abordagem, é necessário estabelecer em qual espaço de funções se estará considerando as soluções, pois sua norma será a medida para aferir tal diferença.

Diante das suposições de continuidade dos termos do P_O em (2.26), parece conveniente estabelecer que a solução u^ε será tomada de $C([0, l])$, o espaço das funções continuamente diferenciáveis no intervalo $[0, l]$. Será considerada a norma usual do

espaço (KOLMOGOROV; FOMIN, 1975), a saber:

$$\|\cdot\|_{C([0,l])} = \max_{x \in [0,l]} |\cdot|. \quad (2.101)$$

A estimativa para essa diferença entre as soluções, considerando este espaço, será $\|u^\varepsilon - v_0\|_{C([0,l])} = O(\varepsilon)$. Para a demonstração será necessária um resultado oriundo do princípio do máximo, o qual segue abaixo:

Teorema 2. (LARSSON; THOMÉE, 2003) *Seja o seguinte PVC:*

$$\begin{cases} -\frac{d}{dx} \left[a(x) \frac{du}{dx} \right] + b(x) \frac{du}{dx} + c(x)u = h(x), & x \in (0, l) \\ u(0) = q_1, u(l) = q_2 \end{cases}, \quad (2.102)$$

onde os coeficientes $a(x)$, $b(x)$ e $c(x)$ são continuamente diferenciáveis, e ainda $a(x) \geq a_0 > 0$ e $c(x) \geq 0$, para todo $x \in [0, l]$.

Se $u \in C([0, l])$, então

$$\|u\|_{C([0,l])} \leq \max\{|q_1|, |q_2|\} + C^* \|Lu\|_{C([0,l])}, \quad (2.103)$$

onde a constante C^* depende apenas dos coeficientes em (2.102), mas não de u .

Será necessário também considerar um problema auxiliar na seguinte forma:

$$\begin{cases} L^\varepsilon u^{(1)} = f(x) - F(x, \varepsilon), & x \in (0, l) \\ u^{(1)}(0) = g_1, u^{(1)}(l) = g_2 \end{cases}, \quad (2.104)$$

onde

$$L^\varepsilon(\cdot) = \frac{d}{dx} \left[K^\varepsilon(x) \frac{d(\cdot)}{dx} \right], \quad (2.105)$$

$u^{(1)}(x, \varepsilon) = v_0(x) + \varepsilon u_1(x, y)$ e $F(x, \varepsilon) = L^\varepsilon u^\varepsilon - L^\varepsilon u^{(1)}$, sendo a última o erro de aproximar a solução exata do P_O em (2.26), através de $u^{(1)}$. O objetivo agora será encontrar uma fórmula para $F(x, \varepsilon)$, a fim de estimar a magnitude deste erro e obter a aproximação desejada.

Dessa forma, levando em conta o problema original em (2.26), é possível transformar (2.104) em

$$\begin{cases} L^\varepsilon (u^\varepsilon - u^{(1)}) = F(x, \varepsilon), & x \in (0, l) \\ (u^\varepsilon - u^{(1)})(0) = 0, (u^\varepsilon - u^{(1)})(l) = 0 \end{cases}. \quad (2.106)$$

Assim, como este problema claramente satisfaz as condições do resultado acima enunciado, é correto aplicá-lo, obtendo-se

$$\|u^\varepsilon - u^{(1)}\|_{C([0,l])} \leq C^* \|L^\varepsilon (u^\varepsilon - u^{(1)})\|_{C([0,l])}, \quad (2.107)$$

ou ainda, equivalentemente,

$$\|u^\varepsilon - u^{(1)}\|_{C([0,l])} \leq C^* \|F(x, \varepsilon)\|_{C([0,l])}. \quad (2.108)$$

Da definição do operador L^ε em (2.105), tem-se que

$$L^\varepsilon u^{(1)} - f(x) = \frac{d}{dx} \left(K(y) \frac{d}{dx} \left(v_0(x) + \varepsilon N_1(y) \frac{v_0}{dx} \right) \right) - f(x), \quad (2.109)$$

já tomando $u_1(x, y) = N_1(y) \frac{dv_0}{dx}$. Assim, considerando o problema para ε^0 em (2.45), desprezando o termo referente a $u_2(x, y)$ (já que a assintótica considerada é $u^{(1)}(x, \varepsilon)$), (2.109) torna-se

$$K(y) \frac{d^2 v_0}{dx^2} + \frac{d}{dy} [K(y) N_1(y)] \frac{d^2 v_0}{dx^2} + K(y) \frac{dN_1}{dy} \frac{d^2 v_0}{dx^2} - f(x) = 0. \quad (2.110)$$

Levando-se em conta (2.80), (2.110) pode ser reescrita como:

$$\hat{K} \frac{d^2 v_0}{dx^2} - f(x) + \frac{d}{dy} [K(y) N_1(y)] \frac{d^2 v_0}{dx^2} = 0, \quad (2.111)$$

e, lembrando que $v_0(x)$ é solução do P_H (em (2.86)), conclui-se de (2.111) que $\frac{d}{dy} (K(y) N_1(y)) \frac{d^2 v_0}{dx^2} = 0$. Assim, (2.109) torna-se

$$L^\varepsilon u^{(1)} - f(x) = \varepsilon K(y) N_1(y) \frac{d^3 v_0}{dx^3}, \quad (2.112)$$

de onde,

$$F(x, \varepsilon) = -\varepsilon K(y) N_1(y) \frac{d^3 v_0}{dx^3}, \quad (2.113)$$

é a expressão do erro procurada.

Dessa forma, considerando a norma $\|\cdot\|_{C([0,l])}$, e (2.113), obtém-se

$$\|F(x, \varepsilon)\|_{C([0,l])} = \max_{x \in [0,l]} |F(x, \varepsilon)| = \max_{x \in [0,l]} \left| \varepsilon K \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) N_1 \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{d^3 v_0}{dx^3} \right|. \quad (2.114)$$

Nesse momento, se faz necessário considerar o Teorema de Weierstrass (LIMA, 2013), enunciado na sequência:

Teorema 3. *Seja uma função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, contínua em um espaço compacto X . Então, $f(x)$ é limitada e atinge seus extremos em X .*

A fim de assegurar a existência desses extremos em (2.114), a condição pendente é a da continuidade (já que o intervalo considerado é compacto). Sendo assim, considerando que $v_0 \in C^3([0, l])$, é assegurada a continuidade de $\frac{d^3 v_0}{dx^3}$ em $[0, l]$, e desta

forma, pelo Teorema 3, existe uma constante $A > 0$ tal que

$$\left| \frac{d^3 v_0}{dx^3} \right| \leq A, \quad (2.115)$$

em $[0, l]$.

Além disso, por definição, $K(y)$ e $N_1(y)$ são contínuas em $[0, 1]$ em y , e em x , serão contínuas em $[0, \varepsilon^{-1}]$. Assim, pode-se afirmar que $K(x/\varepsilon)$ e $N_1(x/\varepsilon)$ são contínuas em $[0, \varepsilon^{-1}]$, compacto. Aplicando então novamente o Teorema 3, estará correto afirmar que existe uma constante $B > 0$ tal que

$$\left| K\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) N_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right| \leq B, \quad (2.116)$$

e assim estima-se (2.114) como

$$\|F(x, \varepsilon)\|_{C([0, l])} \leq \varepsilon BA, \quad (2.117)$$

e então, $\|F(x, \varepsilon)\|_{C([0, l])} = O(\varepsilon)$. Dessa forma, do que está definido em (2.108), conclui-se diretamente que

$$\|u^\varepsilon - u^{(1)}\|_{C([0, l])} = O(\varepsilon). \quad (2.118)$$

É necessário obter-se também que $\|u^{(1)} - v_0\|_{C([0, l])} = O(\varepsilon)$. Para isto, basta considerar

$$\|u^{(1)} - v_0\|_{C([0, l])} = \|(v_0 + \varepsilon u_1) - v_0\|_{C([0, l])} = \|\varepsilon u_1\|_{C([0, l])}, \quad (2.119)$$

e do fato de $u_1(x, y) = N_1(y) \frac{dv_0}{dx}$, utilizando o Teorema 3 de forma análoga ao caso anterior, segue que $\|u_1\|_{C([0, l])} \leq C$, sendo assim possível obter de (2.119) que

$$\|u^{(1)} - v_0\|_{C([0, l])} = \|\varepsilon u_1\|_{C([0, l])} \leq \varepsilon C, \quad (2.120)$$

ou seja, $\|u^{(1)} - v_0\|_{C([0, l])} = O(\varepsilon)$.

Por fim, sabendo que $\|u^\varepsilon - u^{(1)}\|_{C([0, l])} = O(\varepsilon)$ e $\|u^{(1)} - v_0\|_{C([0, l])} = O(\varepsilon)$, tem-se

$$\|u^\varepsilon - v_0\|_{C([0, l])} = \|u^\varepsilon - u^{(1)} + u^{(1)} - v_0\|_{C([0, l])}, \quad (2.121)$$

e pela propriedade da desigualdade triangular de uma norma, obtém-se que

$$\|u^\varepsilon - v_0\|_{C([0, l])} \leq \|u^\varepsilon - u^{(1)}\|_{C([0, l])} + \|u^{(1)} - v_0\|_{C([0, l])}, \quad (2.122)$$

de onde conclui-se que $\|u^\varepsilon - v_0\|_{C([0, l])} = O(\varepsilon)$, como queria-se demonstrar.

2.2.4 Aplicação a um exemplo

O exemplo a ser resolvido será o seguinte PVC:

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \left[K^\varepsilon(x) \frac{du^\varepsilon}{dx} \right] = -1, & x \in (0, 1) \\ u^\varepsilon(0) = u^\varepsilon(1) = 0 \\ K^\varepsilon(x) = 1 + \frac{1}{4} \operatorname{sen} \left(2\pi \frac{x}{\varepsilon} \right) \end{cases}, \quad (2.123)$$

onde o coeficiente $K^\varepsilon(x)$ foi tomado dessa forma a fim de atender às hipóteses de continuidade, limitação estrita e ε -periodicidade. O comportamento de $K^\varepsilon(x)$ em (2.123) foi ilustrado na Figura 4 na Seção 2.1.1.

1. Problema Homogeneizado P_H :

Para formular o problema como está em P_H em (2.86), se faz necessário calcular o coeficiente efetivo \hat{K} , como está em (2.73). Dessa forma, tem-se:

$$\langle K^{-1} \rangle = \int_0^1 \frac{1}{1 + \frac{1}{4} \operatorname{sen}(2\pi y)} dy = \frac{4}{\sqrt{15}\pi} \arctan \left[\frac{4}{\sqrt{15}} \left(\tan \pi y + \frac{1}{4} \right) \right] \Bigg|_{y=0}^{y=1} \quad (2.124)$$

que é obtida através da transformação: $\operatorname{sen}(y) = \frac{2z}{1+z^2}$, $z = \tan\left(\frac{y}{2}\right)$ e $dy = \frac{2}{1+z^2} dz$, proposta em (LEITHOLD, 1994).

Para calcular então o valor de \hat{K} , se faz necessário considerar a descontinuidade da tangente quando $y = \frac{1}{2}$. Assim, faz-se:

$$\begin{aligned} \langle K^{-1} \rangle = & \frac{4}{\sqrt{15}\pi} \left(\arctan \left[\frac{4}{\sqrt{15}} \left(\tan \pi + \frac{1}{4} \right) \right] - \lim_{y \rightarrow 0.5^+} \arctan \left[\frac{4}{\sqrt{15}} \left(\tan \pi y + \frac{1}{4} \right) \right] \right. \\ & \left. - \arctan \left[\frac{4}{\sqrt{15}} \left(\tan 0 + \frac{1}{4} \right) \right] + \lim_{y \rightarrow 0.5^-} \arctan \left[\frac{4}{\sqrt{15}} \left(\tan \pi y + \frac{1}{4} \right) \right] \right) \end{aligned} \quad (2.125)$$

ou ainda, utilizando uma variável muda s para representar o comportamento de $\tan(\pi y)$ nos limites,

$$\langle K^{-1} \rangle = \frac{4}{\sqrt{15}\pi} \left(- \lim_{s \rightarrow -\infty} \arctan \left[\frac{4}{\sqrt{15}} \left(s + \frac{1}{4} \right) \right] + \lim_{s \rightarrow \infty} \arctan \left[\frac{4}{\sqrt{15}} \left(s + \frac{1}{4} \right) \right] \right). \quad (2.126)$$

Agora, de acordo com as assíntotas verticais da função arco-tangente, obtém-se:

$$\langle K^{-1} \rangle = \frac{4}{\sqrt{15}\pi} \left(- \left[-\frac{\pi}{2} \right] + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{4}{\sqrt{15}}, \quad (2.127)$$

logo, $\hat{K} = \sqrt{15}/4$.

Assim, determina-se a solução $v_0(x)$ do P_H , conforme (2.90), obtendo-se:

$$v_0(x) = \frac{2}{\sqrt{15}} (x - x^2). \quad (2.128)$$

2. *Problema local $P_L^{(1)}$:*

A solução 1-periódica em y do problema local $P_L^{(1)}$, conforme (2.75), será:

$$N_1(y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \left(\arctan \left[\frac{4}{\sqrt{15}} \left(\tan \pi y + \frac{1}{4} \right) \right] - \arctan \left(\frac{1}{\sqrt{15}} \right) \right) - y, & y \in \left[0, \frac{1}{2} \right) \\ \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan \left(\frac{1}{\sqrt{15}} \right) \right) - \frac{1}{2}, & y = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\pi} \left(\arctan \left[\frac{4}{\sqrt{15}} \left(\tan \pi y + \frac{1}{4} \right) \right] - \arctan \left(\frac{1}{\sqrt{15}} \right) + \pi \right) - y, & y \in \left(\frac{1}{2}, 1 \right] \end{cases}, \quad (2.129)$$

que é assim definida para garantir a continuidade de $N_1(y)$ em $y = 1/2$, também devido à descontinuidade da tangente neste ponto.

3. *Resultados Computacionais:*

Para ilustrar os resultados obtidos no exemplo considerado, compara-se as soluções $u^\varepsilon(x)$, $v_0(x)$ e as SAF's $u^{(1)}(x, \varepsilon)$ e $u^{(2)}(x, \varepsilon)$. A solução exata² $u^\varepsilon(x)$ foi obtida de acordo com (2.27), sendo:

$$u^\varepsilon(x) = \int_0^x \left[\frac{-s + C_1}{1 + \frac{1}{4} \sin(2\pi \frac{s}{\varepsilon})} \right] ds, \quad (2.130)$$

com

$$C_1 = \left[\int_0^1 \frac{1}{1 + \frac{1}{4} \sin(2\pi \frac{s}{\varepsilon})} ds \right]^{-1} \left(\int_0^1 \frac{s}{1 + \frac{1}{4} \sin(2\pi \frac{s}{\varepsilon})} ds \right) \quad (2.131)$$

conforme (2.28). As integrais para $u^\varepsilon(x)$ e C_1 foram calculadas numericamente, através da Regra de Simpson 1/3, seguindo BURDEN; FAIRES; BURDEN (2015), com passo $h = 0.05\varepsilon$ (o qual foi assim tomado a fim de que a malha acompanhasse a variação do ε para os valores considerados).

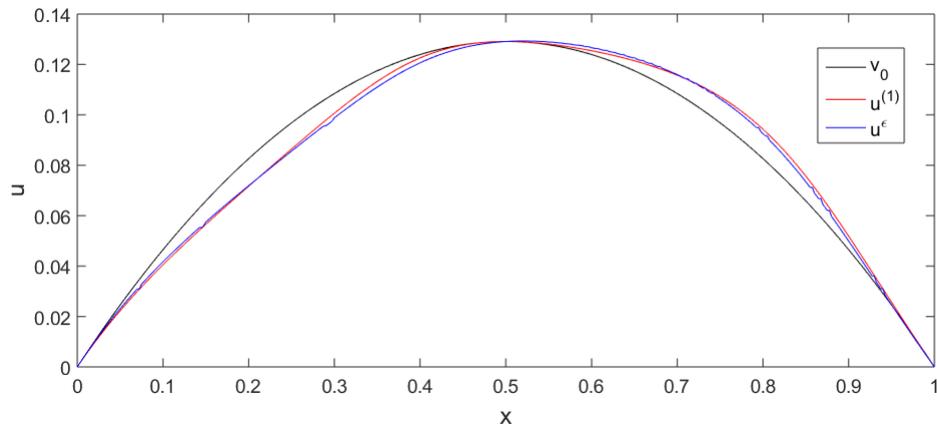
A solução do P_H foi considerada na sua forma analítica obtida em (2.128). E para a SAF $u^{(1)}(x, \varepsilon)$,

$$u^{(1)}(x, \varepsilon) = v_0(x) + \varepsilon N_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{dv_0}{dx}, \quad (2.132)$$

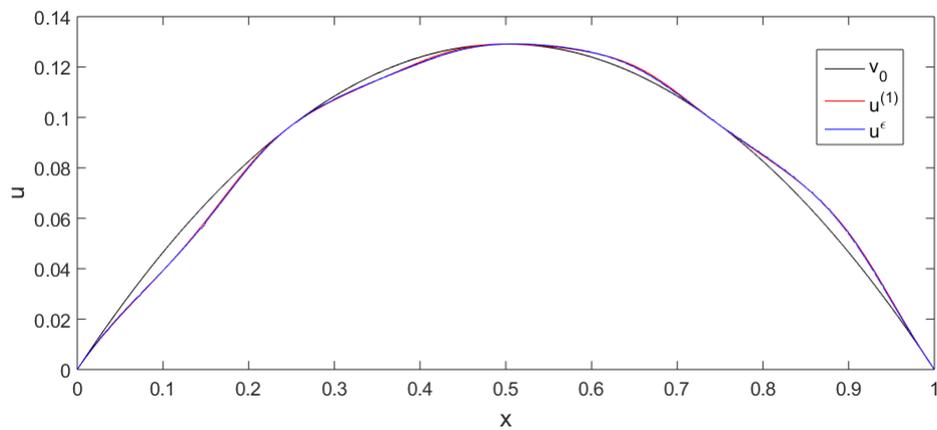
considerou-se a forma analítica de $v_0(x)$ e a extensão periódica da solução $N_1(y)$ na sua forma analítica em (2.129), para o intervalo $[0, 1]$ em x . Já o termo $N_2(y)$ para a SAF $u^{(2)}(x, \varepsilon)$ foi obtido integrando numericamente a expressão em (2.99), utilizando a

²Nesta subseção continua-se a chamar de solução exata do problema original a aproximação numérica direta de u^ε .

forma analítica em (2.129) de $N_1(y)$, utilizando também a Regra de Simpson 1/3, com $h = 0.05\varepsilon$.



(a) $\varepsilon = \frac{1}{2}$



(b) $\varepsilon = \frac{1}{4}$

Figura 6: Ilustração gráfica das soluções u^ε e v_0 e da assintótica $u^{(1)}$ para $\varepsilon = \frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$ referentes ao exemplo em (2.123).

Na Figura 6 fica claro o caráter oscilante de $u^\varepsilon(x)$, e sua proximidade com $v_0(x)$, conforme foi demonstrado na Seção 2.2.3. É visto também que a SAF $u^{(1)}(x, \varepsilon)$ apresenta-se como uma melhor aproximação de $u^\varepsilon(x)$, conforme já era esperado, pois ao contrário de $v_0(x)$, ela considera informações da microescala y , o que a torna mais próxima do comportamento da solução original.

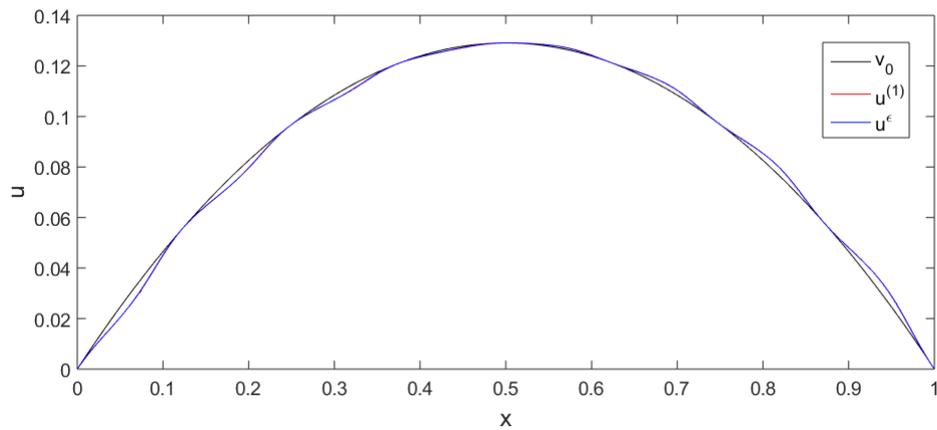
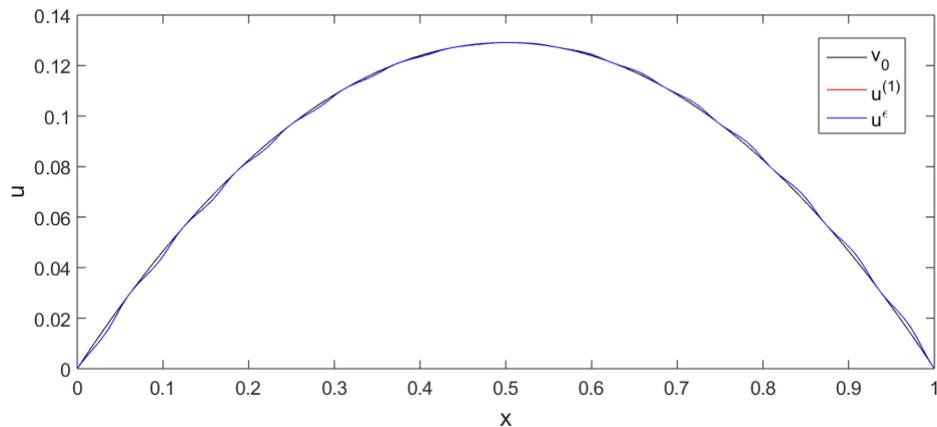
(a) $\varepsilon = \frac{1}{8}$ (b) $\varepsilon = \frac{1}{16}$

Figura 7: Ilustração gráfica das soluções u^ε e v_0 e da assintótica $u^{(1)}$ para $\varepsilon = \frac{1}{8}$ e $\frac{1}{16}$, referentes ao exemplo em (2.123).

Na Figura 7 fica claro outro caráter dessas aproximações: estas se tornam melhores a medida que $\varepsilon \rightarrow 0^+$, o que também já era esperado. Observa-se que para $\varepsilon = 1/16$, por exemplo, ilustrado na Figura 7b, a diferença entre as três curvas é praticamente imperceptível.

A SAF $u^{(2)}(x, \varepsilon)$ não foi plotada por ser visualmente indistinguível de $u^\varepsilon(x)$. Sua proximidade com $u^\varepsilon(x)$ foi então avaliada apenas de forma quantitativa, através da norma de L^2 (o espaço das funções de quadrado integrável), estando os resultados obtidos na Tabela 2:

$$^3\|\cdot\|_{L^2} = \left(\int_0^1 (\cdot)^2 dx \right)^{1/2}$$

Tabela 2: Estimativa da proximidade de v_0 e das assintóticas $u^{(1)}$ e $u^{(2)}$ em relação à solução exata u^ε de (2.123).

ε	$\ u^\varepsilon - v_0\ _{L^2}$	$\ u^\varepsilon - u^{(1)}\ _{L^2}$	$\ u^\varepsilon - u^{(2)}\ _{L^2}$
1/2	$6,4372 \cdot 10^{-3}$	$1,3004 \cdot 10^{-3}$	$2,9839 \cdot 10^{-4}$
1/4	$3,5704 \cdot 10^{-3}$	$3,2510 \cdot 10^{-4}$	$7,6098 \cdot 10^{-5}$
1/8	$1,8265 \cdot 10^{-3}$	$8,1275 \cdot 10^{-5}$	$1,9209 \cdot 10^{-5}$
1/16	$9,1836 \cdot 10^{-4}$	$2,0319 \cdot 10^{-5}$	$4,8253 \cdot 10^{-6}$
1/32	$4,5982 \cdot 10^{-4}$	$5,0797 \cdot 10^{-6}$	$1,2092 \cdot 10^{-6}$
1/64	$2,2999 \cdot 10^{-4}$	$1,2699 \cdot 10^{-6}$	$3,0265 \cdot 10^{-7}$

De acordo com estes resultados, além de confirmar o que foi constatado nos gráficos, foi possível fazer uma avaliação mais detalhada, principalmente para a SAF de segunda ordem, além de verificar a proximidade para valores muito pequenos de ε (que são praticamente impossíveis de avaliar graficamente). Aqui foi verificado que $u^{(2)}(x, \varepsilon)$ cumpriu seu papel de representar detalhes mais locais da solução original, mostrando-se como melhor aproximação para todos os valores de ε propostos.

3 ESTIMAÇÃO DA SOLUÇÃO DE UM PVC COM FLUXO NÃO LINEAR, RAPIDAMENTE OSCILANTE E CONTINUAMENTE DIFERENCIÁVEL, COM O MHA

O problema análogo a P_O em (2.26), agora para o fluxo σ^ϵ não linear, será dado por:

$$P_O : \begin{cases} \frac{d}{dx} \left[\sigma \left(\frac{x}{\epsilon}, \frac{du^\epsilon}{dx} \right) \right] = f(x), & x \in (0, l) \\ u^\epsilon|_{x=0} = g_1 \\ u^\epsilon|_{x=l} = g_2 \end{cases}, \quad (3.1)$$

com $\sigma^\epsilon \in C^1([0, l])$, ϵ -periódico em x , positivo e estritamente limitado, e $f(x) \in C([0, l])$.

3.1 Formalismo do MHA

3.1.1 Construção da SAF

Novamente, será proposta a aproximação assintótica $u^{(2)}(x, \epsilon)$ como em (2.29) para o problema P_O em (3.1), de forma que, pela regra de cadeia, tem-se (2.30). Além disso, nessa discussão, se tomará tal notação:

$$\epsilon = \frac{du^\epsilon}{dx} \approx \frac{du^{(2)}}{dx}. \quad (3.2)$$

O fluxo não linear σ^ϵ será aproximado por um polinômio de Taylor no ponto $\epsilon = \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y}$, que consiste no gradiente da densidade em (2.30) de ordem $O(1)$, ou seja, macroscópico. Assim, já considerando a separação de escalas, obtém-se:

$$\sigma(y, \epsilon) = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k \sigma}{\partial \epsilon^k} \left(y, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \left[\epsilon - \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \right]^k. \quad (3.3)$$

Substituindo (3.2) em (3.3), levando em conta (2.30), serão geradas infinitas

potências negativas de ε , o que resultaria em resolver um sistema de infinitas equações correspondentes às potências de ε com expoente menor que -1 . Devido a isso, será considerada a linearização para $\sigma(y, \varepsilon)$, dada pelo truncamento de (3.3) para $k = 1$, ou seja,

$$\sigma(y, \varepsilon) \approx \sigma\left(y, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y}\right) + \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon}\left(y, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y}\right) \left[\varepsilon - \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y}\right)\right]. \quad (3.4)$$

Aqui se faz interessante uma observação: mais adiante, será mostrado (como no caso linear) que $u_0(x, y)$ não depende de y . Sendo assim, não se terá mais a potência negativa em (2.30), e então as equações do sistema referentes às potências de ε com expoente menor que -1 serão identicamente satisfeitas. Isto, de considerar os termos até $O(\varepsilon)$, mostra que a linearização considerada em (3.4) não acarretará erros na aplicação do MHA, visto que produzirá os mesmos resultados do que considerar a série de Taylor completa.

Agora, substituindo (2.30) em (3.4), obtém-se:

$$\begin{aligned} \sigma(y, \varepsilon) \approx & \sigma\left(y, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y}\right) + \\ & + \left[\varepsilon^{-1} \frac{\partial u_0}{\partial y} + \varepsilon \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y}\right) + \varepsilon^2 \frac{\partial u_2}{\partial x}\right] \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon}\left(y, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y}\right). \end{aligned} \quad (3.5)$$

O próximo passo será substituir a aproximação (3.5) na equação do P_O em (3.1), levando-se em conta a regra da cadeia em (2.11). Disto e de organizar os termos obtidos de acordo com as potências de ε , chega-se a:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[\sigma\left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{du^{(2)}}{dx}\right) \right] - f(x) = & \varepsilon^{-2} \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \left(y, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \right) \right] + \\ & + \varepsilon^{-1} \left[\frac{\partial \sigma}{\partial y} \left(y, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \left(y, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \right) \right] + \\ & + \varepsilon^0 \left[\frac{\partial \sigma}{\partial x} \left(y, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \left(y, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \right] \right] - \\ & - f(x) + O(\varepsilon) \end{aligned} \quad (3.6)$$

Para que $u^{(2)}(x, \varepsilon)$ seja uma SAF do problema P_O em (3.1), é necessário que os coeficientes das potências de ε com expoentes menores que 1 sejam nulos, para obter-se:

$$\frac{d}{dx} \left[\sigma\left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{du^{(2)}}{dx}\right) \right] - f(x) = O(\varepsilon). \quad (3.7)$$

Disto, seguem as seguintes equações para as referidas potências de ε :

$$\varepsilon^{-2} : \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial u_0}{\partial y} \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \left(y, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \right] = 0, \quad (3.8)$$

$$\varepsilon^{-1} : \frac{\partial}{\partial y} \left[\sigma \left(y, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \left(y, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \right) = 0, \quad (3.9)$$

$$\varepsilon^0 : \frac{\partial}{\partial x} \left[\sigma \left(y, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \left(y, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \right] - f(x) = 0. \quad (3.10)$$

De (3.8), obtém-se que:

$$\frac{\partial u_0}{\partial y} \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} (y, \zeta) = C(x), \quad (3.11)$$

e assumindo que $\frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} > 0$, chega-se a:

$$\frac{\partial u_0}{\partial y} = C(x) \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \right)^{-1}. \quad (3.12)$$

Aplicando agora o operador média em (3.12), tem-se:

$$u_0|_{y=1} - u_0|_{y=0} = C(x) \left\langle \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \right)^{-1} \right\rangle, \quad (3.13)$$

e da 1-periodicidade de $u_0(x, y)$ em y , conclui-se que $C(x) \left\langle \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \right)^{-1} \right\rangle = 0$. Lembrando que $\frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} > 0$, e da definição do operador média, segue que $\left\langle \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \right)^{-1} \right\rangle > 0$, e assim, obtém-se que $C(x) = 0$. Dessa forma,

$$\frac{\partial u_0}{\partial y} = 0, \quad (3.14)$$

ou seja, $u_0(x, y)$ não depende de y , ou ainda, $u_0(x, y) = v_0(x)$.

Diante disto, (3.9) e (3.10) são reescritas como:

$$\varepsilon^{-1} : \frac{\partial}{\partial y} \left[\sigma \left(y, \frac{du_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \right] = 0, \quad (3.15)$$

$$\varepsilon^0 : \frac{\partial}{\partial x} \left[\sigma \left(y, \frac{du_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \left(y, \frac{du_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \right] - f(x) = 0. \quad (3.16)$$

Levando-se em conta a SAF $u^{(2)}(x, y)$ nas condições de contorno de P_O em (3.1), chega-se às mesmas condições para v_0 , u_1 e u_2 em (2.49), (2.50) e (2.51), respectivamente.

Tomando nesse momento dv_0/dx como um parâmetro, formula-se a partir de (3.15) e (2.50), a seguinte família uniparamétrica de PVC para encontrar $u_1(x, y)$ 1-periódica em y , na forma:

$$P_L^{\frac{dv_0}{dx}} : \begin{cases} \frac{\partial}{\partial y} \left[\sigma \left(y, \frac{dv_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \right] = 0 \\ u_1(0, 0) = u_1(l, 0) = 0 \end{cases}, \quad (3.17)$$

cujas existência da solução é garantida pelo seguinte Lema:

Lema 4. (BAKHVALOV; PANASENKO, 1989) *Seja $\bar{\kappa}$ um parâmetro e $\sigma(y, \epsilon)$ continuamente diferenciável em $[0, 1]$. Então, existem funções $\mathcal{N}_1(y, \bar{\kappa})$ 1-periódicas em y que são soluções da família uniparamétrica de problemas $P_L^{\bar{\kappa}}$ com parâmetro $\bar{\kappa}$, definida por:*

$$P_L^{\bar{\kappa}} : \begin{cases} \frac{\partial}{\partial y} \left[\sigma \left(y, \bar{\kappa} + \frac{d\mathcal{N}_1}{dy} \right) \right] = 0 \\ \mathcal{N}_1(0, \bar{\kappa}) = 0 \end{cases}. \quad (3.18)$$

A condição $\mathcal{N}_1(0, \bar{\kappa}) = 0$ garante a unicidade da solução, para cada $\bar{\kappa}$.

Demonstração. Tomando $\kappa = \bar{\kappa} + \frac{d\mathcal{N}_1}{dy}$, integra-se a equação do problema em relação a y , obtendo-se:

$$\sigma(y, \kappa) = \bar{\sigma}(\bar{\kappa}), \quad (3.19)$$

Definindo agora uma função $T(y, \kappa)$ como

$$T(y, \kappa) = \sigma(y, \kappa) - \bar{\sigma}(\bar{\kappa}), \quad (3.20)$$

observa-se que

$$\frac{\partial T}{\partial \kappa} = \frac{\partial \sigma}{\partial \kappa}, \quad (3.21)$$

e, de assumir $\frac{\partial \sigma}{\partial \kappa} > 0$, logo terá-se $\frac{\partial T}{\partial \kappa} \neq 0$. Dessa forma, pelo teorema da função implícita (ILYIN; POZNYAK, 1982), existe uma função $\kappa(y, \bar{\sigma})$, contínua e diferenciável na vizinhança de um ponto $(y, \bar{\sigma})$, 1-periódica em y , inversa de $T(y, \kappa)$ em relação à κ , tal que

$$\kappa(y, \bar{\sigma}) = \bar{\kappa} + \frac{d\mathcal{N}_1}{dy}. \quad (3.22)$$

De isolar $d\mathcal{N}_1/dy$ em (3.22), e posteriormente integrá-la, obtém-se:

$$\mathcal{N}_1(s, \bar{\kappa}) \Big|_{s=0}^{s=y} = \int_0^y (\kappa(s, \bar{\sigma}) - \bar{\kappa}) ds, \quad (3.23)$$

e levando em conta a condição $\mathcal{N}_1(0, \bar{\kappa}) = 0$ do problema, conclui-se que:

$$\mathcal{N}_1(y, \bar{\kappa}) = \int_0^y (\kappa(s, \bar{\sigma}) - \bar{\kappa}) ds. \quad (3.24)$$

A fim de garantir a 1-periodicidade em y de $\mathcal{N}_1(y, \bar{\kappa})$, deve-se ter $\mathcal{N}_1(y+1, \bar{\kappa}) - \mathcal{N}_1(y, \bar{\kappa}) = 0$. Assim, considerando (3.24), tem-se:

$$\mathcal{N}_1(y+1, \bar{\kappa}) - \mathcal{N}_1(y, \bar{\kappa}) = \int_y^{y+1} (\kappa(s, \bar{\sigma}) - \bar{\kappa}) ds. \quad (3.25)$$

Lembrando que $\bar{\kappa}$ é constante em relação a y e $\kappa(y, \bar{\sigma})$ é 1-periódica em y , a integral em (3.25) pode ser simplificada, obtendo:

$$\mathcal{N}_1(y+1, \bar{\kappa}) - \mathcal{N}_1(y, \bar{\kappa}) = \int_0^1 (\kappa(s, \bar{\sigma}) - \bar{\kappa}) ds = \langle \kappa \rangle - \bar{\kappa}, \quad (3.26)$$

ou seja, para que $\mathcal{N}_1(y, \bar{\kappa})$ seja 1-periódica em y é necessário que $\langle \kappa \rangle = \bar{\kappa}$. Porém, observando que $\kappa = \bar{\kappa} + \frac{d\mathcal{N}_1}{dy}$, de aplicar a o operador média nesta igualdade, a condição para 1-periodicidade estará naturalmente satisfeita. \square

Dessa forma, é garantida a existência e unicidade das soluções dos problemas locais $P_L^{\frac{dv_0}{dx}}$ em (4.142), considerando $\bar{\kappa} = dv_0/dx$ e $u_1(x, y) = \mathcal{N}_1(y, \bar{\kappa})$. Ademais, obtém-se:

$$u_1(x, y) = \int_0^y \left(\epsilon(s, \bar{\sigma}) - \frac{dv_0}{dx} \right) ds, \quad (3.27)$$

onde $\epsilon(y, \bar{\sigma}) = \frac{dv_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y}$, a inversa de $T(y, \epsilon, \bar{\sigma})$ em relação a ϵ (cuja existência é garantida pelo teorema da função implícita (ILYIN; POZNYAK, 1982)).

