UNIVERSIDADE FEDERAL DE PELOTAS
Instituto de Física e Matemática
Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática

Dissertação

Solução das Equações de Cinética Espacial da Teoria Multigrupo de Difusão de Nêutrons em Geometria Cartesiana por um Método Iterativo de Fonte

Matheus Gularte Tavares

Pelotas, 2018

Matheus Gularte Tavares

Solução das Equações de Cinética Espacial da Teoria Multigrupo de Difusão de Nêutrons em Geometria Cartesiana por um Método Iterativo de Fonte

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática da Universidade Federal de Pelotas, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Modelagem Matemática

Orientador: Prof. Dr. Claudio Zen Petersen
Coorientador: Prof. Dr. Marcelo Schramm

Pelotas, 2018

Universidade Federal de Pelotas / Sistema de Bibliotecas
Catalogação na Publicação

T231s Tavares, Matheus Gularte

Solução das equações de cinética espacial da teoria multigrupo de difusão de nêutrons em geometria cartesiana por um método iterativo de fonte / Matheus Gularte Tavares ; Claudio Zen Petersen, orientador ; Marcelo Schramm, coorientador. — Pelotas, 2018.

58 f. : il.

Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática, Instituto de Física e Matemática, Universidade Federal de Pelotas, 2018.

1. Equação de difusão de nêutrons. 2. Método iterativo de fonte. 3. Transformada de Laplace. 4. Algoritmo stehfest. 5. Interpolação polinomial. I. Petersen, Claudio Zen, orient. II. Schramm, Marcelo, coorient. III. Título.

CDD : 515.723

Elaborada por Ubirajara Buddin Cruz CRB: 10/901

Matheus Gularte Tavares

Solução das Equações de Cinética Espacial da Teoria Multigrupo de Difusão de Nêutrons em Geometria Cartesiana por um Método Iterativo de Fonte

Dissertação aprovada, como requisito parcial, para obtenção do grau de Mestre em Modelagem Matemática, Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática, Instituto de Física e Matemática, Universidade Federal de Pelotas.

Data da Defesa: 22 de março de 2018

Banca examinadora:

Prof. Dr. Claudio Zen Petersen (Orientador)
Doutor em Engenharia Mecânica pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Brasil

Prof. Dr. Marcelo Schramm (Co-Orientador)
Doutor em Engenharia Mecânica pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Brasil

Prof. Dr. Guilherme Jahnecke Weymar
Doutor em Engenharia Mecânica pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Brasil

Prof. Dr. Glênio Aguiar Gonçalves
Doutor em Engenharia Mecânica pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Brasil

Prof. Dr. Carlos Eduardo Espinosa
Doutor em Engenharia Mecânica pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Brasil

Prof. Dr. Julio Cesar Lombaldo Fernandes
Doutor em Matemática Aplicada pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Brasil

AGRADECIMENTOS

Agradeço,

Aos meus pais, Lúcio e Maria das Graças pelo apoio e incentivo em toda minha vida acadêmica.

Ao meu orientador Prof. Dr. Claudio Zen Petersen por toda paciência, dedicação e amizade que tornaram possível a conclusão deste trabalho.

Ao meu co-orientador Prof. Dr. Marcelo Schramm pelo suporte e auxilio na construção do trabalho.

Aos meus colegas do Programa de Pos-Graduacão em Modelagem Matematica da UFPel que em todos momentos sempre estiveram juntos na elaboração deste trabalho.

Por fim, agradeço a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior(CAPES) pelo suporte financeiro.

RESUMO

TAVARES, Matheus Gularte. **Solução das Equações de Cinética Espacial da Teoria Multigrupo de Difusão de Nêutrons em Geometria Cartesiana por um Método Iterativo de Fonte**. 2018. 57 f. Dissertação (Mestrado em Modelagem Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática, Instituto de Física e Matemática, Universidade Federal de Pelotas, Pelotas, 2018.

Neste trabalho é apresentada uma solução para as equações de cinética espacial da teoria multigrupo de difusão de nêutrons em geometria cartesiana. Para a solução deste problema foi utilizado um método iterativo de fonte baseado na modificação no conhecido método da potência. O método consiste em atribuir uma distribuição inicial para o termo fonte da equação do fluxo rápido, o que faz com que o sistema de equações se torne desacoplado. Para a solução das equações dos fluxos rápido, térmico e das concentrações de precursores de nêutrons atrasados, utiliza-se a técnica da transformada de Laplace na variável temporal resultando em um conjunto transformado de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem que são resolvidas por métodos clássicos da literatura. Após cada iteração os fluxos escalares e as concentrações foram reconstruídos por uma interpolação polinomial de terceiro grau. Para obter os fluxos e as concentrações no domínio do tempo, utiliza-se uma transformada inversa de Laplace numérica. Este processo continua até que um critério de parada seja satisfeito. Com intuito de validar a metodologia proposta, foram realizadas simulações de alguns problemas numéricos. A análise da sensibilidade dos parâmetros nucleares é feita através da introdução de uma pertubação randômica em cada parâmetro e, assim, é analisada a convergência e o comportamento da solução do ponto de vista numérico. Por fim, os resultados obtidos são comparados com os resultados encontrados na literatura e através de um algoritmo desenvolvido em volumes finitos.

Palavras-chave: Equação de Difusão de Nêutrons, Método Iterativo de Fonte, Transformada de Laplace, Algoritmo Stehfest, Interpolação Polinomial.

ABSTRACT

TAVARES, Matheus Gularte. **Solution for the Multigroup Neutron Space Kinetics Equations in Cartesian Geometry by Source Iterative Method**. 2018. 57 f. Dissertação (Mestrado em Modelagem Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática, Instituto de Física e Matemática, Universidade Federal de Pelotas, Pelotas, 2018.

This work presents a solution for the multigroup space kinetics equations of the neutron diffusion theory in Cartesian geometry. These equations represent the temporal dynamics of the neutron population and establish the distribution of the neutron population in a nuclear reactor. To solve this problem, an iterative source method was used based on the modification in the known Power Method. The method consists in assuming an initial distribution for the source term of the fast neutron flux equation, that becomes this system decoupled. For the solution of the fast, thermal neutron flux equations and the delayed neutron precursors, the Laplace Transform technique was used in time variable resulting in a second order ordinary differential equation system, which are solved by classical methods in the literature. After each iteration, the scalar neutron flux and the delayed neutron precursors are reconstructed by a third-order polynomial interpolation. We obtain the fluxes and precursors throught Numerical Inverse Laplace Transform. This process continues until the stop criterion is satisfied. In order to validate the proposed methodology, some numerical problems were simulated. The analysis of the sensitivity of the nuclear parameters is done by introducing a randomic perturbation in each parameter and, thus, the numerical convergence and the behavior of the solution are analyzed. The results obtained are compared with the results found in the literature and through a finite volume algorithm.

Keywords: Neutron Diffusion Equation, Source Iterative Method, Laplace Transform, Stehfest Algorithm, Polinomial Interpolation.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 Volume arbitrário V com área de superfície A 18

Figura 2 Fluxo grama do Algoritmo 36

Figura 3 Solução da equação de difusão em estado estacionário 40
Figura 4 Fluxo de nêutrons para diferentes tempos 41
Figura 5 Fluxo de nêutrons 3-D 41
Figura 6 Solução da equação de difusão em estado estacionário 42
Figura 7 Fluxo de nêutrons para diferentes tempos 43
Figura 8 Solução da equação da difusão em estado estacionário para grupo rápido 45
Figura 9 Solução da equação da difusão em estado estacionário para grupo térmico 45
Figura 10 Fluxo de nêutrons rápidos para vários tempos 47
Figura 11 Fluxo de nêutrons térmicos para vários tempos 48
Figura 12 Concentração de percursores de nêutrons para vários tempos . . . 48
Figura 13 Fluxo de nêutrons rápidos 3-D 49
Figura 14 Fluxo de nêutrons térmicos 3-D 49
Figura 15 Gráfico do fluxo de nêutrons rápidos: com e sem perturbação . . . 52
Figura 16 Gráfico do fluxo de nêutrons térmicos: com e sem perturbação . . . 53

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 Parâmetros Cinéticos para U-235 22

Tabela 2 Parâmetros Nucleares Caso Teste 1 39
Tabela 3 Fluxo de nêutrons no centro da placa 40
Tabela 4 Parâmetros Nucleares Caso Teste 2 42
Tabela 5 Valores do fluxo de nêutrons 43
Tabela 6 Parâmetros Nucleares Caso Teste 3 44
Tabela 7 Parâmetros referentes aos nêutrons atrasados caso teste 3 44
Tabela 8 Estabilidade numérica do fluxo rápido de nêutrons 46
Tabela 9 Estabilidade numérica do fluxo térmico de nêutrons 46
Tabela 10 Resultados numéricos 46
Tabela 11 Fluxos do grupo 1 e grupo 2 47
Tabela 12 Parâmetros Perturbados 50

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ABEN	Associação Brasileira de Energia Nuclear
EDO's	Equações Diferenciais Ordinárias
EDP's	Equações Diferenciais Parciais
GITT	Técnica da Transformada Integral Generalizada
IEA	Internacional Energy Agency
INB	Indústrias Nucleares do Brasil
MWh	Megawatt-hora
TTL	Técnica da Transformada de Laplace
TL	Transformada de Laplace

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

A	Área de superfície, $[cm^2]$
D	Coeficiente de difusão, $[cm]$
Ch	Constante da solução homogênea
C_i	Concentração do precursor do grupo i
E	Energia dos nêutrons, $[MeV]$
F	Coeficiente da solução particular
$\hat{f}(s)$	Função transformada
g	Grupo de energia
G	Coeficiente da solução particular
H	Coeficiente da solução particular
i	Grupo de precursores de nêutrons atrasados
I	Coeficiente da solução particular
$\mathbf{J}(\mathbf{r}, E, t)$	Densidade de corrente de nêutrons no ponto $\mathbf{r}$, energia E no tempo t, $[cm^{-2}s^{-1}]$
k_{eff}	Fator de multiplicação efetivo
$\mathbf{M}$	Matriz quadrada de blocos
$\mathbf{n}$	Vetor unitário na direção de saída do volume V
$n(\mathbf{r}, E, t)$	Densidade de nêutrons $[cm^{-3}]$
$\mathbf{r}$	Posição espacial
s	Variável da transformada de Laplace
$S(\mathbf{r}, E, t)$	Fonte de nêutrons no ponto $\mathbf{r}$, energia E no tempo t, $[cm^{-3}s^{-1}]$
S^{ext}	Fonte externa de nêutrons, $[cm^{-3}s^{-1}]$
t	Tempo, $[s]$
v	Velocidade escalar, $[cms^{-1}]$
V	Volume arbitrário. $[cm^3]$
W	Estimativa inicial

ϵ	Critério de parada do método iterativo
β	Fração total de nêutrons atrasados
λ	Constante de decaimento do precursor, $[s^{-1}]$
ν	Número médio de nêutrons emitidos na fissão
Σ_a	Seção de choque macroscópica de absorção, $[cm^{-1}]$
Σ_f	Seção de choque macroscópica de fissão, $[cm^{-1}]$
Σ_s	Seção de choque macroscópica de espalhamento, $[cm^{-1}]$
Σ_{s21}	Seção de choque macroscópica de espalhamendo do grupo 2 para o grupo 1, $[cm^{-1}]$
Σ_{s12}	Seção de choque macroscópica de espalhamento do grupo 1 para o grupo 2, $[cm^{-1}]$
Σ_T	Seção de choque macroscópica total, $[cm^{-1}]$
ϕ	Fluxo escalar de nêutrons $[cm^{-2}s^{-1}]$
χ	Espectro de fissão

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 12

2 MODELAGEM 17
2.1 Dedução das equações de cinética espacial de nêutrons 17

3 SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DE CINÉTICA ESPACIAL DA TEORIA MULTIGRUPO DE DIFUSÃO DE NÊUTRONS POR UM MÉTODO ITERATIVO DE FONTE 28
3.1 Aplicação da metodologia para o caso homogêneo 28
3.2 Aplicação da metodologia para o caso multirregião 36

4 RESULTADOS 39
4.1 Caso Teste 1 39
4.2 Caso Teste 2 42
4.3 Caso Teste 3 43
4.4 Análise Pertubativa 50

5 CONCLUSÃO 54

REFERÊNCIAS 55

1 INTRODUÇÃO

A energia nuclear nos últimos anos tem tomado cada vez mais espaço no cenário mundial de produção de energia elétrica. De acordo com a Agência Internacional de Energia (AIE), em seu relatório anual ”World Energy Outlook 2012 ”as usinas nucleares tem participado com 13% da produção total de energia elétrica no mundo (HOEVEN, 2012). Ainda em relação a energia nuclear, de acordo com a Agência Internacional de Energia Atômica (AIEA) a energia nuclear tem sua participação aumentada de 392 Giga Watts no final de 2016, para 554 Giga Watts até 2030, esta projeção se dá devido ao aumento da demanda econômica e por eletricidade no cenário mundial o que incentiva a instalação de novos reatores (PETRONOTíCIAS, 2017).