Agora, para o termo $u_2(x, y)$ da SAF, considera-se a equação para ε^0 em (3.16) e as condições de contorno em (2.51). Reorganizando (3.16), obtém-se o seguinte problema:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \left(y, \frac{dv_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \frac{\partial u_2}{\partial y} \right] = f(x) - \frac{\partial}{\partial x} \left[\sigma \left(y, \frac{dv_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \left(y, \frac{dv_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \frac{\partial u_1}{\partial x} \right] \\ u_2(0, 0) = u_2(l, 0) = 0 \end{cases} \quad (3.28)$$

para $y \in (0, 1) \setminus \{c_1\}$, onde, considerando x como um parâmetro, e assumindo u_1 conhecido, a solução 1-periódica e única de (3.28) é garantida pelo Lema 1, sob a seguinte condição:

$$\left\langle f(x) - \frac{\partial \sigma}{\partial x} \left(y, \frac{dv_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \left(y, \frac{dv_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \frac{\partial u_1}{\partial x} \right] \right\rangle = 0, \quad (3.29)$$

de ter-se identificado $K(y) = \frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon}$, $N(y) = u_2(x, y)$ e $F(y)$ como em (3.29).

Da 1-periodicidade de $u_1(x, y)$ em y , conclui-se que

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} (y, \zeta) \frac{\partial u_1}{\partial x} \right] \right\rangle = 0. \quad (3.30)$$

E da equação do problema $P_L^{\frac{dv_0}{dx}}$ em (3.17), tem-se que σ não depende de y para $\epsilon = \frac{dv_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y}$, dessa forma:

$$\left\langle \sigma \left(y, \frac{dv_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \right\rangle = \sigma \left(y, \frac{dv_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) = \bar{\sigma}(x) \equiv \hat{\sigma} \left(\frac{dv_0}{dx} \right) = \hat{\sigma}(\bar{\epsilon}) \quad (3.31)$$

onde $\hat{\sigma} \left(\frac{dv_0}{dx} \right)$ é o fluxo efetivo do meio modelado pelo problema não linear em (3.1), e $\bar{\sigma} = \hat{\sigma}(\bar{\epsilon})$ é sua lei efetiva.

Diante disso, da condição (3.29) se obtém a equação homogeneizada que, juntamente com as condições de contorno para $v_0(x)$ em (2.49), forma o problema homogeneizado, a saber,

$$P_H : \begin{cases} \frac{d}{dx} \hat{\sigma} \left(\frac{dv_0}{dx} \right) = f(x), & x \in (0, l) \\ v_0(0) = g_1 \\ v_0(l) = g_2 \end{cases}, \quad (3.32)$$

cuja solução v_0 garante a existência de u_2 1-periódica em y .

Observa-se que a obtenção de v_0 , u_1 e u_2 dependem de $\hat{\sigma}(\bar{\epsilon})$, ou seja, se faz necessário encontrar uma expressão para $\hat{\sigma}(\bar{\epsilon})$, a qual irá depender do tipo de não linearidade do fluxo σ^ϵ .

Com essas considerações, assumindo que existem v_0 e u_1 soluções dos problemas P_H em (3.32) e $P_L^{\frac{dv_0}{dx}}$ em (3.17), a equação do problema (3.28) para encontrar u_2 1-periódica em y é agora:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \left(y, \frac{dv_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \frac{\partial u_2}{\partial y} \right] = - \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \left(y, \frac{dv_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \frac{\partial u_1}{\partial x} \right], \quad (3.33)$$

da qual, integrando em relação a y , obtém-se:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \left(y, \frac{dv_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \frac{\partial u_2}{\partial y} = - \frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \left(y, \frac{dv_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \frac{\partial u_1}{\partial x} + C_1(x). \quad (3.34)$$

Como foi assumido anteriormente, $\frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} > 0$, logo

$$\frac{\partial u_2}{\partial y} = - \frac{\partial u_1}{\partial x} + C_1(x) \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \left(y, \frac{dv_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \right)^{-1}. \quad (3.35)$$

Agora, para determinar a constante de integração $C_1(x)$, basta aplicar o operador média em (3.35), obtendo-se:

$$u_2|_{y=0}^{y=1} = - \left\langle \frac{\partial u_1}{\partial x} \right\rangle + C_1(x) \left\langle \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \right)^{-1} \right\rangle, \quad (3.36)$$

e assim, da 1-periodicidade em y de u_2 , garantida pelo Lema 1, chega-se a

$$C_1(x) = \left\langle \frac{\partial u_1}{\partial x} \right\rangle \left\langle \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \right)^{-1} \right\rangle^{-1}. \quad (3.37)$$

De substituir (3.37) em (3.35), e integrando, determina-se a seguinte expressão para u_2 :

$$u_2(x, y) = \int_0^y \left[-\frac{\partial u_1}{\partial x}(x, s) + \left\langle \frac{\partial u_1}{\partial x} \right\rangle \left\langle \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \right)^{-1} \right\rangle^{-1} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \left(s, \frac{dv_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial s} \right) \right)^{-1} \right] ds, \quad (3.38)$$

em que levou-se em conta $u_2(x, 0) = 0$.

Chama-se atenção para o fato que considerando o fluxo $\sigma(y, \epsilon)$ linear, de (3.27) e (3.38) obtém-se (2.76) e (2.100), respectivamente.

3.2 Aplicação em exemplo

3.2.1 Formulação do problema e solução exata

O tipo de não linearidade considerado será a do tipo potencial, na forma

$$\sigma \left(\frac{x}{\epsilon}, \frac{du^\epsilon}{dx} \right) = K^\epsilon(x) \left(\frac{du^\epsilon}{dx} \right)^n, \quad (3.39)$$

com n ímpar ou $n = 1/m$ (e m ímpar), e $K^\epsilon(x)$ continuamente diferenciável, positiva, estritamente limitada e ϵ -periódica. A motivação para esta escolha vem de PONTE-CASTAÑEDA; SUQUET (1998) e PÉREZ-FERNÁNDEZ et al. (2018), onde tal tipo de não linearidade é aplicável em diversos contextos físicos, como em deformações plásticas, temperatura de escoamento de metais (termoplasticidade), fenômenos de natureza elétrica, entre outros. A escolha para imparidade vem do fenômeno de polarização de cristais centrossimétricos por laser de alta intensidade (HOOK; HALL, 1991). Acontece que, em campos elétricos muito intensos (que ocorrem em um raio laser focado), o deslocamento elétrico D em função do campo elétrico E é dado por

$$D(E) = \mu E + \nu E^3 \quad (3.40)$$

onde μ é a permissividade elétrica e ν a susceptibilidade.

O problema específico a ser tratado é:

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \left[K^\varepsilon(x) \left(\frac{du^\varepsilon}{dx} \right)^n \right] = -1, & x \in (0, 1) \\ u^\varepsilon|_{x=0} = 0, & u^\varepsilon|_{x=1} = 1 \\ K^\varepsilon(x) = 1 + \frac{1}{4} \operatorname{sen} \left(2\pi \frac{x}{\varepsilon} \right) \end{cases} \quad (3.41)$$

A solução exata u^ε de (3.41), é obtida por integração direta como:

$$u^\varepsilon(x) = \int_0^x \left(\frac{-s + C_1}{K^\varepsilon(s)} \right)^{\frac{1}{n}} ds, \quad (3.42)$$

em que C_1 dependerá da condição $u^\varepsilon|_{x=1} = 0$, sendo solução da equação:

$$\int_0^1 \left(\frac{-s + C_1}{K^\varepsilon(s)} \right)^{\frac{1}{n}} ds = 1. \quad (3.43)$$

Observa-se que quando $n \rightarrow \infty$ em (3.42) tem-se que $u^\varepsilon \rightarrow x$. Este comportamento é interessante para validar os resultados computacionais.

3.2.2 Construção da SAF

Primeiramente, se faz necessário encontrar uma expressão fechada para o fluxo efetivo $\widehat{\sigma}(dv_0/dx)$. Considerando (3.31) e $u_1(x, y)$ como solução 1-periódica em y da família uniparamétrica de problemas $P_L^{\frac{dv_0}{dx}}$ em (3.17), e $v_0(x)$ solução do problema P_H em (3.32), tem-se que:

$$\widehat{\sigma} \left(\frac{dv_0}{dx} \right) = \sigma \left(y, \frac{dv_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) = K(y) \left(\frac{dv_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right)^n. \quad (3.44)$$

De isolar a derivada de u_1 , estando satisfeitas as condições do teorema da função implícita (ver demonstração do Lema 4), obtém-se:

$$\frac{\partial u_1}{\partial y} = \left(\frac{1}{K(y)} \widehat{\sigma} \left(\frac{dv_0}{dx} \right) \right)^{\frac{1}{n}} - \frac{dv_0}{dx}. \quad (3.45)$$

Aplicando agora o operador média em (3.45), levando em conta a 1-periodicidade em y de u_1 , chega-se a expressão pretendida:

$$\widehat{\sigma} \left(\frac{dv_0}{dx} \right) = \langle K^{-1/n} \rangle^{-n} \left(\frac{dv_0}{dx} \right)^n, \quad (3.46)$$

com coeficiente efetivo $\widehat{K} = \langle K^{-1/n} \rangle^{-n}$. Diante disto, pode-se rescrever (3.45) como:

$$\frac{\partial u_1}{\partial y} = \left[\left(\frac{\widehat{K}}{K(y)} \right)^{1/n} - 1 \right] \frac{dv_0}{dx}, \quad (3.47)$$

mostrando que u_1 apresenta separação de variáveis, assim como no caso linear. Mais exatamente, integrando (3.47) em relação a y :

$$u_1(x, y) = \frac{dv_0}{dx} \int_0^y \left[\left(\frac{\widehat{K}}{K(s)} \right)^{1/n} - 1 \right] ds, \quad (3.48)$$

em que foi considerado que $u_1(x, 0) = 0$. Ou seja, é possível considerar novamente que $u_1(x, y) = N_1(y) \frac{dv_0}{dx}$, com

$$N_1(y) = \int_0^y \left[\left(\frac{\widehat{K}}{K(s)} \right)^{1/n} - 1 \right] ds. \quad (3.49)$$

Observe que de fazer $n = 1$ em (3.47), obtém-se a expressão para $N_1(y)$ do caso linear como está em (2.75).

Para obter v_0 , é necessário resolver o problema homogeneizado, que é resultado de substituir (3.46) em (3.32):

$$P_H : \begin{cases} \widehat{K} \frac{d}{dx} \left[\left(\frac{dv_0}{dx} \right)^n \right] = -1, & x \in (0, 1) \\ v_0(0) = 0 \\ v_0(1) = 1 \end{cases}, \quad (3.50)$$

cuja solução exata é

$$v_0(x) = \widehat{K}^{-1/n} \int_0^x (-s + C_0)^{1/n} ds, \quad (3.51)$$

com C_0 dependendo da condição $v_0(1) = 1$, cuja substituição em (3.51), produz a seguinte equação para C_0 :

$$\frac{n}{n+1} \left(C_0^{\frac{n+1}{n}} - (C_0 - 1)^{\frac{n+1}{n}} \right) = \widehat{K}^{\frac{1}{n}}. \quad (3.52)$$

Observa-se que $v_0 \rightarrow x$, quando $n \rightarrow \infty$, de maneira similar à solução exata u^ε do problema original em (3.41).

Já o termo u_2 da SAF é obtido como está descrito de forma geral em (3.38). Entretanto, como obteve-se que $u_1(x, y) = N_1(y) \frac{dv_0}{dx}$ (para o tipo de não linearidade aqui

considerado), a expressão em (3.38) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$u_2(x, y) = \int_0^y \left[-N_1(s) \frac{d^2 v_0}{dx^2} + \langle N_1 \rangle \left\langle \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \right)^{-1} \right\rangle^{-1} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \left(s, \frac{dv_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \right)^{-1} \frac{d^2 v_0}{dx^2} \right] ds. \quad (3.53)$$

Neste momento, se faz necessário encontrar uma expressão para $\frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \left(y, \frac{dv_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right)$. A princípio, tem-se:

$$\sigma \left(y, \frac{dv_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) = K(y) \left(\frac{dv_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right)^n, \quad (3.54)$$

logo,

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \left(y, \frac{dv_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) = nK(y) \left(\frac{dv_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right)^{n-1}. \quad (3.55)$$

Considerando a separação de variáveis de u_1 e que

$$\frac{dN_1}{dy} = \left(\frac{\widehat{K}}{K(y)} \right)^{1/n} - 1, \quad (3.56)$$

de acordo com (3.47), obtém-se a seguinte expressão:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \left(y, \frac{dv_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) = nK(y) \left(\frac{\widehat{K}}{K(y)} \right)^{(n-1)/n} \left(\frac{dv_0}{dx} \right)^{n-1}, \quad (3.57)$$

e assim, de substituir (3.57) na expressão para u_2 em (3.53), chega-se a:

$$u_2(x, y) = \frac{d^2 v_0}{dx^2} \int_0^y \left[-N_1(s) + \langle N_1 \rangle \left(\frac{\widehat{K}}{K(s)} \right)^{1/n} \right] ds. \quad (3.58)$$

Conclui-se assim que o termo u_2 da SAF apresenta também separação de variáveis, podendo ser escrito novamente na forma $u_2 = N_2(y) \frac{d^2 v_0}{dx^2}$, com

$$N_2(y) = \int_0^y \left[-N_1(s) + \langle N_1 \rangle \left(\frac{\widehat{K}}{K(s)} \right)^{1/n} \right] ds. \quad (3.59)$$

É visto ainda que de considerar $n = 1$, obtém-se a mesma expressão para $N_2(y)$ do caso linear, em (2.99).

3.2.3 Resultados Computacionais

Serão tomados os valores de $1/7$, $1/5$, $1/3$, 1 , 3 , 5 e 7 para n , a fim de ilustrar o comportamento da solução do problema P_H em (3.50) $v_0(x)$ e das SAF's $u^{(1)}(x, \varepsilon)$ e $u^{(2)}(x, \varepsilon)$, em comparação com a solução exata¹ $u^\varepsilon(x)$ do problema original em (3.41), sendo o caso $n = 1$ correspondente ao caso linear. Estes valores foram assim tomados com o intuito de avaliar o comportamento das diversas soluções com relação ao expoente da não linearidade.

A solução exata foi obtida através da integração numérica de (3.42), utilizando o método de Simpson 1/3, com passo $h = \varepsilon/100$. A constante C_1 foi determinada aplicando o método de bissecção de Newton, com tolerância de 10^{-10} , em (3.43). Para ambos métodos numéricos empregaram-se os algoritmos de BURDEN; FAIRES; BURDEN (2015). Na Figura 8 a solução u^ε está graficada para os valores de n considerados, com $\varepsilon = 1/4$.

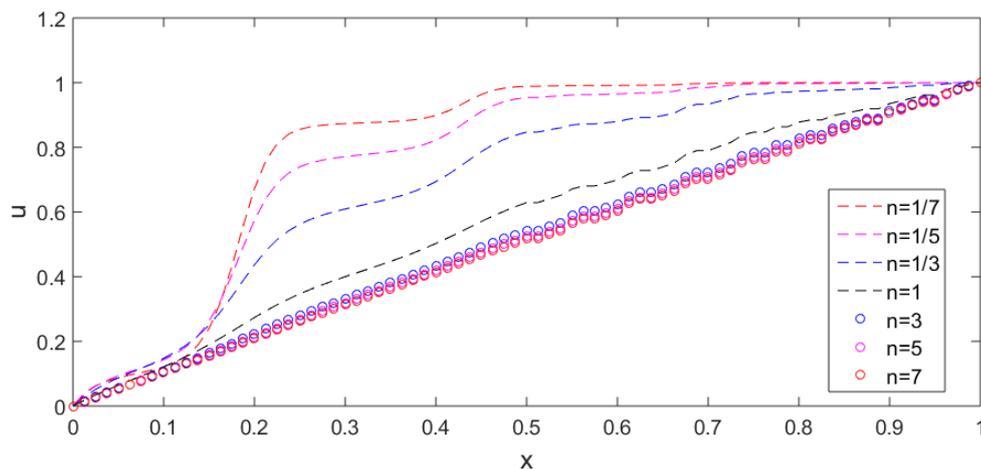


Figura 8: Solução exata u^ε do problema em (3.41), para $\varepsilon = 1/4$ e diferentes valores de n .

Ao analisar a Figura 8, percebe-se que a solução u^ε apresenta comportamento mais oscilante para os valores menores de n , e quando n cresce o gráfico da curva se aproxima da função $u(x) = x$, como esperado.

A solução v_0 e as SAF's de primeira e segunda ordem foram obtidas também através de integração numérica, com o método de Simpson 1/3 e o mesmo passo $h = \varepsilon/100$, aplicada em (3.48), (3.51) e (3.58), respectivamente. A constante de integração C_0 foi obtida da mesma forma que C_1 .

Nas Tabelas 3 e 4, para $\varepsilon = 1/2$ e $\varepsilon = 1/4$, respectivamente, apresenta-se uma estimativa da precisão das aproximações através da norma em $L^2[0, l]$ da diferença

¹Nesta subseção continua-se a chamar de solução exata do problema original a sua aproximação numérica direta.

entre u^ε e a aproximação correspondente.

Tabela 3: Estimativa da proximidade de v_0 e das assintóticas $u^{(1)}$ e $u^{(2)}$ em relação à solução exata u^ε de (3.41), para $\varepsilon = 1/2$ e diferentes valores de n .

n	$\ u^\varepsilon - v_0\ _{L^2[0,t]}$	$\ u^\varepsilon - u^{(1)}\ _{L^2[0,t]}$	$\ u^\varepsilon - u^{(2)}\ _{L^2[0,t]}$
1/7	$2,2275 \cdot 10^{-1}$	$1,0162 \cdot 10^{-1}$	$3,0656 \cdot 10^{-2}$
1/5	$1,6311 \cdot 10^{-1}$	$4,8664 \cdot 10^{-2}$	$8,7127 \cdot 10^{-3}$
1/3	$8,9069 \cdot 10^{-2}$	$1,2667 \cdot 10^{-2}$	$5,2093 \cdot 10^{-3}$
1	$2,3395 \cdot 10^{-2}$	$3,8951 \cdot 10^{-3}$	$4,0772 \cdot 10^{-3}$
3	$6,3654 \cdot 10^{-3}$	$4,0326 \cdot 10^{-3}$	$4,0508 \cdot 10^{-3}$
5	$3,7614 \cdot 10^{-3}$	$4,0510 \cdot 10^{-3}$	$4,0565 \cdot 10^{-3}$
7	$3,1245 \cdot 10^{-3}$	$4,0562 \cdot 10^{-3}$	$4,0588 \cdot 10^{-3}$

Tabela 4: Estimativa da proximidade de v_0 e das assintóticas $u^{(1)}$ e $u^{(2)}$ em relação à solução exata u^ε de (3.41), para $\varepsilon = 1/4$ e diferentes valores de n .

n	$\ u^\varepsilon - v_0\ _{L^2[0,t]}$	$\ u^\varepsilon - u^{(1)}\ _{L^2[0,t]}$	$\ u^\varepsilon - u^{(2)}\ _{L^2[0,t]}$
1/7	$1,3831 \cdot 10^{-1}$	$3,8532 \cdot 10^{-2}$	$5,6139 \cdot 10^{-3}$
1/5	$9,0921 \cdot 10^{-2}$	$1,4769 \cdot 10^{-2}$	$2,8787 \cdot 10^{-3}$
1/3	$4,5969 \cdot 10^{-2}$	$3,1525 \cdot 10^{-3}$	$2,6944 \cdot 10^{-3}$
1	$1,1663 \cdot 10^{-2}$	$2,0185 \cdot 10^{-3}$	$2,1027 \cdot 10^{-3}$
3	$3,1765 \cdot 10^{-3}$	$2,0371 \cdot 10^{-3}$	$2,0414 \cdot 10^{-3}$
5	$1,8856 \cdot 10^{-3}$	$2,0367 \cdot 10^{-3}$	$2,0378 \cdot 10^{-3}$
7	$1,5702 \cdot 10^{-3}$	$2,0364 \cdot 10^{-3}$	$2,0369 \cdot 10^{-3}$

Observa-se que se conseguiram boas aproximações em relação à solução u^ε , mostrando que o método foi aplicado com sucesso em todos casos considerados. Entretanto, destaque é dado para o fato de a SAF $u^{(2)}$ se mostrou como uma melhor aproximação em relação à $u^{(1)}$ apenas nos casos em que o expoente da não linearidade é menor que 1. De fato, nos outros casos ($n = 1, 3, 5$ e 7), considerar o terceiro termo da assintótica não surtiu efeito considerável, observando que os erros foram da mesma magnitude que a da SAF $u^{(1)}$. Ocorre que, como foi comentado, para estes expoentes (menores que 1), a solução exata apresenta oscilações mais acentuadas (mais detalhes locais), os quais a SAF de primeira ordem não consegue reproduzir com precisão, sendo necessário considerar o terceiro termo da SAF. Já para os casos em que a solução original não apresenta muitos detalhes locais (expoentes maiores que 1), a SAF $u^{(1)}$ bastou para uma boa aproximação.

Foi observado também, através dos resultados apresentados na Tabela 5 para $\varepsilon = 1/16$, que este comportamento muda tomando valores menores de ε .

Tabela 5: Estimativa da proximidade de v_0 e das assintóticas $u^{(1)}$ e $u^{(2)}$ em relação à solução exata u^ε de (3.41), para $\varepsilon = 1/16$ e diferentes valores de n .

n	$\ u^\varepsilon - v_0\ _{L^2}$	$\ u^\varepsilon - u^{(1)}\ _{L^2}$	$\ u^\varepsilon - u^{(2)}\ _{L^2}$
1/7	$3,2384 \cdot 10^{-2}$	$2,2893 \cdot 10^{-3}$	$1,2652 \cdot 10^{-3}$
1/5	$2,1678 \cdot 10^{-2}$	$8,7342 \cdot 10^{-4}$	$1,0129 \cdot 10^{-3}$
1/3	$1,1233 \cdot 10^{-2}$	$5,8235 \cdot 10^{-4}$	$7,3442 \cdot 10^{-4}$
1	$2,9003 \cdot 10^{-3}$	$5,3045 \cdot 10^{-4}$	$5,3734 \cdot 10^{-4}$
3	$7,9377 \cdot 10^{-4}$	$5,1273 \cdot 10^{-4}$	$5,1298 \cdot 10^{-4}$
5	$4,7247 \cdot 10^{-4}$	$5,1101 \cdot 10^{-4}$	$5,1106 \cdot 10^{-4}$
7	$3,9400 \cdot 10^{-4}$	$5,1051 \cdot 10^{-4}$	$5,1053 \cdot 10^{-4}$

Nota-se que para todos os valores de n considerados, a SAF $u^{(2)}$ não se mostrou como uma melhor aproximação da solução u^ε para $\varepsilon = 1/16$. Entende-se assim que para valores suficientemente pequenos de ε , a SAF $u^{(1)}$ parece ser suficiente para representar o comportamento local da solução u^ε , para os casos considerados nesse exemplo.

É válido ressaltar também que, para os três valores de ε considerados, a SAF $u^{(1)}$ se mostrou como melhor aproximação de u^ε do que v_0 mais expressivamente para os problemas em que $n \leq 1$. O comportamento também está relacionado com o fato de que para estes valores de n , a solução u^ε apresenta mais detalhes locais, que só poderão ser reproduzidos pelas SAF's, visto que v_0 é a solução do problema homogeneizado, logo, representa apenas o comportamento macroscópico de u^ε .

Por fim, a seguir é ilustrado graficamente o que foi discutido até aqui, utilizando o caso em que $n = 1/7$, por apresentar mais detalhes locais, e $\varepsilon = 1/2$ e $\varepsilon = 1/16$, com o objetivo de contrastar as duas microperiodicidades. Na Figura 9, fica claro que a SAF $u^{(2)}$ reproduz melhor as oscilações locais da solução u^ε , que ocorrem no intervalo $[0, 0.5]$ em x . Percebe-se também que a solução v_0 não reproduz esses detalhes locais, o que já era esperado, pois não depende do parâmetro ε .

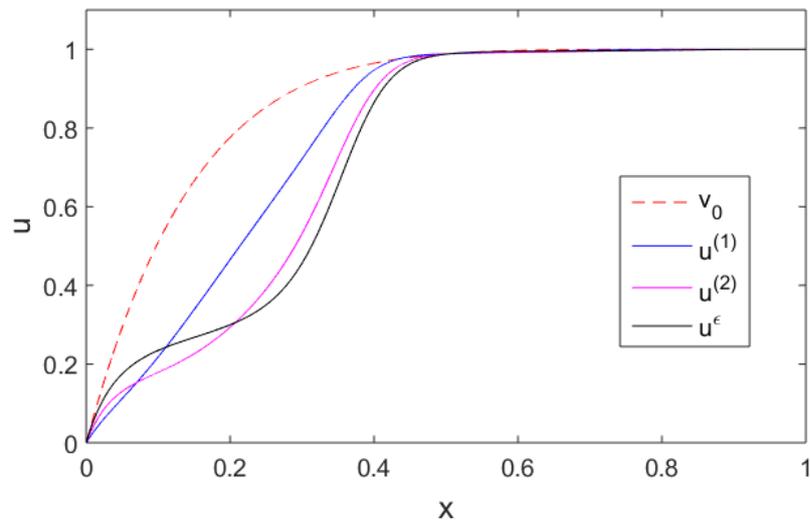


Figura 9: Ilustração gráfica das soluções u^ε e v_0 e das assintóticas $u^{(1)}$ e $u^{(2)}$, para $\varepsilon = \frac{1}{2}$ e $n = 1/7$, referentes ao exemplo em (3.41).

Agora, na Figura 10, é visto que as duas SAF's estão muito próximas, podendo-se observar que ambas reproduzem com eficácia os detalhes locais da solução u^ε . É interessante ressaltar também que o gráfico de u^ε está mais próximo do de v_0 para este valor de ε , ilustrando a hipótese de homogeneidade equivalente quando $\varepsilon \rightarrow 0^+$.

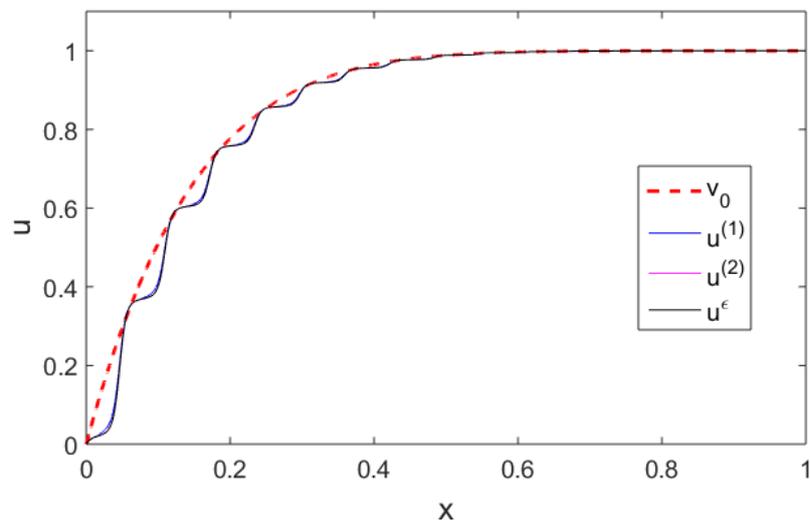


Figura 10: Ilustração gráfica das soluções u^ε e v_0 e das assintóticas $u^{(1)}$ e $u^{(2)}$, para $\varepsilon = \frac{1}{16}$ e $n = 1/7$, referentes ao exemplo em (3.41).

4 DETERMINAÇÃO DO FLUXO EFETIVO EM MEIOS MICROPERIÓDICOS COM PROPRIEDADES CONSTANTES POR PARTES, ATRAVÉS DO MHA

4.1 Descrição matemática de um meio microperiódico unidimensional com propriedades constantes por partes

A motivação de estudar problemas com coeficientes descontínuos vem dos materiais compósitos, os quais, como já foi dito, são formados pela união de dois ou mais materiais homogêneos, numa microescala. Em particular, são de interesse compósitos com estrutura periódica. Desta forma, suas propriedades físicas serão representadas por funções $K^\varepsilon(x)$, definidas como constantes por partes, ε -periódicas. Abaixo, ilustra-se o comportamento rapidamente oscilante de uma propriedade de um compósito bifásico:

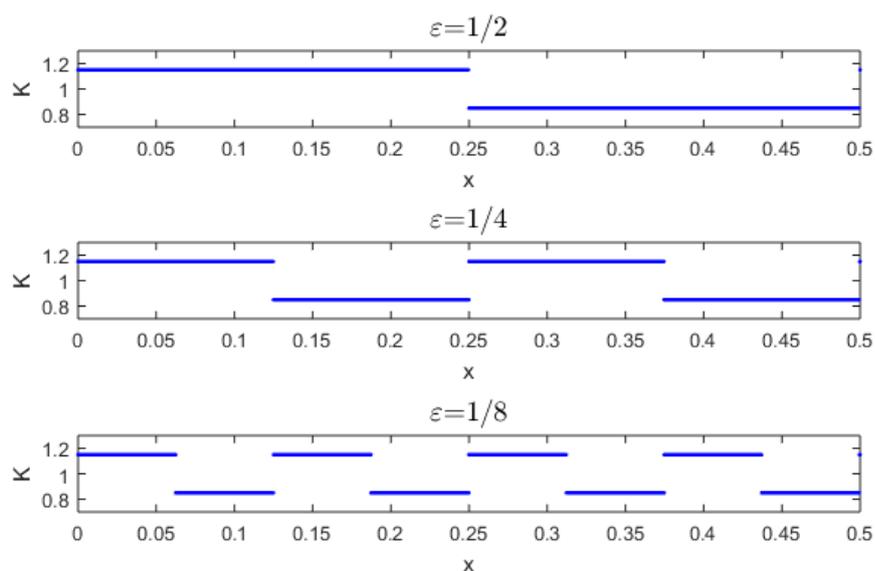


Figura 11: Ilustração do comportamento rapidamente oscilante de um coeficiente periódico e constante por partes, para diferentes valores de ε .

Na Figura 12, ilustra-se um material compósito bifásico ε -periódico:

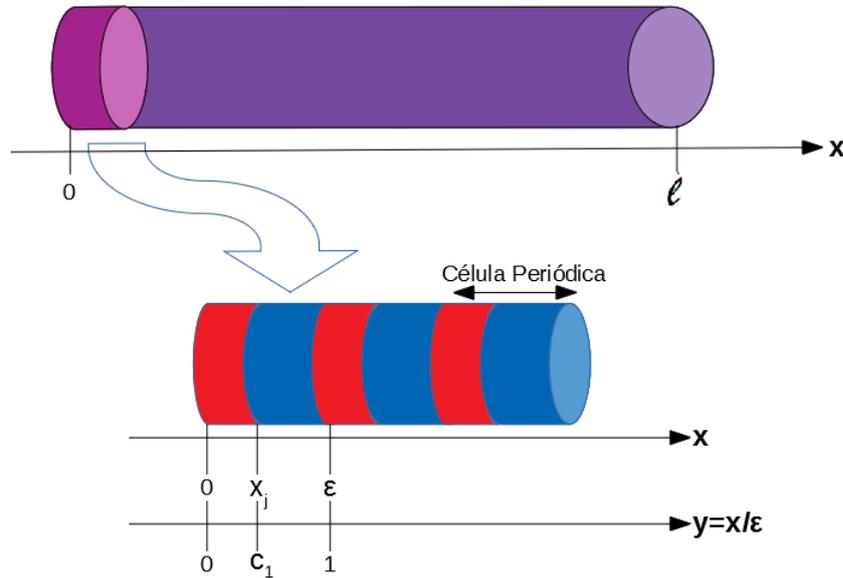


Figura 12: Meio microperiódico, bifásico e unidimensional, com propriedade constante por partes (do autor).

Neste caso, a célula periódica será formada pela união de duas regiões Ω_1 e Ω_2 (abertas, conexas e disjuntas), as quais representam as fases do compósito bifásico, e suas fronteiras ($\partial\Omega_1$ e $\partial\Omega_2$) serão os pontos de interface das duas fases em cada célula periódica, representados por x_j , com $j = 1, 2, \dots, N$. Dessa forma, o compósito pode ser representado pela união finita de um número N ($N \in \mathbb{N}$) células periódicas, a saber:

$$\bigcup_{i=1}^N (\Omega_{2i-1} \cup \Omega_{2i}) \cup (\partial\Omega_{2i-1} \cup \partial\Omega_{2i}) = [0, l]. \quad (4.1)$$

Devido a esta definição por partes, nos problemas de equações diferenciais que modelam algum fenômeno físico neste meio apresentarão, além de condições de contorno, as condições de contato, que representam o que ocorre com uma grandeza nos pontos de interface. Estas condições serão formuladas utilizando o operador de salto $[[\cdot]]$, que para uma grandeza ϕ é definido como:

$$[[\phi(x)]]_{x=x_j} = \lim_{x \rightarrow x_j^+} \phi(x) - \lim_{x \rightarrow x_j^-} \phi(x). \quad (4.2)$$

Uma condição de contato nula ($[[\phi(x)]]_{x=x_j} = 0$) representa um contato perfeito entre as fases (a qual implica na sua continuidade através da interface), e caso contrário, um contato imperfeito caracterizado por um salto da grandeza ao passar pela interface.

4.2 Homogeneização da equação de difusão estacionária, linear, com coeficientes constantes por partes

4.2.1 Formulação do problema e sua solução exata

Será considerado um PVC para a equação de difusão estacionária, como proposto anteriormente em (2.26), porém agora, para um meio com propriedades constantes por partes (como o da Figura 12). O problema é formulado como:

$$P_O : \begin{cases} \frac{d}{dx} \left[K^\varepsilon(x) \frac{du^\varepsilon}{dx} \right] = f(x), \quad x \in (0, l) / \Gamma^\varepsilon \\ K^\varepsilon(x) = \begin{cases} K_1, & x \in \Omega_1 \\ K_2, & x \in \Omega_2 \end{cases} \\ \left[\left[K^\varepsilon(x) \frac{du^\varepsilon}{dx} \right] \right]_{x \in \Gamma^\varepsilon} = 0 \\ \llbracket u^\varepsilon(x) \rrbracket_{x \in \Gamma^\varepsilon} = 0 \\ u^\varepsilon|_{x=0} = g_1 \\ u^\varepsilon|_{x=l} = g_2 \end{cases}, \quad (4.3)$$

onde $\Gamma^\varepsilon = \{x_j\}_{j=1}^{2N}$ é o conjunto dos pontos de descontinuidade de $K^\varepsilon(x)$.

Este problema descreve um fenômeno difusivo estacionário unidimensional, em um domínio $(0, l)$ que pode representa um material compósito bifásico, onde K_1 e K_2 (ambos positivos) são as propriedades físicas dos materiais constituintes. Sob as condições do problema e de que $f(x)$ é contínua por partes em $[0, l]$, o problema apresenta solução.

De integrar a equação, de 0 a algum $x \in (0, l) / \Gamma^\varepsilon$, levando-se em conta os pontos de descontinuidade, obtém-se:

$$\int_0^{x_1^-} \frac{d}{ds} \left[K^\varepsilon(s) \frac{du^\varepsilon}{ds} \right] ds + \int_{x_1^+}^{x_2^-} \frac{d}{ds} \left[K^\varepsilon(s) \frac{du^\varepsilon}{ds} \right] ds + \dots \\ + \int_{x_i^+}^x \frac{d}{ds} \left[K^\varepsilon(s) \frac{du^\varepsilon}{ds} \right] ds = \int_0^x f(t) dt, \quad (4.4)$$

em que:

$$\int_{a^+}^{b^-} (\cdot) dt = \lim_{h \rightarrow 0} \int_{a+h}^{b-h} (\cdot) dt. \quad (4.5)$$

Observando a definição das condições de contato em (4.2), a equação (4.4) pode ser reescrita como:

$$- \left[K^\varepsilon(s) \frac{du^\varepsilon}{ds} \right] \Big|_{s=0} - \left[\left[K^\varepsilon(x) \frac{du^\varepsilon}{dx} \right] \right]_{x=x_1} - \left[\left[K^\varepsilon(x) \frac{du^\varepsilon}{dx} \right] \right]_{x=x_2} - \dots \\ - \left[\left[K^\varepsilon(x) \frac{du^\varepsilon}{dx} \right] \right]_{x=x_i} + \left[K^\varepsilon(s) \frac{du^\varepsilon}{ds} \right] \Big|_{s=x} = \int_0^x f(t) dt, \quad (4.6)$$

e tomando $C_1 = \left[K^\varepsilon(s) \frac{du^\varepsilon}{ds} \right] \Big|_{s=0}$ e das condições de contato nulas para o fluxo, (4.6) transforma-se em:

$$K^\varepsilon(x) \frac{du^\varepsilon}{dx} = \int_0^x f(t) dt + C_1. \quad (4.7)$$

Isolando du^ε/dx em (4.7), e integrando novamente, chega-se a:

$$\begin{aligned} \int_0^{x_1^-} \frac{du^\varepsilon}{ds} ds + \int_{x_1^+}^{x_2^-} \frac{du^\varepsilon}{ds} ds + \dots + \int_{x_i^+}^x \frac{du^\varepsilon}{ds} ds &= \int_0^{x_1^-} \frac{\int_0^s f(t) dt + C_1}{K^\varepsilon(s)} ds + \\ &+ \int_{x_1^+}^{x_2^-} \frac{\int_0^s f(t) dt + C_1}{K^\varepsilon(s)} ds + \dots + \int_{x_i^+}^x \frac{\int_0^s f(t) dt + C_1}{K^\varepsilon(s)} ds, \end{aligned} \quad (4.8)$$

da qual, aplicando as condições de contato para $u^\varepsilon(x)$ no lado esquerdo de (4.8), obtém-se:

$$\begin{aligned} -u^\varepsilon(s)|_{s=0} - \llbracket u^\varepsilon(x) \rrbracket_{x=x_1} - \dots - \llbracket u^\varepsilon(x) \rrbracket_{x=x_i} + u^\varepsilon(s)|_{s=x} &= \\ \int_0^{x_1^-} \frac{\int_0^s f(t) dt + C_1}{K^\varepsilon(s)} ds + \dots + \int_{x_i^+}^x \frac{\int_0^s f(t) dt + C_1}{K^\varepsilon(s)} ds &. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Sabendo do problema que $\llbracket u^\varepsilon(x) \rrbracket_{x=x_j} = 0$, e que $u^\varepsilon|_{x=0} = g_1$, tem-se que:

$$u^\varepsilon(x) = \int_0^{x_1^-} \frac{\int_0^s f(t) dt + C_1}{K^\varepsilon(s)} ds + \dots + \int_{x_i^+}^x \frac{\int_0^s f(t) dt + C_1}{K^\varepsilon(s)} ds + g_1. \quad (4.10)$$

Para determinar a constante C_1 , basta considerar a segunda condição de contorno, a saber, $u^\varepsilon|_{x=l} = g_2$, obtendo-se:

$$g_2 = \int_0^{x_1^-} \frac{\int_0^s f(t) dt + C_1}{K^\varepsilon(s)} ds + \dots + \int_{x_{2N-1}^+}^l \frac{\int_0^s f(t) dt + C_1}{K^\varepsilon(s)} ds + g_1. \quad (4.11)$$

Entendendo que cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ corresponde a uma das fases do meio, e que a propriedade $K^\varepsilon(x)$ é constante por partes, (4.11) pode ser escrita como:

$$g_2 - g_1 = \sum_{i=1}^N \left[\frac{1}{K_1} \int_{\Omega_{2i-1}} \left(\int_0^s f(t) dt + C_1 \right) ds + \frac{1}{K_2} \int_{\Omega_{2i}} \left(\int_0^s f(t) dt + C_1 \right) ds \right], \quad (4.12)$$

em que $\int_{\Omega}(\cdot) dx = \int_{a^+}^{b^-}(\cdot) dx$ e $\Omega = [a, b]$, e os domínios Ω_{2i-1} e Ω_{2i} correspondem às fases 1 e 2, respectivamente (para $i = 1, 2, \dots, N$). Da associatividade do somatório, a

equação (4.12) pode ser reescrita como:

$$g_2 - g_1 = \sum_{i=1}^N \left[\frac{1}{K_1} \int_{\Omega_{2i-1}} \int_0^s f(t) dt ds + \frac{1}{K_2} \int_{\Omega_{2i}} \int_0^s f(t) dt ds \right] + \sum_{i=1}^N \left[\frac{C_1}{K_1} \int_{\Omega_{2i-1}} 1 ds + \frac{C_1}{K_2} \int_{\Omega_{2i}} 1 ds \right]. \quad (4.13)$$

Detendo-se no segundo somatório do lado direito de (4.13), é sabido que $\int_{\Omega} 1 dx$ é o comprimento do intervalo Ω , e considerando c_1 o comprimento da fase 1 e $c_2 = 1 - c_1$, o da fase 2, tem-se que:

$$\sum_{i=1}^N \left[\frac{C_1}{K_1} \int_{\Omega_{2i-1}} 1 ds + \frac{C_1}{K_2} \int_{\Omega_{2i}} 1 ds \right] = \sum_{i=1}^N \left[C_1 \left(\frac{c_1}{K_1} + \frac{c_2}{K_2} \right) \right] = NC_1 \left(\frac{c_1}{K_1} + \frac{c_2}{K_2} \right) \quad (4.14)$$

Agora, de substituir (4.14) em (4.13) e então isolar C_1 , obtém-se:

$$C_1 = \frac{g_2 - g_1 - \sum_{i=1}^N \left[\frac{1}{K_1} \int_{\Omega_{2i-1}} \int_0^s f(t) dt ds + \frac{1}{K_2} \int_{\Omega_{2i}} \int_0^s f(t) dt ds \right]}{N \left(\frac{c_1}{K_1} + \frac{c_2}{K_2} \right)}. \quad (4.15)$$

Dessa forma, a solução de P_O em (4.3) é dada por (4.10), com C_1 como em (4.15).

4.2.2 Construção da SAF

A construção da SAF se dará de forma bastante parecida com a que foi apresentada para o caso linear e contínuo na Seção 2.2. Será proposta uma SAF de segunda ordem, análoga à (2.29), a saber:

$$u^{(2)}(x, \varepsilon) = u_0(x, y) + \varepsilon u_1(x, y) + \varepsilon^2 u_2(x, y), \quad (4.16)$$

porém agora admitindo que as derivadas de $u_1(x, y)$ e $u_2(x, y)$ apresentem descontinuidade do tipo salto¹ nos pontos de interface (BAKHVALOV; PANASENKO, 1989).

De aplicar (4.16) na equação do P_O em (4.3), respeitando a regra da cadeia e as condições da definição de uma SAF, prova-se novamente que $u_0(x, y) = v_0(x)$, e chega-se novamente às equações (2.44) e (2.45) para ε^{-1} e ε^0 , respectivamente. Assim como, obtém-se as mesmas condições de contorno para os termos de $u^{(2)}$ em (4.16), que são (2.49), (2.50) e (2.51).

A diferença do caso tratado na Seção 2.2, é que aqui deverão ser consideradas as condições de contato para formular os problemas locais para encontrar os termos da assintótica $u^{(2)}$.

Para a condição de contato do fluxo, seguindo a regra da cadeia em (2.30), já

¹Ao contrário do que foi admitido na Seção 2.1.4, em que $u_k(x, y) \in C^2(\bar{\Omega})$, para $k \geq 1$.

considerando a microescala, tem-se que:

$$\left[\left[K(y) \frac{du^{(2)}}{dx} \right] \right]_{y=c_1} = \left[\left[K(y) \left(\frac{dv_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \right] \right]_{y=c_1} + \varepsilon \left[\left[K(y) \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) \right] \right]_{y=c_1} + O(\varepsilon^2) \quad (4.17)$$

Logo, para que $u^{(2)}(x, \varepsilon)$ cumpra a condição de continuidade do fluxo com precisão de ordem $O(\varepsilon^2)$ expressa em (4.17), devem ser satisfeitas as seguintes condições:

$$\left[\left[K(y) \left(\frac{dv_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \right] \right]_{y=c_1} = 0, \quad (4.18)$$

$$\left[\left[K(y) \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) \right] \right]_{y=c_1} = 0. \quad (4.19)$$

Da forma análoga, de substituir $u^{(2)}(x, \varepsilon)$ na condição de continuidade de u^ε no P_O em (4.3), obtém-se que $\llbracket u^{(2)}(x, \varepsilon) \rrbracket_{y=c_1} = 0$ se:

$$\llbracket u_1 \rrbracket_{y=c_1} = 0, \quad (4.20)$$

$$\llbracket u_2 \rrbracket_{y=c_1} = 0, \quad (4.21)$$

já que v_0 é constante em relação a y .

Tomando agora v_0 como um termo conhecido, formulam-se a partir de (2.44), (2.50), (4.18), (4.20) e de (2.45), (2.51), (4.19), (4.21) os problemas cujas soluções 1-periódicas em y são os termos u_1 e u_2 (respectivamente) da assintótica proposta:

$$\begin{cases} L_{yy}u_1 = -L_{yy}v_0, & y \in (0, 1) / \{c_1\} \\ \left[\left[K(y) \left(\frac{dv_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \right] \right]_{y=c_1} = 0 \\ \llbracket u_1 \rrbracket_{y=c_1} = 0 \\ u_1(0, 0) = u_1(l, 0) = 0 \end{cases} \quad (4.22)$$

e

$$\begin{cases} L_{yy}u_2 = -L_{xy}u_1 - L_{yx}u_1 - L_{xx}v_0 + f(x), & y \in (0, 1) / \{c_1\} \\ \left[\left[K(y) \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) \right] \right]_{y=c_1} = 0 \\ \llbracket u_2 \rrbracket_{y=c_1} = 0 \\ u_2(0, 0) = u_2(l, 0) = 0 \end{cases} \quad (4.23)$$

Como procedeu-se anteriormente, tomando x como um parâmetro, os problemas com derivadas parciais em (4.22) e (4.23) tornam-se ordinários (em relação à y), e

assumem a seguinte forma:

$$\begin{cases} \frac{d}{dy} \left[K(y) \frac{dN}{dy} \right] = F_0(y) + \frac{dF_1}{dy}, & y \in (0, 1) / \{c_1\} \\ \left[\left[K(y) \frac{dN}{dy} - F_1(y) \right] \right]_{y=c_1} = 0 \\ \llbracket N \rrbracket_{y=c_1} = 0 \\ N(0) = 0 \end{cases} \quad (4.24)$$

Novamente, a existência e unicidade de uma solução $N(y)$ 1-periódica deste problema é assegurada por um Lema, a partir de uma condição necessária e suficiente. A saber:

Lema 5. (BAKHVALOV; PANASENKO, 1989) *Sejam $F_0(y)$, $F_1(y)$ e $K(y)$ funções 1-periódicas, continuamente diferenciáveis em $[0, 1] / \{c_1\}$, limitadas, e ainda $K(y) > 0$. Então, uma condição necessária e suficiente para que exista uma solução $N(y)$ 1-periódica do problema em (4.24) é que $\langle F_0 \rangle = 0$.*

Além disso, $N(y)$ é única a não ser por uma constante aditiva, ou seja, $N(y) = \tilde{N}(y) + C$, onde \tilde{N} é uma solução 1-periódica de (4.24) tal que $\tilde{N}(0) = 0$, e C é uma constante arbitrária.

Demonstração. (Necessidade) Supondo que exista a solução $N(y)$ do referido problema e reescrevendo a equação do problema da seguinte forma:

$$\frac{d}{dy} \left[K(y) \frac{dN}{dy} - F_1(y) \right] = F_0(y), \quad (4.25)$$

aplica-se o operador média em (4.25), observando o ponto de descontinuidade em $y = c_1$, chegando-se a:

$$\left(K(y) \frac{dN}{dy} - F_1(y) \right) \Big|_{y=0}^{y=c_1^-} + \left(K(y) \frac{dN}{dy} - F_1(y) \right) \Big|_{y=c_1^+}^{y=1} = \langle F_0 \rangle. \quad (4.26)$$

Diante da condição de que $\left[\left[K(y) \frac{dN}{dy} - F_1(y) \right] \right]_{y=c_1} = 0$, de (4.26) segue que:

$$\left(K(1) \frac{dN}{dy}(1) - F_1(1) \right) - \left(K(0) \frac{dN}{dy}(0) - F_1(0) \right) = \langle F_0 \rangle, \quad (4.27)$$

e da 1-periodicidade de $K(y)$, $N(y)$ (e consequentemente da sua derivada) e de $F_1(y)$, conclui-se que $\langle F_0 \rangle = 0$.

(Suficiência) Agora, considerando que $\langle F_0 \rangle = 0$, integra-se (4.25), de 0 a $y \in (c_1, 1]$

2 :

$$\left(K(t) \frac{dN}{dt} - F_1(t) \right) \Big|_{t=0}^{t=c_1^-} + \left(K(t) \frac{dN}{dt} - F_1(t) \right) \Big|_{t=c_1^+}^{t=y} = \int_0^y F_0(t) dt, \quad (4.28)$$

e, novamente, pela condição $\left[K(y) \frac{dN}{dy} - F_1(y) \right]_{y=c_1} = 0$, do lado esquerdo de (4.28) resulta:

$$K(y) \frac{dN}{dy} - F_1(y) = \int_0^y F_0(t) dt + C_1, \quad (4.29)$$

onde $C_1 = \left(K(y) \frac{dN}{dy} - F_1(y) \right) \Big|_{y=0}$. Como $K(y) > 0$, obtém-se de (4.29) que:

$$\frac{dN}{dy} = \frac{1}{K(y)} \left[\int_0^y F_0(t) dt + C_1 + F_1(y) \right]. \quad (4.30)$$

Integrando (4.30), observando o ponto de descontinuidade em $y = c_1$, tem-se:

$$N(y) - N(c_1^+) + N(c_1^-) - N(0) = \int_0^y \frac{1}{K(y)} \left[\int_0^s F_0(t) dt + C_1 + F_1(s) \right] ds, \quad (4.31)$$

e das condições de que $\llbracket N \rrbracket_{y=c_1} = 0$ e $N(0) = 0$, obtém-se que:

$$N(y) = \int_0^y \frac{1}{K(y)} \left[\int_0^s F_0(t) dt + C_1 + F_1(s) \right] ds. \quad (4.32)$$

Como $K(y)$, $F_0(y)$ e $F_1(y)$ foram declaradas como contínuas e limitadas em $[0, 1] \setminus \{c_1\}$, é garantida a existência das integrais em (4.32). Assim está provada a existência da solução do referido problema.

Agora, para mostrar que $N(y)$ é 1-periódica, observa-se primeiro que do fato de F_0 ser 1-periódica, para $G_0(y) = \int_0^y F_0(t) dt$, tem-se:

$$G_0(y+1) - G_0(y) = \int_y^{y+1} F_0(t) dt = \int_0^1 F_0(t) dt = \langle F_0 \rangle. \quad (4.33)$$

E como tem-se a condição que $\langle F_0 \rangle = 0$, conclui-se que $G_0(y)$ é 1-periódica, tornando possível afirmar que o integrando em (4.32) também é 1-periódico. Com isso, pode-se escrever para $N(y)$ que:

$$N(y+1) - N(y) = \left\langle \frac{1}{K(y)} \left[\int_0^y F_0(t) dt + C_1 + F_1(y) \right] \right\rangle. \quad (4.34)$$

Logo, para que $N(y+1) = N(y)$, pela linearidade do operador média, obtém-se que a

²Já que para $y \in [0, c_1]$ tem-se um caso de continuidade em todo o intervalo, o qual foi tratado nos capítulos anteriores.

constante C_1 é:

$$C_1 = -\hat{K} \left\langle (K(y))^{-1} \left[\int_0^y F_0(t) dt + F_1(y) \right] \right\rangle, \quad (4.35)$$

com $\hat{K} \equiv \langle K^{-1} \rangle^{-1}$.

Por fim, a expressão em (4.32) com C_1 como em (4.35), é a solução 1-periódica procurada do problema (4.24). \square

Aplicando o Lema 5 no problema em (4.22), tem-se que $F_0(y) = 0$, e então a condição $\langle F_0 \rangle = 0$ é satisfeita, e assim pode-se afirmar que existe uma única solução $u_1(x, y)$ 1-periódica em y de (4.22). Assim como no caso contínuo, na Seção 2.2, o formato da equação deste problema sugere que $u_1(x, y)$ tenha a seguinte forma:

$$u_1(x, y) = N_1(y) \frac{dv_0}{dx}. \quad (4.36)$$

E com isto, considerando $dv_0/dx \neq 0$, de (4.22) se obtém um problema cuja solução 1-periódica será $N_1(y)$ na seguinte forma:

$$P_L^{(1)} : \begin{cases} \frac{d}{dy} \left(K(y) \frac{dN_1}{dy} \right) = -\frac{dK}{dy}, & y \in (0, l) / \{c_1\} \\ \left[\left[K(y) \left(\frac{dN_1}{dy} + 1 \right) \right] \right]_{y=c_1} = 0 \\ \left[[N_1] \right]_{y=c_1} = 0 \\ N_1(0) = 0 \end{cases} \quad (4.37)$$

Seguindo o mesmo procedimento proposto na demonstração do Lema 5, em (4.32) e (4.35), considerando $F_0(y) = 0$ e $F_1(y) = -K(y)$, a solução de $P_L^{(1)}$ em (4.37) pode ser escrita como:

$$N_1(y) = \int_0^y \left(\frac{\hat{K}}{K(s)} - 1 \right) ds. \quad (4.38)$$

Considerando a definição de $K(y)$ como constante por partes em (4.3), $N_1(y)$ pode ser escrita ainda como:

$$N_1(y) = \begin{cases} \left(\frac{\hat{K}}{K_1} - 1 \right) y, & y \in (0, c_1) \\ \left(\frac{\hat{K}}{K_2} - 1 \right) y + c_1 \hat{K} \left(\frac{1}{K_1} - \frac{1}{K_2} \right), & y \in (c_1, 1) \end{cases}. \quad (4.39)$$

E assim, o termo $u_1(x, y)$ da SAF proposta será³:

$$u_1(x, y) = \begin{cases} \frac{dv_0}{dx} \left(\frac{\hat{K}}{K_1} - 1 \right) y, & (x, y) \in \Omega_1 \times (0, c_1) \\ \frac{dv_0}{dx} \left(\frac{\hat{K}}{K_2} - 1 \right) y + c_1 \hat{K} \left(\frac{1}{K_1} - \frac{1}{K_2} \right), & (x, y) \in \Omega_2 \times (c_1, 1) \end{cases}. \quad (4.40)$$

Seguindo o mesmo procedimento, a condição do Lema 5 será verificada agora para o problema em (4.23), onde tem-se $F_0(y) = -K(y) \left(\frac{d^2 v_0}{dx^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial y} \right) + f(x)$. Considerando $u_1(x, y)$ com as variáveis separadas como em (4.40), é possível reescrever $F_0(y)$ da seguinte forma:

$$F_0(y) = -K(y) \left(1 + \frac{dN_1}{dy} \right) \frac{d^2 v_0}{dx^2} + f(x). \quad (4.41)$$

E, a fim de garantir a condição $\langle F_0 \rangle = 0$, do Lema 5, obtém-se (como na Seção) o problema P_H em (2.86), cuja solução $v_0(x)$ em (2.90) tem existência garantida.

Assim, a condição para existência e unicidade da solução $u_2(x, y)$ 1-periódica em y de (4.23) está satisfeita, e a sua equação é simplificada para:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(K(y) \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) = -\frac{\partial}{\partial y} \left(K(y) \frac{\partial u_1}{\partial x} \right), \quad (4.42)$$

e de considerar novamente uma separação de variáveis $u_2(x, y) = N_2(y) \frac{d^2 v_0}{dx^2}$, com $\frac{d^2 v_0}{dx^2} \neq 0$, do problema (4.23) obtém-se um outro cuja solução 1-periódica é $N_2(y)$:

$$P_L^{(2)} : \begin{cases} \frac{d}{dy} \left(K(y) \frac{dN_2}{dy} \right) = -\frac{d}{dy} [K(y)N_1(y)], & y \in (0, l) / \{c_1\} \\ \left[\left[K(y) \left(\frac{dN_2}{dy} + N_1 \right) \right] \right]_{y=c_1} = 0 \\ \left[\left[N_2 \right] \right]_{y=c_1} = 0 \\ N_2(0) = N_2(1) = 0 \end{cases} \quad (4.43)$$

cuja existência e unicidade de $N_2(y)$ 1-periódica estão garantidas pelo Lema 5 com $F_0(y) = 0$. E tomando $F_1(y) = -K(y)N_1(y)$, através de (4.32) e (4.35), a solução de $P_L^{(2)}$ será da forma:

$$N_2(y) = \int_0^y \left(\frac{\langle N_1 \rangle \hat{K}}{K(s)} - N_1(s) \right) ds, \quad (4.44)$$

³É interessante salientar que é o mesmo resultado obtido para o caso contínuo na Seção 2.2. A diferença está nos detalhes a serem levados em conta no procedimento devido às condições de contato abordadas neste caso.

ou ainda, considerando

$$\langle N_1 \rangle = \frac{\widehat{K}}{K_1} \left(\frac{c_1^2}{2} + c_1 c_2 \right) + \frac{\widehat{K}}{K_2} \left(\frac{c_2^2}{2} - c_1 c_2 \right) - \left(\frac{c_1^2 + c_2^2}{2} \right), \quad (4.45)$$

chega-se a:

$$N_2(y) = \begin{cases} \left(1 - \frac{\widehat{K}}{K_1} \right) \frac{y^2}{2} + \frac{\langle N_1 \rangle \widehat{K}}{K_1} y, & y \in (0, c_1) \\ \left(1 - \frac{\widehat{K}}{K_2} \right) \frac{(y-c_1)^2}{2} + \widehat{K} \left(\frac{\langle N_1 \rangle + c_1}{K_2} - \frac{c_1}{K_1} \right) (y - c_1) + c_1 \left(\frac{\widehat{K}(2\langle N_1 \rangle - c_1)}{2K_1} + \frac{c_1}{2} \right), & y \in (c_1, 1) \end{cases} \quad (4.46)$$

Dessa forma, o terceiro e último termo da SAF proposta será dado por

$$u_2(x, y) = \begin{cases} \frac{d^2 v_0}{dx^2} \left[\left(1 - \frac{\widehat{K}}{K_1} \right) \frac{y^2}{2} + \frac{\langle N_1 \rangle \widehat{K}}{K_1} y \right], & (x, y) \in \Omega_1 \times (0, c_1) \\ \frac{d^2 v_0}{dx^2} \left[\left(1 - \frac{\widehat{K}}{K_2} \right) \frac{(y-c_1)^2}{2} + \widehat{K} \left(\frac{\langle N_1 \rangle + c_1}{K_2} - \frac{c_1}{K_1} \right) (y - c_1) + E \right], & (x, y) \in \Omega_2 \times (c_1, 1) \end{cases}, \quad (4.47)$$

$$\text{com } E = c_1 \left(\frac{\widehat{K} (2\langle N_1 \rangle - c_1)}{2K_1} + \frac{c_1}{2} \right).$$

4.2.3 Relação de proximidade

O objetivo desta seção é o mesmo da homônima Seção 2.2.3: mostrar que a solução $v_0(x)$ do problema homogeneizado é ε -próxima da solução $u^\varepsilon(x)$ do problema original, de forma que a diferença entre estas diminua à medida que $\varepsilon \rightarrow 0^+$, o que justifica o uso do MHA.

Na Seção 2.2.3, a prova foi feita utilizando-se de um princípio de máximo (Teorema 2), o qual aplicava-se ao caso de uma solução do espaço $C([0, l])$. Neste caso, por tratar-se de coeficientes constantes por partes, irá se considerar o espaço $H^1([0, l])$, que é o espaço das funções de $L^2([0, l])$ cujas derivadas de primeira ordem também estão em $L^2([0, l])$.

Este espaço está sendo considerado, pois além de ser necessário para o princípio de máximo que será enunciado, ele abrange as funções continuamente diferenciáveis por partes, pois esta é uma classe de função integrável (logo, pertencem a $H^1([0, l]) \subset L^2([0, l])$). A norma utilizada será:

$$\|u\|_{H^1([0, l])} = \sqrt{\|u\|_{L^2([0, l])}^2 + \|u'\|_{L^2([0, l])}^2}, \quad (4.48)$$

que é a norma usual deste espaço.

A estimativa encontrada é que $\|u^\varepsilon - v_0\|_{H^1([0, l])} = O(\sqrt{\varepsilon})$. Para a demonstração, primeiro constrói-se um problema auxiliar, análogo ao da Seção 2.2.3 em (2.104):

$$\begin{cases} L^\varepsilon u^{(1)} = f(x) - F(x, \varepsilon), & x \in (0, l) / \Gamma^\varepsilon \\ u^{(1)}(0) = g_1, u^{(1)}(l) = g_2 \end{cases}, \quad (4.49)$$

onde $F(x, \varepsilon)$ é o erro de considerar a assintótica $u^{(1)}(x, \varepsilon) = v_0(x) + \varepsilon u_1(x, y)$ como solução do problema P_O em (4.3), que será representado novamente por um operador $L^\varepsilon(\cdot) = \frac{d}{dx} \left[K^\varepsilon(x) \frac{d(\cdot)}{dx} \right]$. Com o objetivo de determinar uma expressão para $F(x, \varepsilon)$ para estimar sua grandeza, através de (4.49) e de P_O em (4.3), obtém-se:

$$\begin{cases} L^\varepsilon(u^\varepsilon - u^{(1)}) = F(x, \varepsilon), x \in (0, l)/\Gamma^\varepsilon \\ (u^\varepsilon - u^{(1)})(0) = 0, (u^\varepsilon - u^{(1)})(l) = 0 \end{cases} \quad (4.50)$$

Para esta estimativa, será necessário o seguinte princípio de máximo:

Teorema 6. (BAKHVALOV; PANASENKO, 1989) *Seja o seguinte PVC:*

$$\begin{cases} -\frac{d}{dx} \left[a(x) \frac{du}{dx} \right] + b(x) \frac{du}{dx} + c(x)u = h(x), x \in (0, l)/\Gamma^\varepsilon \\ u(0) = 0, u(l) = 0 \end{cases}, \quad (4.51)$$

onde os coeficientes $a(x)$, $b(x)$ e $c(x)$ são continuamente diferenciáveis, e ainda $a(x) \geq a_0 > 0$ e $c(x) \geq 0$, para todo $x \in [0, l]/\Gamma^\varepsilon$.

Se $u \in H^1([0, l])$, então

$$\|u\|_{H^1([0, l])} \leq C^* \|Lu\|_{L^2([0, l])}, \quad (4.52)$$

onde a constante C^* depende apenas dos coeficientes em (4.51), mas não de u

De aplicar este princípio ao problema em (4.50), tem-se que:

$$\|u^\varepsilon - u^{(1)}\|_{H^1([0, l])} \leq C^* \|F(x, \varepsilon)\|_{L^2([0, l])}, \quad (4.53)$$

em que, como na Seção 2.2.3, $F(x, \varepsilon)$ é dado por (2.113), mudando apenas a forma específica das grandezas envolvidas (K^ε , N_1 e v_0):

$$F(x, \varepsilon) = -\varepsilon K(y) N_1(y) \frac{d^3 v_0}{dx^3}, \quad (4.54)$$

e, considerando a norma de $L^2([0, l])$, tem-se (conforme (2.114)):

$$\|F(x, \varepsilon)\|_{L^2([0, l])}^2 = \int_0^1 F^2 dx = \int_0^1 \varepsilon^2 \left[K\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) N_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right]^2 \left(\frac{d^3 v_0}{dx^3} \right)^2 dx. \quad (4.55)$$

Agora, se utilizará do Teorema de Weierstrass (Teorema 3) para assegurar a existência dos extremos em (4.55). Para $v_0(x)$, será considerado novamente que $v_0 \in C^3([0, l])$, e assim assegura-se a continuidade de $d^3 v_0/dx^3$ em $[0, l]$, logo, pelo

Teorema 3, existe constante A tal que

$$\left| \frac{d^3 v_0}{dx^3} \right| \leq A \quad (4.56)$$

em $[0, l]$.

Para o termo $K\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) N_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$, sendo $K^\varepsilon > 0$ constante por partes, tem-se que:

$$K^\varepsilon \leq \max\{K_1, K_2\}, \quad (4.57)$$

além disso, como N_1 é contínua em todo domínio, é aplicável novamente o Teorema 3, obtendo-se:

$$K\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) N_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \leq B. \quad (4.58)$$

Dessa forma, pode-se fazer a seguinte estimativa para $\|F(x, \varepsilon)\|_{L^2([0, l])}^2$ em (4.55):

$$\|F(x, \varepsilon)\|_{L^2([0, l])}^2 \leq \varepsilon^2 B^2 A^2 \int_0^{\frac{1}{\varepsilon}} 1 dx = \varepsilon B^2 A^2, \quad (4.59)$$

e assim será possível afirmar novamente que $\|F(x, \varepsilon)\|_{L^2([0, l])} = O(\sqrt{\varepsilon})$, e então:

$$\|u^\varepsilon - u^{(1)}\|_{H^1([0, l])} = O(\sqrt{\varepsilon}). \quad (4.60)$$

De forma análoga, se mostra que $\|u^{(1)} - v_0\|_{H^1([0, l])} = O(\sqrt{\varepsilon})$, e pela Desigualdade Triangular, chega-se a $\|u^\varepsilon - v_0\|_{H^1([0, l])} = O(\sqrt{\varepsilon})$, como queria-se demonstrar.

4.2.4 Determinação do fluxo efetivo

No compósito bifásico microperiódico estudado neste capítulo, o fluxo se dá na seguinte forma:

$$\sigma^\varepsilon \left(x, \frac{du^\varepsilon}{dx} \right) = \begin{cases} K_1 \frac{du^\varepsilon}{dx}, & x \in \Omega_1 \\ K_2 \frac{du^\varepsilon}{dx}, & x \in \Omega_2 \end{cases}. \quad (4.61)$$

No contexto do MHA, determinar o fluxo efetivo é encontrar a relação funcional entre os valores médios das grandezas tipo fluxo e tipo gradiente, isto é, entre $\bar{\sigma}$ e dv_0/dx . Para isto, basta utilizar-se do problema $P_L^{(1)}$ em (4.37), considerando o Lema 5, que garante a existência da sua solução 1-periódica em y .

Reescrevendo a equação de $P_L^{(1)}$ em (4.37), tem-se que:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[K(y) \left(\frac{dv_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \right] = 0, \quad (4.62)$$

do qual conclui-se que o fluxo não depende de y no ponto $\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{dv_0}{dx}$, em que v_0 e u_1

são soluções de (4.22) e (2.90), respectivamente. Dessa forma, pelo que está definido para o fluxo em (4.61), pode-se afirmar que:

$$\begin{cases} K_1 \left(\frac{dv_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) = \bar{\sigma}_1(x), & x \in \Omega_1 \\ K_2 \left(\frac{dv_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) = \bar{\sigma}_2(x), & x \in \Omega_2 \end{cases}. \quad (4.63)$$

Entretanto, da condição de contato do fluxo onde $\left[\left[K(y) \left(\frac{dv_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \right] \right]_{y=c_1} = 0$, conclui-se que $\bar{\sigma}_1(x) = \bar{\sigma}_2(x)$, os quais serão denotados por $\bar{\sigma}(x) \equiv \bar{\sigma}$. Assim, tem-se de forma geral que:

$$K(y) \left(\frac{dv_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) = \bar{\sigma}, \quad y \in (0, 1) / \{c_1\}. \quad (4.64)$$

Isolando $\partial u_1 / \partial y$ em (4.64) e aplicando operador média, chega-se a:

$$u_1|_{y=1} - u_1|_{y=c_1^+} + u_1|_{y=c_1^-} - u_1|_{y=0} = \bar{\sigma} \langle K^{-1} \rangle - \frac{dv_0}{dx}, \quad (4.65)$$

e levando-se em conta que $\llbracket u_1 \rrbracket_{y=c_1} = 0$ e que $u_1(x, y)$ é um 1-periódica em y , e das suas condições contorno nulas, o lado esquerdo da equação (4.65) se anula, e de isolar $\bar{\sigma}$ obtém-se que:

$$\bar{\sigma} = \langle K^{-1} \rangle^{-1} \frac{dv_0}{dx}, \quad (4.66)$$

que é o fluxo efetivo procurado. Ademais, sabendo que $\langle K^{-1} \rangle^{-1} = \widehat{K}$ (a propriedade macroscópica do material homogêneo equivalente), tem-se:

$$\widehat{K} = \left(\int_0^1 \frac{1}{K(y)} dy \right)^{-1} = \left(\int_0^{c_1^-} \frac{1}{K_1} dy + \int_{c_1^+}^1 \frac{1}{K_2} dy \right)^{-1} = \left(\frac{c_1}{K_1} + \frac{c_2}{K_2} \right)^{-1}. \quad (4.67)$$

com $c_2 = 1 - c_1$.

Usualmente, quando se tratar de fluxo efetivo, o gradiente macroscópico dv_0/dx será denotado por ϵ , e a relação funcional entre $\bar{\sigma}$ e dv_0/dx por $\widehat{\sigma}(\epsilon)$. Logo, tem-se, por fim:

$$\widehat{\sigma}(\epsilon) = \widehat{K} \epsilon. \quad (4.68)$$

com \widehat{K} como em (4.67).

4.2.5 Influência do contato imperfeito no comportamento efetivo

Nesta subseção, o problema P_O em (4.3), é generalizado para incluir o caso de soluções $u^\epsilon(x)$ descontínuas nas interfaces do meio. Especificamente, considera-se que o salto de $u^\epsilon(x)$, ao atravessar cada ponto x_j de interface, é proporcional ao fluxo

em $x_j \in \Gamma^\varepsilon$, isto é, a condição $[[u^\varepsilon]]_{x=x_j} = 0$ de (4.3) é substituída por:

$$[[u^\varepsilon(x)]]_{x=x_j} = \frac{1}{\beta^\varepsilon} \left(K_1 \frac{du^\varepsilon}{dx} \right) \Big|_{x=x_j^-}, \quad (4.69)$$

A grandeza $\beta^\varepsilon > 0$ pode ser interpretada como a condutância da interface, de forma que $1/\beta$ representará assim a resistência. Como nesta seção o problema está sendo estudado em dupla escala, será considerada uma resistência na ordem do parâmetro da microescala, isto é, $1/\beta^\varepsilon = O(\varepsilon)$, ou mais exatamente: $\beta^\varepsilon = \beta/\varepsilon$.