A energia nuclear vem ganhando espaço em relação às demais formas de geração de energia elétrica no cenário mundial como alternativa importante aos combustíveis fósseis, visto que sua operação não acarreta na emissão de gases poluentes como o CO_2, que é o principal responsável pelo efeito estufa.

No Brasil, ainda temos uma matriz energética predominantemente baseada em energia hídrica, seja pelo baixo custo relativo da energia gerada, seja por ser uma fonte renovável, ou também pela grande quantidade de rios. Entretanto, o Brasil não pode deixar de utilizar a geração térmica, dado que o sistema elétrico necessita ser consistente e confiável. Além disso, a operação com fontes térmicas garante que em períodos hidrológicos secos o sistema mantenha seu estado normal de operação. Embora as usinas térmicas sejam fontes seguras em relação ao abastecimento de energia, pois não dependem de fatores climáticos, seu alto custo de operação e o aumento da emissão de gases poluentes sugere a diversificação na matriz elétrica do país. Visando suprir a crescente demanda de energia elétrica e garantindo a diversificação da matriz energética do país, a geração termonuclear se torna uma ótima opção em relação às demais formas de produção de energia. Em relação ao urânio, combustível usado nas usinas nucleares brasileiras, o Brasil conta com uma das maiores reservas de urânio no mundo, cerca de 309 mil toneladas identificadas em apenas um quarto do território brasileiro (Indústrias Nucleares do Brasil - INB, 2001). De acordo com a Associação Brasileira de Energia Nuclear (ABEN), o megawatt-hora (MWh) de uma

usina nuclear custa quase um terço do MWh de uma usina térmica movida a óleo diesel. Essa diferença reflete diretamente na conta do consumidor.

Como mencionado anteriormente, uma ótima alternativa são as usinas nucleares, visto sua alta competitividade, estabilidade e disponibilidade. O que incentiva investimentos neste tipo de geração. De forma a garantir a produção de energia elétrica através de usinas nucleares de forma segura, promovem-se estudos no campo da física de reatores nucleares. Neste contexto, objetiva-se estudar o comportamento da população de nêutrons em um reator nuclear ao longo do tempo. A equação que modela de forma mais completa a população de nêutrons no núcleo de um reator nuclear é a equação de transporte de nêutrons (DUDERSTADT; HAMILTON, 1976).

A equação de transporte de nêutrons é uma equação integro-diferencial a sete variáveis (três variáveis espaciais, duas variáveis angulares, uma variável energética e uma variável temporal), que descreve a distribuição da população de nêutrons em um meio material, o que a torna uma equação de difícil solução. Devido à complexidade da equação de transporte de nêutrons, uma aproximação é utilizada para simplificar o modelo. Esta simplificação consiste em tratar a equação de transporte como um processo difusivo através da Lei de Fick (LAMARSH; BARATTA, 2001; DUDERSTADT; HAMILTON, 1976). A aproximação da equação de transporte utilizada nesta pesquisa é a equação de difusão de nêutrons, na qual fornece uma aproximação para a solução desta equação. Entretanto, por este modelo tratar o transporte de nêutrons como processo difusivo o mesmo apresenta validade limitada. Cabe ressaltar que este modelo não deve ser empregado em problemas na qual o meio é fortemente absorvedor de nêutrons, em regiões próximas à fonte e a fronteira ou quando o espalhamento de nêutrons é fortemente anisotrópico (LAMARSH; BARATTA, 2001; DUDERSTADT; HAMILTON, 1976). Ainda sim, este modelo é comumente usado para o projeto de reatores (cálculo global em física de reatores).

A equação de difusão é um balanço entre perdas e ganhos de nêutrons. Para ter relevância física, neste modelo é introduzido um fator de multiplicação efetivo (k_{eff}) que descreve a criticalidade do reator, na qual fornece o número de nêutrons gerados em uma geração atual dividido pelo número de nêutrons gerados na geração anterior. Este fator nos fornece um dos principais cálculos em física de reatores nucleares, pois além de necessário para o licenciamento de uma usina nuclear, ele fornece um balanço entre perdas e ganhos e também é de grande importância durante a operação de uma usina.

A teoria da difusão é um problema de autovalores e autofunções associados, onde o fator de multiplicação (k_{eff}) é o autovalor dominante e o fluxo escalar de nêutrons é a autofunção correspondente. Estas duas grandezas são de grande interesse para cálculos globais em física de reatores, na qual oferece um ajuste entre a composição nuclear e a geometria para o projeto do núcleo. O k_{eff} apresenta três situações

possíveis: se $k_{eff} < 1$ o reator é subcrítico, neste caso a população de nêutrons de uma geração é menor do que a geração anterior; se $k_{eff} = 1$, diz-se que o reator é crítico, neste caso a população de uma geração de nêutrons é igual a da geração anterior; se $k_{eff} > 1$ o reator é supercrítico, neste caso a população de nêutrons de uma geração é maior do que a da geração anterior.

O reator opera a uma potência constante se a taxa de produção de nêutrons via fissão for constante e próxima a um. Este balanço deve ser feito pela perda via absorção ou fuga de nêutrons. Portanto, a equação de difusão de nêutrons no estado estacionário, quando $k_{eff} = 1$ é chamado de estado critico do reator. Entretanto, se esta condição de balanço for alterada, isto provoca uma dependência temporal da população de nêutrons e, consequentemente, uma variação da potência do reator. Este tipo de perturbação na potência do reator ocorre quando deseja-se ligar, desligar, ou mudar o nível de potência no reator em funcionamento. Isso ocorre frequentemente nas usinas geradoras quando estão em operação, visto que a carga de um sistema elétrico é variável ao longo do tempo. O modelo que descreve a população de nêutrons de um reator cuja densidade e o fluxo variam com o tempo chama-se modelo de cinética.

Neste contexto, as equações de cinética representam a dinâmica temporal da população de nêutrons. Estas, ainda dividem-se em cinética pontual e cinética espacial. Nos modelos de cinética, temos que considerar os nêutrons atrasados, que são gerados pelo decaimento dos produtos da fissão nuclear. Na prática, os nêutrons atrasados causam retardo na resposta do reator a uma determinada perturbação. Matematicamente, os nêutrons atrasados fazem com que as equações de cinética sejam do tipo *stiff*, devido à grande diferença entre as ordens de grandeza das escalas de tempo das constantes de decaimento dos precursores. O que torna as equações de difícil solução no ponto de vista numérico (CEOLIN, 2010).

Ao longo dos anos muitos trabalhos vem sendo desenvolvidos na busca de soluções para as equações de cinética espacial de nêutrons. Dentre estes trabalhos destacam-se os apresentados abaixo.

Em ABOANBER (2007) apresenta-se um método generalizado de Runge-Kutta de quarta ordem usando uma solução de terceira ordem incorporada para estimativa do erro de truncamento para resolver as equações de cinética de difusão de nêutrons multigrupo e multiregião.

Em CORNO et al. (2008) resolve-se esta equação por um método analítico em um reator não homogêneo. O método consiste na solução da equação de cinética através da transformada de Laplace explicitando a dinâmica dos autovalores.

Em HAN; DULLA; RAVETTO (2009) aplicam-se métodos computacionais para a solução da equação de cinética de difusão de nêutrons multidimensional através da aplicação elementos finitos no espaço, seguida de uma aproximação nodal.

Em CEOLIN (2010) apresenta-se a solução para a equação cinética de difusão de nêutrons para diferentes transientes. Os fluxos de nêutrons bem como as concentrações de precursores foram expandidos em séries de potência tanto na variável espacial quanto na variável temporal. Os coeficientes dessa expansão foram encontrados utilizando a equação diferencial ordinária em conjunto com as condições de contorno e interface. O domínio foi dividido em várias células para garantir a convergência com uma baixa ordem de truncamento da série de Taylor.

Em PETERSEN (2011) resolvem-se as equações de cinética espacial bi e tridimensionais analiticamente com dois grupos de energia, seis grupos de precursores de nêutrons atrasados e dependência temporal dos parâmetros nucleares analiticamente através da Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT) nas coordenadas espaciais. Primeiramente, expande-se as equações de fluxos de nêutrons e da concentração de precursores de nêutrons atrasados em séries em termos de autofunções. Em seguida, substitui-se estas séries na equação de cinética espacial, e multiplica-se esta equação por autofunções e aplica-se a propriedade da ortogonalidade, de maneira a obter-se uma equação diferencial ordinária linear conhecida como problema transformado.

Em NAHLA; AL-MALKI; ROKAYA (2012) é desenvolvido uma solução analítica para a equação de cinética de difusão de nêutrons a um grupo de precursores modelo *feedback* adiabático, o método consiste em uma expansão da densidade de nêutrons em polinômios de baixa ordem.

Neste trabalho, resolvem-se as equações de cinética espacial da teoria multigrupo de difusão de nêutrons em geometria cartesiana unidimensional. A metodologia utilizada é baseada em um método iterativo de fonte que foi recentemente utilizada com êxito para resolver o problema de difusão em estado estacionário por (ZANETTE, 2017). A principal ideia é estimar uma distribuição inicial para o termo fonte da equação do fluxo rápido, cabe ressaltar que esta estimativa é um valor constante qualquer, tornando assim o sistema de equações desacoplado, possibilitando resolver as equações separadamente. Cabe ressaltar que isto ocorre somente em sistemas sem *upscattering*.

Para resolução deste sistema utiliza-se a técnica da transformada de Laplace na variável temporal, fazendo com que o conjunto de Equações Diferencias Parciais (EDP's) torne-se um conjunto de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO's). Essas EDO's são resolvidas a partir de métodos clássicos presentes na literatura (BOYCE; DIPRIMA, 2015). Para retornar as funções do domínio frequência ($\hat{f}(s)$) para o domínio tempo ($f(t)$) utiliza-se uma inversão numérica de Laplace. Após cada processo iterativo, o termo fonte é atualizado com as expressões anteriores dos fluxos de nêutrons e das concentrações.

Em virtude do emprego da transformada inversa numérica nos fluxos e nas concen-

trações, faz-se necessário a reconstrução dos fluxos e das concentrações através de uma interpolação polinomial, mantendo sempre uma estrutura padrão. Este processo iterativo continua até que um critério de parada seja atingido. Ainda neste trabalho esta metodologia foi empregada em casos unidimensionais para um e dois grupos de energia com um e seis grupos de precursores de nêutrons atrasados, com intuito de avaliar o desempenho da metodologia proposta.

O presente trabalho encontra-se estruturado da seguinte forma: no capítulo 2, apresenta-se a modelagem das equações de cinética espacial de nêutrons. No capítulo 3, aplica-se a metodologia para a resolução do problema de cinética espacial de difusão de nêutrons. No capítulo 4, encontra-se os resultados numéricos obtidos através de simulações. Por fim, no capítulo 5 encontram-se as conclusões e as perspectivas futuras.

2 MODELAGEM

Nos estudos de física de reatores nucleares, objetiva-se determinar o comportamento da população de nêutrons em um reator nuclear. Este estudo é descrito mais precisamente pela equação de transporte de nêutrons. Entretanto, por se tratar de uma equação integro-diferencial envolvendo sete variáveis, a equação de transporte de nêutrons é de difícil solução. Por esse motivo, em alguns casos opta-se por analisar o comportamento da população de nêutrons através de uma forma simplificada. Nesta dissertação, utiliza-se o modelo de difusão de nêutron.