Desta forma, o PVC que modela o fenômeno difusivo unidimensional e estacionário, em um compósito bifásico com contato imperfeito entre suas fases, será:

$$P_O : \begin{cases} \frac{d}{dx} \left[K^\varepsilon(x) \frac{du^\varepsilon}{dx} \right] = f(x), & x \in (0, l) / \Gamma^\varepsilon \\ K^\varepsilon(x) = \begin{cases} K_1, & x \in \Omega_1 \\ K_2, & x \in \Omega_2 \end{cases} \\ \left[\left[K^\varepsilon(x) \frac{du^\varepsilon}{dx} \right] \right]_{x \in \Gamma^\varepsilon} = 0 \\ [[u^\varepsilon(x)]]_{x \in \Gamma^\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\beta} \left(K_1 \frac{du^\varepsilon}{dx} \right) \Big|_{x=x_j^-} \\ u^\varepsilon|_{x=0} = g_1 \\ u^\varepsilon|_{x=l} = g_2 \end{cases} \quad (4.70)$$

Como a única diferença entre os problemas em (4.3) e (4.70) está na condição de contato para $u^\varepsilon(x)$, o desenvolvimento do MHA se dará da mesma forma para a equação, a condição de contato do fluxo e condições de contorno. Agora, aplicando a SAF $u^{(2)}(x, \varepsilon)$ que vem sendo proposta na condição para u^ε , tem-se:

$$[[u^\varepsilon]]_{x \in \Gamma^\varepsilon} \approx [[u^{(2)}]]_{y=c_1} = [[v_0]]_{y=c_1} + \varepsilon [[u_1]]_{y=c_1} + \varepsilon^2 [[u_2]]_{y=c_1} = \frac{\varepsilon}{\beta} \left(K_1 \frac{du^{(2)}}{dx} \right) \Big|_{y=c_1^-}. \quad (4.71)$$

Da regra da cadeia para $du^{(2)}/dx$ tem-se que:

$$\frac{du^{(2)}}{dx} = \varepsilon^0 \left(\frac{dv_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) + \varepsilon \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) + \varepsilon^2 \frac{\partial u_2}{\partial x}, \quad (4.72)$$

logo, para condição de contato obtém-se que:

$$\frac{\varepsilon}{\beta} \left(K_1 \frac{du^{(2)}}{dx} \right) \Big|_{y=c_1^-} = \frac{\varepsilon}{\beta} K_1 \left(\frac{dv_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \Big|_{y=c_1^-} + \frac{\varepsilon^2}{\beta} K_1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) \Big|_{y=c_1^-} + O(\varepsilon^3). \quad (4.73)$$

Retornando à (4.71), de $v_0(x)$ ser contínua, tem-se diretamente que $[[v_0]]_{y=c_1} = 0$. E, de substituir (4.73) em (4.71), e organizar o resultado por potências de ε , conclui-se

que:

$$\llbracket u_1 \rrbracket_{y=c_1} = \frac{1}{\beta} K_1 \left(\frac{dv_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \Big|_{y=c_1^-}, \quad (4.74)$$

$$\llbracket u_2 \rrbracket_{y=c_1} = \frac{1}{\beta} K_1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) \Big|_{y=c_1^-}. \quad (4.75)$$

Retomando o desenvolvimento do método como na seção anterior, o próximo passo é construir os problemas análogos à (4.22) e (4.23), cujas soluções 1-periódicas em y são os termos u_1 e u_2 da SAF proposta, respectivamente. Assim, considerando (4.74) e (4.75) nos problemas (4.22) e (4.23), chega-se a:

$$\begin{cases} L_{yy}u_1 = -L_{yy}v_0, & y \in (0, 1) / \{c_1\} \\ \left[\left[K(y) \left(\frac{dv_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \right] \right]_{y=c_1} = 0 \\ \llbracket u_1 \rrbracket_{y=c_1} = \frac{1}{\beta} K_1 \left(\frac{dv_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \Big|_{y=c_1^-} \\ u_1(0, 0) = u_1(l, 0) = 0 \end{cases} \quad (4.76)$$

e

$$\begin{cases} L_{yy}u_2 = -L_{xy}u_1 - L_{yx}u_1 - L_{xx}v_0 + f(x), & y \in (0, 1) / \{c_1\} \\ \left[\left[K(y) \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) \right] \right]_{y=c_1} = 0 \\ \llbracket u_2 \rrbracket_{y=c_1} = \frac{1}{\beta} K_1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) \Big|_{y=c_1^-} \\ u_2(0, 0) = u_2(l, 0) = 0 \end{cases} \quad (4.77)$$

Tomando x como um parâmetro, os problemas com derivadas parciais em (4.76) e (4.77) tornam-se ordinários (em relação à y), e assumem a seguinte forma:

$$\begin{cases} \frac{d}{dy} \left[K(y) \frac{dN}{dy} \right] = F_0(y) + \frac{dF_1}{dy}, & y \in (0, 1) / \{c_1\} \\ \left[\left[K(y) \frac{dN}{dy} - F_1(y) \right] \right]_{y=c_1} = 0 \\ \llbracket N \rrbracket_{y=c_1} = \frac{1}{\beta} \left(K(y) \frac{dN}{dy} - F_1(y) \right) \Big|_{y=c_1}, & \beta > 0 \\ N(0) = 0 \end{cases} \quad (4.78)$$

Nesta seção o objetivo é determinar o fluxo efetivo do problema proposto, e como ficou claro na seção anterior, não há necessidade de se obter a expressão para a solução u_1 , mas apenas garantir que esta exista e seja 1-periódica em y . Sendo assim, o formato dos termos u_1 e u_2 da SAF e outras resoluções referente a aproximar assintoticamente a solução exata do problema original neste caso de contato imperfeito estarão no Apêndice A.

Ademais, o Lema a seguir, que garantirá a existência e unicidade das soluções 1-periódicas em y de (4.76) e (4.77), é uma generalização feita neste trabalho do Lema 5, para a condição de contato imperfeito para a solução.

Lema 7. *Sejam $F_0(y)$, $F_1(y)$ e $K(y)$ funções 1-periódicas, continuamente diferenciáveis em $[0, 1]/\{c_1\}$, limitadas, e ainda $K(y) > 0$. Então, uma condição necessária e suficiente para que exista uma solução $N(y)$ 1-periódica do problema em (4.78) é que $\langle F_0 \rangle = 0$.*

Além disso, $N(y)$ é única a não ser por uma constante aditiva, ou seja, $N(y) = \tilde{N}(y) + C$, onde \tilde{N} é uma solução 1-periódica de (4.24) tal que $\tilde{N}(0) = 0$, e C é uma constante arbitrária.

A demonstração será análoga ao Lema 5, sendo diferente apenas nas integrações que envolvem a solução $N(y)$, por conta da condição de contato imperfeito.

Demonstração. (Necessidade) Primeiramente parte-se da hipótese de que existe solução $N(y)$ 1-periódica do problema (4.78), e aplicando o operador média na equação deste, observando o ponto de descontinuidade em $y = c_1$, chega-se a:

$$\left(K(y) \frac{dN}{dy} - F_1(y) \right) \Big|_{y=0}^{y=c_1^-} + \left(K(y) \frac{dN}{dy} - F_1(y) \right) \Big|_{y=c_1^+}^{y=1} = \langle F_0 \rangle. \quad (4.79)$$

Como tem-se que $\left[K(y) \frac{dN}{dy} - F_1(y) \right]_{y=c_1} = 0$, (4.79) se torna:

$$\left(K(1) \frac{dN}{dy}(1) - F_1(1) \right) - \left(K(0) \frac{dN}{dy}(0) - F_1(0) \right) = \langle F_0 \rangle, \quad (4.80)$$

e da 1-periodicidade de $K(y)$, $N(y)$ (e consequentemente da sua derivada) e de $F_1(y)$, conclui-se que $\langle F_0 \rangle = 0$.

(Suficiência) Parte-se agora da hipótese de que $\langle F_0 \rangle = 0$. Assim sendo, integrando a equação do problema, considerando $y \in (c_1, 1)$ ⁴, tem-se:

$$\left(K(t) \frac{dN}{dt} - F_1(t) \right) \Big|_{t=0}^{t=c_1^-} + \left(K(t) \frac{dN}{dt} - F_1(t) \right) \Big|_{t=c_1^+}^{t=y} = \int_0^y F_0(t) dt, \quad (4.81)$$

e, pela condição $\left[K(y) \frac{dN}{dy} - F_1(y) \right]_{y=c_1} = 0$, de (4.81) resulta:

$$K(y) \frac{dN}{dy} - F_1(y) = \int_0^y F_0(t) dt + C_1, \quad (4.82)$$

⁴Já que para $y \in (0, c_1)$ tem-se continuidade em todo intervalo, o qual foi tratado nos capítulos anteriores.

em que $C_1 = \left(K(y) \frac{dN}{dy} - F_1(y) \right) \Big|_{y=0^+}$. Isolando a derivada de $N(y)$ em (4.82), segue que:

$$\frac{dN}{dy} = \frac{1}{K(y)} \left[\int_0^y F_0(t) dt + C_1 + F_1(y) \right]. \quad (4.83)$$

Agora, integrando (4.83), chega-se a:

$$N(y) - N(c_1^+) + N(c_1^-) - N(0) = \int_0^y \frac{1}{K(s)} \left[\int_0^s F_0(t) dt + C_1 + F_1(s) \right] ds, \quad (4.84)$$

e da condições de que $[[N]]_{y=c_1} = \frac{1}{\beta} \left(K(y) \frac{dN}{dy} - F_1(y) \right) \Big|_{y=c_1}$ e $N(0) = 0$, obtém-se que:

$$N(y) = \int_0^y \frac{1}{K(s)} \left[\int_0^s F_0(t) dt + C_1 + F_1(s) \right] ds + \frac{1}{\beta} \left(K(y) \frac{dN}{dy} - F_1(y) \right) \Big|_{y=c_1} \quad (4.85)$$

Na condição de contato perfeito, o caso em que $y \in [0, c_1)$ equivalia ao caso contínuo, e mostrou-se que o formato de $N(y)$ não mudava quando $y \in (c_1, 1]$. Já na condição de contato imperfeito, a situação é diferente, e tem-se que:

$$N(y) = \begin{cases} \int_0^y \frac{1}{K(s)} \left[\int_0^s F_0(t) dt + C_1 + F_1(s) \right] ds, & y \in [0, c_1) \\ N(c_1^-) + \frac{1}{2\beta} \left(K(y) \frac{dN}{dy} - F_1(y) \right) \Big|_{y=c_1}, & y = c_1 \\ \int_0^y \frac{1}{K(s)} \left[\int_0^s F_0(t) dt + C_1 + F_1(s) \right] ds + \frac{1}{\beta} \left(K(y) \frac{dN}{dy} - F_1(y) \right) \Big|_{y=c_1}, & y \in (c_1, 1) \\ 0, & y = 1 \end{cases} \quad (4.86)$$

E, como $K(y)$, $F_0(y)$ e $F_1(y)$ foram declaradas como contínuas e limitadas em $[0, 1] \setminus \{c_1\}$, é garantida a existência das integrais em (4.86). Já a escolha da definição de $N(y)$ no ponto $y = c_1$ foi motivada pelo Teorema de Dirichlet para uma Série de Fourier, o qual segue:

Teorema 8. (DEMIDOVITCH et al., 1987) *Uma função $f(x)$ satisfaz às condições de Dirichlet em um intervalo (a, b) , se neste:*

1. $|f(x)| \leq M$ para $x \in (a, b)$, onde M é uma constante;
2. não tem mais que um número finito de descontinuidades e todos de 1ª espécie (ou seja, em cada ponto de descontinuidade $f(x)$ apresenta limites laterais finitos);
3. não tem mais que um número finito de pontos de extremo estrito.

e, então, satisfazendo todas estas condições, a função $f(x)$ pode ser escrita como

uma *Série Trigonométrica de Fourier*⁵ para todos valores de x onde é contínua, e nos pontos x_i de descontinuidade, a *Série de Fourier* será igual a média aritmética dos limites laterais, ou seja,

$$f(x) = \frac{1}{2} [f(x_i^+) + f(x_i^-)]. \quad (4.87)$$

Agora, necessita-se provar a 1-periodicidade de $N(y)$, o que será feito analisando-se separadamente quando $y \in (0, c_1)$ e $y \in (c_1, 1)$ (já será considerado que, pelo fato de $\langle F_0 \rangle = 0$, $G(y) = \int_0^y F_0(t)dt$ é 1-periódico). Para as seguintes demonstrações, o integrando de (4.86) será denotado por $H(s)$, ou seja

$$H(s) = \frac{1}{K(s)} \left[\int_0^s F_0(t)dt + C_1 + F_1(s) \right], \quad (4.88)$$

para tornar as equações envolvidas mais claras.

Sendo assim, pode-se escrever para $N(y)$ quando $y \in (0, c_1)$, considerando que $Q = \frac{1}{\beta} \left(K(y) \frac{dN}{dy} - F_1(y) \right) \Big|_{y=c_1}$:

$$\begin{aligned} N(y+1) - N(y) &= \int_0^{c_1^-} H(s) ds + \int_{c_1^+}^{1^-} H(s) ds - Q + \int_{1^+}^{y+1} H(s) ds - \int_0^y H(s) ds \\ &= \int_y^{c_1^-} H(s) ds + \int_{c_1^+}^{1^-} H(s) ds + \int_{1^+}^{y+1} H(s) ds - Q \\ &= \langle H \rangle - Q, \end{aligned} \quad (4.89)$$

e quando $y \in (c_1, 1)$:

$$\begin{aligned} N(y+1) - N(y) &= \int_0^{c_1^-} H(s) ds + \int_{c_1^+}^{1^-} H(s) ds - Q + \int_{1^+}^{(c_1+1)^-} H(s) ds + \\ &+ \int_{(c_1+1)^+}^{y+1} H(s) ds - Q - \left(\int_0^{c_1^-} H(s) ds + \int_{c_1^+}^y H(s) ds - Q \right) \\ &= \int_y^{1^-} H(s) ds + \int_{1^+}^{(c_1+1)^-} H(s) ds + \int_{(c_1+1)^+}^{y+1} H(s) ds - Q \\ &= \langle H \rangle - Q. \end{aligned} \quad (4.90)$$

E de ambos os casos, chega-se que

$$C_1 \langle K^{-1} \rangle + \left\langle \frac{1}{K(y)} \left[\int_0^y F_0(t)dt + F_1(y) \right] \right\rangle - Q = 0, \quad (4.91)$$

⁵Mais detalhes, na bibliografia indicada no teorema.

de onde conclui-se:

$$C_1 = -\langle K^{-1} \rangle \left(\left\langle \frac{1}{K(y)} \left[\int_0^y F_0(t) dt + F_1(y) \right] \right\rangle - \frac{1}{\beta} \left(K(y) \frac{dN}{dy} - F_1(y) \right) \Big|_{y=c_1} \right) \quad (4.92)$$

garante a 1-periodicidade da solução do problema. \square

Observando o problema em (4.76), tem-se $F_0(y) = 0$ e $F_1(y) = -K(y) \frac{dv_0}{dx}$, logo, a condição do Lema 7 está satisfeita. A partir de agora, pode-se determinar o fluxo efetivo a partir do problema em (4.76), como foi feito para o caso do contato perfeito na seção.

Primeiramente, da equação do problema em (4.76) conclui-se que o fluxo não depende de y no ponto $\frac{dv_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y}$, e ainda, pela condição de contato do fluxo, $\left[\left[K(y) \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{dv_0}{dx} \right) \right] \right]_{y=c_1} = 0$, conclui-se que:

$$K(y) \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{dv_0}{dx} \right) = \bar{\sigma}, \quad y \in (0, 1)/c_1, \quad (4.93)$$

e de isolar $\partial u_1 / \partial y$ e aplicar o operador média em (4.93), chega-se a:

$$u_1|_{y=1} - u_1|_{y=c_1^+} + u_1|_{y=c_1^-} - u_1|_{y=0} = \bar{\sigma} \langle K^{-1} \rangle - \frac{dv_0}{dx}. \quad (4.94)$$

Considerando agora que $\llbracket u_1 \rrbracket_{y=c_1} = \frac{\bar{\sigma}}{\beta}$ e u_1 1-periódica em y , (4.94) transforma-se em:

$$-\frac{\bar{\sigma}}{\beta} = \bar{\sigma} \langle K^{-1} \rangle - \frac{dv_0}{dx}. \quad (4.95)$$

E para encontrar a expressão para o fluxo efetivo, isolando-se $\bar{\sigma}$ na equação (4.95), e lembrando que $\langle K^{-1} \rangle = \frac{c_1}{K_1} + \frac{c_2}{K_2}$, obtém-se:

$$\bar{\sigma} = \left(\frac{c_1}{K_1} + \frac{c_2}{K_2} + \frac{1}{\beta} \right)^{-1} \frac{dv_0}{dx}, \quad (4.96)$$

ou ainda:

$$\hat{\sigma}(\bar{\epsilon}) = \hat{K} \bar{\epsilon}, \quad (4.97)$$

com

$$\hat{K} = \left(\frac{c_1}{K_1} + \frac{c_2}{K_2} + \frac{1}{\beta} \right)^{-1}, \quad (4.98)$$

o coeficiente efetivo para o caso de contato imperfeito aqui abordado.

É interessante observar que, se for tomado $\beta \rightarrow \infty$ em (4.98), a expressão para

$\hat{\sigma}(\epsilon)$ converge para a que foi encontrada na situação de contato perfeito em (4.68), o que é esperado, já que tal situação representa uma condutância infinita na interface, ou então, uma resistência que tende a 0, cuja situação limite é o contato perfeito.

Outro aspecto importante do resultado obtido em (4.98), é o que acontece quando $\beta \rightarrow 0^+$. Neste caso, pelo expoente negativo de \hat{K} , tem-se que a propriedade efetiva tende a 0 (assim como o fluxo efetivo $\hat{\sigma}(\epsilon)$). Fisicamente, $\beta \rightarrow 0^+$ representa uma resistência infinita na interface, o que pode sugerir um bloqueio total ao fluxo que ocorre neste meio, por isso teria-se $\hat{\sigma}(\epsilon) \rightarrow 0$.

4.2.6 Análise dos resultados

Aqui, os resultados obtidos para o fluxo efetivo serão analisados da seguinte maneira: em (4.68), sob condição de contato perfeito, comparando-se o comportamento efetivo de um compósito hipotético com o dos seus materiais constituintes; e em (4.97), sob condição de contato imperfeito, comparando com o comportamento do mesmo compósito porém, sem resistência na interface.

O compósito bifásico a ser usado nos exemplos terá as seguintes características:

$$\sigma^\epsilon = \begin{cases} 127\epsilon, & x \in \Omega_1 \\ 70\epsilon, & x \in \Omega_2 \end{cases} \quad (4.99)$$

sendo estes valores de K_1 e K_2 os módulos de elasticidade do Cobre e do Alumínio, respectivamente, extraídos de GARCIA; SPIM; SANTOS (2013).

Na Figura 13, estão os resultados para o comportamento efetivo sob condição de contato perfeito diante de diferentes concentrações dos dois materiais constituintes (ou fases, através da variação de c_1 , lembrando que $c_2 = 1 - c_1$), além do comportamento de cada material individual (σ_1 e σ_2):

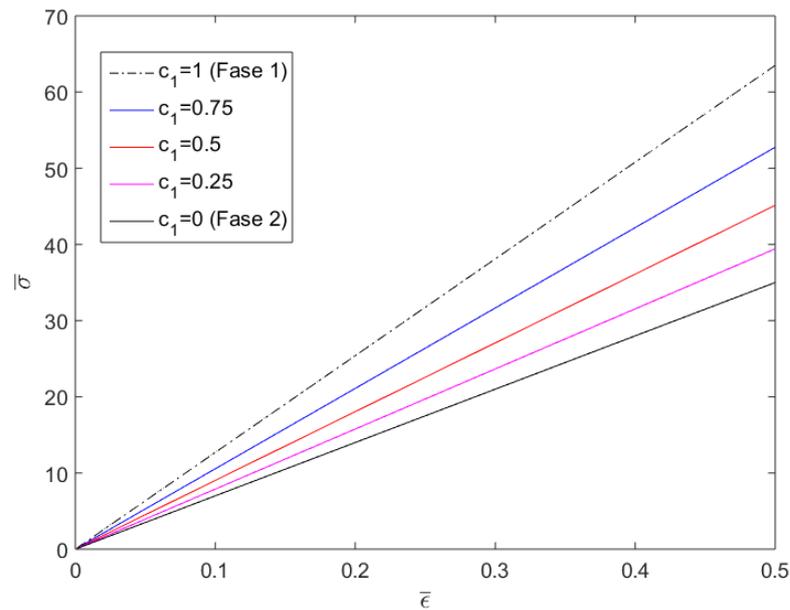


Figura 13: Avaliação do fluxo efetivo de um compósito bifásico linear sob condição de contato perfeito, para diferentes concentrações dos materiais constituintes.

Percebe-se que para as concentrações avaliadas, o fluxo efetivo converge para o fluxo da fase correspondente quando a concentração desta tende a 1, além disso, está limitado pelos fluxos das fases constituintes.

Agora, para a condição de contato imperfeito, utilizando como exemplo a concentração $c_1 = 0.25$, obteve-se os resultados que estão ilustrados na Figura 14.

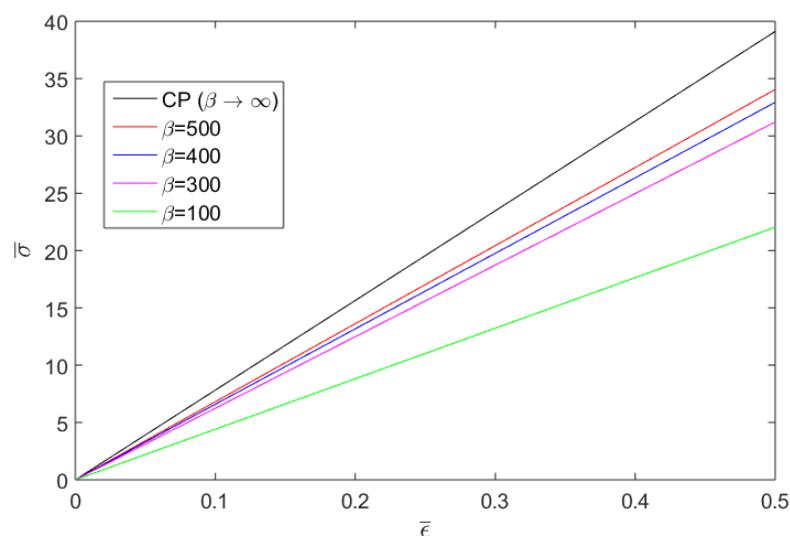


Figura 14: Avaliação do fluxo efetivo de um compósito bifásico linear sob condição de contato imperfeito, para diferentes valores do parâmetro β , em comparação ao caso de contato perfeito.

Estes resultados foram obtidos variando-se o valor do parâmetro β de forma a se ter os comportamentos mais variados e também visualizáveis em gráfico, através de experimentos numéricos, visto que para determinadas variações deste parâmetro, a diferença entre as curvas geradas eram imperceptíveis.

Na Figura 14 são observados dois comportamentos do fluxo efetivo na Figura 14. Um deles, a sua convergência para o fluxo efetivo sob condição de contato perfeito, quando $\beta \rightarrow \infty$, observado pela aproximação das curvas na Figura 14 a medida que cresce o valor de β , da curva que representa o fluxo efetivo para a situação de contato perfeito.

O outro, é o fato de que quanto maior a resistência nesta interface (isto é, menores valores de β), o material apresenta valores maiores de ϵ para uma mesmo valor de fluxo efetivo σ , o que é provocado pela diminuição do ângulo de inclinação das curvas na Figura 14, conforme diminui-se os valores de β . Este comportamento é interessante pois, pensando no contexto mecânico, significa que quanto maior a flexibilidade da interface, mais deformação o compósito suporta para uma mesma tensão aplicada. Esta ideia é ilustrada na Figura 15 a seguir, para $\bar{\sigma} = 4$:

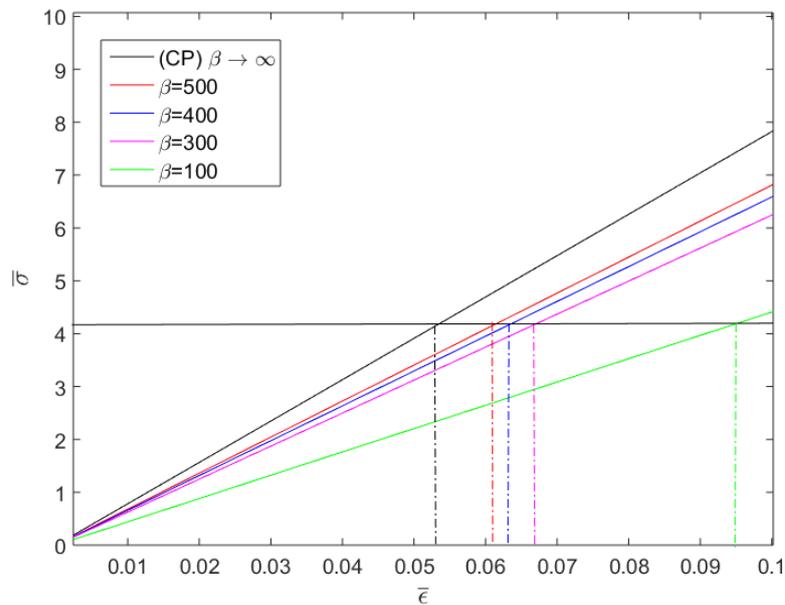


Figura 15: Análise mais detalhada da influência do parâmetro β no fluxo efetivo de um compósito bifásico linear sob condição de contato imperfeito.

Ambos comportamentos já eram esperados, a partir do que foi discutido ao final da subseção 4.2.5 sobre (4.97).

4.3 Homogeneização da equação de difusão estacionária, não linear, com fluxo continuamente diferenciável por partes

4.3.1 Caracterização do Problema e construção da SAF

Considere o seguinte problema para uma equação de difusão estacionária, com fluxo não linear σ^ε , análogo ao problema proposto em (3.1) no Capítulo 3:

$$P_O : \begin{cases} \frac{d}{dx} \left[\sigma \left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{du^\varepsilon}{dx} \right) \right] = f(x), & x \in (0, l) / \Gamma^\varepsilon \\ \sigma \left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{du^\varepsilon}{dx} \right) = \begin{cases} \sigma_1^\varepsilon \left(\frac{du^\varepsilon}{dx} \right), & x \in \Omega_1 \\ \sigma_2^\varepsilon \left(\frac{du^\varepsilon}{dx} \right), & x \in \Omega_2 \end{cases} \\ \left[\left[\sigma \left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{du^\varepsilon}{dx} \right) \right] \right]_{x \in \Gamma^\varepsilon} = 0 \\ \llbracket u^\varepsilon(x) \rrbracket_{x \in \Gamma^\varepsilon} = 0 \\ u^\varepsilon|_{x=0} = g_1 \\ u^\varepsilon|_{x=l} = g_2 \end{cases}, \quad (4.100)$$

Este problema descreve um fenômeno difusivo, unidimensional e estacionário, em um domínio $(0, l)$ que pode representar um material compósito bifásico, onde o fluxo σ^ε é continuamente diferenciável por partes e a fonte, $f(x)$, contínua em $[0, l]$.

Seguindo a metodologia apresentada no Capítulo 3, considerando $u^{(2)}(x, \varepsilon)$ como em (2.29), levando-se em conta a regra da cadeia para $du^{(2)}/dx$ em (2.30), o fluxo será linearizado no ponto $\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y}$, obtendo (3.5). E de substituir (3.5) no problema P_O em (4.100), obtém-se que $u_0(x, y) = v_0(x)$, e chega-se às equações (3.15) e (3.16) para ε^{-1} e ε^0 , respectivamente. Também analogamente ao Capítulo 3, de substituir $u^{(2)}(x, \varepsilon)$ nas condições de contorno de P_O em (4.100), obtém-se as condições de contorno para $v_0(x)$, $u_1(x, y)$ e $u_2(x, y)$, que são (2.49), (2.50) e (2.51), respectivamente.

A diferença para o problema considerado no Capítulo 3 são as condições de contato, logo, serão considerados a SAF $u^{(2)}(x, \varepsilon)$ em (2.29) e o fluxo linearizado em (3.5) para obter-se novas condições de contorno e assim formular os problemas para encontrar os termos da assintótica $u^{(2)}(x, \varepsilon)$.

Para o fluxo, tem-se:

$$\begin{aligned} \llbracket \sigma(y, \varepsilon) \rrbracket_{y=c_1} &= \left[\left[\sigma \left(y, \frac{dv_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \right] \right]_{y=c_1} + \\ &+ \varepsilon \left[\left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \left(y, \frac{dv_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \right] \right]_{y=c_1} + O(\varepsilon^2), \end{aligned} \quad (4.101)$$

de onde, para que o salto do fluxo nas interfaces seja assintoticamente nulo, chega-se

às condições:

$$\left[\left[\sigma \left(y, \frac{dv_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \right] \right]_{y=c_1} = 0, \quad (4.102)$$

$$\left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) \frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \left(y, \frac{dv_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \right]_{y=c_1} = 0. \quad (4.103)$$

E, de forma análoga à Seção 4.2.2, com as condições de contato para u^ϵ , chega-se às condições (4.20) e (4.21), para $u_1(x, y)$ e $u_2(x, y)$ respectivamente.

Tomando agora v_0 como um parâmetro, formula-se a partir de (3.15), (4.102), (4.20) e (2.50) a seguinte família uniparamétrica de problemas:

$$P_L^{\frac{dv_0}{dx}} : \begin{cases} \frac{\partial \sigma}{\partial y} \left(y, \frac{dv_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) = 0, \quad y \in (0, 1) \setminus \{c_1\} \\ \left[\left[\sigma \left(y, \frac{dv_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \right] \right]_{y=c_1} = 0 \\ \llbracket u_1 \rrbracket_{y=c_1} = 0 \\ u_1(0, 0) = u_1(l, 0) = 0 \end{cases}, \quad (4.104)$$

cuja solução fornece o termo $u_1(x, y)$ 1-periódico em y de $u^{(2)}(x, \epsilon)$. A existência e unicidade da solução 1-periódica deste problema é dado por um lema, que generaliza o Lema 4, a saber:

Lema 9. (BAKHVALOV; PANASENKO, 1989) *Seja $\bar{\kappa}$ um parâmetro e $\sigma(y, \kappa)$ continuamente diferenciável em $[0, 1] \setminus \{c_1\}$. Então, existem funções $\mathcal{N}_1(y, \bar{\kappa})$ 1-periódicas em y que são solução da família uniparamétrica de problemas $P_L^{\bar{\kappa}}$ com parâmetro $\bar{\kappa}$, definida por:*

$$P_L^{\bar{\kappa}} : \begin{cases} \frac{\partial \sigma}{\partial y} \left(y, \bar{\kappa} + \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial y} \right) = 0, \quad y \in (0, 1) \setminus \{c_1\} \\ \left[\left[\sigma \left(y, \bar{\kappa} + \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial y} \right) \right] \right]_{y=c_1} = 0 \\ \llbracket \mathcal{N}_1 \rrbracket_{y=c_1} = 0 \\ \mathcal{N}_1(0, \bar{\kappa}) = 0 \end{cases}. \quad (4.105)$$

A condição $\mathcal{N}_1(0, \bar{\kappa}) = 0$ garante a unicidade da solução, para cada $\bar{\kappa}$.

Demonstração. Tomando $\kappa = \bar{\kappa} + \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial y}$, integra-se a equação do problema em relação a y , obtendo-se, primeiramente para $y \in [0, c_1]$:

$$\sigma(y, \kappa) = \bar{\sigma}_1(x). \quad (4.106)$$

Agora, para $y \in (c_1, 1]$:

$$\int_0^{c_1^-} \frac{\partial \sigma}{\partial s} \left(s, \bar{\kappa} + \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial s} \right) ds + \int_{c_1^+}^y \frac{\partial \sigma}{\partial s} \left(s, \bar{\kappa} + \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial s} \right) ds = \bar{\sigma}_2(x), \quad (4.107)$$

do qual segue que:

$$\sigma(y, \kappa) - \sigma(0, \kappa) - \llbracket \sigma(y, \kappa) \rrbracket_{y=c_1} = \bar{\sigma}_2(x). \quad (4.108)$$

Pela condição de contato do fluxo em (4.142), chega-se a:

$$\sigma(y, \kappa) = \bar{\sigma}_2(x) + \sigma(0, \kappa). \quad (4.109)$$

E também que, em $\kappa = \bar{\kappa} + \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial y}$, tem-se: $\bar{\sigma}_1(x) = \bar{\sigma}_2(x) + -\sigma(0, \kappa) \equiv \bar{\sigma}$. Logo,

$$\sigma\left(y, \bar{\kappa} + \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial y}\right) = \bar{\sigma}. \quad (4.110)$$

Define-se agora uma função $T(y, \kappa)$ como

$$T(y, \kappa) = \sigma(y, \kappa) - \bar{\sigma}(\bar{\kappa}), \quad (4.111)$$

e observa-se que

$$\frac{\partial T}{\partial \kappa} = \frac{\partial \sigma}{\partial \kappa}, \quad (4.112)$$

e, como foi assumido anteriormente (na demonstração do Lema 4), $\frac{\partial \sigma}{\partial \kappa} > 0$, e assim tem-se que $\frac{\partial T}{\partial \kappa} \neq 0$. Assim, pelo teorema da função implícita (ILYIN; POZNYAK, 1982), existe uma função $\kappa(y, \bar{\sigma})$, contínua e diferenciável na vizinhança de um ponto $(y, \bar{\sigma})$, 1-periódica em y , inversa de $T(y, \kappa)$ em relação a κ , tal que

$$\kappa(y, \bar{\sigma}) = \bar{\kappa} + \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial y}. \quad (4.113)$$

E de isolar $\partial \mathcal{N}_1 / \partial y$ em (4.113), e depois integrar em relação a y , obtém-se para $y \in [0, c_1)$ (3.24), devido à continuidade neste intervalo.

Para o caso em que $y \in (c_1, 1]$, de integrar (4.113), tem-se:

$$\int_0^{c_1^-} \frac{d\mathcal{N}_1}{ds} ds + \int_{c_1^+}^y \frac{d\mathcal{N}_1}{ds} ds = \int_0^y (\kappa(s, \bar{\sigma}) - \bar{\kappa}) ds, \quad (4.114)$$

do qual segue que:

$$\mathcal{N}_1(y, \bar{\kappa}) - \llbracket \mathcal{N}_1 \rrbracket_{y=c_1} - \mathcal{N}_1(0, \bar{\kappa}) = \int_0^y (\kappa(s, \bar{\sigma}) - \bar{\kappa}) ds. \quad (4.115)$$

Agora, das condições de contato $\llbracket \mathcal{N}_1 \rrbracket_{y=c_1} = 0$ e unicidade $\mathcal{N}_1(0, \bar{\kappa}) = 0$, de (4.115)

chega-se a:

$$\mathcal{N}_1(y, \bar{\kappa}) = \int_0^y (\kappa(s, \bar{\sigma}) - \bar{\kappa}) ds, \quad (4.116)$$

ou seja, o mesmo resultado que em (3.24).

Para 1-periodicidade em y de $\mathcal{N}_1(y, \bar{\kappa})$, deve-se ter $\mathcal{N}_1(y+1, \bar{\kappa}) - \mathcal{N}_1(y, \bar{\kappa}) = 0$. Para $y \in [0, c_1)$ tal condição é naturalmente satisfeita, já que chega-se a:

$$\mathcal{N}_1(y+1, \bar{\kappa}) - \mathcal{N}_1(y, \bar{\kappa}) = \langle \epsilon \rangle - \bar{\epsilon} \quad (4.117)$$

E lembrando que $\kappa = \bar{\kappa} + \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial y}$, de aplicar o operador média nesta igualdade, levando em conta a condição de contato $[[\mathcal{N}_1]]_{y=c_1} = 0$, a condição para 1-periodicidade estará naturalmente satisfeita. Tal discussão consta com mais detalhes na prova do Lema 4 na Seção 4.3.1.