Embora a teoria de difusão de nêutrons tenha validade limitada, sabe-se que esta aproximação é adequada para a maioria dos estudos em teoria de reatores nucleares (STACEY, 2007).

Neste capítulo é feita a dedução da equação de difusão de nêutrons através de um balanço de massa em um volume arbitrário V.

2.1 Dedução das equações de cinética espacial de nêutrons

Considerando-se um volume arbitrário V de superfície A localizado no interior de um reator. Deve-se examiná-lo para modelar como a população de nêutrons varia dentro deste volume, ver Figura 1. Se neste sistema existe uma fonte de nêutrons, a taxa temporal de mudança do número de nêutrons no volume V deve ser igual à taxa com a qual os nêutrons são produzidos menos a taxa na qual são absorvidos e os que escapam do volume V.

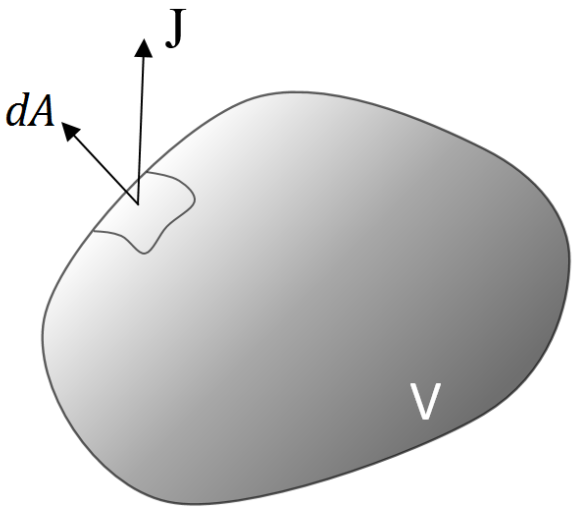

Figura 1: Volume arbitrário V com área de superfície A

O número esperado de nêutrons em V, em dV na posição $\mathbf{r}$, em dE com energia E no instante t é igual a $n(\mathbf{r}, E, t)dVdE$, em que $n(\mathbf{r}, E, t)$ é a densidade de nêutrons $[cm^{-3}]$ e $\mathbf{r}$ representa a posição composta por três variáveis espaciais, E é a energia cinética e t a variável temporal. Outra grandeza importante a ser definida é o fluxo escalar de nêutrons ϕ $[cm^{-2}s^{-1}]$, dada por:

$$\phi(\mathbf{r}, E, t) = v(E)n(\mathbf{r}, E, t), \tag{1}$$

onde $v(E)$ é a velocidade escalar dos nêutrons.

Desta forma, a partir da equação de balanço de massa, considerando a dependência temporal da equação, tem-se a taxa de mudança do número de nêutrons, dada pela diferença entre os nêutrons que entram e saem do volume arbitrário V.

$$\begin{bmatrix} \text{Taxa de Variação} \\ \text{do número de} \\ \text{nêutrons em V} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Taxa de ganhos no} \\ \text{Volume } V \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \text{Taxa de perdas no} \\ \text{Volume } V \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Em que a taxa de variação do número de nêutrons em V, é dado por:

$$\begin{bmatrix} \text{Taxa de Variação} \\ \text{do número de} \\ \text{nêutrons em V} \end{bmatrix} = \frac{\partial}{\partial t} \int_E \int_V n(\mathbf{r}, E, t) dV dE. \tag{3}$$

O termo de ganhos no volume V é formado por nêutrons que são produzidos em V mais os nêutrons com diferentes energias que sofrem colisões de espalhamento para dentro do intervalo de energia de interesse. Portanto, a taxa de ganhos fica da

seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} \text{Taxa de ganhos} \\ \text{no Volume } V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Ganhos por} \\ \text{Fissão} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \text{Ganhos por} \\ \text{Fonte Externa} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \text{Ganho por} \\ \text{Espalhamento} \end{bmatrix} \tag{4}$$

O termo de perdas é constituído pela fuga de nêutrons através da superfície A do volume V e de colisões, que podem ser de absorção ou ainda de nêutrons que são espalhados para outra energia. Desta forma, a taxa de perdas no volume V torna-se:

$$\begin{bmatrix} \text{Taxa de perdas} \\ \text{no Volume } V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Perda por} \\ \text{Fuga} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \text{Perda por} \\ \text{Espalhamento} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \text{Perda por} \\ \text{Absorção} \end{bmatrix} \tag{5}$$

Substituindo (4) e (5) em (2), tem-se:

$$\begin{bmatrix} \text{Taxa de Variação} \\ \text{do número de} \\ \text{nêutrons em V} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Ganhos por} \\ \text{Fissão} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \text{Ganhos por} \\ \text{Fonte Externa} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \text{Ganho por} \\ \text{Espalhamento} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \text{Perda por} \\ \text{Fuga} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \text{Perda por} \\ \text{Espalhamento} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \text{Perda por} \\ \text{Absorção} \end{bmatrix} \tag{6}$$

O termo de perda por absorção representa a probabilidade na qual um nêutron com energia E colida e seja absorvido dentro de V. Antes de modelar o termo de absorção, devemos definir o conceito de seção de choque.

A seção de choque é uma medida probabilística da ocorrência de interação entre os nêutrons e os núcleos-alvos (LAMARSH; BARATTA, 2001). Então, a taxa de absorção pode ser escrita relacionando o fluxo escalar de nêutrons e a seção de choque de absorção em um determinado volume V,como:

$$\begin{bmatrix} \text{Perda por} \\ \text{Absorção} \end{bmatrix} = \int_E \int_V \Sigma_a(\mathbf{r}, E, t)\phi(\mathbf{r}, E, t) dV dE, \tag{7}$$

onde $\Sigma_a(\mathbf{r}, E, t)$ é a seção de choque macroscópica de absorção, na posição $\mathbf{r}$ e energia E em t, $[cm^{-1}eVs^{-1}]$.

O termo de fuga representa os nêutrons que escapam do sistema sem que ocorram interações, na posição $\mathbf{r}$, no instante t e energia E. Estes nêutrons podem ser

representados por um vetor densidade de corrente $\mathbf{J}(\mathbf{r}, E, t)$ e é dado em $[cm^{-2}eVs^{-1}]$. A taxa liquida de nêutrons que cruzam um elemento de área dA normal a superfície é dada por $\mathbf{J}(\mathbf{r}, E, t) \cdot \mathbf{n}dA$. Em que, $\mathbf{n}$ é um vetor unitário normal apontando para fora do volume V de área de superfície A.

Portanto, a taxa liquida total de fuga pelo volume V, pode ser escrito da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} \text{Taxa de} \\ \text{Fuga} \end{bmatrix} = \int_E \oint_A \mathbf{J}(\mathbf{r}, E, t) \cdot \mathbf{n}dAdE. \tag{8}$$

Observando as equações (3), (7) e (8) nota-se que temos duas integrais de volume e uma integral de área. Portanto, é conveniente equacionar o termo de fuga em uma integral de volume a fim de organizar os termos da equação de balanço de massa em apenas uma integral volumétrica. Para tanto, recorre-se ao Teorema de Gauss e a equação (8) pode ser reescrita como:

$$\int_E \oint_A \mathbf{J}(\mathbf{r}, E, t) \cdot \mathbf{n}dAdE = \int_E \int_V \nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, E, t)dVdE. \tag{9}$$

Os nêutrons ao se deslocarem podem sofrer colisões com os núcleos presentes no reator. Ao colidirem-se, estes nêutrons podem ser absorvidos ou espalhados. Ao serem espalhados a energia do nêutron pode mudar. O parâmetro que descreve a probabilidade de um nêutron espalhar de um grupo E' para outro grupo E é chamado de seção de choque macroscópica de espalhamento, na qual $\Sigma_s(\mathbf{r}, E' \rightarrow E, t)$ é a seção de choque de espalhamento na posição $\mathbf{r}$ com energia E no instante t, dado por:

$$\begin{bmatrix} \text{Taxa de} \\ \text{ganhos por} \\ \text{espalhamento} \end{bmatrix} = \int_E \int_V \int_{E'} \Sigma_s(\mathbf{r}, E' \rightarrow E, t)\phi(\mathbf{r}, E', t)dE'dVdE. \tag{10}$$

O termo de espalhamento de nêutrons para grupos onde há perda de nêutrons por espalhamento é dado por

$$\begin{bmatrix} \text{Taxa de} \\ \text{perdas por} \\ \text{espalhamento} \end{bmatrix} = \int_E \int_V \int_{E'} \Sigma_s(\mathbf{r}, E \rightarrow E', t)\phi(\mathbf{r}, E, t)dE'dVdE. \tag{11}$$

Reescrevendo (11),tem-se:

$$\begin{bmatrix} \text{Taxa de} \\ \text{perdas por} \\ \text{espalhamento} \end{bmatrix} = \int_E \int_V \left[\int_{E'} \Sigma_s(\mathbf{r}, E \rightarrow E', t)dE' \right] \phi(\mathbf{r}, E, t)dVdE. \tag{12}$$

O termo que representa os ganhos por uma fonte externa em V é dado por:

$$\begin{bmatrix} \text{Ganho por} \\ \text{Fonte Externa} \end{bmatrix} = \int_E \int_V S^{ext}(\mathbf{r}, E, t) dV dE. \tag{13}$$

Em que, o número esperado de nêutrons gerados em um volume dV centrado em $\mathbf{r}$ com faixa de energia dE no tempo t é dada por $S^{ext}(\mathbf{r}, E, t)dVdE$ e $S^{ext}(\mathbf{r}, E, t)$ é a fonte externa $[cm^{-3}eV^{-1}s^{-1}]$.

Agora falando sobre o termo que representa os ganhos por fissão. Este é formado pelos nêutrons prontos produzidos após a fissão mais os ganhos de nêutrons atrasados.

$$\begin{bmatrix} \text{Ganho por} \\ \text{Fissão} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Ganho de Nêutrons} \\ \text{Prontos} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \text{Ganho de Nêutrons} \\ \text{Atrasados} \end{bmatrix} \tag{14}$$

Após a fissão nuclear ocorrer são gerados fragmentos, que são elementos com menor número de massa que o nuclídeo original. Alguns desses elementos são instáveis e no processo de decaimento podem emitir nêutrons. Estes nêutrons são chamados de nêutrons atrasados e os nuclídeos que os emitem são chamados de precursores de nêutrons atrasados. Já os nêutrons emitidos logo após o processo de fissão denominam-se nêutrons prontos.

Os nêutrons prontos possuem energia média de $2MeV$ valor muito superior a energia média dos nêutrons atrasados, que é de aproximadamente $0,5MeV$ (CEOLIN, 2014). Devido a baixa energia dos nêutrons atrasados, a probabilidade de um nêutron atrasado causar fissão rápida é muito menor do que a de um nêutron pronto, visto que sua energia média está a baixo do mínimo necessário para a ocorrência de uma fissão rápida.

Os produtos de fissão que emitem nêutrons atrasados são classificados em grupos de acordo com sua meia-vida. A Tabela 1 mostra uma classificação em 6 grupos do Urânio 235 (DUDERSTADT; HAMILTON, 1976). Sendo β a fração total de nêutrons atrasados dada por:

$$\beta = \sum_{i=1}^{6} \beta_i. \tag{15}$$

Portanto, na Tabela 1 temos que $\beta = 0,0065$, o que significa que os nêutrons atrasados correspondem a $0,65\%$ dos nêutrons produzidos pela fissão do Urânio-235. Embora representem menos que 1% da população total de nêutrons no reator, estes nêutrons tem efeito muito significativo no comportamento do mesmo.

Tabela 1: Parâmetros Cinéticos para U-235

Grupo i	Meia-Vida (s)	$\lambda_i(s^{-1})$	β_i
1	54,51	0,0127	0,0002641
2	21,84	0,031	0,00148035
3	6,0	0,1155	0,0013066
4	2,23	0,310	0,00282865
5	0,496	1,397	0,0008896
6	0,179	3,871	0,0001807

Fonte: adaptada de Duderstadt, 1976.

Define-se o número de nêutrons produzidos por fissão em $\mathbf{r}$ e energia E, como:

$$\chi(E)\int_{E'}\nu(E')\Sigma_f(\mathbf{r},E',t)\phi(\mathbf{r},E',t)dE', \tag{16}$$

onde, χ é o espectro integrado de fissão, ν é o número médio de nêutrons gerados por fissão e Σ_f é a seção de choque macroscópica de fissão.