Agora, para $y \in (c_1, 1]$, tem-se novamente (4.117), porém tal condição deve ser avaliada com mais detalhes devido ao ponto de interface em $y = c_1$. Assim sendo, precisa-se que $\langle \kappa \rangle = \bar{\kappa}$, mas lembrando que $\kappa = \bar{\kappa} + \frac{d\mathcal{N}_1}{dy}$, tem-se:

$$\left\langle \bar{\kappa} + \frac{d\mathcal{N}_1}{dy} \right\rangle = \bar{\kappa} + \int_0^{c_1^-} \frac{d\mathcal{N}_1}{ds} ds + \int_{c_1^+}^1 \frac{d\mathcal{N}_1}{ds} ds = \bar{\kappa} + \mathcal{N}_1(1, \bar{\kappa}) - [[\mathcal{N}_1]]_{y=c_1} - \mathcal{N}_1(0, \bar{\kappa}) = \bar{\kappa}. \quad (4.118)$$

Logo, a 1-periodicidade está garantida para a solução $\mathcal{N}_1(y, \bar{\kappa})$ da família uniparamétrica de problemas $P_L^{\bar{\epsilon}}$. \square

E assim, é garantida a existência e unicidade das soluções dos problemas locais $P_L^{\frac{dv_0}{dx}}$ em (4.142), considerando $\bar{\kappa} = dv_0/dx$ e $u_1(x, y) = \mathcal{N}_1(y, \bar{\kappa})$. Sendo assim, obtém-se:

$$u_1(x, y) = \int_0^y \left(\epsilon(s, \bar{\sigma}) - \frac{dv_0}{dx} \right) ds, \quad (4.119)$$

onde $\epsilon(y, \bar{\sigma}) = \frac{dv_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y}$, a inversa de $T(y, \epsilon, \bar{\sigma})$ em relação a ϵ (cuja existência é garantida pelo teorema da função implícita (ILYIN; POZNYAK, 1982)).

Para o termo $u_2(x, y)$ da de $u^{(2)}(x, \epsilon)$, o problema correspondente é formado por (3.16), (4.103), (4.21) e (2.51), obtendo-se:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \left(y, \frac{dv_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \frac{\partial u_2}{\partial y} \right] = f(x) - \frac{\partial \sigma}{\partial x} \left(y, \frac{dv_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \left(y, \frac{dv_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \frac{\partial u_1}{\partial x} \right] \\ \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) \frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \left(y, \frac{dv_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \right]_{y=c_1} = 0 \\ [[u_2]]_{y=c_1} = 0 \\ u_2(0, 0) = u_2(l, 0) = 0 \end{array} \right. , \quad (4.120)$$

para $y \in (0, 1) \setminus \{c_1\}$, e cuja solução 1-periódica em y e única é ga-

rantida pelo Lema 5 da Seção 4.2.2, com $F_0 = f(x) - \frac{\partial \sigma}{\partial x} \left(y, \frac{dv_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right)$, $F_1(y) = -\frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \left(y, \frac{dv_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \frac{\partial u_1}{\partial x}$ e $K(y) = \frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \left(y, \frac{dv_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right)$. Lembrando que a condição para existência da solução 1-periódica é que $\langle F_0 \rangle = 0$, e em $\epsilon = \frac{dv_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y}$ o fluxo não depende de y , tem-se:

$$\left\langle \sigma \left(y, \frac{dv_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \right\rangle = \sigma \left(y, \frac{dv_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) = \bar{\sigma}(x) \equiv \hat{\sigma} \left(\frac{dv_0}{dx} \right), \quad (4.121)$$

e assim, da condição do Lema 5 aplicado em (4.120) e das condições de contorno em (2.49), chega-se a um problema como P_H em (3.32), cuja obtenção da solução $v_0(x)$ depende do tipo de não linearidade considerada para o fluxo $\sigma(y, \epsilon)$.

Agora, considerando v_0 solução de P_H em (3.32), a equação do problema (4.120) para $u_2(x, y)$ 1-periódica em y é escrita como:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \left(y, \frac{dv_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) \right] = 0. \quad (4.122)$$

De integrar (4.122) em relação a y , para $y \in [0, c_1)$, obtém-se:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \left(y, \frac{dv_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) = C_2, \quad (4.123)$$

com $C_2 = \left[\frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \left(y, \frac{dv_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) \right] \Big|_{y=0}$. Isolando $\frac{\partial u_2}{\partial y}$ e aplicando o operador média, obtém-se:

$$u_2|_{y=c_1} - u_2|_{y=0} - \llbracket u_2 \rrbracket_{y=c_1} = - \left\langle \frac{\partial u_1}{\partial x} \right\rangle + C_2 \left\langle \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \right)^{-1} \right\rangle, \quad (4.124)$$

de onde, considerando a continuidade de $u_2(x, y)$ em $y = c_1$, conclui-se que

$$C_2 = \left\langle \frac{\partial u_1}{\partial x} \right\rangle \left\langle \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \right)^{-1} \right\rangle^{-1}. \quad (4.125)$$

Em seguida, considerando C_2 como definida em (4.125), isola-se $\partial u_2 / \partial y$ em (4.123) e integra-se em relação a y , obtendo-se:

$$u_2(x, y) = \int_0^y \left[-\frac{\partial u_1}{\partial x}(x, s) + \left\langle \frac{\partial u_1}{\partial x} \right\rangle \left\langle \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \right)^{-1} \right\rangle^{-1} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \left(s, \frac{dv_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \right)^{-1} \right] ds. \quad (4.126)$$

Agora, para $y \in (c_1, 1]$, integrando (4.122) em relação a y obtém-se:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \left(y, \frac{dv_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) - \left[\left[\frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \left(y, \frac{dv_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) \right] \right]_{y=c_1} = C_2 \quad (4.127)$$

onde novamente $C_2 = \frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \left(y, \frac{dv_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) \Big|_{y=0}$. Da condição de contato do fluxo no problema em (4.120), (4.127) torna-se (4.123), e então expressão para C_2 será como em (4.125).

Sendo assim, isolando a derivada de $\partial u_2 / \partial y$ em (4.123) e integrando em relação a y (agora com $y \in (c_1, 1]$), tem-se:

$$u_2|_{s=y} - u_2|_{s=0} - \llbracket u_2 \rrbracket_{y=c_1} = \int_0^y \left[-\frac{\partial u_1}{\partial s}(x, s) + C_2 \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \left(y, \frac{dv_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \right)^{-1} \right] ds, \quad (4.128)$$

e de considerar as condições de contato $\llbracket u_2 \rrbracket_{y=c_1} = 0$ e de contorno $u_2|_{s=0} = 0$ do problema em (4.120), obtém-se novamente (4.126).

4.3.2 Determinação do fluxo efetivo

Generalizando para o caso do fluxo não linear σ^ϵ o que foi explanado na Seção 4.2.4 homônima, foi definido inicialmente:

$$\sigma^\epsilon \left(\frac{x}{\epsilon}, \frac{du^\epsilon}{dx} \right) = \begin{cases} \sigma_1^\epsilon \left(\frac{du^\epsilon}{dx} \right), & x \in \Omega_1 \\ \sigma_2^\epsilon \left(\frac{du^\epsilon}{dx} \right), & x \in \Omega_2 \end{cases}. \quad (4.129)$$

Ao considerar o fluxo em $\epsilon = \frac{dv_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y}$, pelo problema $P_L^{\frac{dv_0}{dx}}$ em (4.104), este não depende de y , logo:

$$\sigma \left(y, \frac{dv_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) = \begin{cases} \sigma_1 \left(\frac{dv_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) = \bar{\sigma}_1(x), & x \in \Omega_1 \\ \sigma_2 \left(\frac{dv_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) = \bar{\sigma}_2(x), & x \in \Omega_2 \end{cases}, \quad (4.130)$$

e pela condição de contato do fluxo onde $\left[\left[\sigma \left(y, \frac{dv_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \right] \right]_{y=c_1} = 0$, conclui-se que: $\bar{\sigma}_1(x) = \bar{\sigma}_2(x)$, os quais serão denotados por $\bar{\sigma}(x) \equiv \bar{\sigma}$. Sendo assim, tem-se que:

$$\sigma \left(y, \frac{dv_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) = \bar{\sigma}, \quad y \in (0, 1) / \{c_1\}. \quad (4.131)$$

E pelo teorema da função implícita (ILYIN; POZNYAK, 1982), existe uma função $\epsilon(y, \bar{\sigma})$, contínua e diferenciável na vizinhança de um ponto $(y, \bar{\sigma})$, 1-periódica em y ,

inversa de $T(y, \epsilon, \bar{\sigma})$ (conforme (4.111) em relação a ϵ , tal que

$$\frac{dv_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y} = \epsilon(y, \bar{\sigma}). \quad (4.132)$$

De isolar $\partial u_1/\partial y$, e aplicar o operador média, obtém-se:

$$u_1|_{y=1} - u_1|_{y=0} - \llbracket u_1 \rrbracket_{y=c_1} = \langle \epsilon(y, \bar{\sigma}) \rangle - \frac{dv_0}{dx}, \quad (4.133)$$

e, denotando $\langle \epsilon(y, \bar{\sigma}) \rangle = \langle \epsilon \rangle(\bar{\sigma})$, e de considerar as condições de contato e de contorno para $u_1(x, y)$ no problema $P_L^{\frac{dv_0}{dx}}$ em (4.104), chega-se a:

$$\langle \epsilon \rangle(\bar{\sigma}) = \frac{dv_0}{dx}. \quad (4.134)$$

Resolvendo a equação resultante em (4.134) para $\bar{\sigma}$, obtém-se a relação funcional $\hat{\sigma}(\bar{\epsilon})$, entre $\bar{\sigma}$ e $dv_0/dx \equiv \bar{\epsilon}$:

$$\hat{\sigma}(\bar{\epsilon}) = \langle \epsilon \rangle^{-1}(\bar{\epsilon}), \quad (4.135)$$

que será o fluxo efetivo procurado.

4.3.3 Influência do contato imperfeito no comportamento efetivo

De forma análoga ao que foi procedido na Seção 4.2.5 homônima, o problema P_O em (4.100), é generalizado para incluir o caso de soluções $u^\epsilon(x)$ descontínuas nas interfaces do meio. Será considerado novamente que:

$$\llbracket u^\epsilon(x) \rrbracket_{x=x_j} = \frac{1}{\beta^\epsilon} \sigma_1 \left(\frac{du^\epsilon}{dx} \right) \Big|_{x=x_j^-}, \quad (4.136)$$

com $x_j \in \Gamma^\epsilon$. Novamente, como o problema está sendo estudado em dupla escala, será considerado que $1/\beta^\epsilon = O(\epsilon)$, ou ainda, $\beta^\epsilon = \beta/\epsilon$. Logo, o PVC que irá modelar o fenômeno difusivo unidimensional e estacionário, em um compósito bifásico com contato imperfeito entre suas fases, será da seguinte forma:

$$P_O : \left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dx} \left[\sigma \left(\frac{x}{\epsilon}, \frac{du^\epsilon}{dx} \right) \right] = f(x), \quad x \in (0, l) / \Gamma^\epsilon \\ \sigma \left(\frac{x}{\epsilon}, \frac{du^\epsilon}{dx} \right) = \begin{cases} \sigma_1^\epsilon \left(\frac{du^\epsilon}{dx} \right), & x \in \Omega_1 \\ \sigma_2^\epsilon \left(\frac{du^\epsilon}{dx} \right), & x \in \Omega_2 \end{cases} \\ \left[\left[\sigma \left(\frac{x}{\epsilon}, \frac{du^\epsilon}{dx} \right) \right] \right]_{x \in \Gamma^\epsilon} = 0 \\ \llbracket u^\epsilon(x) \rrbracket_{x \in \Gamma^\epsilon} = \frac{\epsilon}{\beta} \sigma_1 \left(\frac{du^\epsilon}{dx} \right) \Big|_{x=x_j^-} \\ u^\epsilon|_{x=0} = g_1 \\ u^\epsilon|_{x=l} = g_2 \end{array} \right. \quad (4.137)$$

Da mesma forma que foi explanado na Seção 4.2.5, a diferença entre os problemas (4.100) e (4.137) está na condição de contato para $u^\varepsilon(x)$. Sendo assim, o desenvolvimento do MHA se dará da mesma forma para a equação, condição de contato do fluxo e condições de contorno. Então, de considerar a SAF $u^{(2)}(x, \varepsilon)$ e o fluxo linearizado (3.5) na condição de contato para $u^\varepsilon(x)$ do problema P_O em (4.137), tem-se:

$$\begin{aligned} \llbracket u^{(2)} \rrbracket_{y=c_1} &= \llbracket v_0 \rrbracket_{y=c_1} + \varepsilon \llbracket u_1 \rrbracket_{y=c_1} + \varepsilon^2 \llbracket u_2 \rrbracket_{y=c_1} = \\ &= \frac{\varepsilon}{\beta} \sigma_1 \left(\frac{dv_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \Big|_{y=c_1} + \frac{\varepsilon^2}{\beta} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) \frac{\partial \sigma_1}{\partial \varepsilon} \left(\frac{dv_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \Big|_{y=c_1}. \end{aligned} \quad (4.138)$$

Do fato, de $v_0(x)$ ser contínua, tem-se $\llbracket v_0 \rrbracket_{y=c_1} = 0$, e de acordo com as potências de ε em (4.139) obtém-se:

$$\llbracket u_1 \rrbracket_{y=c_1} = \frac{1}{\beta} \sigma_1 \left(\frac{dv_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \Big|_{y=c_1}, \quad (4.139)$$

$$\llbracket u_2 \rrbracket_{y=c_1} = \frac{1}{\beta} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) \frac{\partial \sigma_1}{\partial \varepsilon} \left(\frac{dv_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \Big|_{y=c_1}. \quad (4.140)$$

Retomando o desenvolvimento do método, o próximo passo é construir a família uniparamétrica de problemas $P_L^{\frac{dv_0}{dx}}$ análogos à (4.104), cuja solução 1-periódica em y é o termo $u_1(x, y)$ da SAF proposta. Assim, considerando o problema em (4.104) mas com a condição de contato para $u_1(x, y)$ em (4.139), obtém-se:

$$P_L^{\frac{dv_0}{dx}} : \begin{cases} \frac{\partial \sigma}{\partial y} \left(y, \frac{dv_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) = 0, \quad y \in (0, 1) / \{c_1\} \\ \llbracket \sigma \left(y, \frac{dv_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \rrbracket_{y=c_1} = 0 \\ \llbracket u_1 \rrbracket_{y=c_1} = \frac{1}{\beta} \sigma_1 \left(y, \frac{dv_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \Big|_{y=c_1} \\ u_1(0, 0) = u_1(l, 0) = 0 \end{cases}. \quad (4.141)$$

Novamente, a existência e unicidade de uma solução 1-periódica em y deste problema é dado pelo Lema a seguir, que, assim como o Lema 7, é uma generalização feita neste trabalho do Lema 9, para a condição de contato imperfeito para a solução. De fato, o Lema a seguir generaliza todos os lemas anteriores apresentados neste trabalho.

Lema 10. *Seja $\bar{\kappa}$ um parâmetro e $\sigma(y, \kappa)$ continuamente diferenciável em $[0, 1] / \{c_1\}$. Então, existem funções $\mathcal{N}_1(y, \bar{\kappa})$ 1-periódicas em y que são solução da família unipa-*

ramétrica de problemas $P_L^{\bar{\kappa}}$ com parâmetro $\bar{\kappa}$, definida por:

$$P_L^{\bar{\kappa}} : \begin{cases} \frac{\partial \sigma}{\partial y} \left(y, \bar{\kappa} + \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial y} \right) = 0, \quad y \in (0, 1) / \{c_1\} \\ \llbracket \sigma \left(y, \bar{\kappa} + \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial y} \right) \rrbracket_{y=c_1} = 0 \\ \llbracket \mathcal{N}_1 \rrbracket_{y=c_1} = \frac{1}{\beta} \sigma_1 \left(y, \bar{\kappa} + \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial y} \right) \Big|_{y=c_1} \\ \mathcal{N}_1(0, \bar{\kappa}) = 0 \end{cases} . \quad (4.142)$$

A condição $\mathcal{N}_1(0, \bar{\kappa}) = 0$ garante a unicidade da solução, para cada $\bar{\kappa}$.

A demonstração, que será omitida, está no Apêndice B.1.

Em posse deste resultado, é garantida a existência de uma solução 1-periódica para o problema em (4.144), e daí é possível encontrar a expressão para o fluxo efetivo, seguindo o mesmo procedimento da Seção 4.3.2.⁶

Prosseguindo, ao considerar o fluxo em $\epsilon = \frac{dv_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y}$, pelo problema $P_L^{\frac{dv_0}{dx}}$ em (4.144), este não depende de y , e assim obtém-se (4.130). Pela condição de continuidade do fluxo na interface no mesmo problema, conclui-se que:

$$\sigma_1 \left(y, \frac{dv_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) = \bar{\sigma}_1(x) \equiv \bar{\sigma}, \quad y \in (0, 1) / \{c_1\}. \quad (4.143)$$

E pelo teorema da função implícita (ILYIN; POZNYAK, 1982), existe uma função $\epsilon(y, \bar{\sigma})$, contínua e diferenciável na vizinhança de um ponto $(y, \bar{\sigma})$, 1-periódica em y , inversa de $T(y, \epsilon, \bar{\sigma})$ (conforme (4.111) em relação a ϵ , tal que

$$\frac{dv_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y} = \epsilon(y, \bar{\sigma}). \quad (4.144)$$

De isolar $\partial u_1 / \partial y$, e aplicar o operador média em (4.144), obtém-se:

$$u_1|_{y=1} - u_1|_{y=0} - \llbracket u_1 \rrbracket_{y=c_1} = \langle \epsilon(y, \bar{\sigma}) \rangle - \frac{dv_0}{dx} \quad (4.145)$$

e, denotando $\langle \epsilon(y, \bar{\sigma}) \rangle = \langle \epsilon \rangle(\bar{\sigma})$, e de considerar as condições de contato e de contorno para $u_1(x, y)$ no problema $P_L^{\frac{dv_0}{dx}}$ em (4.144), chega-se a:

$$\langle \epsilon \rangle(\bar{\sigma}) - \frac{\bar{\sigma}}{\beta} = \frac{dv_0}{dx}. \quad (4.146)$$

Resolvendo a equação resultante em (4.146) para $\bar{\sigma}$, obtém-se a relação funcional $\hat{\sigma}(\bar{\epsilon})$, entre $\bar{\sigma}$ e $dv_0/dx \equiv \bar{\epsilon}$ que será o fluxo efetivo procurado.

⁶Nesta seção o objetivo é determinar o fluxo efetivo do problema proposto em (4.137), e dessa forma não há necessidade de se obter a expressão para a solução $u_1(x, y)$ nem para $u_2(x, y)$, mas apenas garantir que esta primeira exista e seja 1-periódica em y . Sendo assim, a obtenção das expressões para $u_1(x, y)$ e $u_2(x, y)$ estão com detalhes no Apêndice B.1.

A obtenção de $\hat{\sigma}(\bar{\epsilon})$ depende do tipo de não linearidade considerada pra o fluxo. De tal assunto tratam as próximas subseções.

4.3.4 Exemplo 1: Fluxo potencial

Neste exemplo, será considerado um meio bifásico, com uma fase linear e a outra não linear, com a seguinte relação constitutiva:

$$\sigma^\epsilon \left(\frac{x}{\epsilon}, \frac{du^\epsilon}{dx} \right) = \begin{cases} K_1 \frac{du^\epsilon}{dx}, & x \in \Omega_1 \\ K_2 \left(\frac{du^\epsilon}{dx} \right)^n, & x \in \Omega_2 \end{cases}. \quad (4.147)$$

Esta lei potencial é comumente utilizada para modelar o comportamento plástico de materiais (geralmente com $n \in (0, 1)$), como deformações superplásticas (PADMA-NABHAN; PRABU; ALI, 2018) e escoamento de metais em altas temperaturas (termoplasticidade) (PONTE-CASTAÑEDA; WILLIS, 1999). Em DAI et al. (2018), a estimativa do comportamento efetivo de um material através de uma lei do tipo potencial é comparado com resultados experimentais, obtendo-se resultados satisfatórios.

Primeiramente, será avaliado o comportamento efetivo sob condição de contato perfeito. Assim, considerando o fluxo (4.147) no ponto $\epsilon = \frac{dv_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y}$, com $u_1(x, y)$ solução da família uniparamétrica de problemas $P_L^{\frac{dv_0}{dx}}$ em (4.104), tem-se que:

$$\sigma \left(y, \frac{dv_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) = \begin{cases} K_1 \left(\frac{dv_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right), & y \in [0, c_1) \\ K_2 \left(\frac{dv_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right)^n, & y \in (c_1, 1] \end{cases}. \quad (4.148)$$

Outra forma de expressar este fluxo é através de funções indicadoras $\chi_i(y)$:

$$\chi_i(y) = \begin{cases} 1, & y \in \Omega_i \\ 0, & y \notin \Omega_i \end{cases}, \quad (4.149)$$

e assim, reescreve-se (4.148) como:

$$\sigma \left(y, \frac{dv_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) = \chi_1(y) K_1 \left(\frac{dv_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) + \chi_2(y) K_2 \left(\frac{dv_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right)^n. \quad (4.150)$$

Sendo u_1 solução de $P_L^{\frac{dv_0}{dx}}$ em (4.104), o fluxo não depende de y no ponto considerado, logo:

$$\chi_1(y) K_1 \left(\frac{dv_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) + \chi_2(y) K_2 \left(\frac{dv_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right)^n = \bar{\sigma}. \quad (4.151)$$

Agora, de isolar o termo $\frac{dv_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y}$ em (4.151), obtém-se:

$$\frac{dv_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y} = \chi_1(y) \frac{\bar{\sigma}}{K_1} + \chi_2(y) \left(\frac{\bar{\sigma}}{K_2} \right)^{1/n}. \quad (4.152)$$

Seguindo o procedimento mostrado na Seção 4.3.2, aplica-se o operador média em (4.152), chegando-se a:

$$u_1|_{y=1} - u_1|_{y=0} - \llbracket u_1 \rrbracket_{y=c_1} = \int_0^{c_1^-} \frac{\bar{\sigma}}{K_1} dy + \int_{c_1^+}^1 \left(\frac{\bar{\sigma}}{K_2} \right)^{1/n} dy - \frac{dv_0}{dx}, \quad (4.153)$$

a qual resulta na seguinte equação algébrica não linear:

$$c_1 \frac{\bar{\sigma}}{K_1} + c_2 \left(\frac{\bar{\sigma}}{K_2} \right)^{1/n} - \bar{\epsilon} = 0, \quad (4.154)$$

em que $c_r = \langle \chi_r \rangle$ ($r = 1, 2$), $c_2 = 1 - c_1$ e $\bar{\epsilon} \equiv dv_0/dx$. De resolver a equação (4.154) para $\bar{\sigma}$ encontra-se a lei $\hat{\sigma}(\bar{\epsilon})$ para o comportamento efetivo procurada, o que irá depender do valor de n adotado. Por exemplo, caso tenha-se $n = 1/2$, (4.154) torna-se uma equação quadrática, e a lei efetiva é encontrada tomando-se a sua raiz (para a maioria das aplicações, a positiva), a saber:

$$\hat{\sigma}(\bar{\epsilon}) = \frac{K_2}{2K_1c_2} \left(\sqrt{(c_1K_2)^2 + 4c_2K_1^2\bar{\epsilon}} - K_2c_1 \right). \quad (4.155)$$

Todavia, para ilustrar os resultados obtidos será considerado o caso mecânico, ou seja, pretende-se determinar a tensão de deformação efetiva em função da deformação média ($\hat{\sigma}(\bar{\epsilon})$), e serão tomados os seguintes valores para as propriedades do problema: $K_1 = 70$, $K_2 = 100$ e $n = 0.4$. O valor de K_1 corresponde ao coeficiente de elasticidade do alumínio (GARCIA; SPIM; SANTOS, 2013) e os valores de K_2 e n são resultados experimentais para uma liga de magnésio denominada AZ31B (DAI et al., 2018).

Sob estes valores, para resolver a equação em (4.154), se utilizou o método iterativo de Newton (ou Newton-Raphson) (BURDEN; FAIRES; BURDEN, 2015), com tolerância de 10^{-5} , e como ponto inicial:

$$\sigma_0 = \frac{1}{2} \max \left\{ \frac{K_1}{c_1}, \frac{K_2^{1/n}}{c_2} \right\} \bar{\epsilon}, \quad (4.156)$$

para a convergência das iterações. A escolha deste ponto é justificada no Apêndice C.3.

Os resultados obtidos seguem na Figura 16:

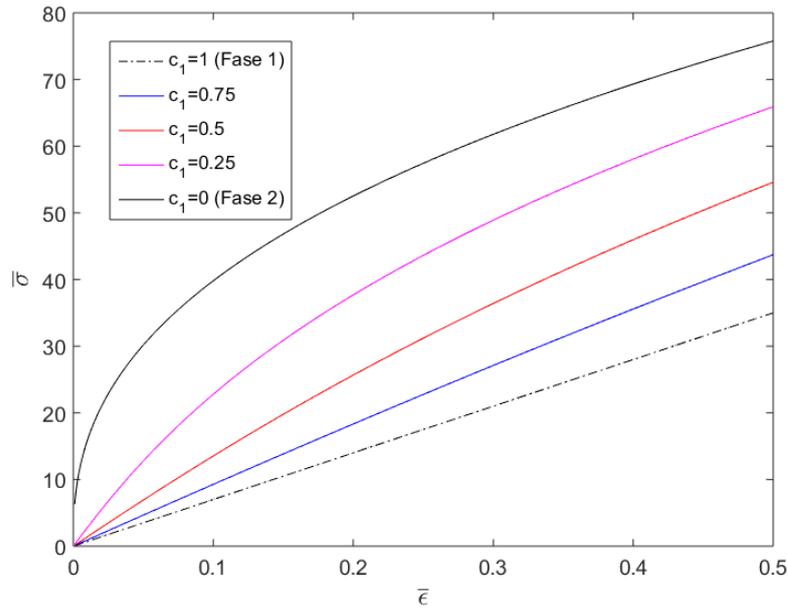


Figura 16: Avaliação do fluxo efetivo sob diferentes concentrações das fases constituintes de um compósito bifásico não linear com relação constitutiva em (4.147).

Observa-se que o fluxo efetivo apresentou comportamento semelhante ao do caso linear na Figura 13: este é limitado pelos fluxos das fases individuais, e se aproxima de alguma delas a medida que a concentração da respectiva fase tende a 1, ou seja, quanto maior a homogeneidade do material.

Considerando agora o contato imperfeito, a obtenção da lei efetiva segue o mesmo procedimento para a condição de contato perfeito, obtendo-se (4.153), da qual, pela condição de contato imperfeito, chega-se à seguinte equação algébrica não linear:

$$-\frac{\bar{\sigma}}{\beta} = c_1 \frac{\bar{\sigma}}{K_1} + c_2 \left(\frac{\bar{\sigma}}{K_2} \right)^{1/n} - \bar{\epsilon}, \quad (4.157)$$

ou ainda, reagrupando os termos:

$$\left(\frac{c_1}{K_1} + \frac{1}{\beta} \right) \bar{\sigma} + c_2 \left(\frac{\bar{\sigma}}{K_2} \right)^{1/n} - \bar{\epsilon} = 0. \quad (4.158)$$

A lei efetiva $\hat{\sigma}(\bar{\epsilon})$ que é obtida resolvendo (4.158) para $\bar{\sigma}$ foi avaliada para os mesmos coeficientes K_1 , K_2 e n do caso anterior. Ou seja, agora será simulado o comportamento efetivo do compósito bifásico formado com os mesmos constituintes, mas avaliando a influência do contato imperfeito na interface, situação que é fisicamente mais realista. A implementação numérica seguiu a mesma metodologia e parâmetros do caso anterior (mais detalhes no Apêndice C.3).

A Figura 17 apresenta a lei efetiva para $c_1 = 0.1$, e diferentes valores de β^7 .

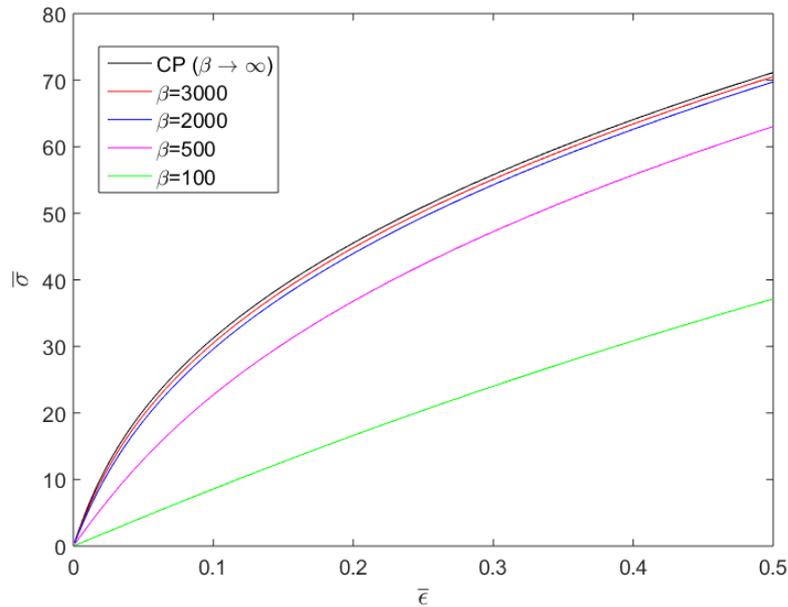


Figura 17: Avaliação do fluxo efetivo sob condição de contato imperfeito, para diferentes valores de β , de um compósito bifásico não linear com relação constitutiva em (4.147), em comparação ao caso de contato perfeito.

É visto que se manteve o comportamento observado na Seção 4.2.6 para o caso linear (Figuras 14 e 15). A medida que $\beta \rightarrow \infty$, o comportamento efetivo se aproxima daquele obtido sob condição de contato perfeito. Além disso, à medida que diminui-se o valor de β (o que significa aumentar a resistência na interface), observa-se valores maiores de deformação para os mesmos valores de tensão.

Este último comportamento tem sentido físico, dado que em um contexto mecânico, β está representando a rigidez da interface, logo, a medida que este valor descrece, se tem uma maior flexibilidade da interface, o que resulta numa capacidade do material se deformar mais quando submetido à mesma tensão.

4.3.5 Exemplo 2: Caso do fluxo polinomial

Aqui será considerado novamente um meio bifásico, com uma fase linear e outra não linear, cuja relação constitutiva será:

$$\sigma^\varepsilon \left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{du^\varepsilon}{dx} \right) = \begin{cases} K_1 \frac{du^\varepsilon}{dx}, & x \in \Omega_1 \\ K_2 \frac{du^\varepsilon}{dx} + K_{nl} \left(\frac{du^\varepsilon}{dx} \right)^3, & x \in \Omega_2 \end{cases}, \quad (4.159)$$

⁷Analogamente à Seção 4.2.6, os valores de β a serem utilizados neste exemplo foram obtidos através de experimentos numéricos, de forma a se ter os comportamentos mais variados e também visualizáveis em gráfico.

sendo K_{nl} a propriedade não linear da fase 2. A motivação por detrás desta escolha é o fato de tal relação modelar diversos fenômenos físicos em meios não lineares (PÉREZ-FERNÁNDEZ et al., 2018), como problemas de condutividade térmica (WEI; POON, 2006) e elétrica (BERGMAN, 1999), no ramo da eletrostática (HUI; CHEUNG; STROUD, 1998) ou magnetismo (WANG; HUANG, 1998), e também na modelagem de deformações plásticas (LEÓN-MECÍAS et al., 2008).

Considerando o fluxo em $\epsilon = \frac{dv_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y}$, e u_1 solução da família uniparamétrica de problemas $P_L^{\frac{dv_0}{dx}}$ em (4.104), tem-se que:

$$\chi_1(y)K_1 \left(\frac{dv_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) + \chi_2(y) \left[K_2 \left(\frac{dv_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) + K_{nl} \left(\frac{dv_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right)^3 \right] = \bar{\sigma}. \quad (4.160)$$

A esta altura, afim de isolar o termo $\frac{dv_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y}$, é necessário para a fase não linear resolver a seguinte equação algébrica não linear:

$$K_2 \left(\frac{dv_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) + K_{nl} \left(\frac{dv_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right)^3 - \bar{\sigma} = 0, \quad (4.161)$$

que é uma equação cúbica do tipo $x^3 + px + q = 0$, cujas soluções são dadas por :

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}}, \quad (4.162)$$

conhecida como a fórmula de Cardano-Tartáglia (LIMA, 1987). Chama-se de determinante desta fórmula o termo $D = \frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}$, o qual determina a natureza das soluções.

No caso do referido exemplo, tem-se:

$$D = \left(\frac{K_2}{3K_{nl}} \right)^3 + \left(\frac{\bar{\sigma}}{2K_{nl}} \right)^2, \quad (4.163)$$

ou seja, $D > 0$, do qual conclui-se que a equação (4.161) a ser resolvida tem uma raiz real e duas complexas. Pensando no contexto mecânico, será de interesse apenas a raiz real, pois a deformação é real.

Então, resolvendo (4.161) com (4.162), denotando esta raiz real por ϵ_R , obtém-se:

$$\epsilon_R(\bar{\sigma}) = \sqrt[3]{\frac{\bar{\sigma}}{2K_{nl}} + \sqrt{\left(\frac{K_2}{3K_{nl}}\right)^3 + \left(\frac{\bar{\sigma}}{2K_{nl}}\right)^2}} + \sqrt[3]{\frac{\bar{\sigma}}{2K_{nl}} - \sqrt{\left(\frac{K_2}{3K_{nl}}\right)^3 + \left(\frac{\bar{\sigma}}{2K_{nl}}\right)^2}}. \quad (4.164)$$

Assim, retornando ao propósito de isolar $\frac{dv_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y}$ na equação (4.160), tem-se:

$$\frac{dv_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y} = \frac{\bar{\sigma}}{K_1} + \epsilon_R(\bar{\sigma}), \quad (4.165)$$

e isolando $\partial u_1/\partial y$ e aplicando o operador média em (4.165), chega-se a:

$$u_1|_{y=1} - u_1|_{y=0} - \llbracket u_1 \rrbracket_{y=c_1} = \frac{c_1}{K_1} \bar{\sigma} + c_2 \epsilon_R(\bar{\sigma}). \quad (4.166)$$

Da condição de contato para $u_1(x, y)$ (detendo-se primeiramente ao caso de contato perfeito) e das condições de contorno, chega-se à seguinte equação algébrica não linear:

$$\frac{c_1}{K_1} \bar{\sigma} + c_2 \epsilon_R(\bar{\sigma}) - \bar{\epsilon} = 0, \quad (4.167)$$

e de resolvê-la para $\bar{\sigma}$, obtém-se o fluxo efetivo $\hat{\sigma}(\bar{\epsilon})$ para a condição de contato perfeito.

Observa-se que para o caso de contato imperfeito, a diferença no procedimento de obtenção do fluxo efetivo começa no passo de aplicar o operador média, ou seja, a partir da equação (4.166). Considerando a condição de contato $\llbracket u_1 \rrbracket_{y=c_1} = \frac{\bar{\sigma}}{\beta}$, chega-se à equação algébrica não linear:

$$\left(\frac{c_1}{K_1} + \frac{1}{\beta} \right) \bar{\sigma} + c_2 \epsilon_R(\bar{\sigma}) - \bar{\epsilon} = 0 \quad (4.168)$$

cuja solução fornecerá o fluxo efetivo $\hat{\sigma}(\bar{\epsilon})$ para a condição de contato imperfeito.

As leis efetivas para ambos os casos foram obtidas aplicando o Método de Bissecção (Apêndice C.1) nas equações (4.167) e (4.168). O resultado para contato perfeito segue abaixo:

$$\sigma(y, \epsilon) = \begin{cases} 7\epsilon, & y \in [0, c_1) \\ \epsilon + 4\epsilon^3, & y \in (c_1, 1] \end{cases} . \quad (4.169)$$

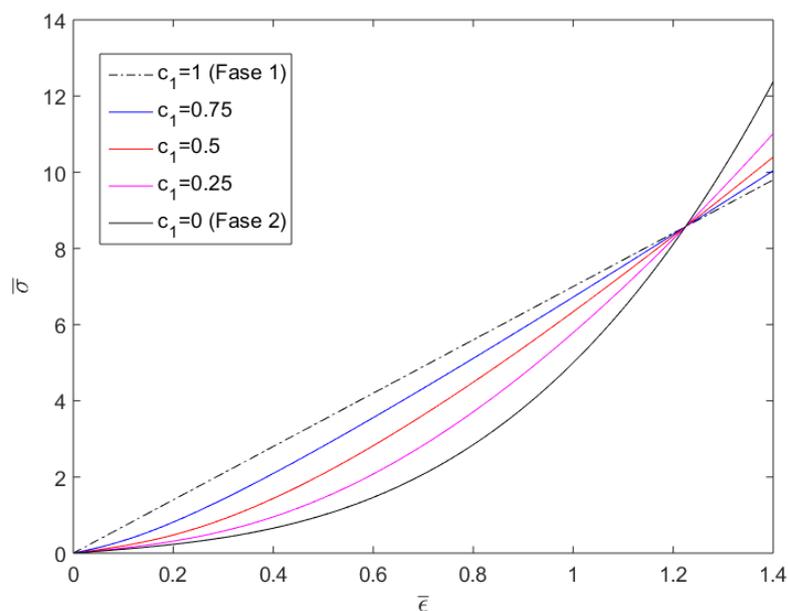


Figura 18: Avaliação do fluxo efetivo sob diferentes concentrações das fases constituintes de um compósito bifásico não linear com relação constitutiva em (4.169).

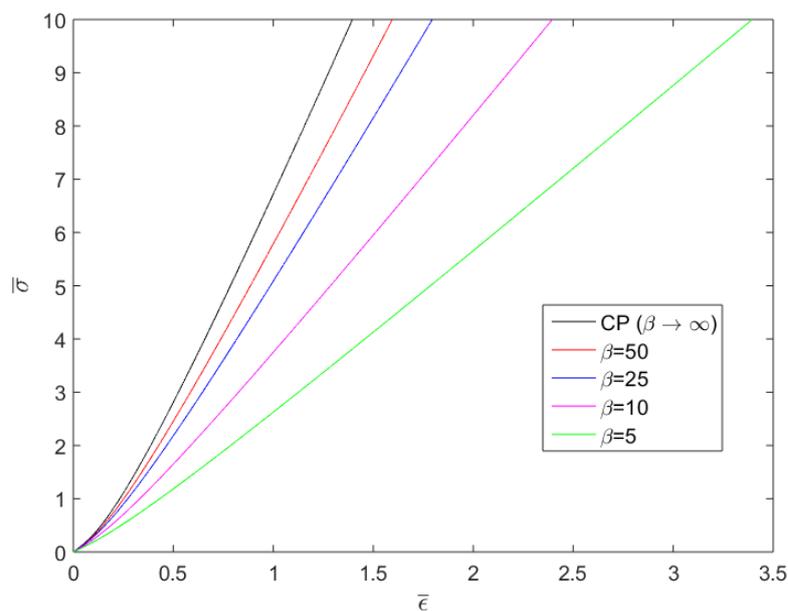


Figura 19: Avaliação do fluxo efetivo sob condição de contato imperfeito, para diferentes valores de β , de um compósito bifásico não linear com relação constitutiva em (4.169), em comparação ao caso de contato perfeito.

Os resultados obtidos da avaliação para as condições de contato perfeito e imperfeito, são os mesmos (do ponto de vista qualitativo) dos casos até aqui estudados para o comportamento efetivo (nas Seções 4.2.6 e 4.3.4 respectivamente).

5 APLICAÇÃO DO MHA NO ESTUDO DE FALHAS MECÂNICAS EM COMPÓSITOS: O MODELO DE VOLOKH

5.1 Contextualização

5.1.1 Comportamento mecânico dos materiais

O comportamento mecânico de materiais está relacionado com a resposta do corpo à ação de forças externas e internas que nele atuam, variando de acordo com as magnitudes destas forças e com as características do material (COURTENEY, 2000). No universo das aplicações, geralmente os materiais estão submetidos a algum tipo de carga (força), e a forma como reagirão será decisiva na sua performance como materiais de engenharia, daí a necessidade do estudo do seu comportamento mecânico.

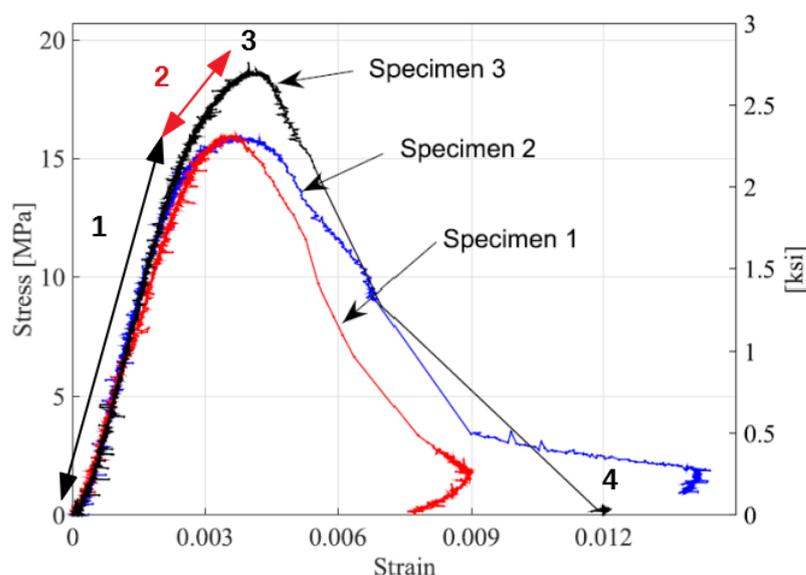
As forças envolvidas são representadas pela grandeza tensão, que representa o campo de forças resultante das forças internas (provenientes das interações intermoleculares) e das forças externas (cargas aplicadas ao material), por unidade de superfície. E como resposta à tensão, tem-se a deformação do material, que está relacionada com a mudança da forma do corpo, que matematicamente é expressa por um gradiente de medidas de comprimento. Segundo COURTENEY (2000), geralmente são observados três efeitos da aplicação de uma força em um material: uma deformação reversível (propriedade de elasticidade), uma deformação irreversível (plasticidade) e a fratura do material.

As propriedades mecânicas que influenciam este comportamento são resultado da estrutura interna do material, em diferentes níveis (atômica, cristalina, micro e macroestrutura), e esta é resultado do tipo de processamento ao qual uma peça deste material foi submetida na sua fabricação (CALLISTER, 2007). Sendo assim, devido às estruturas complexas encontradas nos principais materiais de interesse, é praticamente impossível formular modelos matemáticos que descrevam o seu comportamento levando-se em conta todos os detalhes presentes.

Desta forma, o estudo das relações entre a estrutura interna do material e suas propriedades, fica ao cuidado da Ciência dos Materiais. E, na modelagem matemática dos fenômenos que ocorrem nestes materiais, são utilizadas equações que descrevem

os aspectos considerados mais importantes do comportamento destes em uma dada situação (SPENCER, 2004), definindo assim um material ideal, cujo comportamento deverá ser suficientemente próximo do material real dado.

Entre os diversos tipos de ensaio existentes para a avaliação das propriedades mecânicas dos materiais, o mais amplamente utilizado é o ensaio de tração (GARCIA; SPIM; SANTOS, 2013). Neste ensaio, uma barra cilíndrica e uniforme do material é submetida a uma carga uniaxial e crescente, até que ocorra a fratura total (perda total da integridade estrutural) da peça. O resultado deste ensaio será uma curva de tensão contra deformação (ou ainda, tensão-deformação, como são comumente chamadas), cujo formato típico é ilustrado na Figura 20a, que é resultado de um ensaio de tração em uma peça de alvenaria (Figura 20b), que consiste em um compósito de tijolo e concreto (PERALTA et al., 2016):



(a) Resultados de ensaios de tração em peças de alvenaria (onde *stress* é a tensão, e *strain* é a deformação).



(b) Peça de alvenaria submetida ao Ensaio de Tração.

Figura 20: Ensaio de tração realizado em PERALTA et al. (2016).

Na Figura 20a, observa-se que o processo inicialmente é linear (trecho 1), e, a partir de certo ponto, tem-se um comportamento não linear (trecho 2), um pico de tensão (ponto 3) que indica o começo da fratura, e segue uma não linearidade até o final das curvas, onde ocorre a fratura total do material (4). Estes elementos da curva de tensão-deformação são interessantes e fornecem informações importantes do comportamento mecânico de um material.

A região com linearidade representa o comportamento elástico do material, ou seja, se retirada a carga à qual o material está sendo submetido, este retorna à sua forma inicial (deformação reversível), e além disso, a relação entre tensão e deformação (σ e ϵ , respectivamente) pode ser expressa como:

$$\sigma = E\epsilon, \quad (5.1)$$

em que a constante de proporcionalidade E representa uma propriedade do material, que será o módulo de elasticidade (ou módulo de Young) e está relacionado com a rigidez do material (VLACK, 2000). E através dessa curva pode-se estimar o valor de E mediante a razão de σ por ϵ , ou ainda, de forma mais exata:

$$E = \frac{d\sigma}{d\epsilon}. \quad (5.2)$$

Seguindo, o ponto onde o comportamento muda de linear para não linear, configura a mudança de um comportamento elástico para um plástico, o qual é chamado de limite de escoamento, pois entende-se que a partir dele o material começa a escoar. Esta região também é conhecida como região de encruamento uniforme, e a relação entre tensão e deformação nesta região, que tem descrito o comportamento plástico satisfatoriamente, principalmente para metais (COURTENEY, 2000), é uma lei potencial, na forma:

$$\sigma = K_r \epsilon^n, \quad (5.3)$$

onde K_r é chamado o coeficiente de resistência e n o coeficiente de encruamento (pelo formato da curva, $n \in (0, 1)$). A saber, K quantifica o nível de resistência que o material exerce contra a sua deformação, e n , a capacidade do material de distribuir a deformação ao longo do seu volume (GARCIA; SPIM; SANTOS, 2013).

Por fim, o pico da curva indica o momento em que se inicia a ruptura do material, cuja tensão será o limite de resistência à tração, que é o máximo que o material suporta de tensão sem apresentar nenhuma falha. Já no ponto onde ocorre sua fratura total, a tensão correspondente é chamada de tensão de ruptura.

5.1.2 O modelo de Volokh

Antes de iniciar a discussão sobre o referido modelo, será necessário conceituar o que é a energia de deformação. Quando um corpo está submetido a forças mecânicas, internas ou externas, estas realizam trabalho sobre ele (transferência de energia), que armazena a energia envolvida na forma de energia de deformação. Assim, a teoria da elasticidade apoia-se no fato que, quando o corpo não está mais sob ação destas forças, ele utiliza a energia acumulada para retornar à sua forma inicial (SADD, 2014). Ademais, a hipótese da existência desta energia de deformação define o conceito de hiperelasticidade, que generaliza o conceito de elasticidade (SPENCER, 2004), ao permitir deformações não lineares reversíveis.

Definindo esta energia como função da deformação, denotando-a por $W(\epsilon)$, e levando em conta o trabalho realizado pelas forças envolvidas, chega-se à seguinte relação entre a tensão e esta energia, considerando uma situação de carregamento uniaxial:

$$\sigma = \frac{dW}{d\epsilon} \quad (5.4)$$

ou então, equivalentemente,

$$W(\epsilon) = \int_0^\epsilon \sigma(s) ds . \quad (5.5)$$

Observando as relações constitutivas consideradas para σ e ϵ e os resultados obtidos para a lei efetiva, ambos no Capítulo 4, conclui-se o seguinte: a tensão crescerá ilimitadamente à medida que $\epsilon \rightarrow \infty$, o que conduz à ideia equivocada de energia infinita, a qual não tem sentido físico. Além disso, vai contra os resultados experimentais encontrados em ensaios de tração, como os mostrados na Figura 20a. Isto é, os modelos de comportamento constitutivos utilizados até agora são de validade limitada a um intervalo de deformações de valores infinitesimais ou quando mais moderados/finitos.

Neste contexto, é introduzido o modelo de Volokh (VOLOKH, 2007), que traz consigo uma capacidade de representar o comportamento mecânico de um material de forma mais fiel ao que é encontrado experimentalmente. Neste modelo, é considerada uma nova formulação para a energia de deformação, que será denotada aqui por $\Psi(W(\epsilon))$, a saber:

$$\Psi(W(\epsilon)) = \Phi \left(1 - \exp \left(-\frac{W(\epsilon)}{\Phi} \right) \right), \quad (5.6)$$

onde Φ é a energia crítica de falha, característica do material, que pode ser entendida como o máximo de energia que uma parte infinitesimal do corpo pode acumular sem haver fraturas, servindo assim como um controle de falha, pois deve estar relacionado com o limite de resistência à tração. Observando este novo modelo, é visto que $\Psi(W(\epsilon))$ tende a Φ quando $\epsilon \rightarrow \infty$, o que faz mais sentido fisicamente, em relação a ideia de energia ilimitada trazida pelos modelos anteriormente citados. Na Figura 21

é ilustrado este comportamento de W e Ψ em relação à deformação:

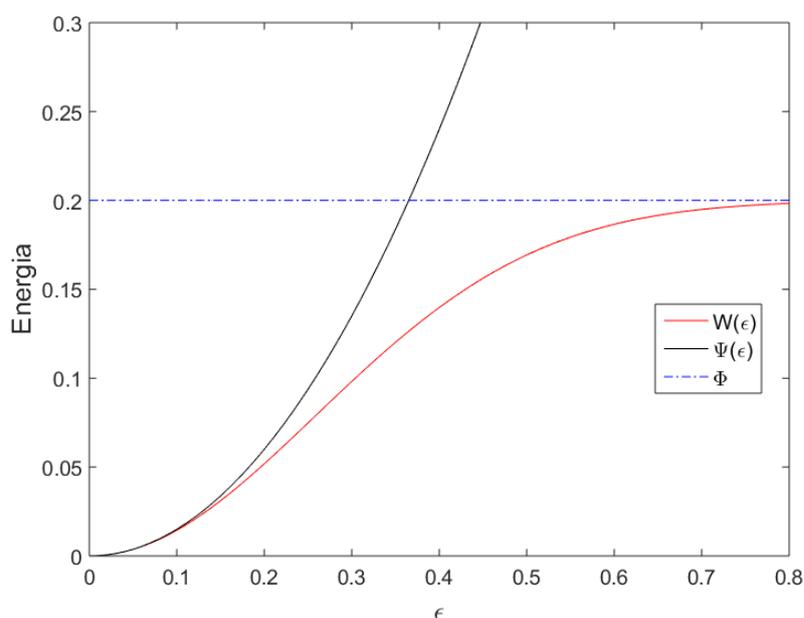


Figura 21: Comportamento da energia de deformação no modelo de Volokh ($\Psi(\epsilon)$) em comparação com o modelo tradicional correspondente ($W(\epsilon)$).

Outra característica interessante é que, expandindo $\Psi(W(\epsilon))$ como um polinômio de Maclaurin, obtém-se:

$$\Psi(W) \approx \Psi(0) + \Psi'(0)W = \Phi(1 - \exp(0)) + \Phi \exp(0)W = W, \quad (5.7)$$

ou seja, para valores pequenos de ϵ (e conseqüentemente de $W(\epsilon)$), o comportamento de Ψ é praticamente o comportamento tradicional representado por W . Isso mostra que o modelo de Volokh consegue reproduzir o comportamento dos modelos tradicionais para pequenas deformações, e ao mesmo tempo evita o crescimento ilimitado da energia para grandes deformações, típico desses modelos tradicionais. Além disso, a conclusão obtida através de (5.7) é coerente com os resultados experimentais trazidos na Figura 20, na qual para valores menores de ϵ o comportamento é linear.

Estas ideias também mostram que os modelos anteriormente estudados são válidos, entretanto, para valores pequenos de deformação, sendo necessária outra abordagem para valores maiores. A comparação para as curvas de tensão-deformação é ilustrada na Figura 22:

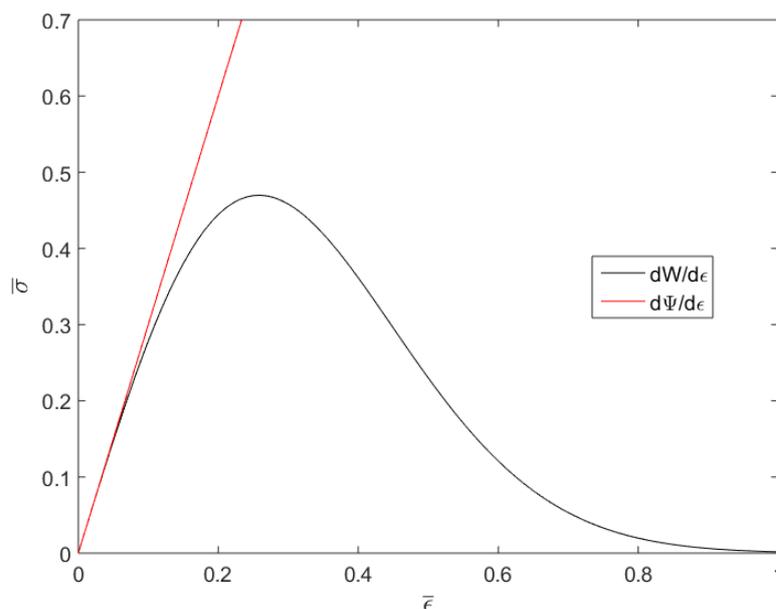


Figura 22: Curva tensão vs deformação para o modelo de Volokh.

O modelo de Volokh tem sido aplicado em diferentes contextos, seguem alguns: na predição de falhas no tecido arterial (VOLOKH, 2008), na modelagem de falhas de borrachas, que apresentam um comportamento puramente não linear (VOLOKH, 2013), considerando o efeito da temperatura com modelos não lineares de termoelasticidade (VOLOKH, 2015), o efeito no fluxo de um fluido Newtoniano com a adição de moléculas de um polímeros (VOLOKH, 2018), entre outros.

5.2 Aplicação do MHA

De comparar as Figuras 20a e 22, observa-se que o modelo de Volokh é um bom candidato para estimar o comportamento efetivo de compósitos. Levando em conta que a falha pode iniciar em qualquer uma das fases, faz sentido considerar que as fases se comportam conforme o modelo de Volokh. Assim, a aplicação do MHA nesta situação permitirá investigar se a lei efetiva do compósito de fato também segue este modelo.

A aplicação do MHA no modelo de Volokh se deterá no caso de um compósito bifásico periódico, com fases lineares, isto é, $\sigma = E\epsilon$, com energia:

$$W(\epsilon) = \frac{E\epsilon^2}{2}. \quad (5.8)$$

Aplicando (5.8) no modelo de Volokh (5.6), obtém-se:

$$\Psi(W(\epsilon)) = \Phi \left(1 - \exp \left(-\frac{E\epsilon^2}{2\Phi} \right) \right). \quad (5.9)$$

Considerando (5.4), com a energia Ψ dada em (5.6), tem-se que:

$$\sigma = \frac{d\Psi(W(\epsilon))}{d\epsilon} = \frac{d\Psi}{dW} \frac{dW}{d\epsilon}, \quad (5.10)$$

de onde chega-se a:

$$\sigma = E\epsilon \exp\left(-\frac{E\epsilon^2}{2\Phi}\right), \quad (5.11)$$

sendo agora esta a relação constitutiva para a tensão em função da deformação.

Seguindo a abordagem para a determinação do fluxo efetivo (ou neste contexto, a tensão efetiva) via MHA, tem-se a seguinte formulação para σ :

$$\sigma^\epsilon \left(\frac{x}{\epsilon}, \frac{du^\epsilon}{dx} \right) = \begin{cases} K_1\epsilon \exp\left(-\frac{K_1\epsilon^2}{2\Phi_1}\right), & x \in \Omega_1 \\ K_2\epsilon \exp\left(-\frac{K_2\epsilon^2}{2\Phi_2}\right), & x \in \Omega_2 \end{cases}, \quad (5.12)$$

com $\epsilon = du^\epsilon/dx$.

Considerando que no ponto $\epsilon = \frac{dv_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y}$ a tensão não depende de y , e da condição de contato perfeito para o fluxo na interface (4.102), pode-se escrever que:

$$\chi_1(y) \left[K_1\xi \exp\left(-\frac{K_1\xi^2}{2\Phi_1}\right) \right] + \chi_2(y) \left[K_2\xi \exp\left(-\frac{K_2\xi^2}{2\Phi_2}\right) \right] = \bar{\sigma}, \quad (5.13)$$

com $\xi = \frac{dv_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y}$ (para facilitar a notação).

O próximo passo é isolar $\xi = \frac{dv_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y}$ em (5.13) e obter as inversas da tensão σ em cada fase, de forma a se ter:

$$\chi_1(y)\sigma_1^{-1}(\bar{\sigma}) + \chi_2(y)\sigma_2^{-1}(\bar{\sigma}) = \frac{dv_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y}, \quad (5.14)$$

e então aplicar o operador média média, chegando-se a:

$$u_1|_{y=1} - \llbracket u_1 \rrbracket_{y=c_1} - u_1|_{y=0} = \int_0^{c_1^-} \chi_1(y)\sigma_1^{-1}(\bar{\sigma})dy + \int_{c_1^+}^1 \chi_2(y)\sigma_2^{-1}(\bar{\sigma})dy - \frac{dv_0}{dx}, \quad (5.15)$$

de onde obtém-se, pela 1-periodicidade de $u_1(x, y)$ em y :

$$-\llbracket u_1 \rrbracket_{y=c_1} = c_1\sigma_1^{-1}(\bar{\sigma}) + c_2\sigma_2^{-1}(\bar{\sigma}) - \bar{\epsilon}. \quad (5.16)$$

A partir daqui, deve-se considerar qual a condição de contato se está lidando, perfeito ou imperfeito, tendo-se $\llbracket u_1 \rrbracket_{y=c_1} = 0$ ou $\llbracket u_1 \rrbracket_{y=c_1} = \bar{\sigma}/\beta$, respectivamente.

Entretanto, atenta-se para a obtenção das inversas $\sigma_1^{-1}(\bar{\sigma})$ e $\sigma_2^{-1}(\bar{\sigma})$, visto que am-

bas as leis das tensões em (5.12) não são funções biunívocas, pois têm o formato como ilustrado na Figura 22. Logo, só é possível encontrar a inversa diretamente em cada região de injetividade. Nas próximas seções, apresentam-se os detalhes de cada caso.

5.2.1 Caso de contato perfeito entre as fases

Para a condição de contato perfeito, (5.16) se torna:

$$c_1\sigma_1^{-1}(\bar{\sigma}) + c_2\sigma_2^{-1}(\bar{\sigma}) - \bar{\epsilon} = 0, \quad (5.17)$$

e de resolvê-la para $\bar{\sigma}$, encontra-se a lei efetiva $\hat{\sigma}(\bar{\epsilon})$. Como o formato de $\sigma_1^{-1}(\bar{\sigma})$ e $\sigma_2^{-1}(\bar{\sigma})$ não é explícito, se desenvolveu a seguinte estratégia para encontrar o valor de $\bar{\sigma}$ que resolve (5.17) para um $\bar{\epsilon}$ dado.

Considerando $\xi_1 = \frac{dv_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y}$ relacionado à tensão σ_1 na fase 1 e $\xi_2 = \frac{dv_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y}$ na fase 2, pode-se interpretar (5.17) como:

$$c_1\xi_1 + c_2\xi_2 - \bar{\epsilon} = 0, \quad (5.18)$$

já que a inversa do fluxo será exatamente $\xi = \frac{dv_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y}$. Para encontrar o valor de $\bar{\sigma}$ que resolve (5.17), necessita-se dos pares (ξ_1, ξ_2) tal que:

1. Sejam solução de (5.18);
2. $\sigma_1(y, \xi_1) = \sigma_2(y, \xi_2) \equiv \bar{\sigma}$;

para cada valor de $\bar{\epsilon}$ considerado.

Sendo assim, procede-se da seguinte forma: determina-se um intervalo de valores possíveis para ξ_1 na forma de um vetor, e para cada valor fixo $\bar{\epsilon}(i)$ de $\bar{\epsilon}$, calcula-se o valor de ξ_2 que resolve a equação (5.18). Ou seja, para cada $\bar{\epsilon}(i)$, testa-se valores de $\xi_1(j)$ do vetor ξ_1 proposto, calculando-se um valor $\xi_2(i, j)$ da seguinte forma:

$$\xi_2(i, j) = \frac{\bar{\epsilon}(i) - c_1\xi_1(j)}{c_2}. \quad (5.19)$$

Assim, a condição 1 está satisfeita. E para cada $\xi_2(i, j)$ calculado, testa-se a igualdade proposta em 2, até encontrar o valor de ξ_2 necessário. Encontrado este, o valor de $\bar{\sigma}(i)$ (correspondente a $\bar{\epsilon}(i)$) é estimado por uma média ponderada na forma:

$$\bar{\sigma}(i) = c_1\sigma_1(\xi_1(j)) + c_2\sigma_2(\xi_2(i, j)). \quad (5.20)$$

Todavia, pelas leis das tensões σ_1 e σ_2 não serem funções biunívocas, é possível encontrar valores de ξ_1 e ξ_2 que satisfazem as condições 1 e 2 propostas, mas não

representam a lei efetiva procurada. Para isso, são impostas mais duas condições na implementação:

- $\bar{\sigma}(i) > 0$;
- $|\bar{\sigma}(i) - \bar{\sigma}(i - 1)| \leq H|\bar{\epsilon}(i) - \bar{\epsilon}(i - 1)|$, com $H > 0$;

sendo esta segunda uma versão da condição de Lipschitz (KOLMOGOROV; FOMIN, 1975), onde H é uma constante fixa (constante de Lipschitz), com o objetivo de assegurar a continuidade da lei efetiva obtida.

Os resultados computacionais apresentados a seguir foram obtidos para um compósito bifásico (Compósito 1) com as seguintes características: $K_1 = 0.3$ e $\Phi_1 = 0.1$ para a fase 1, e $K_2 = 2.5$ e $\Phi_2 = 0.3$ para a fase 2 (estes são valores hipotéticos, tomados de forma a se ter a convergência da implementação numérica utilizada). Do ponto de vista do comportamento mecânico, a fase 1 é menos rígida, fraturando sob uma tensão menor, quando comparada à fase 2. O comportamento de ambas as fases, em relação à tensão ($\sigma(\epsilon)$) e à energia de deformação no modelo de Volokh ($\Psi(\epsilon)$), é ilustrado na Figura 23:

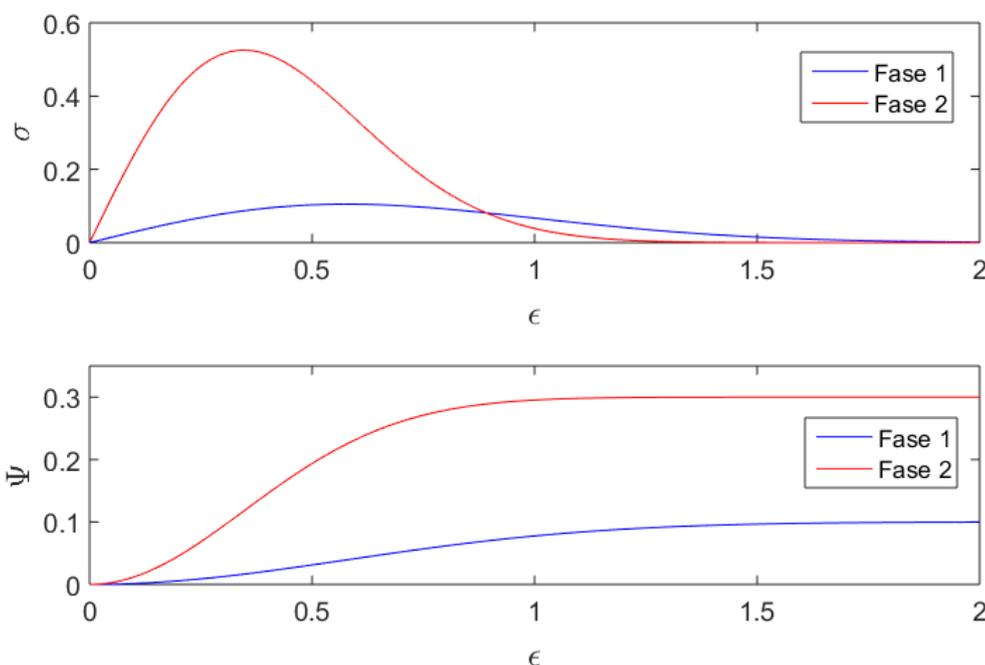


Figura 23: Comparação do comportamento mecânico segundo o modelo de Volokh das fases consituintes do Compósito 1.

Aplicando o MHA para determinar a lei efetiva para este material bifásico utilizado como exemplo, seguindo a metodologia detalhada, obteve-se os resultados apresentados na Figura 24:

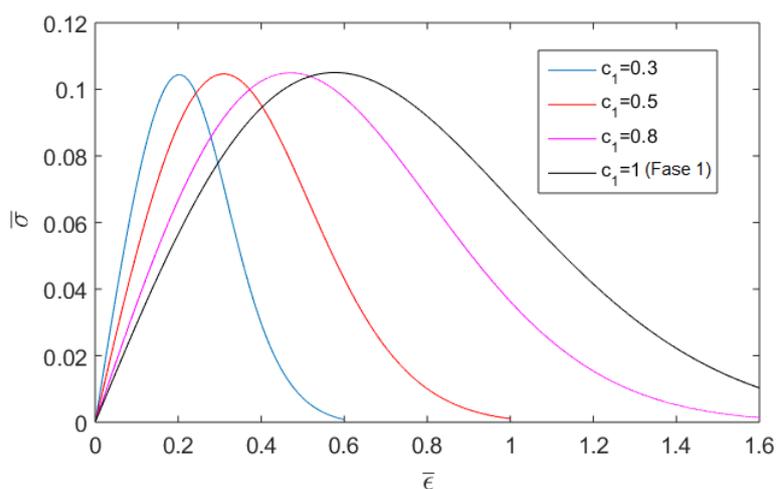


Figura 24: Lei efetiva da tensão do Compósito 1 sob condição de contato perfeito, para diferentes concentrações.

Percebe-se na Figura 24, primeiramente que o comportamento global do Compósito 1 seguiu, qualitativamente, o comportamento das suas fases constituintes. Nos resultados obtidos anteriormente (Seções 4.2.6, 4.3.4 e 4.3.5), obteve-se que a medida que a concentração de uma fase diminuía, o comportamento efetivo tendia ao comportamento da outra fase (e vice versa). Nesta aplicação do Modelo de Volokh acontece o mesmo, entretanto, apenas para pequenas deformações, onde o comportamento global é linear.

Além disso, nota-se na Figura 24 também que o comportamento efetivo do Compósito 1 ficou condicionado ao pico de tensão (limite de resistência à tração) do material da fase 1, pois todas as curvas apresentaram o mesmo pico deste. Isto ocorre pois, como foi comentado anteriormente, a fase 1 se mostrou a menos resistente (em termos de tensão), logo, o material como um todo não poderia ser submetido à uma tensão maior que o limite desta fase sem fraturar.

Integrando a lei efetiva para a tensão obtida, utilizando a Regra de Simpson 1/3, com $h = 10^{-3}$, obteve-se a energia de deformação efetiva $\hat{\Psi}$, e avaliando seu comportamento assintótico quando $\bar{\epsilon} \rightarrow \infty$, determinou-se a energia crítica $\hat{\Phi}$ do material bifásico para alguns valores de concentração c_1 , encontrando-se os seguintes resultados mostrados na Tabela 6:

Tabela 6: Estimativa da energia crítica efetiva ($\hat{\Phi}$) para as concentrações consideradas do Compósito 1.

c_1	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.88
$\hat{\Phi}$	0.0098	0.0196	0.0295	0.0395	0.0494	0.0595	0.0695	0.0796	0.0879

Para valores de c_1 maiores que 0.88, o método numérico implementado para a lei efetiva da tensão não convergiu. Mas, mesmo assim, é possível observar uma tendência à energia crítica do material da fase 1 ($\Phi_1 = 0.1$), enquanto que c_1 se aproxima de 1. Salienta-se que mais testes devem ser feitos para uma conclusão mais exata.

Com o intuito de verificar o efeito da energia crítica de cada fase, resolveu-se inverter os valores do Compósito 1, obtendo-se então um Compósito 2 com as seguintes características: $K_1 = 0.3$ e $\Phi_1 = 0.3$ para a fase 1, e $K_2 = 2.5$ e $\Phi_2 = 0.1$ para a fase 2. O comportamento individual das fases deste compósito é ilustrado na Figura 25:

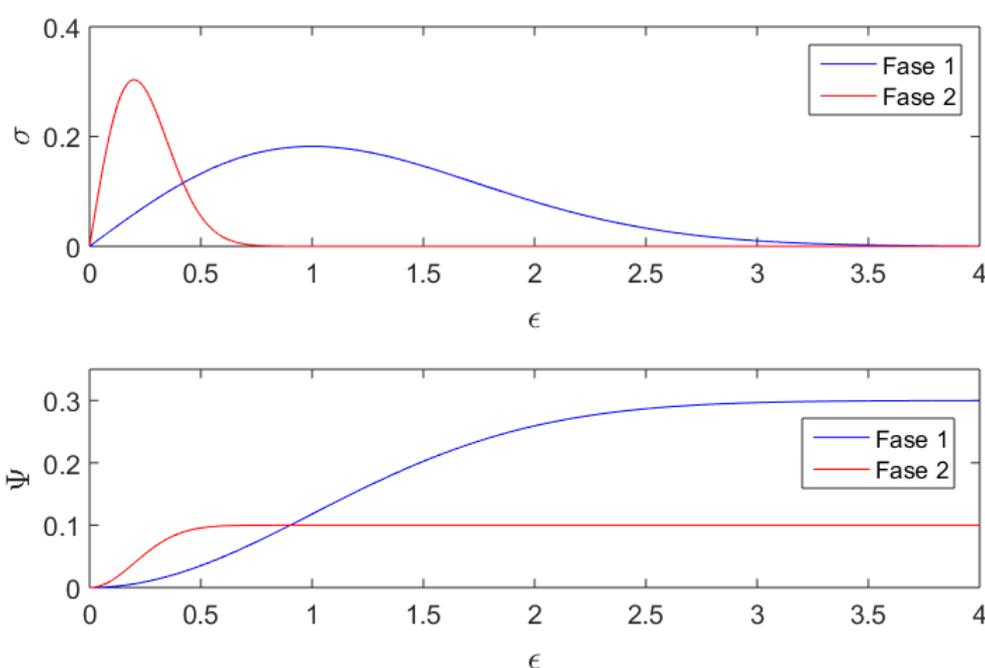


Figura 25: Comparação do comportamento mecânico segundo o modelo de Volokh das fases constituintes do Compósito 2.

Aplicando o MHA para o Compósito 2, encontrou-se os seguintes resultados para a lei efetiva da tensão na Figura 26:

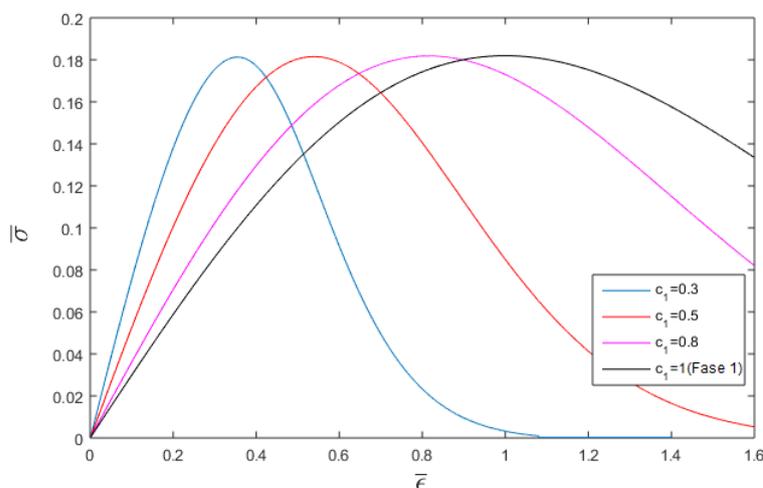


Figura 26: Lei efetiva da tensão do Compósito 2 sob condição de contato perfeito, para diferentes concentrações.