Para determinarmos o número de nêutrons prontos produzidos pela fissão, deve-se subtrair o número total de nêutrons menos o número de nêutrons oriundos de decaimento. Portanto, a taxa de nêutrons prontos é:

$$\begin{bmatrix}\text{Ganho de}\\ \text{Nêutrons}\\ \text{Prontos}\end{bmatrix} = \int_E\int_V(1-\beta)\chi(E)\int_{E'}\nu(E')\Sigma_f(\mathbf{r},E',t)\phi(\mathbf{r},E',t)dE'dVdE. \tag{17}$$

Agora devemos incluir a contribuição dos nêutrons atrasados em (14). O número de precursores de nêutrons atrasados com P grupos que decaem e contribuem para a fissão é dado por:

$$\begin{bmatrix}\text{Ganho de}\\ \text{Nêutrons}\\ \text{Atrasados}\end{bmatrix} = \sum_i^P \lambda_i C_i(\mathbf{r},t). \tag{18}$$

Agora vamos analisar como a concentração de nêutrons atrasados varia em função do tempo. Primeiramente vamos estabelecer uma equação de balanço em função de perda e ganho dos precursores.

$$\int_V \frac{\partial C_i(\mathbf{r},t)}{\partial t}dV + \begin{bmatrix}\text{Taxa de perda de}\\ \text{precursores}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\text{Taxa de ganho de}\\ \text{precursores}\end{bmatrix}. \tag{19}$$

Sabe-se que os nêutrons produzidos são dados pela fissão e pela perda causada

pelo decaimento. Então, a taxa de produção de precursores no grupo i é dada da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \text{Taxa de} \\ \text{Ganhos de} \\ \text{Precursores} \end{bmatrix} = \int_E \int_V \beta_i \nu(E) \Sigma_f(\mathbf{r}, E, t) \phi(\mathbf{r}, E, t) dV dE. \tag{20}$$

A perda é causada pelo decaimento radioativo e pode ser escrita pela multiplicação da concentração do percursor $C_i(\mathbf{r}, t)$ pela sua constante de decaimento λ_i correspondente. Portanto,

$$\begin{bmatrix} \text{Taxa de} \\ \text{Perda de} \\ \text{Precursores} \end{bmatrix} = \int_V C_i(\mathbf{r}, t) \lambda_i dV, \tag{21}$$

onde λ_i é a constante de decaimento do precursor do i-ésimo grupo. Substituindo as equações (20) e (21) na equação (19):

$$\int_V \left[\frac{\partial C_i(\mathbf{r}, t)}{\partial t} - \int_E \beta_i \nu(E) \Sigma_f(\mathbf{r}, E, t) \phi(\mathbf{r}, E, t) dE + \lambda_i C_i(\mathbf{r}, t) \right] dV = 0. \tag{22}$$

Antes de substituirmos os termos (7), (9), (10), (12), (13), (17) e (18) na equação de balanço (6) devemos relacionar a grandeza vetorial densidade de corrente $(\mathbf{J}(\mathbf{r}, E, t))$ com o fluxo escalar de nêutrons $(\phi(\mathbf{r}, E, t))$. Para isso recorre-se a Lei de Fick. Esta lei é originária da difusão química, onde um soluto sofre difusão de uma região de maior concentração para uma região de menor concentração. Ou ainda, a taxa de fluxo de soluto é proporcional ao negativo do gradiente da concentração do soluto (LAMARSH; BARATTA, 2001). Admitindo que os nêutrons em um reator nuclear têm comportamento semelhante a de um soluto. Se a densidade ou o fluxo de nêutrons é maior em uma parte do reator do que em outra, vai existir um fluxo de nêutrons para a região de menor concentração. Isso se deve ao fato de que a densidade de colisões é maior em regiões de maior densidade de nêutrons.

A rigor a Lei de Fick deve seguir as restrições:

- O meio é infinito;
- O meio é homogêneo, de modo que todas seções de choque são constantes independente da posição;
- Não há fontes de nêutrons no meio;
- Espalhamento no máximo linearmente anisotrópico;
- O fluxo de nêutrons varia lentamente em função da posição;

Então, podemos escrever a Lei de Fick como:

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = -D\nabla\phi(\mathbf{r}) \tag{23}$$

onde D dado em $[cm]$ é o coeficiente de difusão e fornece uma relação entre o fluxo e a densidade de corrente. Portanto, o termo de fuga pode ser dado por:

$$\begin{bmatrix} \text{Taxa de} \\ \text{Fuga} \end{bmatrix} = -\int_E \left[\int_V \nabla \cdot D(\mathbf{r}, E, t)\nabla\phi(\mathbf{r}, E, t)dV\right] dE. \tag{24}$$

Substituindo os ganhos (10), (13), (17), (18) e as perdas (7), (12), (24) na equação de balanço (6) e reescrevendo as equações das concentrações (22) temos a equação de difusão de nêutrons dependente do tempo escrita da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} &\int_E \int_V \left[\frac{1}{v}\frac{\partial\phi(\mathbf{r}, E, t)}{\partial t} - \nabla \cdot D(\mathbf{r}, E, t)\nabla\phi(\mathbf{r}, E, t) + \Sigma_T(\mathbf{r}, E, t)\phi(\mathbf{r}, E, t) - \right. \\ &- (1-\beta)\chi(E)\int_{E'} \nu(E')\Sigma_f(\mathbf{r}, E', t)\phi(\mathbf{r}, E', t)dE' - \\ &\left. - \int_{E'} \Sigma_s(\mathbf{r}, E' \to E, t)\phi(\mathbf{r}, E', t)dE' + S^{ext}(\mathbf{r}, E, t)\right] dVdE - \sum_i^P \lambda_i C_i(\mathbf{r}, t) = 0 \\ &\int_V \left[\frac{\partial C_i(\mathbf{r}, t)}{\partial t} - \int_E \beta_i\nu(E)\Sigma_f(\mathbf{r}, E, t)\phi(\mathbf{r}, E, t)dE + \lambda_i C_i(\mathbf{r}, t)\right] dV = 0. \end{aligned} \tag{25}$$

sendo Σ_T a seção de choque macroscópica total, definida como:

$$\Sigma_T(\mathbf{r}, E, t) = \Sigma_a(\mathbf{r}, E, t) + \int_{E'} \Sigma_s(\mathbf{r}, E \to E', t)dE'. \tag{26}$$

Todas as integrais são realizadas em um mesmo volume. Por se tratar de um volume arbitrário o integrando é nulo. Desta forma, a equação de difusão pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} &\int_E \left[\frac{1}{v}\frac{\partial\phi(\mathbf{r}, E, t)}{\partial t} - \nabla \cdot D(\mathbf{r}, E, t)\nabla\phi(\mathbf{r}, E, t) + \Sigma_T(\mathbf{r}, E, t)\phi(\mathbf{r}, E, t) - \right. \\ &- (1-\beta)\chi(E)\int_{E'} \nu(E')\Sigma_f(\mathbf{r}, E', t)\phi(\mathbf{r}, E', t)dE' - \\ &\left. - \int_{E'} \Sigma_s(\mathbf{r}, E' \to E, t)\phi(\mathbf{r}, E', t)dE' + S^{ext}(\mathbf{r}, E, t)\right] dE - \sum_i^P \lambda_i C_i(\mathbf{r}, t) = 0 \\ &\frac{\partial C_i(\mathbf{r}, t)}{\partial t} - \int_{E'} \beta_i\nu(E')\Sigma_f(\mathbf{r}, E', t)\phi(\mathbf{r}, E', t)dE' + \lambda_i C_i(\mathbf{r}, t) = 0. \end{aligned} \tag{27}$$

Para modelar a equação de cinética de difusão de nêutrons multigrupo, deve-se discretizar a energia. Para isso, dividi-se o espectro de energia em G intervalos ou grupos g, em que $E_1 > E_2 > \cdots > E_G > E_{G+1}$ onde $E_1 \to \infty$ e $E_{G+1} \to 0$.

Partindo da equação (27) com tratamento contínuo da energia conforme a literatura, aplica-se a teoria multigrupo para obtê-la na forma discretizada. Para isso, define-se o fluxo de nêutrons no grupo g como:

$$\phi_g(\mathbf{r}, t) = \int_{E_g}^{Eg-1} \phi(\mathbf{r}, E, t) dE, \tag{28}$$

Em que ϕ_g é o fluxo escalar de nêutrons do grupo g dado em $[cm^{-2}s^{-1}]$. Agora, aplicando a mesma integral no primeiro termo da equação (27), temos:

$$\frac{1}{v_g} \frac{\partial \phi_g(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{E_g}^{Eg-1} \frac{\phi(\mathbf{r}, E, t)}{v(E)} dE \right), \tag{29}$$

onde, $1/v_g$, representa a integral ponderada do fluxo sobre o intervalo de energia do grupo pertencente, determinado da seguinte maneira:

$$\frac{1}{v_g} = \frac{\int_{E_g}^{Eg-1} \frac{1}{v(E)} \phi(\mathbf{r}, E, t) dE}{\int_{E_g}^{Eg-1} \phi(\mathbf{r}, E, t) dE}. \tag{30}$$

Aplicando a integral no termo de fuga, obtém-se a seguinte expressão:

$$D_g(\mathbf{r}, t) \nabla \phi_g(\mathbf{r}, t) = \int_{E_g}^{Eg-1} D(\mathbf{r}, E, t) \nabla \phi(\mathbf{r}, E, t) dE. \tag{31}$$

Sendo o coeficiente de difusão ponderado por $\nabla \phi$, da seguinte maneira:

$$D_g(\mathbf{r}, t) \int_{E_g}^{Eg-1} \nabla \phi(\mathbf{r}, E, t) dE \equiv \int_{E_g}^{Eg-1} D(\mathbf{r}, E, t) \nabla \phi(\mathbf{r}, E, t) dE. \tag{32}$$

A seção de choque macroscópica total para fora do grupo g, $\Sigma_{T,g}$ dada em $[cm^{-1}s^{-1}]$ é representada da seguinte forma:

$$\Sigma_{T,g}(\mathbf{r}, t) \phi_g(\mathbf{r}, t) \equiv \int_{E_g}^{Eg-1} \Sigma_T(\mathbf{r}, E, t) \phi(\mathbf{r}, E, t) dE, \tag{33}$$

onde

$$\Sigma_{T,g}(\mathbf{r}, t) \equiv \frac{\int_{E_g}^{Eg-1} \Sigma_T(\mathbf{r}, E, t) \phi(\mathbf{r}, E, t) dE}{\int_{E_g}^{Eg-1} \phi(\mathbf{r}, E, t) dE}. \tag{34}$$

O termo que representa a fissão é definido como:

$$(1-\beta)\chi_g \sum_{g'=1}^{G} \nu_{g'}\Sigma_{fg'}(\mathbf{r},t)\phi_{g'}(\mathbf{r},t) = \\ (1-\beta)\int_{E_g}^{Eg-1} \chi(E) \int_0^{\infty} \nu(E')\Sigma_f(\mathbf{r},E',t)\phi(\mathbf{r},E',t)dE'dE, \quad (35)$$

onde

$$\nu_{g'}\Sigma_{fg'}(\mathbf{r},t)\phi(\mathbf{r},t) = \frac{1}{\phi_{g'}(\mathbf{r},t)} \int_{E_g}^{Eg-1} \nu(E')\Sigma_f(\mathbf{r},E',t)dE'. \quad (36)$$

Já o termo de espalhamento de nêutrons para dentro do grupo g é:

$$\sum_{g'=1}^{G} \Sigma_{sg'g}(\mathbf{r},t)\phi_{g'}(\mathbf{r},t) = \int_{E_g}^{Eg-1} \left[\sum_{g'=1}^{G} \int_{E_g}^{Eg'-1} \Sigma_s(\mathbf{r},E' \to E,t)\phi(\mathbf{r},E',t)dE' \right] dE,$$

onde

$$\Sigma_{sg'g}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{\phi_{g'}(\mathbf{r},t)} \int_{E_g}^{Eg-1} \left[\int_{E_{g'}}^{Eg'-1} \Sigma_s(\mathbf{r},E' \to E,t)\phi(\mathbf{r},E',t)dE' \right] dE. \quad (37)$$

Reescrevendo todos os termos, obtém-se a Equação de Difusão de Nêutrons Multigrupo de energia com a contribuição dos nêutrons atrasados:

$$\begin{aligned} \frac{1}{v_g}\frac{\partial \phi_g(\mathbf{r},t)}{\partial t} &= \nabla \cdot D_g(\mathbf{r},t)\nabla\phi_g(\mathbf{r},t) - \Sigma_{T,g}(\mathbf{r},t)\phi_g(\mathbf{r},t) + (1-\beta)\chi_g \sum_{g'=1}^{G} \nu_{g'}\Sigma_{fg'}(\mathbf{r},t)\phi(\mathbf{r},t) \\ &\quad + \sum_{g'=1}^{G} \Sigma_{sg'g}(\mathbf{r},t)\phi_{g'}(\mathbf{r},t) + \sum_{i}^{P} \lambda_i C_i(\mathbf{r},t) + S_g^{ext}(\mathbf{r},t) \quad (38) \\ \frac{\partial C_i(\mathbf{r},t)}{\partial t} &= \sum_{g'=1}^{G} \beta_i \nu_{g'}\Sigma_{fg'}(\mathbf{r},t)\phi_{g'}(\mathbf{r},t) - \lambda_i C_i(\mathbf{r},t). \end{aligned}$$

Cabe ressaltar que estas definições são apenas teóricas e neste trabalho vamos apenas utilizar os parâmetros multigrupo fornecidos.