Observando a Figura 26, tem-se as mesmas considerações para o Compósito 1: o Compósito 2 comporta-se qualitativamente como suas fases constituintes, e também seu comportamento apresenta o mesmo pico de tensão da sua fase menos rígida (fase 1), mesmo que esta fase agora tenha o maior valor de energia crítica.

Para a energia crítica efetiva, obtida da mesma forma que foi para o Compósito 1, para as diferentes concentrações consideradas, encontraram-se os resultados que estão na Tabela 7:

Tabela 7: Estimativa da energia crítica efetiva ($\widehat{\Phi}$) para as concentrações consideradas do Compósito 2.

c_1	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.85
$\widehat{\Phi}$	0.0296	0.0594	0.0892	0.1191	0.1484	0.1790	0.2099	0.2392	0.2551

Neste caso, o método numérico implementado não convergiu para valores de c_1 maiores que 0.85. Porém, análogo ao que ocorreu para o Compósito 1, percebe-se que o valor de $\widehat{\Phi}$ tende à energia crítica da fase 1. Novamente, mais testes devem ser feitos para avaliar com mais segurança estes dados.

5.2.2 Caso de contato imperfeito entre as fases

Agora, para o caso de contato imperfeito, a equação em (5.16) se torna:

$$c_1\sigma_1^{-1}(\bar{\sigma}) + c_2\sigma_2^{-1}(\bar{\sigma}) + \frac{\sigma}{\beta} - \bar{\epsilon} = 0, \quad (5.21)$$

que será resolvida, a fim de determinar a lei efetiva $\hat{\sigma}(\bar{\epsilon})$, de forma similar ao caso do contato perfeito.

Considerando x_1 e x_2 como na Seção 5.2.1, pode-se reescrever (5.21) como:

$$c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2 + \frac{\sigma}{\beta} - \bar{\epsilon} = 0. \quad (5.22)$$

Para determinar os valores de $\bar{\sigma}$ que satisfazem as condições 1 e 2, mas agora para a equação (5.22), procede-se da mesma forma como para o caso do contato perfeito, com exceção da equação para encontrar ξ_2 que resolve (5.22), a qual agora é:

$$\xi_2(i, j) = \frac{1}{c_2} \left(\bar{\epsilon}(i) - \frac{\sigma_1(\xi_1(j))}{\beta} - c_1 \xi_1(j) \right). \quad (5.23)$$

A influência do contato imperfeito no comportamento efetivo foi avaliada primeiramente para o Compósito 1 considerado anteriormente, utilizando $c_1 = 0.3$, e foram encontrados os resultados que constam na Figura 27

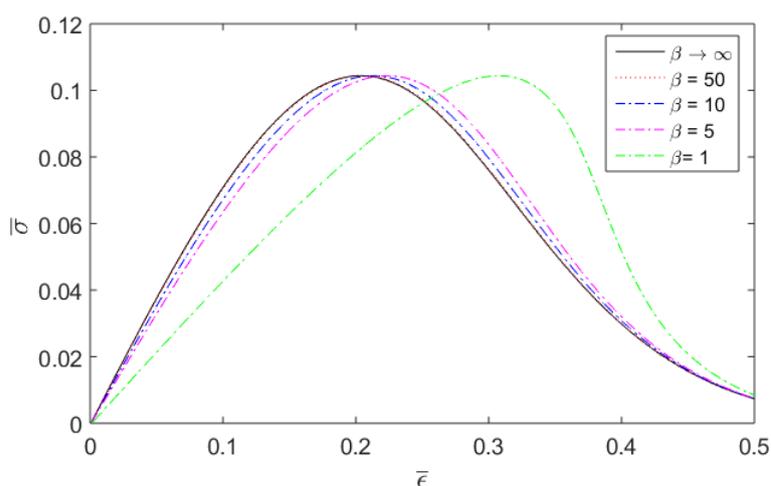


Figura 27: Lei efetiva da tensão do Compósito 1, sob condição de contato imperfeito, para $c_1=0.3$ e diferentes valores de β .

Observa-se que quanto menor os valores de β , o pico de tensão não se altera para cada caso, mas ocorre para valores maiores de deformação. Do ponto de vista do comportamento mecânico, isto significa que quanto menor a rigidez na interface,, a ruptura do material ocorre para valores maiores de deformação, mas sob o mesmo valor de tensão. Como observou-se nos resultados para contato imperfeito na Seção 4.2.6, a diminuição da rigidez na interface faz com que o compósito tenha mais flexibilidade, e assim suporta deformações mais intensas sem fraturar.

Foram avaliados também os gráficos da energia $\hat{\Psi}$ efetiva, também integrando as lei efetivas obtidas para a tensão, pela Regra de Simpson 1/3 (com $h = 10^{-3}$), consi-

derando $c_1 = 0.3$, chegando-se a:

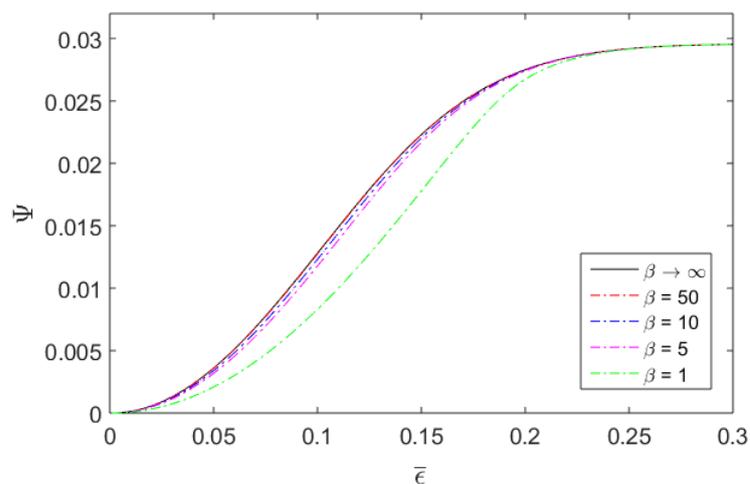


Figura 28: Lei efetiva da energia de deformação $\hat{\Psi}$ do Compósito 1, sob condição de contato imperfeito, para $c_1=0.3$ e diferentes valores de β .

Na Figura 28 observa-se que o contato imperfeito não influenciou a energia crítica efetiva do compósito bifásico, além de influenciar muito pouco as curvas de energia (percebe-se que as curvas estão muito próximas entre si). Os valores de $\hat{\Phi}$ obtidos para os valores de β testados foram de 0.0295, que se comparado com o valor obtido para o contato perfeito na Tabela 6, deixa clara a proximidade.

Assim como no caso do contato perfeito, foram feitas as mesmas avaliações para o Compósito 2, chegando-se aos resultados nas Figuras 29 e 30:

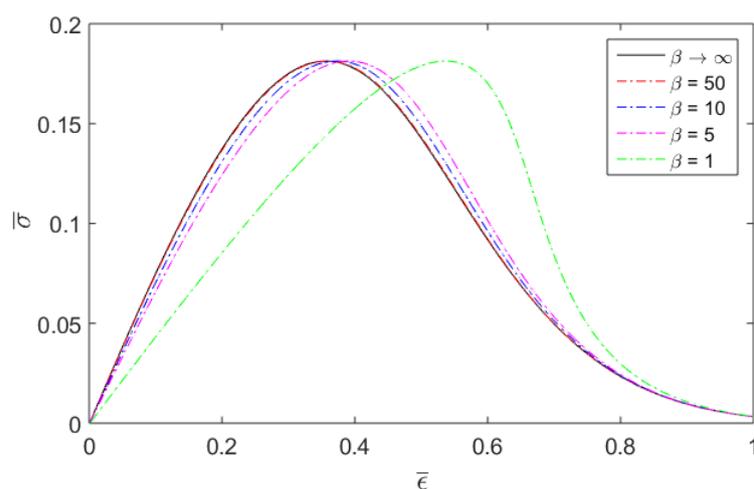


Figura 29: Lei efetiva da tensão do Compósito 2, sob condição de contato imperfeito, para $c_1=0.3$ e diferentes valores de β .

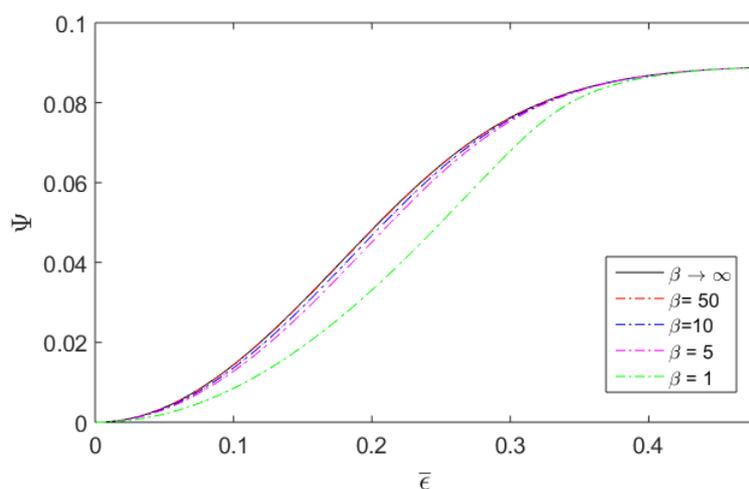


Figura 30: Lei efetiva da energia de deformação $\hat{\Psi}$ do Compósito 2, sob condição de contato imperfeito, para $c_1=0.3$ e diferentes valores de β .

Observa-se que as Figuras 29 e 30 trazem resultados equivalentes (qualitativamente) aos das Figuras 27 e 28, ou seja, as conclusões para o Compósito 2 são as mesmas apontadas para o Compósito 1 nesta seção, mostrando que inverter as energias críticas não influenciou qualitativamente o comportamento efetivo destes compósitos.

6 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

Nos capítulos 2 e 3, através de implementações numéricas para casos específicos, observou-se que tanto a solução v_0 como as assintóticas $u^{(1)}$ e $u^{(2)}$ se mostraram como boas aproximações da solução exata dos PVC's com coeficientes continuamente diferenciáveis, lineares e não lineares. Ademais, para os casos de não linearidade estudados, percebe-se que nas ocasiões em que solução exata apresentava mais detalhes locais, a assintótica de ordem 2 reproduziu melhor estes detalhes do que a de ordem 1, mostrando então a importância de considerar o terceiro termo da SAF.

No Capítulo 4, através do MHA foi possível obter a lei efetiva para todos os PVC's com coeficientes constantes por partes estudados, lineares e não lineares, assim como sob condição de contato perfeito e imperfeito para exemplos de compósitos microperiodicos bifásicos. Observou-se que as leis efetivas apresentaram coerência tanto em relação à concentração das fases do compósito como em relação ao parâmetro β do contato imperfeito.

No Capítulo 5, foi repetido o sucesso do Capítulo 4 na obtenção das leis efetivas para problemas envolvendo o modelo de Volokh, tanto sob condição de contato perfeito e imperfeito. Além disso, observando que a lei efetiva do compósito mostrou comportamento qualitativo semelhante ao referido modelo, e que para valores relativamente pequenos de deformação esta lei mostrou-se praticamente linear, concluiu-se que o MHA é uma ferramenta eficaz para avaliar compósitos que seguem o modelo de Volokh. Ainda neste capítulo, o MHA também permitiu obter informações não esperadas, como: o contato imperfeito não interferindo na energia crítica efetiva do compósito, e uma certa tendência desta energia para o valor da fase 1, à medida que sua concentração se aproximava de 1. Em ambas situações, mais testes e simulações devem ser feitos.

Em suma, perante o desenvolvimento deste trabalho, conclui-se que o MHA produz resultados satisfatórios em todos os casos estudados. No futuro, pretende-se considerar outras situações, não linearidades clássicas dentro do modelo de Volokh, problemas dinâmicos para fenômenos difusivos e ondulatórios, e várias escalas temporais, todos para uma ou várias dimensões espaciais. E também considerar outros

métodos para comparar e validar os resultados pelo MHA.

7 PRODUÇÃO CIENTÍFICA

Este trabalho foi dedicado a estudar e aplicar o MHA em diversas situações. Entretanto, alguns destes resultados já foram apresentados e publicados em anais de eventos. Seguem os principais:

- DECIO JUNIOR, R.; PEREZ-FERNANDEZ, L. D. Comportamento efetivo de uma barra bifásica periódica não linear, através do Método de Homogeneização Assintótica. Anais do XVII Congresso de Iniciação Científica - UFPel, p.CE 03287, 2014.
- DECIO JUNIOR, R.; PEREZ-FERNANDEZ, L. D.; BRAVO-CASTILLERO, J. Obtenção da lei efetiva para o fluxo de calor em uma barra bifásica, periódica, não linear e com barreira térmica entre as fases, através do Método de Homogeneização Assintótica. Anais do XX Encontro Regional dos Estudantes de Matemática da Região Sul, 2014.
- DECIO JUNIOR, R.; PEREZ-FERNANDEZ, L. D.; BRAVO-CASTILLERO, J. Homogeneização Assintótica e Cotas Variacionais na obtenção da lei efetiva de compósitos não lineares. Anais do XXI Encontro Regional dos Estudantes de Matemática da Região Sul, 2015.
- DECIO JUNIOR, R. M. S.; PEREZ-FERNANDEZ, L. D. . Estimação da lei efetiva de compósitos não lineares via Homogeneização Assintótica e Cotas Variacionais. Livro de Resumos do V Simpósio de Métodos Numéricos Computacionais da Universidade Federal do Paraná v.1., 2015.
- DECIO JUNIOR, R.; CHAGAS NETA, M. C.; PEREZ-FERNANDEZ, L. D.; BRAVO-CASTILLERO, J. Homogeneização Assintótica de uma barra elástica bifásica, periódica, com contato imperfeito e amolecimento. Anais do XXII Encontro Regional dos Estudantes de Matemática da Região Sul, 2016.
- DECIO JUNIOR, R.; PEREZ-FERNANDEZ, L. D. Homogeneização Assintótica de Meios Unidimensionais e continuamente Microperiódicos na Modelagem do

Comportamento de Materiais Funcionalmente Graduados Não Lineares. Anais da VIII Conferência Sul em Modelagem Computacional, 2018.

REFERÊNCIAS

ALVAREZ-BORGES, F. E.; BRAVO-CASTILLERO, J.; CRUZ, M. E.; GUINOVART-DÍAZ, R.; PEREZ-FERNÁNDEZ, L. D.; RODRÍGUEZ-RAMOS, R.; SABINA, F. J. Reiterated homogenization of a laminate with imperfect contact: gain-enhancement of effective properties. **Applied Mathematics and Mechanics**, [S.l.], v.39, n.8, p.1119–1146, 2018.

ANDRIANOV, I. V.; TOPOL, V. V. D. H.; WEICHERT, D. Homogenization of a 1D nonlinear dynamical problem for periodic composites. **Journal of Applied Mathematics and Mechanics**, [S.l.], v.91, n.6, p.523–534, 2011.

BABUSKA, I. Solutions of interface problems by homogenization, Part 1. **SIAM Journal of Mathematical Analysis**, [S.l.], v.7, n.5, p.603–634, 1976a.

BABUSKA, I. Solutions of interface problems by homogenization, Part 2. **SIAM Journal of Mathematical Analysis**, [S.l.], v.7, n.5, p.635–645, 1976b.

BABUSKA, I. Solutions of interface problems by homogenization, Part 3. **SIAM Journal of Mathematical Analysis**, [S.l.], v.8, n.6, p.923–937, 1976c.

BAKHVALOV, N. S. Averaged characteristics of bodies with periodic structure. **Doklady Akademii Nauk SSSR**, [S.l.], v.218, n.5, p.1046–1048, 1974.

BAKHVALOV, N. S. Averaging of partial differential equations with rapidly oscillating coefficients. **Doklady Akademii Nauk SSSR**, [S.l.], v.224, n.2, p.351–355, 1975a.

BAKHVALOV, N. S. Averaging of nonlinear partial differential equations with rapidly oscillating coefficients. **Doklady Akademii Nauk SSSR**, [S.l.], v.225, n.2, p.249–252, 1975b.

BAKHVALOV, N. S.; PANASENKO, G. P. **Homogenisation: Averaging Processes in Periodic Media**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1989.

BARROSO, L. C.; BARROSO, M. M. A.; FILHO, F. F. C.; CARVALHO, M. L. B. de; MAIA, M. L. **Cálculo Numérico (com aplicações)**. São Paulo: Editora Harbra, 1987.

BENSOUSSAN, A.; LIONS, J. L.; PAPANICOLAU, G. **Asymptotic Analysis for Periodic Structures**. Amsterdam: North-Holland, 1978.

BERDICHEVSKY, V. L. Spacial homogenization of periodic structures. **Doklady Akademii Nauk SSSR**, [S.I.], v.222, n.3, p.565–567, 1975.

BERGMAN, D. J. Anisotropic nonlinear response of periodic square or cubic composites. **Physica A**, [S.I.], v.270, p.8–14, 1999.

BRAVO-CASTILLERO, J.; GUINOVART-DÍAZ, R.; SABINA, F. J.; RODRÍGUEZ-RAMOS, R. Closed-form expressions for the effective coefficients of a fiber-reinforced composite with transversely isotropic constituents - II. Piezoelectric and square symmetry. **Mechanics of Materials**, [S.I.], v.33, p.237–248, 2001.

BURDEN, R. L.; FAIRES, J. D.; BURDEN, A. M. **Análise Numérica**. São Paulo, SP/Brasil: CENGAGE Learning, 2015.

CALLISTER, W. D. **Materials science and engineering**: an introduction. Nova Iorque, NY/EUA: John Wiley Sons, 2007.

CHAPMAN, S.; MCBURNIE, S. A unified multiple-scales approach to one-dimensional composite materials and multiphase flow. **Society for Industrial and Applied Mathematics**, [S.I.], v.71, n.1, p.200–217, 2011.

CHRISTENSEN, R. M. **Mechanics of Composite Materials**. New York: Wiley, 1979.

COURTENEY, T. H. **Mechanical behavior of materials**. Long Grove, IL: Waveland Press, 2000.

DAI, G.; JARRAR, F.; OZTURK, F.; SHEIKH-AHMAD, J. On the Effect of the Complexity of the Constitutive Model in Simulating Superplastic Forming. **Defect and Diffusion Forum**, [S.I.], v.385, p.379–384, 2018.

DE GIORGI, E.; SPAGNOLO, S. Sulla convergenza degli integrali dell'energia per operatori ellittici del secondo ordine. **Bollettino dell'Unione Matematica Italiana**, [S.I.], v.8, p.391–411, 1973.

DEMIDOVITCH, B.; BARANENKOV, G.; EFIMENKO, V.; FROLOV, S.; KOGAN, S.; LUNTZ, G.; PORSHNEVA, E.; SHOSTAK, R.; SITCHEVA, E.; YANPOLSKI, A. **Problemas e Exercícios de Análise Matemática**. Moscou: Editora Mir, 1987.

DIMITRIENKO, Y. Heat Mass Transport and Thermal Stresses in Porous Charring Materials. **Transport in Porous Media**, [S.I.], v.27, p.143–170, 1997.

DONG, Q.; CAO, L. Multiscale Asymptotic Expansions Methods and Numerical Algorithms for the Wave Equations in Perforated Domains. **Applied Mathematics and Computation**, [S.I.], v.232, p.872887, 2014.

DUNCAN, J.; ROZUM, R.; POWELL, J.; KETTENRING, K. Multi-scale methods predict invasion speeds in variable landscapes. Case study: *Phragmites australis*. **Theoretical Ecology**, [S.I.], v.10, p.287–303, 2017.

EINSTEIN, A. Eine neue Bestimmung der Moleküldimensionen. **Annalen der Physik**, [S.I.], v.19, p.289–306, 1906.

FARADAY, M. Experimental researches on electricity. **Philosophical Transactions on the Royal Society of London**, [S.I.], 1838.

FIETZ, C. Electro-magnetostatic homogenization of bianisotropic metamaterials. **Journal of the Optical Society of America**, [S.I.], v.30, n.7, p.1937–1944, 2013.

FRANCFORT, G. A.; MURAT, F. Homogenization and Optimal Bounds in Linear Elasticity. **Rational Mechanics and Analysis**, [S.I.], v.94, n.4, p.307–334, 1986.

GAO, D.; ZHANG, Z.; YANG, Z.; XUE, D. Interface mediated ferromagnetism in bulk CuO/Cu₂O composites. **Applied Physics Letters**, [S.I.], v.101, p.132416, 2012.

GARCIA, A.; SPIM, J. A.; SANTOS, C. A. dos. **Ensaio dos Materiais**. [S.I.]: LTC, 2013.

GARLICK, M.; POWELL, J.; HOOTEN, M.; MCFARLANE, L. Homogenization of Large-Scale Movement Models in Ecology. **Bulletin of Mathematical Biology**, [S.I.], v.73, p.2088–2108, 2011.

HASHIN, Z. Analysis of Composite Materials. **Journal of Applied Mechanics**, [S.I.], v.50, p.481–506, 1983.

HOOKE, J. R.; HALL, H. E. **Solid state physics**. Chichester, Inglaterra: John Wiley Sons Ltd, 1991.

HUI, P. M.; CHEUNG, P.; STROUD, D. Theory of third harmonic generation in random composites of nonlinear dielectrics. **Journal of Applied Physics**, [S.I.], v.84, n.7, p.3451–3458, 1998.

IDIART, M.; PONTE-CASTAÑEDA, P. Field fluctuations and macroscopic properties for nonlinear composites. **International Journal of Solids and Structures**, [S.I.], v.40, p.7015–7033, 2003.

ILYIN, V. A.; POZNYAK, E. G. **Fundamentals of Mathematical Analysis, Part 1.** [S.l.]: MIR, 1982.

KACHANOV, M.; SEVOSTIANOV, I. **Effective Properties of Heterogeneous Materials.** Netherlands: Springer, 2013. vii + 389p.

KAMIŃSKI, M. Determination of sensitivity coefficients of the elastic effective properties for periodic fiber-reinforced composites using the response function method. **Computational Materials Science**, [S.l.], v.43, p.829–841, 2008.

KELLER, J. B. Darcy's law for flow in porous media and the two-space method. In: SYERNBERG, R. L.; KATIMOWSKI, A. J.; PAPADKIS, J. S. (Ed.). **Nonlinear Partial Differential Equations in Engineering and Applied Science.** [S.l.]: Dekker, 1980. p.429–443.

KHISAEVA, Z. F.; OSTOJA-STARZEWSKI, M. Scale Effects in Infinitesimal and Finite Thermoelasticity of Random Composites. **Journal of Thermal Stresses**, [S.l.], v.30, p.587–603, 2007.

KILIC, H.; HAJ-ALI, R. Elastic-degrading analysis of pultruded composite structures. **Composite Structures**, [S.l.], v.60, p.43–55, 2003.

KOLMOGOROV, A. N.; FOMIN, S. V. **Elementos de la teoria de Funciones y del Analisis Funcional.** [S.l.]: Mir, 1975.

LARSSON, S.; THOMÉE, V. **Partial Differential Equations with Numerical Methods.** [S.l.]: Springer, 2003.

LEE, K.; GHOSH, S. A microstructure based numerical method for constitutive modeling of composite and porous materials. **Materials Science and Engineering A**, [S.l.], v.272, p.120–133, 1999.

LEITHOLD, L. **O Cálculo com Geometria Analítica Vol. 1.** [S.l.]: Editora Habra Ltda, 1994.

LEITZKE, B. **Soluções Assintóticas Formais de Segunda Ordem na Homogeneização Assintótica de Meios Microperiódicos.** 2017. Dissertação de Mestrado — PPGMMat/UFPEL, Pelotas/RS.

LEMAIRE, T.; KAISER, J.; NAILI, S.; SANSALONE, V. Textural versus electrostatic exclusion-enrichment effects in the effective chemical transport within the cortical bone: A numerical investigation. **International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering**, [S.l.], v.29, p.1223–1242, 2013.

LEÓN-MECÍAS, A. M.; PÉREZ-FERNÁNDEZ, L. D.; BRAVO-CASTILLERO, J.; SABINA, F. J. Tight bounds for three-dimensional nonlinear incompressible elastic composites. **International Journal of Engineering Science**, [S.l.], v.46, p.1087–1097, 2008.

LEVY NETO, F. **Compósitos Estruturais**. São Paulo: Blucher, 2012.

LIMA, E. L. A Equação do Terceiro Grau. **Matemática Universitária**, [S.l.], v.5, p.9–23, 1987.

LIMA, E. L. **Curso de Análise Vol. 1**. [S.l.]: IMPA, 2013.

LIMA, M. P. de. **Homogeneização matemática de meios micro-heterogêneos com estrutura periódica**. 2016. Dissertação de Mestrado — PPGMMat/UFPEL, Pelotas/RS.

LIPTON, R.; VERNESCU, B. Composite with Imperfect Interface. **Proceedings of the Royal Society**, [S.l.], v.452, p.329–358, 1996.

LORENZ, L. Über die Refraktionskonstante. **Annalen der Physik**, [S.l.], v.247, p.70–103, 1880.

LÓPEZ, G.; BRAVO, J.; CRUZ, M. E.; GUINOVART, R.; RODRÍGUEZ, R. Cotas variacionales para coeficientes efectivos en compuestos con contacto imperfecto. **Revista Visión Electrónica**, [S.l.], v.7, n.1, p.53–64, 2013.

LÓPEZ-REALPOZO, J. C.; RODRÍGUEZ-RAMOS, R.; DÍAZ, R. G.; CASTILLERO, J. B.; SABINA, F. J. Compuestos elásticos no lineales con condiciones de contacto imperfectas. **Revista Electrónica Nova Scientia**, [S.l.], v.1, n.1, p.53–64, 2008.

LÓPEZ-RUIZ, G.; BRAVO-CASTILLERO, J.; BRENNER, R.; CRUZ, M. E.; GUINOVART-DÍAZ, R.; PÉREZ-FERNÁNDEZ, L. D.; RODRÍGUEZ-RAMOS, R. Improved variational bounds for conductive periodic composites with 3D microstructures and nonuniform thermal resistance. **ZAMP**, [S.l.], v.66, n.5, p.2881–2898, 2015.

MARA, N. A.; BEYERLEIN, I. J. Review: effect of bimetal interface structure on the mechanical behavior of CuNb fccbcc nanolayered composites. **Journal of Material Science**, [S.l.], v.49, p.64976516, 2014.

MARCHENKO, V. A.; KHRUSLOV, E. Y. **Boundary Value Problems in Domains with Fine-Grained Boundary**. Kiev: Naukova Dumba, 1974.

MAXWELL, J. C. **Treatise on Electricity and Magnetism**. Oxford: Clarendon Press, 1873.

MERODIO, J.; OGDEN, R. Mechanical response of fiber-reinforced incompressible non-linearly elastic solids. **International Journal of Non-Linear Mechanics**, [S.l.], v.40, p.213–227, 2005.

NOWACKI, B.; ZANLORENZI, C.; BAEV, A.; PRASAD, P.; AKCELRUD, L. Interplay between structure and chiral properties of polyfluorene derivatives. **Polymer**, [S.l.], v.132, p.98–105, 2017.

OLEINIK, O. A. On convergence of solutions of elliptic and parabolic equations when coefficients weakly converge. **Uspekhi Matematicheskikh Nauk**, [S.l.], v.30, n.4, p.257–258, 1975.

PADMANABHAN, K. A.; PRABU, S. B.; ALI, A. A. On the Nuances in the Power Law Description and Interpretation of High Homologous Temperature Creep and Superplasticity Data. **Defect and Diffusion Forum**, [S.l.], v.385, p.27–32, 2018.

PANASENKO, G. P. Homogenization for Periodic Media: from Microscale to Macroscale. **Physics of Atomic Nuclei**, [S.l.], v.71, n.4, p.681–694, 2008.

PENTA, R.; GERISCH, A. The asymptotic homogenization elasticity tensor properties for composites with material discontinuities. **Continuum Mechanics and Thermodynamics**, [S.l.], v.29, p.187–206, 2017.

PERALTA, N.; MOSALAM, K.; ASCE, M.; LI, S. Multiscale Homogenization Analysis of the Effective Elastic Properties of Masonry Structures. **Journal of Materials in Civil Engineering**, [S.l.], v.28, n.8, 2016.

PÉREZ-FERNÁNDEZ, L. D.; LEÓN-MECÍAS, A. M.; ; BRAVO-CASTILLERO, J. Negligible microstructure in a class of porous nonlinear materials via variational bounds. **Mathematical Methods in the Applied Sciences**, [S.l.], v.41, p.504–511, 2018.

POISSON, S. Mémoire sur la théorie du magnétisme. **Mémoire de l'Académie Royale des sciences de l'Institute (imperial) de France**, [S.l.], v.V, p.247–338, 1824.

PONTE-CASTAÑEDA, P.; SUQUET, P. Nonlinear Composites. **Advances in Applied Mechanics**, [S.l.], v.34, p.171–303, 1998.

PONTE-CASTAÑEDA, P.; WILLIS, J. Variational second-order estimates for nonlinear composites. **Proceedings of the Royal Society of London A**, [S.l.], v.455, p.1799–1811, 1999.

RAYLEIGH, L. On the influence of obstacles arranged in a rectangular order upon the properties of medium. **Philosophical Magazine**, [S.l.], v.34, p.481–502, 1892.

ROHAN, E.; NAILI, S.; NGUYEN, V. Wave propagation in a strongly heterogeneous elastic porous medium: Homogenization of Biot medium with double porosities. **Comptes Rendus Mécanique**, [S.I.], v.344, p.569–581, 2016.

ROHINI, R.; KATTI, P.; BOSE, S. Tailoring the interface in graphene/thermoset polymer composites: A critical review. **Polymer**, [S.I.], v.70, p.A17–A34, 2015.

SADD, M. H. **Elasticity: Theory, Applications, and Numerics**. [S.I.]: Elsevier Academic Press, 2014.

SANCHEZ-PALENCIA, E. Solutions périodiques par rapport aux variables d'espace et applications. **Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences Série A - Sciences Mathématiques**, [S.I.], v.271, p.1129–1132, 1970.

SANCHEZ-PALENCIA, E. **Nonhomogeneous Media and Vibration Theory**. New York: Springer-Verlag, 1980.

SHABANA, Y. M.; WANG, G. Thermomechanical modeling of polymer nanocomposites by the asymptotic homogenization method. **Acta Mechanica**, [S.I.], v.224, p.1213–1224, 2013.

SIXTO-CAMACHO, L.; BRAVO-CASTILLERO, J.; BRENNER, R.; GUINOVART-DÍAZ, R.; MECHKOUR, H.; RODRÍGUEZ-RAMOS, R.; SABINA, F. Asymptotic homogenization of periodic thermo-magneto-electro-elastic heterogeneous media. **Computers and Mathematics with Applications**, [S.I.], v.66, p.2056–2074, 2013.

SONG, H.; GAO, C.; LI, J. Two-dimensional problem of a crack in thermoelectric materials. **Journal of Thermal Stresses**, [S.I.], v.38, p.325–337, 2015.

SPENCER, A. J. M. **Continuum Mechanics**. [S.I.]: Dover Publications, 2004.

SU, F.; XU, Z.; CUI, J.; DONG, Q. Multi-scale Method for The Quasi-Periodic Structures of Composite Materials. **Applied Mathematics and Computation**, [S.I.], v.217, n.12, p.5847–5852, 2011a.

SU, F.; XU, Z.; DONG, Q.; JIANG, H. Multiscale Computation Method for Parabolic Problems of Composite Materials. **Applied Mathematics and Computation**, [S.I.], v.217, n.21, p.8337–8342, 2011b.

SVIERCOSKI, R.; TRAVIS, B.; HYMAN, J. Analytical effective coefficient and a first-order approximation for linear flow through block permeability inclusions. **Computers and Mathematics with Applications**, [S.I.], v.55, p.2118–2133, 2008.

TORQUATO, S. **Random Heterogeneous Materials - Microstructure and Macroscopic Properties**. [S.I.]: Springer, 2001.

TORQUATO, S.; RINTOUL, M. D. Effect of the Interface on the Properties of Composite Media. **Physical Review Letters**, [S.l.], v.75, n.22, p.4067–4070, 1995.

TRAN, T.; MONCHIET, V.; BONNET, G. Microstructural effects in nonlinear stratified composites. **International Journal of Solids and Structures**, [S.l.], v.51, p.3184–3195, 2014.

VLACK, L. H. V. **Princípios de Ciência dos Materiais**. [S.l.]: Editora Edgard Blücher, 2000.

VOLOKH, K. Y. Hyperelasticity with softening for modeling materials failure. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, [S.l.], v.55, p.2237–2264, 2007.

VOLOKH, K. Y. Prediction of arterial failure based on a microstructural bi-layer fiber-matrix model with softening. **Journal of Biomechanics**, [S.l.], v.41, n.2, p.447–453, 2008.

VOLOKH, K. Y. Review of the energy limiters approach to modeling failure of rubber. **Rubber Chemistry and Technology**, [S.l.], v.86, p.470–487, 2013.

VOLOKH, K. Y. Non-linear thermoelasticity with energy limiters. **International Journal of Non-Linear Mechanics**, [S.l.], v.76, p.169–175, 2015.

VOLOKH, K. Y. An explanation of the drag reduction via polymer solute. **Acta Mechanica**, [S.l.], v.229, p.4295–4301, 2018.

WAN, Y.; FAN, L.; YU, H. Numerical modeling of the effective electromechanical properties of cellular piezoelectric film by asymptotic homogenization. **Advanced Composite Materials**, [S.l.], v.22, n.2, p.123–138, 2013.

WANG, G.; HUANG, J. P. Theory of third harmonic generation in random composites of nonlinear dielectrics. **Journal of Applied Physics**, [S.l.], v.84, n.7, p.3451–3458, 1998.

WEI, E.; POON, Y. M. Effective thermal conductivity of graded nonlinear composites with heat contact resistance. **Physics Letters A**, [S.l.], v.359, p.685–692, 2006.

WHEELER, L. T. Maximum Principles on Classical Elasticity. **Mathematical Problems in Elasticity. Series on Advances in Mathematics for Applied Sciences**, [S.l.], v.39, p.157–185, 1996.

ZEMAN, J. **Analysis of Mechanical Properties of Fiber-reinforced Composites with Random Microstructure**. 1999. Tese de Doutorado — Faculty of Civil Engineering/Czech Technical University, Praga/República Checa.

ZEMAN, J.; SEJNOHA, M. Numerical Evaluation of Effective Properties of graphite fiber reinforced tow impregnated by polymer matrix. **Journal of Mechanics and Physics of Solids**, [S.l.], v.49, p.69–90, 2001.