Vamos admitir que após um nêutron colidir não há ganho de energia, portanto com a reação de espalhamento não há $upscattering$. Então, os nêutrons rápidos são moderados, até atingirem o estado térmico. Por isso:

$$\Sigma_{sg'g} = 0, \text{ para } g' > g. \quad (39)$$

Então, assumindo que não há $upscattering$ pode-se simplificar o termo de espalha-

mento da seguinte forma:

$$\Sigma_{sg'g}(\mathbf{r},t)\phi_{g'}(\mathbf{r},t) = \sum_{g'=1}^{g-1} \Sigma_{sg'g}(\mathbf{r},t)\phi_{g'}(\mathbf{r},t) - \Sigma_{sgg}(\mathbf{r},t)\phi_g(\mathbf{r},t), \tag{40}$$

sendo Σ_{sgg} o termo de espalhamento intra grupo na qual caracteriza a probabilidade que um nêutron tem de sofrer espalhamento e não perder energia suficiente para trocar de grupo. A partir desta simplificação é conveniente retornar a equação (38) e definir a seção macroscópica de remoção, como:

$$\Sigma_{Rg}(\mathbf{r},t) \equiv \Sigma_{Tg}(\mathbf{r},t) - \Sigma_{sgg}(\mathbf{r},t). \tag{41}$$

A equação (41) que representa a probabilidade de um nêutron ser removido do grupo g através de uma colisão. Assim, a equação (38) torna-se:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{v_g}\frac{\partial \phi_g(\mathbf{r},t)}{\partial t} =& \nabla \cdot D_g(\mathbf{r})\nabla\phi_g(\mathbf{r},t) - \Sigma_{Rg}(\mathbf{r},t)\phi_g(\mathbf{r},t) + (1-\beta)\chi_{dg}\sum_{g'=1}^{G}\nu_{g'}\Sigma_{fg'}(\mathbf{r},t)\phi_{g'}(\mathbf{r},t) \\
&+ \sum_{g'=1}^{g-1}\Sigma_{sg'g}(\mathbf{r},t)\phi_{g'}(\mathbf{r},t) + \sum_{i}^{P}\lambda_i C_i(\mathbf{r},t) + S_g^{ext}(\mathbf{r},t) \\
\frac{\partial C_i(\mathbf{r},t)}{\partial t} =& \sum_{g'=1}^{G}\beta_i\nu_{g'}\Sigma_{fg'}(\mathbf{r},t)\phi_{g'}(\mathbf{r},t) - \lambda_i C_i(\mathbf{r},t).
\end{aligned} \tag{42}$$

Desta forma, obtém-se as equações de cinética especial da teria multigrupo de difusão de nêutrons que será resolvida no próximo capítulo.

3 SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DE CINÉTICA ESPACIAL DA TEORIA MULTIGRUPO DE DIFUSÃO DE NÊUTRONS POR UM MÉTODO ITERATIVO DE FONTE

Nesta seção é apresentada a metodologia utilizada neste trabalho aplicada as equações de cinética espacial da teoria multigrupo de difusão de nêutrons por um método iterativo de fonte.

3.1 Aplicação da metodologia para o caso homogêneo

Nesta seção, apresenta-se a metodologia para solução das equações de cinética espacial multigrupo (ECEM) em um meio homogêneo, através de um método iterativo de fonte. Cabe ressaltar que este método é semelhante a um recentemente utilizado com sucesso para a solução do problema de difusão em estado estacionário por (ZANETTE, 2017). O método consiste em fornecer uma distribuição inicial para o termo fonte da equação do fluxo rápido, fazendo com que o sistema de equações torne-se desacoplado. Em seguida, aplica-se a técnica da transformada de Laplace no sistema de equações diferenciais parciais (EDP's), obtendo um novo sistema composto de equações diferenciais ordinárias (EDO's). Resolve-se então este sistema através de soluções clássicas para EDO's de segunda ordem, obtendo-se assim uma estimativa inicial para as incógnitas. Pode-se então realimentar o termo fonte da equação do fluxo rápido através de um método iterativo de fonte. Este processo prossegue até que seja atingido um critério de parada.

Assim, partindo da equação (42), sem perda de generalidade, com parâmetros nucleares não dependentes do tempo e do espaço, espectros integrados de fissão iguais a 1 para o grupo 1 de energia, sem fonte externa, considerando o problema unidimensional, geometria cartesiana, meio homogêneo, dois grupos de energia e seis grupos de precursores de nêutrons atrasados, as Equações de Difusão de Nêutrons podem ser escritas como:

$$\frac{1}{v_1}\frac{\partial \phi_1(x,t)}{\partial t} - \nabla^2 D_1\phi_1(x,t) + \Sigma_{R1}\phi_1(x,t) =$$
$$(1-\beta)[\nu_1\Sigma_{f1}\phi_1(x,t)] + \underbrace{(1-\beta)[\nu_2\Sigma_{f2}\phi_2(x,t)] + \sum_{i=1}^{6}\lambda_i C_i(x,t)}_{W}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{v_2}\frac{\partial \phi_2(x,t)}{\partial t} &= \nabla^2 D_2\phi_2(x,t) - \Sigma_{a2}\phi_2(x,t) + \Sigma_{s12}\phi_1(x,t) \\ \frac{\partial C_i(x,t)}{\partial t} &= \beta_i[\nu_1\Sigma_{f1}\phi_1(x,t) + \nu_2\Sigma_{f2}\phi_2(x,t)] - \lambda_i C_i(x,t)\end{aligned} \tag{43}$$

com $i = 1, ..., 6$, onde, $0 \leq x \leq L$ é a uma placa de comprimento L, na qual:

$\phi_1(x,t)$ e $\phi_2(x,t)$ são os fluxos rápido e térmico de nêutrons;

D_1 e D_2 são os coeficientes de difusão dos grupos 1 e 2, respectivamente;

Σ_{R1} é a seção de choque macroscópica de remoção do grupo 1;

ν_1 é o número médio de nêutrons liberados por fissão no grupo 1;

Σ_{f1} e Σ_{f2} são as seções de choque macroscópicas de fissão dos grupos 1 e 2;

λ_i é a constante de decaimento do grupo i;

$C_i(x,t)$ é a concentração de precursores do grupo i;

Σ_{a2} é a seção de choque de absorção do grupo 2;

Σ_{s12} é a seção de choque de espalhamento do grupo 1 para o grupo 2.

Obedecendo as seguintes condições de contorno:

$$\begin{aligned}\varrho_1\phi(0,t) + \delta_1\frac{\partial \phi(0,t)}{\partial x} &= 0, \\ \varrho_2\phi(L,t) + \delta_2\frac{\partial \phi(L,t)}{\partial x} &= 0,\end{aligned} \tag{44}$$

sendo, ϱ e δ constantes que dependem das propriedades físicas do problema e $|\varrho|$+$|\delta| > 0$. De acordo com o valor destas constantes, pode-se ter condições de contorno do tipo: Dirichlet, Neumann ou Cauchy (ZANETTE, 2017).

Reescrevendo as equações (43) na forma matricial, obtém-se um sistema de equações diferenciais parciais, definido como:

$$A\mathbf{\Phi} = \mathbf{M}\mathbf{\Phi}, \tag{45}$$

em que A é o operador $\frac{\partial}{\partial t}$ e Φ é um vetor transposto $(8\text{x}1)$, dado por:

$$\mathbf{\Phi} = \left[\ \phi_1, \phi_2, \quad C_1, \quad \cdots, \quad C_6 \ \right]^T, \tag{46a}$$

$\mathbf{M}$ é uma matriz quadrada de blocos $(8\text{x}8)$, onde seus elementos são:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \tag{46b}$$

$$M_{11} = \begin{bmatrix} D_1\nabla^2 v_1 - v_1\Sigma_{r1} + (1-\beta)\nu_1\Sigma_{f1}v_1 & (1-\beta)\nu_2\Sigma_{f2}v_2 \\ \Sigma_{s12}v_2 & D_2\nabla^2 v_2 - \Sigma_{a2}v_2 \end{bmatrix} \tag{46c}$$

$$M_{12} = \begin{bmatrix} \lambda_1 v_1 & \cdots & \lambda_6 v_1 \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \tag{46d}$$

$$M_{21} = \begin{bmatrix} \beta_1\nu_1\Sigma_{f1} & \beta_1\nu_2\Sigma_{f2} \\ \vdots & \vdots \\ \beta_6\nu_1\Sigma_{f1} & \beta_6\nu_2\Sigma_{f2} \end{bmatrix} \tag{46e}$$

$$M_{22} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_6 \end{bmatrix}. \tag{46f}$$

Atribuindo-se uma estimativa inicial qualquer para o termo W da primeira equação do sistema (43), como por exemplo $W = 1$, pode-se resolver esta equação aplicando a transformada de Laplace (TL) na variável temporal, na qual é dada por definição em (47). Cabe ressaltar que quanto mais próximo o valor de W for do termo fonte do problema mais rápida será a convergência do algoritmo.

$$\mathcal{L}\{F(t)\} \quad = \quad \int_0^\infty e^{-st}F(t)dt = \hat{f}(s). \tag{47}$$

Em que, se $F(t)$ é contínua para $0 \leq t \leq N$ e de ordem exponencial para $t > N$. Além disso, utiliza-se a propriedade de derivadas da transformada de Laplace que é definida por:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{F'(t)\} \quad &= \quad \int_0^\infty e^{-st}F'(t)dt \\ &= s\hat{f}(s) - F(0), \end{aligned} \tag{48}$$

na qual $F'(t)$ é seccionalmente contínua para $0 \leq t \leq N$ (SPIEGEL; PAEZ, 1970). Assim, da aplicação da TL tem-se o sistema transformado dado abaixo:

$$
\begin{aligned}
s\hat{\phi}_1(x,s) - \phi_1(x,0) &= \left[D_1\frac{d^2}{dx^2}v_1 - v_1\Sigma_{r1} + (1-\beta)\nu_1\Sigma_{f1}v_1\right]\hat{\phi}_1(x,s) + \frac{1}{s} \\
s\hat{\phi}_2(x,s) - \phi_2(x,0) &= \left[D_2\frac{d^2}{dx^2}v_2 - v_2\Sigma_{a2}\right]\hat{\phi}_2(x,s) + [\Sigma_{s12}v_2]\,\hat{\phi}_1(x,s) \\
s\hat{C}_i(x,s) - C_i(x,0) &= [\beta_i\nu_1\Sigma_{f1}]\hat{\phi}_1(x,s) + [\beta_i\nu_2\Sigma_{f2}]\hat{\phi}_2(x,s) - \lambda_i\hat{C}_i(x,s),
\end{aligned}
\tag{49}
$$

com, $i = 1, ..., 6$, onde $\phi_1(x,0)$ e $\phi_2(x,0)$ são as condições iniciais do problema de difusão, obtidos do problema em estado estacionário (ZANETTE, 2017). Aqui, $C_i(x,0)$ é determinado considerando:

$$
\frac{\partial C_i(x,0)}{\partial t} = 0, \tag{50}
$$

para $i = 1, ..., 6$. Logo,

$$
C_i(x,0) = \frac{\beta_i(\nu_1\Sigma_{f1}\phi_1(x,0) + \nu_2\Sigma_{f2}\phi_2(x,0))}{\lambda_i} \tag{51}
$$

para $i = 1, ..., 6$. Com o sistema desacoplado, resolve-se a equação do fluxo rápido como segue abaixo:

$$
\frac{1}{D_1v_1}\left[s\hat{\phi}_1(x,s) - \phi_1(x,0)\right] = \frac{d^2}{dx^2}\hat{\phi}_1(x,s) - \frac{\Sigma_{r1}\hat{\phi}_1(x,s)}{D_1} + \frac{(1-\beta)\nu_1\Sigma_{f1}\hat{\phi}_1(x,s)}{D_1} + \frac{1}{sD_1v_1}. \tag{52}
$$

Cabe ressaltar que $\phi_1(x,0)$ é a condição inicial do problema estacionário resolvido por (ZANETTE, 2017) interpolado num polinômio de terceiro grau da seguinte forma:

$$
\phi_1(x,0) = k_3x^3 + k_2x^2 + k_1x + k_0, \tag{53}
$$

em que, k_3, k_2, k_1 e k_0 são obtidos através de uma interpolação do fluxo rápido da condição inicial do problema estacionário.

Organizando os termos da equação (52) e nomeando-os, tem-se:

$$
\frac{d^2}{dx^2}\hat{\phi}_1(x,s) - \hat{\phi}_1(x,s)\left[s\underbrace{\frac{1}{D_1v_1}}_{a1} + \underbrace{\frac{\Sigma_{r1}}{D_1}}_{b1} - \underbrace{\frac{(1-\beta)(\nu_1\Sigma_{f1})}{D_1}}_{hd1}\right] + \frac{\phi_1(x,0)}{D_1v_1} + \frac{1}{sD_1v_1} = 0. \tag{54}
$$

Logo, a solução geral da equação diferencial de (54) é dado por:

$$
\hat{\phi}_1(x,s) = \hat{\phi_{h,1}}(x,s) + \hat{\phi_{p,1}}(x,s), \tag{55}
$$

na qual $\hat{\phi_{h,1}}(x,s)$ e $\hat{\phi_{p,1}}(x,s)$ são as soluções homogênea e particular para o fluxo rápido transformado, respectivamente.

Sabe-se que a solução da equação homogênea (55) é dada por uma combinação linear de funções da seguinte forma:

$$\hat{\phi_{h,1}}(x,s) = \kappa_1 e^{\sqrt{\gamma_1(s)}x} + \kappa_2 e^{-\sqrt{\gamma_1(s)}x}, \tag{56}$$

onde $\gamma_1(s) = [a_1 s + b_1 - hd1]$ sendo κ_1 e κ_2 obtidos através das condições de contorno.

Pode-se escrever a solução particular da (55) como um polinômio característico de $\phi(x,0)$ da seguinte forma:

$$\hat{\phi_{p,1}}(x,s) = I_1 x^3 + H_1 x^2 + G_1 x + F_1, \tag{57}$$

sendo F_1, G_1, H_1 e I_1 são variáveis da solução particular de $\hat{\phi}_1(x,s)$.

Portanto, pode-se escrever a solução do fluxo de nêutrons como uma combinação das duas soluções

$$\hat{\phi}_1(x,s) = \kappa_1 e^{\sqrt{\gamma_1(s)}x} + \kappa_2 e^{-\sqrt{\gamma_1(s)}x} + I_1 x^3 + H_1 x^2 + G_1 x + F_1. \tag{58}$$

Para encontrar κ_1 e κ_2 utilizam-se as condições de contorno (44) e aplica-se a transformada de Laplace nas mesmas. Considerando $\varrho_1 = \varrho_2 = 1$ e $\delta_1 = \delta_2 = 0$ tem-se:

$$\hat{\phi}_1(0,s) = 0,$$
$$\hat{\phi}_1(L,s) = 0.$$

Portanto, tem-se κ_1 e κ_2, iguais a:

$$\kappa_1 = \left[\frac{F_1 e^{-\sqrt{\gamma_1(s)}L} - I_1 L^3 - H_1 L^2 - G_1 L - F_1}{e^{\sqrt{\gamma_1(s)}L} - e^{-\sqrt{\gamma_1(s)}L}}\right] \text{ e } \kappa_2 = [-\kappa_1 - F_1]. \tag{59}$$

Agora, substituindo-se (57) e sua derivada de segunda ordem em (54) pode-se determinar as constantes de (58) através da solução do seguinte sistema linear,

$$\begin{bmatrix} -\gamma_1(s) & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -\gamma_1(s) & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -\gamma_1(s) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma_1(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ G_1 \\ H_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(-\frac{a_1}{s} - k_0 a_1\right) \\ -k_1 a_1 \\ -k_2 a_1 \\ -k_3 a_1 \end{bmatrix}. \tag{60}$$

Então, tem-se:

$$F_1 = \left[\frac{\frac{a_1}{s} + k_0 a_1 + 2H_1}{\gamma_1(s)}\right], G_1 = \left[\frac{k_1 a_1 + 6I_1}{\gamma_1(s)}\right], H_1 = \left[\frac{k_2 a_1}{\gamma_1(s)}\right], I_1 = \left[\frac{k_3 a_1}{\gamma_1(s)}\right]. \tag{61}$$

Portanto, tem-se que o fluxo rápido transformado pode ser escrito como:

$$\hat{\phi}_1(x,s) = \left[\frac{F_1 e^{-\sqrt{\gamma_1(s)}L} - I_1 L^3 - H_1 L^2 - G_1 L - F_1}{e^{\sqrt{\gamma_1(s)}L} - e^{-\sqrt{\gamma_1(s)}L}}\right] e^{\sqrt{\gamma_1(s)}x} +$$
$$\left[-\left(\frac{F_1 e^{-\sqrt{\gamma_1(s)}L} - I_1 L^3 - H_1 L^2 - G_1 L - F_1}{e^{\sqrt{\gamma_1(s)}L} - e^{-\sqrt{\gamma_1(s)}L}}\right) - F_1\right] e^{-\sqrt{\gamma_1(s)}x} + F_1 x^3 + G_1 x^2 + H_1 x + I_1. \tag{62}$$

Analisando os resíduos das funções complexas dos fluxos e das concentrações, observa-se que tratam-se de singularidades essenciais, o que inviabiliza a utilização da teoria de resíduos para resolver-se analiticamente as inversas (SOARES, 2012).

Devido a complexidade em obter-se de forma analítica a expressão para o fluxo (62) em cada um dos processos iterativos, opta-se por utilizar uma inversão numérica através do algoritmo de *Stehfest*.

O algoritmo de *Stehfest* foi desenvolvido em 1960 e sua simplicidade e boa performance o torna bastante popular para diversas áreas da engenharia (KUZNETSOV, 2013). Este método tem por objetivo aproximar a função no domínio do tempo através de um somatório de N termos. Em que N é um parâmetro que está diretamente ligado com a precisão do método. Segundo (HASSANZADEH; POOLADI-DARVISH, 2007)(VALKÓ; ABATE, 2004) a escolha ideal é $10 \leq N \leq 14$ e o método apresenta boa convergência para soluções quando funções no domínio do tempo são na forma e^{-t}.

Ao utilizar-se uma inversão numérica da transformada de Laplace para o fluxo transformado, faz-se necessário a reconstrução do fluxo através de uma interpolação polinomial. Com a interpolação obtém-se um formato padrão para a expressão do fluxo, que é mantido para todas iterações, o que facilita o processo de iteração.

Deste modo, pode-se interpolar $\phi(x,t)$ em um polinômio quadrático em x e linear em t, de seguinte formato:

$$\phi_j(x,t) = y_{j,1} + y_{j,2}x + y_{j,3}x^2 + y_{j,4}t + y_{j,5}xt + y_{j,6}x^2 t, \tag{63}$$

sendo, $j = 1$ ou 2 o índice que indica o fluxo interpolado e $y_{j,1}...y_{j,6}$ são constantes determinadas através da interpolação.

Analogamente, aplicando-se a mesma metodologia utilizada para o fluxo rápido,

agora pode-se resolver a equação do fluxo térmico de (49). Assim, tem-se:

$$\frac{d^2}{dx^2}\hat{\phi}_2(x,s) - \hat{\phi}_2(x,s)\left[\frac{s}{D_2 v_2} + \frac{\Sigma_{a2}}{D_2}\right] + \frac{\phi_2(x,0)}{D_2 v_2} + \frac{\Sigma_{s12}\hat{\phi}_1(x,s)}{D_2} = 0. \tag{64}$$

Tem solução dada da seguinte maneira:

$$\hat{\phi}_2(x,s) = \kappa_3 e^{\sqrt{\gamma_2(s)}x} + \kappa_4 e^{-\sqrt{\gamma_2(s)}x} + I_2 x^3 + H_2 x^2 + G_2 x + F_2, \tag{65}$$

onde as constantes κ_3 e κ_4 tem a seguinte forma:

$$\kappa_3 = \left[\frac{F_2 e^{-\sqrt{\gamma_2(s)}L} - I_2 L^3 - H_2 L^2 - G_2 L - F_2}{e^{\sqrt{\gamma_2(s)}L} - e^{-\sqrt{\gamma_2(s)}L}}\right] \text{ e } \kappa_4 = [-\kappa_3 - F_2],$$

onde $\gamma_2(s) = \left[\frac{s}{D_2 v_2} + \frac{\Sigma_{a2}}{D_2}\right]$

Logo, o fluxo térmico transformado pode ser escrito como:

$$\hat{\phi}_2(x,s) = \left[\frac{F_2 e^{-\sqrt{\gamma_2(s)}L} - I_2 L^3 - H_2 L^2 - G_2 L - F_2}{e^{\sqrt{\gamma_2(s)}L} - e^{-\sqrt{\gamma_2(s)}L}}\right] e^{\sqrt{\gamma_2(s)}x} +$$
$$\left[-\left(\frac{F_2 e^{-\sqrt{\gamma_2(s)}L} - I_2 L^3 - H_2 L^2 - G_2 L - F_2}{e^{\sqrt{\gamma_2(s)}L} - e^{-\sqrt{\gamma_2(s)}L}}\right) - F_2\right] e^{-\sqrt{\gamma_2(s)}x} + F_2 x^3 + G_2 x^2 + H_2 x + I_2. \tag{66}$$

Analogamente, como em (62) utiliza-se a inversa numérica de Laplace em (66) e, em seguida reconstrói-se ϕ_2 através de uma interpolação polinomial, da mesma forma que (63).

Cabe ressaltar que não foi substituído diretamente (62) e (66) em (49). Pois, antes de substituir os fluxos rápido e térmico nas equações das concentrações de precursores (49), deve-se aplicar a transformada de Laplace nos fluxos interpolados. Para $j = 1$ e $j = 2$, em (63) tem-se:

$$\hat{\phi}_1(x,s) = \frac{y_{1,1}}{s} + \frac{y_{1,2}}{s}x + \frac{y_{1,3}}{s}x^2 + \frac{y_{1,4}}{s^2} + \frac{y_{1,5}}{s^2}x + \frac{y_{1,6}}{s^2}x^2, \tag{67}$$

$$\hat{\phi}_2(x,s) = \frac{y_{2,1}}{s} + \frac{y_{2,2}}{s}x + \frac{y_{2,3}}{s}x^2 + \frac{y_{2,4}}{s^2} + \frac{y_{2,5}}{s^2}x + \frac{y_{2,6}}{s^2}x^2. \tag{68}$$

Substituindo (67) e (68) em (49), pode-se reescrever os termos da seguinte maneira:

$$s\hat{C}_i(x,s) \;+\; \lambda_i \hat{C}_i(x,s) \;=\; C_i(x,0) \;+\; [\beta_i \nu_1 \Sigma_{f1}]\hat{\phi}_1(x,s) \;+\; [\beta_i \nu_2 \Sigma_{f2}]\hat{\phi}_2(x,s) \tag{69}$$

sendo, $C_i(x,0)$ obtidos em (51) com, $i = 1, ..., 6$.