APÊNDICE A DETALHES DA OBTENÇÃO DOS TERMOS U_1 E U_2 PARA O CASO DO COMPÓSITO BIFÁSICO LINEAR, COM CONTATO IMPERFEITO ENTRE AS FASES

Estando satisfeita a condição do Lema 7 para o problema em (4.76), será considerado, como no caso contínuo, a separação de variáveis $u_1(x, y) = N_1(y) \frac{dv_0}{dx}$, a qual transforma o problema (4.76) em:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dy} \left[K(y) \frac{dN_1}{dy} \right] = -\frac{dK}{dy}, \quad y \in (0, 1) / \{c_1\} \\ \left[K(y) \left(\frac{dN_1}{dy} + 1 \right) \right] \Big|_{y=c_1} = 0 \\ \llbracket N_1 \rrbracket_{y=c_1} = \frac{1}{\beta} \left[K_1 \left(\frac{dN_1}{dy} + 1 \right) \right] \Big|_{y=c_1}, \quad \beta > 0 \\ N_1(0) = 0 \end{array} \right. \quad (\text{A.1})$$

Reescrevendo a equação deste novo problema, tem-se:

$$\frac{d}{dy} \left[K(y) \left(\frac{dN_1}{dy} + 1 \right) \right] = 0, \quad (\text{A.2})$$

de onde, integrando¹, conclui-se que:

$$\left[K(s) \left(\frac{dN_1}{dy} + 1 \right) \right] \Big|_{s=0}^{s=c_1^-} + \left[K(s) \left(\frac{dN_1}{dy} + 1 \right) \right] \Big|_{s=c_1^+}^{s=y} = 0, \quad (\text{A.3})$$

chegando-se a:

$$K(y) \left(\frac{dN_1}{dy} + 1 \right) - \left[K(y) \left(\frac{dN_1}{dy} + 1 \right) \right] \Big|_{y=c_1} = C_1, \quad (\text{A.4})$$

com $C_1 = \left[K(y) \left(\frac{dN_1}{dy} + 1 \right) \right] \Big|_{y=0}$. Da condição de contato perfeito para o fluxo, (A.4)

¹Considerando $y \in (c_1, 1]$, já que o resultado para $y \in [0, c_1)$ corresponde ao caso contínuo.

transforma-se em:

$$K(y) \left(\frac{dN_1}{dy} + 1 \right) = C_1. \quad (\text{A.5})$$

De isolar dN_1/dy em (A.5), e aplicar o operador média, obtém-se:

$$N_1|_{y=1} - \llbracket N_1 \rrbracket_{y=c_1} - N_1|_{y=0} = C_1 \langle K^{-1} \rangle - 1, \quad (\text{A.6})$$

e da condição de contato $\llbracket N_1 \rrbracket_{y=c_1} = \frac{1}{\beta} \left[K_1 \left(\frac{dN_1}{dy} + 1 \right) \right] \Big|_{y=c_1}$, e da 1-periodicidade de N_1 , chega-se a:

$$C_1 = \hat{K} \left(1 - \frac{1}{\beta} \left[K_1 \left(\frac{dN_1}{dy} + 1 \right) \right] \Big|_{y=c_1} \right), \quad (\text{A.7})$$

com $\hat{K} = \langle K^{-1} \rangle^{-1}$.

Agora, de isolar novamente dN_1/dy em (A.5) e integrar, mas agora em relação a y (com $y \in (c_1, 1]$), tem-se que:

$$N_1|_{s=y} - \llbracket N_1 \rrbracket_{y=c_1} - N_1|_{s=0} = \int_0^y \left(\frac{C_1}{K(s)} - 1 \right) ds \quad (\text{A.8})$$

de onde chega-se a:

$$N_1(y) = \int_0^y \left(\frac{C_1}{K(s)} - 1 \right) ds + \frac{1}{\beta} \left[K_1 \left(\frac{dN_1}{dy} + 1 \right) \right] \Big|_{y=c_1}, \quad (\text{A.9})$$

com C_1 conforme (A.7). Logo, tem-se o seguinte:

$$N_1(y) = \begin{cases} \int_0^y \left(\frac{\hat{K}}{K(s)} - 1 \right) ds, & y \in [0, c_1) \\ N_1(c_1^-) + \frac{1}{2\beta} \left[K_1 \left(\frac{dN_1}{dy} + 1 \right) \right] \Big|_{y=c_1}, & y = c_1 \\ \int_0^y \left(\frac{C_1}{K(s)} - 1 \right) ds + \frac{1}{\beta} \left[K_1 \left(\frac{dN_1}{dy} + 1 \right) \right] \Big|_{y=c_1}, & y \in (c_1, 1) \\ 0, & y = 1 \end{cases}. \quad (\text{A.10})$$

Agora para o termo u_2 , se terá o seguinte problema:

$$P_L^{(2)} : \begin{cases} \frac{\partial}{\partial y} \left(K(y) \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) = -K(y) \frac{d^2 v_0}{dx^2} - K(y) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \left(K(y) \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) + f(x), & y \in (0, l) / \{c_1\} \\ \llbracket K(y) \left(\frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) \rrbracket_{y=c_1} = 0 \\ \llbracket u_2 \rrbracket_{y=c_1} = \frac{1}{\beta} \left[K_1 \left(\frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) \right] \Big|_{y=c_1} \\ u_2(0, 0) = u_2(l, 0) = 0 \end{cases} \quad (\text{A.11})$$

cuja solução 1-periódica será garantida pelo Lema 5, da Seção 4.2.2, pois a condição de contato é nula, e com

$$F_0(y) = -K(y) \frac{d^2 v_0}{dx^2} - K(y) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial y} + f(x). \quad (\text{A.12})$$

Observando que:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\left(\frac{dv_0}{dx} + \frac{\bar{\sigma}}{\beta} \right) \frac{\hat{K}}{K(s)} - \frac{dv_0}{dx} \right) = \left(\frac{\hat{K}}{K(y)} - 1 \right) \frac{d^2 v_0}{dx^2}, \quad (\text{A.13})$$

a equação (A.12) pode ser reescrita como:

$$F_0(y) = -K(y) \frac{d^2 v_0}{dx^2} - \hat{K} \frac{d^2 v_0}{dx^2} + K(y) \frac{d^2 v_0}{dx^2} + f(x), \quad (\text{A.14})$$

e, de satisfazer a condição do referido lema, levando em conta as condições de contorno para $v_0(x)$, chega-se ao Problema Homogeneizado P_H , que será o mesmo do caso do contato perfeito em (2.86).

Considerando $v_0(x)$ solução de P_H , u_2 será considerada com variáveis separadas na forma:

$$u_2(x, y) = N_2(y) \frac{d^2 v_0}{dx^2}. \quad (\text{A.15})$$

Considerando (A.15), u_1 em (??) e $v_0(x)$ solução de P_H em (2.86), o problema para obtém-se de (A.11) o problema para $N_2(y)$, a saber:

$$P_L^{(2)} : \begin{cases} \frac{d}{dy} \left(K(y) \frac{dN_2}{dy} \right) = -\frac{d}{dy} [K(y) N_1(y)], \quad y \in (0, l) - \{c_1\} \\ \left[\left[K(y) \left(\frac{dN_2}{dy} + N_1 \right) \right] \right]_{y=c_1} = 0 \\ \left[[u_2] \right]_{y=c_1} = \frac{1}{\beta} \left[K_1 \left(\frac{dN_2}{dy} + N_1 \right) \right] \Big|_{y=c_1} \\ N_2(0) = 0 \end{cases}, \quad (\text{A.16})$$

Reescrevendo a equação u_2 em (A.16), tem-se:

$$\frac{d}{dy} \left[K(y) \left(\frac{dN_2}{dy} + N_1 \right) \right] = 0, \quad (\text{A.17})$$

e de integrar A.17 em relação a y ($y \in (c_1, 1]$), obtém-se:

$$K(s) \left(\frac{dN_2}{dy} + N_1 \right) \Big|_{s=y} - \left[\left[K(y) \left(\frac{dN_2}{dy} + N_1 \right) \right] \right]_{y=c_1} = C_2 \quad (\text{A.18})$$

onde $C_2 = K(y) \left(\frac{dN_2}{dy} + N_1 \right) \Big|_{y=0}$. Da condição de contato nula para o fluxo em $P_L^{(2)}$

em (A.16), e isolando-se dN_2/dy , chega-se a:

$$\frac{dN_2}{dy} = \frac{C_2}{K(y)} - N_1(y), \quad (\text{A.19})$$

e aplicando o operador média, para obter C_2 , tem-se:

$$N_2|_{y=1} - \llbracket N_2 \rrbracket_{y=c_1} - N_2|_{y=0} = C_2 \langle K^{-1} \rangle - \langle N_1 \rangle, \quad (\text{A.20})$$

de onde, das condições de contato e contorno para N_2 :

$$C_2 = \hat{K} \left[\langle N_1 \rangle - \frac{1}{\beta} \left[K_1 \left(\frac{dN_2}{dy} + N_1 \right) \right] \Big|_{y=c_1} \right]. \quad (\text{A.21})$$

Agora, de integrar a equação em (A.19) em relação a y , com $y \in (c_1, 1)$, chega-se em:

$$N_2(y) - \llbracket N_2 \rrbracket_{y=c_1} - N_2(0) = \int_0^y \left(\frac{C_2}{K(s)} - N_1(s) \right) ds, \quad (\text{A.22})$$

ou ainda,

$$N_2(y) = \int_0^y \left(\frac{C_2}{K(s)} - N_1(s) \right) ds + \frac{1}{\beta} \left[K_1 \left(\frac{dN_2}{dy} + N_1 \right) \right] \Big|_{y=c_1} \quad (\text{A.23})$$

com C_2 conforme (A.21).

Agora, considerando $y \in [0, 1]$, chega-se a:

$$N_2(y) = \begin{cases} \int_0^y \left(\frac{\langle N_1 \rangle \hat{K}}{K(s)} - N_1(s) \right) ds, & y \in [0, c_1) \\ N_2(c_1^-) + \frac{1}{2} \frac{1}{\beta} \left[K_1 \left(\frac{dN_2}{dy} + N_1 \right) \right] \Big|_{y=c_1}, & y = c_1 \\ \int_0^y \left(\frac{C_2}{K(s)} - N_1(s) \right) ds + \frac{1}{\beta} \left[K_1 \left(\frac{dN_2}{dy} + N_1 \right) \right] \Big|_{y=c_1}, & y \in (c_1, 1) \\ 0, & y = 1 \end{cases} \quad (\text{A.24})$$

Aqui é interessante chamar a atenção para o fato de que, quando $\beta \rightarrow \infty$, as soluções $N_1(y)$ (em (A.10)) e $N_2(y)$ (em A.24) convergem para as respectivas soluções do caso de contato perfeito (Seção 4.2.2), em (4.38) e (4.44), respectivamente.

APÊNDICE B DETALHES DA OBTENÇÃO DOS TERMOS U_1 E U_2 PARA O CASO DO COMPÓSITO BIFÁSICO NÃO LINEAR, COM CONTATO IMPERFEITO ENTRE AS FASES

B.1 Demonstração do Lema 10

Demonstração. Integrando a equação do problema em relação a y , levando-se em conta a condição de contato para o fluxo, chega-se a:

$$\sigma \left(y, \bar{\kappa} + \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial y} \right) = \bar{\sigma}, \quad (\text{B.1})$$

conforme na demonstração do Lema 9 na Seção 4.3.1, pois a condição de contato para o fluxo é a mesma. Seguindo a metodologia da referida seção, define-se uma função $T(y, \kappa, \bar{\sigma})$ como em (4.111), tal que:

$$\frac{\partial T}{\partial \kappa} = \frac{\partial \sigma}{\partial \kappa}. \quad (\text{B.2})$$

Sabendo que $\partial \sigma / \partial \kappa > 0$, é aplicável novamente o teorema da função implícita (ILYIN; POZNYAK, 1982), garantindo que existe uma função $\kappa(y, \bar{\sigma})$, inversa de $T(y, \kappa)$ em relação a κ , contínua e diferenciável numa vizinhança de um ponto $(y, \bar{\sigma})$, 1-periódica em y , na qual:

$$\kappa(y, \bar{\sigma}) = \bar{\kappa} + \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial y}. \quad (\text{B.3})$$

Isolando $\partial \mathcal{N}_1 / \partial y$ e integrando em relação a y , no momento para $y \in [0, c_1)$, obtém-se diretamente que:

$$\mathcal{N}_1(y, \bar{\kappa}) = \int_0^y (\kappa(s, \bar{\sigma}) - \bar{\kappa}) ds, \quad (\text{B.4})$$

devido à continuidade neste intervalo. Agora para $y \in (c_1, 1)$, tem-se que:

$$\mathcal{N}_1(y, \bar{\kappa}) - \llbracket \mathcal{N}_1 \rrbracket_{y=c_1} - \mathcal{N}_1(0, \bar{\kappa}) = \int_0^y (\kappa(s, \bar{\sigma}) - \bar{\kappa}) ds, \quad (\text{B.5})$$

e das condições de contato e de contorno para \mathcal{N}_1 , chega-se a:

$$\mathcal{N}_1(y, \bar{\kappa}) = \int_0^y (\kappa(s, \bar{\sigma}) - \bar{\kappa}) ds - \frac{1}{\beta} \sigma_1 \left(y, \bar{\kappa} + \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial y} \right) \Big|_{y=c_1}, \quad (\text{B.6})$$

ou ainda, levando-se em conta (B.1),

$$\mathcal{N}_1(y, \bar{\kappa}) = \int_0^y (\kappa(s, \bar{\sigma}) - \bar{\kappa}) ds - \frac{\bar{\sigma}}{\beta}. \quad (\text{B.7})$$

Assim, conclui-se que:

$$\mathcal{N}_1(y, \bar{\kappa}) = \begin{cases} \int_0^y (\kappa(s, \bar{\sigma}) - \bar{\kappa}) ds, & y \in [0, c_1) \\ N_1(c_1^-) + \frac{\bar{\sigma}}{\beta}, & y = c_1 \\ \int_0^y (\kappa(s, \bar{\sigma}) - \bar{\kappa}) ds + \frac{\bar{\sigma}}{\beta}, & y \in (c_1, 1) \\ 0, & y = 1 \end{cases}. \quad (\text{B.8})$$

A definição de $\mathcal{N}_1|_{y=c_1}$ em (B.8) foi motivada pelo Teorema de Dirichlet para Séries de Fourier (Teorema 8), conforme foi feito no Apêndice A, para o caso linear.

Agora, a fim de garantir a 1-periodicidade em y desta solução, analisa-se a condição necessária para que $\mathcal{N}_1(y+1, \bar{\kappa}) - \mathcal{N}_1(y, \bar{\kappa}) = 0$.

Para tornar mais claras as equações envolvidas, seguindo a notação usada no Apêndice A, será considerado $\mathcal{H}(s) = \kappa(s, \bar{\sigma}) - \bar{\kappa}$, e assim, para $\in [0, c_1)$ se terá:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_1(y+1, \bar{\kappa}) - \mathcal{N}_1(y, \bar{\kappa}) &= \int_0^{c_1^-} \mathcal{H}(s) ds + \int_{c_1^+}^{1^-} \mathcal{H}(s) ds - \frac{\bar{\sigma}}{\beta} + \int_{1^+}^{y+1} \mathcal{H}(s) ds - \\ &- \int_0^y \mathcal{H}(s) ds = \int_y^{c_1^-} \mathcal{H}(s) ds + \int_{c_1^+}^{1^-} \mathcal{H}(s) ds + \\ &+ \int_{1^+}^{y+1} \mathcal{H}(s) ds - \frac{\bar{\sigma}}{\beta} = \langle \mathcal{H} \rangle - \frac{\bar{\sigma}}{\beta}, \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

e quando $\in (c_1, 1)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_1(y+1, \bar{\kappa}) - \mathcal{N}_1(y, \bar{\kappa}) &= \int_0^{c_1^-} \mathcal{H}(s) ds + \int_{c_1^+}^{1^-} \mathcal{H}(s) ds - \frac{\bar{\sigma}}{\beta} + \int_{1^+}^{(c_1+1)^-} \mathcal{H}(s) ds \\ &+ \int_{(c_1+1)^+}^{y+1} \mathcal{H}(s) ds - \frac{\bar{\sigma}}{\beta} - \left(\int_0^{c_1^-} \mathcal{H}(s) ds + \int_{c_1^+}^y \mathcal{H}(s) ds - \frac{\bar{\sigma}}{\beta} \right) \quad (\text{B.10}) \\ &= \int_y^{1^-} \mathcal{H}(s) ds + \int_{1^+}^{(c_1+1)^-} \mathcal{H}(s) ds + \int_{(c_1+1)^+}^{y+1} \mathcal{H}(s) ds - \frac{\bar{\sigma}}{\beta} = \\ &= \langle \mathcal{H} \rangle - \frac{\bar{\sigma}}{\beta}. \end{aligned}$$

Assim, de ambos os casos, necessita-se que $\langle \mathcal{H} \rangle = \frac{\bar{\sigma}^1}{\beta}$ (análogo ao resultado encontrado para o caso linear sob condição de contato perfeito no Apêndice A), para que $\mathcal{N}_1(y, \bar{\kappa})$ seja 1-periódica em y . Entretanto, tal condição é satisfeita naturalmente, já que $\kappa(y, \bar{\sigma}) = \bar{\kappa} + \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial y}$ (B.3). \square

B.2 Obtenção de u_1, u_2

Seguindo o mesmo procedimento na demonstração do Lema 10 para o problema $P_L^{\frac{dv_0}{dx}}$ em (4.144), com $\kappa \equiv \epsilon$, $\bar{\kappa} \equiv \frac{dv_0}{dx}$ e $\mathcal{N}_1 \equiv u_1$, chega-se a:

$$u_1(x, y) = \begin{cases} \int_0^y \left(\phi(s, \bar{\sigma}) - \frac{dv_0}{dx} \right) ds, & y \in [0, c_1) \\ u_1|_{y=c_1^-} + \frac{\bar{\sigma}}{\beta}, & y = c_1 \\ \int_0^y \left(\phi(s, \bar{\sigma}) - \frac{dv_0}{dx} \right) ds + \frac{\bar{\sigma}}{\beta}, & y \in (c_1, 1) \\ 0, & y = 1 \end{cases} \quad (\text{B.11})$$

Agora para u_2 , com (3.16), (4.103), (4.140) e (2.51) forma-se o problema:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \left(y, \frac{dv_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \frac{\partial u_2}{\partial y} \right] = f(x) - \frac{\partial \sigma}{\partial x} \left(y, \frac{dv_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \left(y, \frac{dv_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \frac{\partial u_1}{\partial x} \right] \\ \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) \frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \left(y, \frac{dv_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \right]_{y=c_1} = 0 \\ \left[u_2 \right]_{y=c_1} = \frac{1}{\beta} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) \frac{\partial \sigma_1}{\partial \epsilon} \left(\frac{dv_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \Big|_{y=c_1} \\ u_2(0, 0) = u_2(l, 0) = 0 \end{cases} \quad (\text{B.12})$$

para $y \in (0, 1) \setminus \{c_1\}$. Para garantir a existência e unicidade de u_2 1-periódica em y , utiliza-se do Lema 7 (Seção 4.2.5), com $F_0(y) = f(x) - \frac{\partial \sigma}{\partial x} \left(y, \frac{dv_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right)$, $F_1(y) = -\frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \left(y, \frac{dv_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \frac{\partial u_1}{\partial x}$ e $K(y) = \frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \left(y, \frac{dv_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right)$.

Da condição necessária de que $\langle F_0 \rangle = 0$, obtém-se que:

$$\frac{d}{dx} \left[\hat{\sigma} \left(\frac{dv_0}{dx} \right) \right] = f(x), \quad (\text{B.13})$$

com $\hat{\sigma} \left(\frac{dv_0}{dx} \right) = \langle \bar{\sigma}(x) \rangle$, já quem em $\epsilon = \frac{dv_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y}$, $\sigma(y, \epsilon)$ não depende de y (isto é, $\sigma(y, \epsilon) = \bar{\sigma}(x)$). A equação (B.13) juntamente com as condições de contorno para v_0 , compõem o problema homogeneizado P_H , como em (2.86).

Agora, considerando a existência da solução v_0 de (2.86), é garantida a existência de u_2 1-periódica em y em (B.12), e a equação do problema em (B.12) é simplificada

¹A passagem $\int_y^{y+1} \mathcal{H}(s) ds = \langle \mathcal{H} \rangle$ é possível apenas porque a inversa $\epsilon(y, \bar{\sigma})$ é 1-periódica em y , fazendo com que $\mathcal{H}(y)$ também o seja.

para:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \left(y, \frac{dv_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) \right] = 0, \quad (\text{B.14})$$

e de integrá-la em relação a $y \in (c_1, 1]$, obtém-se:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \left(y, \frac{dv_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) - \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) \frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \left(y, \frac{dv_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \right]_{y=c_1} = \bar{D}, \quad (\text{B.15})$$

onde $\bar{D} = \int_0^y \frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} (s, \zeta) \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) ds \Big|_{s=0}$. Da condição de contato perfeito para o fluxo no problema em (B.12), (B.15) torna-se:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \left(y, \frac{dv_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) = \bar{D}, \quad (\text{B.16})$$

da qual, isolando $\partial u_2 / \partial y$, chega-se a:

$$\frac{\partial u_2}{\partial y} = \bar{D} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \left(y, \frac{dv_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \right)^{-1} - \frac{\partial u_1}{\partial x}. \quad (\text{B.17})$$

Aplicando o operador média em (B.17), e da condição de contato imperfeito para u_2 no problema em (B.12), obtém-se que:

$$\bar{D} = \left(\left\langle \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \right)^{-1} \right\rangle + \frac{1}{\beta} \right)^{-1} \left\langle \frac{\partial u_1}{\partial x} \right\rangle. \quad (\text{B.18})$$

E de integrar (B.17) em relação à y^2 , chega-se à expressão para a solução $u_2(x, y)$, a saber:

$$u_2(x, y) = \begin{cases} \int_0^y \bar{D} \left(\left(\frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} (s, \zeta) \right)^{-1} - \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) ds, & y \in [0, c_1) \\ u_2|_{y=c_1^-} + \frac{1}{2} \frac{\bar{D}}{\beta}, & y = c_1 \\ \int_0^y \bar{D} \left(\left(\frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} (s, \zeta) \right)^{-1} - \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) ds + \frac{\bar{D}}{\beta}, & y \in (c_1, 1) \\ 0, & y = 1 \end{cases}. \quad (\text{B.19})$$

com \bar{D} como em (B.17), sendo a escolha em $y = c_1$ oriunda do teorema de Dirichlet para uma Série de Fourier (Teorema 8).

²Como tem sido feito, considerando separadamente os casos $y \in [0, c_1)$ e $y \in (c_1, 1]$.

APÊNDICE C MÉTODOS NUMÉRICOS

C.1 Método de bissecção

O Método de Bissecção é usualmente utilizado para determinar as raízes de alguma função. É um método conceitualmente claro, que converge para a raiz procurada desde que algumas condições estejam satisfeitas, entretanto, sua convergência é considerada lenta (BURDEN; FAIRES; BURDEN, 2015). Sua base é o teorema do Valor Intermediário, a saber:

Teorema 11. (LIMA, 2013) *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Para qualquer d que está entre os valores de $f(a)$ e $f(b)$, então existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = d$.*

Deste teorema, pode-se concluir que dados a e b tal que $f(a)$ e $f(b)$ têm sinais contrários ($f(a) \cdot f(b) < 0$), com f contínua, então existe pelo menos uma raiz da função no intervalo (a, b) . No procedimento, o intervalo $[a, b]$ é seccionado no ponto médio p_1 , sendo verificado em qual dos subintervalos está a raiz (testando $f(a) \cdot f(p_1) < 0$ ou $f(p_1) \cdot f(b) < 0$), e assim segue-se nesse processo iterativo, construindo uma sequência $\{p_i\}_{i=1}^{\infty}$ de pontos médios que convergirá para a raiz p do intervalo.

A exatidão (δ) se dará pelo comprimento do subintervalo após n iterações, a saber:

$$\left| \frac{b-a}{2^{n+1}} \right| < \delta. \quad (\text{C.1})$$

Na implementação computacional do método se faz necessário determinar critérios de parada do processo iterativo, sendo utilizados geralmente a exatidão δ pretendida e um número máximo de iterações (N) (este segundo, para evitar a ocorrência de laços infinitos). Através de (C.1) N pode ser estimado como:

$$N > \frac{\log [(b-a)/\delta]}{\log 2} - \delta. \quad (\text{C.2})$$

Abaixo, está a ideia do algoritmo computacional do método aplicado neste trabalho, baseado em (BURDEN; FAIRES; BURDEN, 2015):

- Entrada:

- a, b : Extremidades do intervalo;
 - δ : Exatidão pretendida;
 - N : Número máximo de iterações;
- Saída: Aproximação da raiz ou mensagem de erro.
- **Passo 1:** Se $f(a) \cdot f(b) > 0$:
 - Saída: "Não existe raiz neste intervalo".
 - Parar a execução.
 - **Passo 2:** Enquanto $i \leq N$, fazer:
 - **Passo 2.1:** Fazer $p = \frac{a+b}{2}$, $FP = f(p)$ e $i = i + 1$;
 - **Passo 2.2:** Se $FP < \delta$ ou $\frac{b-a}{2} < \delta$:
 - * Saída: p (esta é a aproximação da raiz).
 - * Parar a execução.
 - **Passo 2.4:** Se $FA \cdot FP > 0$: $a = p$; caso contrário: $b = p$.
 - Retorna ao Passo 2.1.
 - **Passo 3:** Mensagem de erro.

Neste trabalho o método foi utilizado primeiramente na Seção 3.2 para encontrar as constantes de integração C_1 e C_0 em (3.43) e (3.52), respectivamente. Percebe-se que não é uma aplicação usual dado que as equações envolvidas não são funções explícitas ou elementares. Desta forma, antes de utilizar o método foi verificado (para os valores de n envolvidos) a continuidade e existência de uma raiz, o que também ajudou a estipular o intervalo $[a, b]$ de procura. Segue, como exemplo, a verificação feita para a equação (3.43) com $n = 1/2$, e $\varepsilon = 1/2$, e $[a, b] = [0, 4]$:

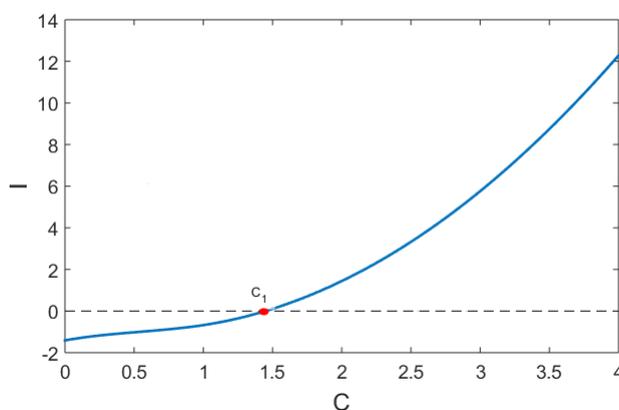


Figura 31: Análise da equação (3.43) para valores possíveis de C_1 entre 0 e 4.

Sendo C os valores possíveis para C_1 e

$$I(C) = \int_0^1 \left(\frac{-s + C}{K^\varepsilon(s)} \right)^{\frac{1}{n}} ds - 1, \quad (\text{C.3})$$

conforme (3.43).

O método foi utilizado também na Seção 4.3.5, para encontrar as raízes das equações (4.167) e (4.168). Nestes, a fim de determinar a lei efetiva $\hat{\sigma}(\bar{\varepsilon})$, fazia-se necessário sucessivas aplicações do método, a fim de encontrar o valor de $\bar{\sigma}$ para cada $\bar{\varepsilon}$. Devido à complexidade dos termos envolvidos, tomou-se como intervalo de procura de cada raiz os valores de 0 até o valor máximo de $\bar{\sigma}$ atingido pelas duas fases do compósito, ou seja, um intervalo $[0, m]$ com:

$$m = \max\{\max\{\bar{\sigma}_1\}, \max\{\bar{\sigma}_2\}\}. \quad (\text{C.4})$$

C.2 Regra de Simpson 1/3

Dentre os métodos de integração numérica um dos mais utilizados são as fórmulas de Newton-Côtes, as quais empregam os valores de $f(x)$ (função a ser integrada), onde os valores de x tomados estão igualmente espaçados (BARROSO et al., 1987).

Na sua forma simples, para aproximar o valor da integral definida $\int_a^b f(x)dx$, através de um polinômio de Taylor de ordem 4, considerando os extremos a e b e o ponto médio x_m , obtém-se a seguinte fórmula:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3} [f(a) + 4f(x_m) + f(b)], \quad (\text{C.5})$$

onde h é o passo entre cada um dos três pontos. Esta fórmula é chamada de Regra de Simpson 1/3 ou ainda de 1ª Regra de Simpson. O erro desta aproximação é estimado por:

$$E_s = \frac{-h^5}{90} f^{(iv)}(\xi), \quad (\text{C.6})$$

com $\xi \in [a, b]$. A obtenção das fórmulas em (C.5) e (C.6) será omitida, mas é facilmente encontrada em bibliografias que abordam métodos numéricos, como as aqui utilizadas: BURDEN; FAIRES; BURDEN (2015) e BARROSO et al. (1987).

Entretanto, na prática, a fim de se obter melhores aproximações, procura-se diminuir o passo h utilizado, a fim de diminuir o erro da aproximação, como pode-se ver por (C.6). Para isto, tem-se a abordagem composta da regra de simpson, onde o intervalo $[a, b]$ é seccionado em um número par n de subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$, com $i = 1, 2, \dots, n$, e

para cada um destes é aplicada a fórmula (C.5). Assim, tem-se que:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_{m,1}) + f(x_1)] + \frac{h}{3}[f(x_1) + 4f(x_{m,2}) + f(x_2)] + \dots + \frac{h}{3}[f(x_{n-1}) + 4f(x_{m,n}) + f(x_n)], \quad (\text{C.7})$$

onde $x_0 = a$, $x_n = b$ e $x_{m,i}$ é o ponto médio de cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. A qual pode ser simplificada para:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3} \left(f(a) + 4f(x_1) + f(b) + \sum_{i=2}^{n/2} (2f(x_{2i-2}) + 4f(x_{2i-1})) \right). \quad (\text{C.8})$$

com esta, tem-se a seguinte estimativa para o erro da aproximação:

$$E_c = \frac{-(b-a)^5}{180n^4} f^{(iv)}(\xi) \quad (\text{C.9})$$

claramente menor que o erro em (C.6).

A ideia do algoritmo computacional aplicado para as integrações numéricas utilizando a Regra de Simpson do 1/3 está descrito a seguir:

- **Entrada:**
 - $[a, b]$: intervalo a ser integrado;
 - $f(x)$: função a ser integrada;
 - n : número par de subintervalos desejado para a integração composta.
- **Saída:** Valor aproximado da integral.
- **Passo 1:** Fazer $h = (b - a)/(n)$ (este será o passo entre os pontos).
- **Passo 2:** Fazer $I = 0$ (valor inicial da integral) e $S = 0$ (valor inicial do acréscimo para cada subintervalo).
- **Passo 3:** Para $i = 2, \dots, n/2$, fazer:
 - **Passo 3.1:** Fazer $S = 2f(x_{2i-2}) + 4f(x_{2i-1})$;
 - **Passo 3.2:** Fazer $I = I + S$;
- O valor final de I corresponde ao valor do somatório em (C.8).
- **Passo 4:** Fazer $Int = \frac{h}{3} (f(a) + 4f(a + h) + f(b) + I)$
- Int é a aproximação desejada.

Este algoritmo foi aplicado para calcular as integrais definidas nas equações (2.131) (Seção 2.2.4) e (3.43) (Seção 3.2).

Entretanto, outro uso deste método é para calcular os valores de funções definidas por integrais, ou seja, $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, o que foi necessário em (2.99) e (2.130), na Seção 2.2.4, e em (3.48), (3.51) e (3.58) na Seção 3.2. Para estes casos, o mesmo algoritmo é aplicado, entretanto, para cada valor de x considerado para expressar a função, isto é, para cada valor $x(i)$, o algoritmo é rodado para o intervalo $[a, x(i)]$, e assim calcula-se o valor de $F(x(i))$.

C.3 Método de Newton (ou Newton-Raphson)

Este é um dos métodos mais eficientes conhecidos para determinação da raiz de uma função (BURDEN; FAIRES; BURDEN, 2015). Uma das formas de introduzi-lo, é através de um polinômio de Taylor, da seguinte forma: Considerando uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $f \in C^2[a, b]$, e um ponto $p_1 \in [a, b]$ como uma primeira aproximação da raiz p , de forma que: $f'(p_1) \neq 0$ e $|p - p_1|$ seja relativamente pequeno, o polinômio de Taylor de ordem 2 para f em uma vizinhança de p_1 será:

$$f(x) = f(p_1) + (x - p_1)f'(p_1) + \frac{(x - p_1)^2}{2}f''(\xi(x)), \quad (\text{C.10})$$

onde $\xi(x)$ é um valor entre x e p_1 .

Tomando $x = p$, e desprezando o termo de segunda ordem, já que considerou-se $|p - p_1|$ pequeno, tem-se de (C.10):

$$0 \approx f(p_1) + (p - p_1)f'(p_1) \quad (\text{C.11})$$

de onde, chega-se a:

$$p \approx p_1 - \frac{f(p_1)}{f'(p_1)} \equiv p_2. \quad (\text{C.12})$$

A equação (C.12) propõe um método iterativo onde:

$$p_{i+1} = g(p_i) = p_i - \frac{f(p_i)}{f'(p_i)}, \quad (\text{C.13})$$

com $i \geq 1$, gerando uma sequência $\{p_i\}_{i=1}^{\infty}$ a qual espera-se convergir para a raiz p .

Abaixo, está a ideia do algoritmo computacional aplicado para este método, baseado em BURDEN; FAIRES; BURDEN (2015):

- Entrada:
 - \mathbf{x} : Vetor com os valores de $\bar{\varepsilon}$ a serem considerados;
 - δ : Exatidão pretendida;

- N : Número máximo de iterações;
 - $\alpha_1, \alpha_2, \dots$: Constantes do problema;
 - $y_0(i)$: Valor inicial da iteração para cada i -ésimo valor do vetor x .
 - $g(y, \alpha_1, \alpha_2, \dots)$: Função de iteração.
- Saída: vetor \mathbf{Y} com as raízes referentes aos termos do vetor \mathbf{x} ou mensagem de erro.
 - Para cada $x(i) \in \mathbf{x}$, enquanto $j \leq N$, fazer:
 - **Passo 1:** $y = g(y_0)$;
 - **Passo 2:** Se $|y - y_0| < \delta$:
 - * **Passo 2.1:** Então y é a raiz e $Y(i) = y$;
 - * **Passo 2.2:** Execução deve parar e retornar para $i + 1$.
 - Caso contrário:
 - **Passo 3:** $j = j + 1$;
 - **Passo 4:** $y_0 = y$;
 - Retorna ao Passo 1.
 - Se $j > N$: Mensagem de erro.

A convergência do método é garantida pelo seguinte teorema:

Teorema 12. (BURDEN; FAIRES; BURDEN, 2015) *Seja $f \in C^2[a, b]$. Se $p \in (a, b)$ tal que $f(p) = 0$ e $f'(p) \neq 0$, então, existe um $\eta > 0$, tal que o Método de Newton gera uma sequência $\{p_i\}_{i=1}^{\infty}$ que converge para p para qualquer aproximação inicial $p_1 \in [p - \eta, p + \eta]$.*

Deste teorema e da obtenção da fórmula de iteração em (C.13), observa-se que a convergência do método depende de uma boa escolha de valor inicial, o que nem sempre é possível, ainda mais por não se ter uma fórmula específica para este η . Entretanto, no geral, as aproximações convergirão de forma rápida para a raiz ou indicarão claramente que a convergência será improvável (BURDEN; FAIRES; BURDEN, 2015).

Neste trabalho, foi usado na seção 4.3.4, para resolver as equações (4.154) e (4.158), ambos com valor inicial expresso em (4.156). Esta escolha justifica-se pelo fato de que as equações (4.154) e (4.158), vistas como funções de $\bar{\sigma}$, apresentaram-se como estritamente crescentes e nulas para $\bar{\sigma} = 0$, para todos valores de $\bar{\epsilon}$ envolvidos. Desta forma, seguindo a lógica do Método da Bisseção, determinando um ponto $\bar{\sigma}_0$ tal qual estas funções fossem positivas, garantiria a existência de uma raiz em $[0, \bar{\sigma}_0]$, contribuindo assim para a convergência do método de Newton. E para a escolha feita em (4.156), este objetivo foi alcançado e o método convergiu.