Reescrevendo (69), tem-se:

$$C_i(x,s) = \frac{\lambda_i\beta_i[\nu_1\Sigma_{f1}\hat{\phi}_1(x,s) + \nu_2\Sigma_{f2}\hat{\phi}_2(x,s)] + \beta_i[\nu_1\Sigma_{f1}\hat{\phi}_1(x,0) + \nu_2\Sigma_{f2}\phi_2(x,0)]}{\lambda_i[s+\lambda_i]}, \quad (70)$$

com, $i = 1, ..., 6$.

Considerando a mesma metodologia utilizada para os fluxos rápido e térmico, pode-se resolver (70) aplicando-se a transformada inversa de Laplace e interpolando as soluções das concentrações em um mesmo polinômio conforme (63).

Em seguida, atualiza-se o termo fonte W da equação do fluxo rápido (43) com os fluxos $[\phi_1^{[k]}$,$\phi_2^{[k]}$ e $C_1^{[k]}, C_2^{[k]}, C_3^{[k]}, C_4^{[k]}, C_5^{[k]}, C_6^{[k]}]$, sendo k o índice que representa o numero da iteração.

Logo, pode-se resolver o sistema de equações de (43) através de um processo iterativo, descrito da seguinte forma:

$$A\mathbf{\Phi}^{[\mathbf{k+1}]} = \mathbf{M}\mathbf{\Phi}^{[\mathbf{k}]}, \quad (71)$$

em que Φ é um vetor transposto $(8\text{x}1)$. Na Figura 2, tem-se o fluxograma do algoritmo implementado e abaixo apresenta-se o algoritmo realizado em português estruturado.

1. Estimativa de $\phi_1^{[k]}, \phi_2^{[k]}$ e $C_1^{[k]}, C_2^{[k]}, C_3^{[k]}, C_4^{[k]}, C_5^{[k]}, C_6^{[k]}$;
2. Aplica-se a transformada de Laplace no sistema de equações;
3. Resolve-se a equação de fluxo rápido;
   - Resolve-se a EDO do fluxo rápido;
   - Aplica-se a transformada inversa Numérica de Laplace;
   - Interpola-se o fluxo.
4. Resolve-se a equação de fluxo térmico;
   - Substitui-se ϕ_1 transformado na equação de fluxo térmico;
   - Resolve-se a EDO do fluxo térmico;
   - Aplica-se a transformada inversa Numérica de Laplace;
   - Interpola-se o fluxo.
5. Resolve-se as equações das concentrações;
   - Substitui-se ϕ_1 e ϕ_2 transformados nas equações das concentrações;
   - Resolve-se as EDO's das concentrações;

- Aplica-se a transformada inversa Numérica de Laplace;
- Interpola-se o fluxo.

6. Teste do critério de parada $\frac{|\phi_j^{[k+1]}-\phi_j^{[k]}|}{|\phi_j^{[k+1]}|} < \varepsilon$;
7. Caso o critério de parada seja satisfeito finaliza-se o processo, caso contrário atualiza-se o índice k e retorna-se ao item 1.

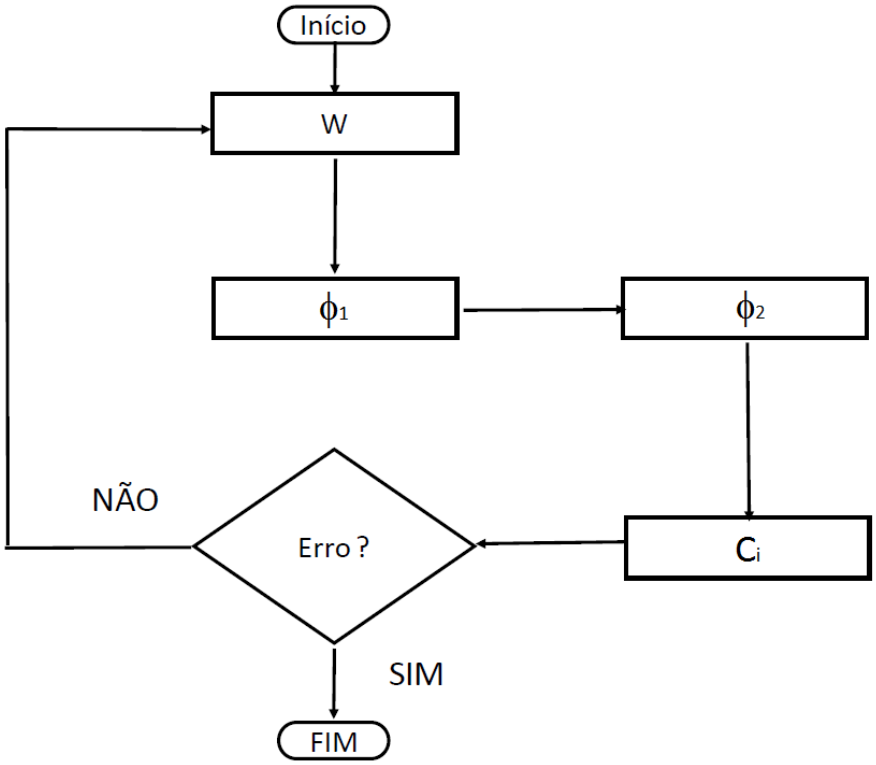

Figura 2: Fluxo grama do Algoritmo

3.2 Aplicação da metodologia para o caso multirregião

Neste capítulo vamos aplicar a metodologia para o modelo de cinética multigrupo, multirregião de difusão de nêutrons em meio unidimensional e geometria cartesiana, dado por:

$$\frac{1}{v_1}\frac{\partial \phi_1^{[r]}(x,t)}{\partial t} = \nabla^2 D_1^{[r]}\phi_1^{[r]}(x,t) - \Sigma_{R1}^{[r]}\phi_1^{[r]}(x,t) + (1-\beta)[\nu_2\Sigma_{f2}^{[r]}\phi_2^{[r]}(x,t) + \nu_1\Sigma_{f1}^{[r]}\phi_1^{[r]}(x,t)] + \sum_{i=1}^{6}\lambda_i C_i^{[r]}(x,t)$$

$$\frac{1}{v_2}\frac{\partial \phi_2^{[r]}(x,t)}{\partial t} = \nabla^2 D_2^{[r]}\phi_2^{[r]}(x,t) - \Sigma_{a2}^{[r]}\phi_2^{[r]}(x,t) + \Sigma_{s12}^{[r]}\phi_1^{[r]}(x,t) \tag{72}$$
$$\frac{\partial C_i^{[r]}(x,t)}{\partial t} = \beta_i[\nu_1\Sigma_{f1}^{[r]}\phi_1^{[r]}(x,t) + \nu_2\Sigma_{f2}^{[r]}\phi_2^{[r]}(x,t)] - \lambda_i C_i^{[r]}(x,t)$$

onde $i = 1, ..., 6$ e $r = 1, 2, ..., R$ denota a respectiva região e R é o número da regiões. As soluções das equações (72) obedecem as condições de contorno, dadas por

$$\varrho_1\phi(0,t) + \delta_1\frac{\partial\phi(0,t)}{\partial x} = 0, \tag{73}$$
$$\varrho_2\phi(L,t) + \delta_2\frac{\partial\phi(L,t)}{\partial x} = 0,$$

Lembrando que, ϱ e δ são constantes que dependem das propriedades físicas do problema. E as condições de interface, continuidade de corrente e do fluxo de nêutrons, são dadas por:

$$\begin{aligned} \phi_g^{[r]}(x,t) &= \phi_g^{[r+1]}(x,t) \\ -D_g^{[r]}\frac{\partial\phi_g^{[r]}(x,t)}{\partial x} &= -D_g^{[r+1]}\frac{\partial\phi_g^{[r+1]}(x,t)}{\partial x} \end{aligned} \tag{74}$$

Análogo ao caso homogêneo, resolve-se o sistema de equações (72) obedecendo as condições de contorno dadas em (73) e as condições de interface dadas em (74) utilizando o método iterativo de fonte. Para isto, resolve-se cada uma das equações de (72) separadamente por região, através do desacoplamento do sistema.

O método consiste primeiramente em resolver a equação de fluxo rápido de (72), em R partes e conectá-las através das condições de contorno e interface. Cabe ressaltar que estamos considerando as seções de choque constantes por região. Sabe-se que a equação de fluxo rápido tem solução dada por região, de acordo com:

$$\hat{\phi_1}^{[r]}(x,s) = \kappa_{1,i}e^{\sqrt{\gamma_1(s)}x} + \kappa_{2,i}e^{-\sqrt{\gamma_1(s)}x} + L_{1,i}x^6 + K_{1,i}x^5 + J_{1,i}x^4 + I_{1,i}x^3 + H_{1,i}x^2 + G_{1,i}x + F_{1,i}. \tag{75}$$

onde, $\kappa_{1,i}$, $\kappa_{2,i}$, $F_{1,i}$, $G_{1,i}$, $H_{1,i}$, $I_{1,i}$, $J_{1,i}$, $K_{1,i}$ e $L_{1,i}$, são as constantes de cada região da equação do fluxo rápido, sendo i o índice que define a região. Desta forma, após aplicarmos a transformada de Laplace recaímos em uma EDO de 2ª ordem. Então, para cada região surgem duas constantes, gerando um total de $2R$ equações para cada grupo de energia. Aplicando as condições de contorno e de interface do problema dadas por (73) e (74), obtem-se um sistema linear acoplado de $2R$ incógnitas e $2R$ equações, para cada grupo de energia.

Por fim, realiza-se o ajuste das soluções das equações de fluxo rápido, térmico

e das concentrações através do método dos mínimos quadrados, dividindo-se em R polinômios de mesmo formato, como segue:

$$p(x,t) = y_{1,i} + y_{2,i}x + y_{3,i}x^2 + y_{3,i}x^3 + y_{3,i}x^4 + y_{4,i}t + y_{5,i}xt + y_{6,i}x^2t + y_{6,i}x^3t + y_{6,i}x^4t, \quad (76)$$

onde, i indica a sub-região interpolada. Cabe ressaltar, que devido ao baixo número de regiões em que o problema foi dividido faz-se necessário no mínimo um polinômio de quarta ordem na variável espacial e linear no tempo.

As equações de fluxo térmico e das concentrações de precursores de nêutrons atrasados são resolvidas analogamente a metodologia utilizada para resolver o problema homogêneo, respeitando-se as condições de contorno e interface do problema multirregião, assim como descrito anteriormente na equação de fluxo rápido.

Embora matematicamente a metodologia tenha sido facilmente estendida para o problema multirregião, computacionalmente o problema apresentou algumas dificuldades. Uma delas foi a interpolação das condições iniciais do problema em estado estacionário obtido de (ZANETTE, 2017) em polinômios de baixa ordem. Além dessa, outra dificuldade apresentada foi o calculo dos coeficientes dos polinômios interpolados dos fluxos e das concentrações, devido a necessidade de utilizar-se polinômios de alto grau o que aumenta significativamente o tamanho das matrizes e dificulta o calculo dos coeficientes. Problema este causado pelo mal condicionamento das matrizes interpoladoras.

Como alternativa para resolver estes problemas, a condição inicial foi dividida em R partes de acordo com o número de regiões do problema. Nas interfaces utilizou-se um ponto médio entre as regiões com intuito de amenizar os saltos que surgem devido a interpolação de cada região e para melhor conectar o polinômio interpolador em cada região. Para diminuir a ordem das grandezas dos coeficientes dos polinômios interpolados dos fluxos e das concentrações, além de dividir-se o domínio em R partes, deslocou-se o problema para a origem, o que ajudou a diminuir a magnitude dos coeficientes. Estas alternativas ajudaram a melhorar os coeficientes das matrizes e diminuir o grau necessário do polinômio de interpolação dos fluxos e das concentrações. Porém, acredita-se que devido a grande complexidade do problema multirregião e a grande quantidade de interpolações necessárias utilizadas na metologia tenham dificultado a solução do problema, visto que, a medida que o método iterativo era executado, a magnitude dos coeficientes das matrizes aumentavam significativamente o que acabou dificultando a determinação dos coeficientes dos polinômios.

Como alternativa para contornar estas dificuldades, acredita-se que dividir o domínio em sub-regiões e diminuir o grau de interpolação dos polinômios possa resolver de maneira eficaz o problema das matrizes mal condicionadas, alternativa esta a ser investigada em trabalhos futuros.

4 RESULTADOS

Para validação da metodologia proposta é utilizado um algoritmo implementado na plataforma Scilab e os resultados são gerados em um computador de configurações, Intel Core i5-7200U 2.5GHz e 8 GB de memória ram. Neste capítulo, resolve-se três casos testes, para todos os casos é considerado meio homogêneo, sem *upscattering* ($\Sigma_{s21} = 0$). Para os casos 1 e 2, são considerados somente 1 grupo de energia e 1 grupo de precursores de nêutrons atrasados. Para o caso 3, é considerado 2 grupos de energia e 6 grupos de precursores.

4.1 Caso Teste 1

Para este caso teste foi considerado 1 grupo de energia e 1 grupo de precursores em uma placa plana com condições de contorno do tipo vácuo $(\phi(0) = \phi(L) = 0)$, e $L = 22,9$ cm, os parâmetros nucleares utilizados estão apresentados na Tabela 2. Como condição inicial, $\phi(x, 0)$ é utilizado a solução da equação de difusão em estado estacionário desenvolvida por (ZANETTE, 2017), cujo fluxo tem comportamento apresentado na Figura 3 e possui $k_{eff} = 0,9802168890$.

Tabela 2: Parâmetros Nucleares Caso Teste 1

D$[cm]$	$0,96343$
v$[cm/s]$	$1,1035 \times 10^{7}$
$\Sigma_a[cm^{-1}]$	$1,5843 \times 10^{-2}$
$\nu\Sigma_f[cm^{-1}]$	$3,3303 \times 10^{-2}$
β	$0,0045$
$\lambda[s^{-1}]$	$0,08$

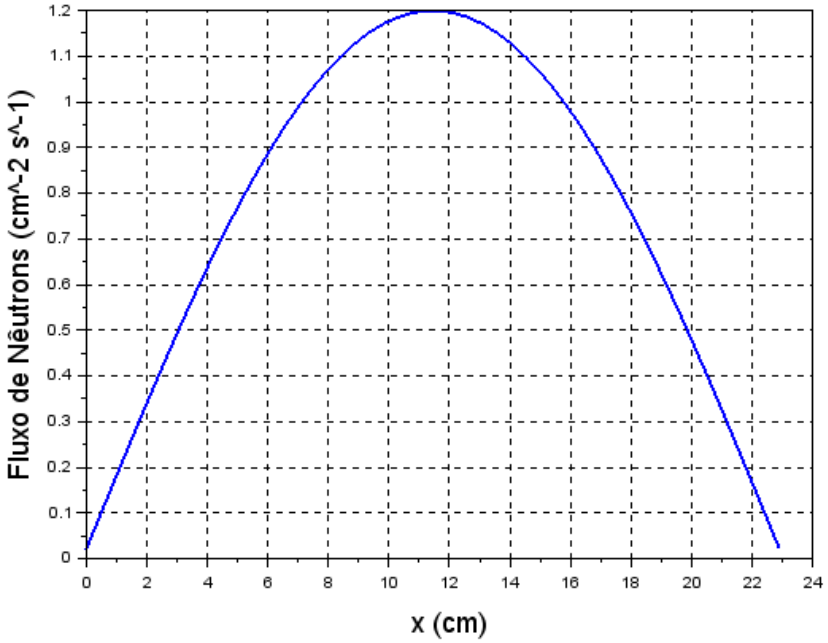

Figura 3: Solução da equação de difusão em estado estacionário

Para o critério de parada do algoritmo utiliza-se $\epsilon < 10^{-8}$, o algoritmo executa 16 iterações. Os valores dos fluxos em $L/2$ são apresentados na Tabela 3.

O fluxo de nêutrons encontrado no centro da placa em $t = 1s$ por CEOLIN (2010) é $0,2086302278$, enquanto que na formulação proposta de acordo com a Tabela 3 obteve-se um fluxo de $0,2057523204792$ com $\Delta x = 0,2290$. Ainda na Tabela 3, apresenta-se o fluxo de nêutrons no centro da placa para $t = 1, 3, 5, 7$ e10 segundos.

Tabela 3: Fluxo de nêutrons no centro da placa

$t(s)$	$\phi(cm^{-2}s^{-1})$
1	$0,2057523204792$
3	$0,1799332504614$
5	$0,1569286588867$
7	$0,1363518339556$
10	$0,1094875875439$

Na Figura 4, temos o comportamento do fluxo de nêutrons em função da variável espacial para diferentes tempos. Como era esperado, o perfil da curva respeita as condições de contorno. Além disso considerando que $k_{eff} < 1$, conforme o tempo aumenta o fluxo tende a diminuir, o que pode ser melhor observado na Figura 5.

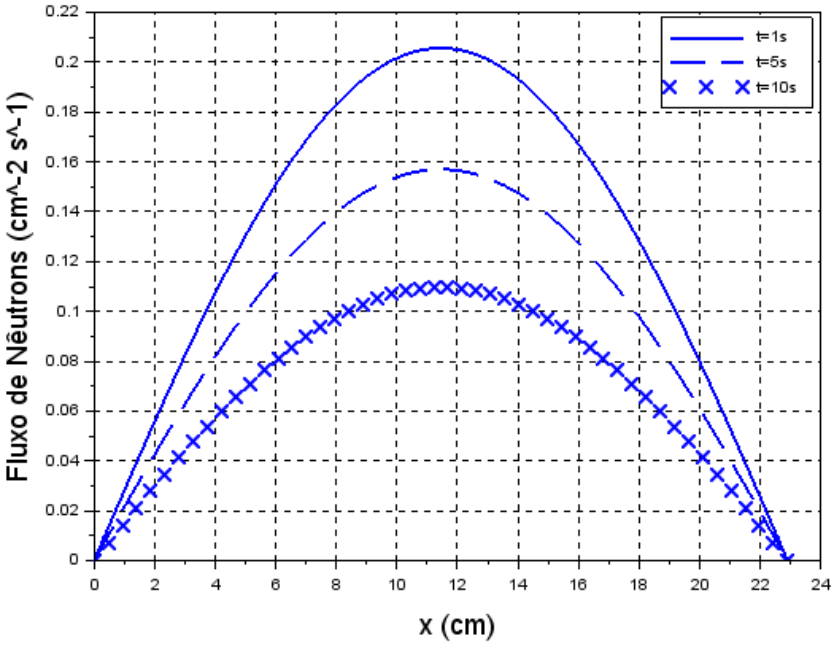

Figura 4: Fluxo de nêutrons para diferentes tempos

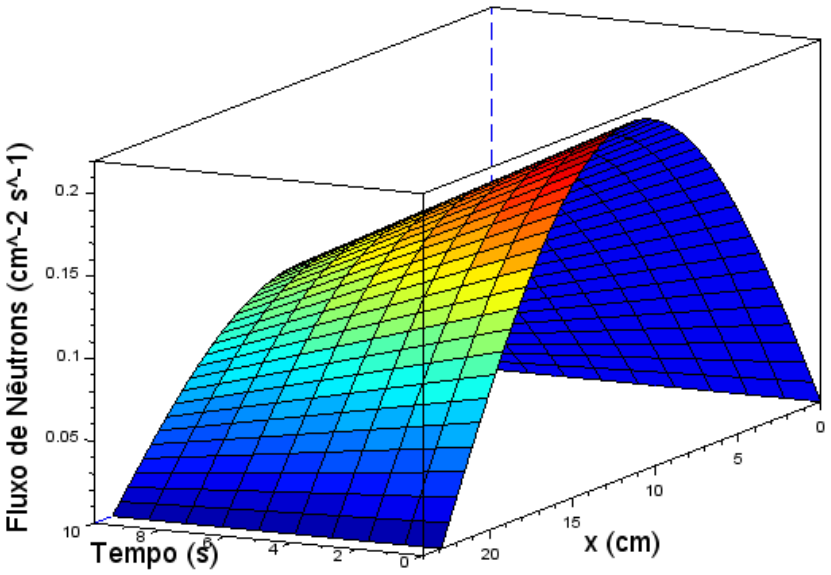

Figura 5: Fluxo de nêutrons 3-D

4.2 Caso Teste 2

Para validação da metodologia utiliza-se um problema semelhante ao caso teste 1 e comparam-se os resultados obtidos com os resultados de um algoritmo de volumes finitos. Neste caso, a condição inicial está normalizada pelo seu maior valor, conforme a Figura 6. O problema apresenta $k_{eff} = 0,9802168890$ e os parâmetros nucleares podem ser vistos na Tabela 4.

Tabela 4: Parâmetros Nucleares Caso Teste 2

D$[cm]$	$0,96343$
v$[cm/s]$	$1,1035 \times 10^7$
$\Sigma_a[cm^{-1}]$	$1,5843 \times 10^{-2}$
$\nu\Sigma_f[cm^{-1}]$	$3,3303 \times 10^{-2}$
β	$0,0045$
$\lambda[s^{-1}]$	$0,008$

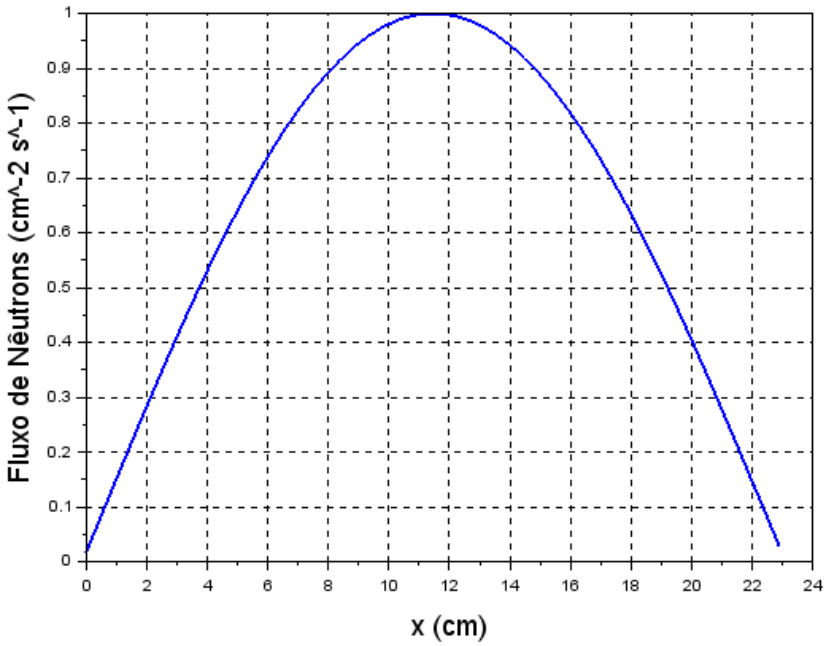

Figura 6: Solução da equação de difusão em estado estacionário

Na Tabela 5 tem-se os valores numéricos do fluxo de nêutrons em $t = 1s$. Nesta Tabela apresenta-se um quadro comparativo entre os resultados obtidos por um algoritmo de volumes finitos e a metodologia proposta. Para ambos os algoritmos utilizou-se um $\Delta x = 0,2290$ cm.

Tabela 5: Valores do fluxo de nêutrons

$x(cm)$	ϕ Com Método Iterativo de Fonte	ϕ Com volumes finitos	Diferença absoluta
0	$0,0000000020713$	$0,002864584$	$0,0028645823287$
5	$0,1171681755802$	$0,118441533$	$0,0012733574198$
10	$0,1794589440941$	$0,179656955$	$0,0001980109059$
$11,45$	$0,1822031683263$	$0,182350107$	$0,0001469386737$
15	$0,1606499931883$	$0,161174641$	$0,0005246478117$

Na Figura 7 é apresentado o fluxo escalar de nêutrons para diferentes valores de t. Nesta Figura nota-se que o fluxo obedece as condições de contorno e demonstra comportamento subcrítico como era esperado.

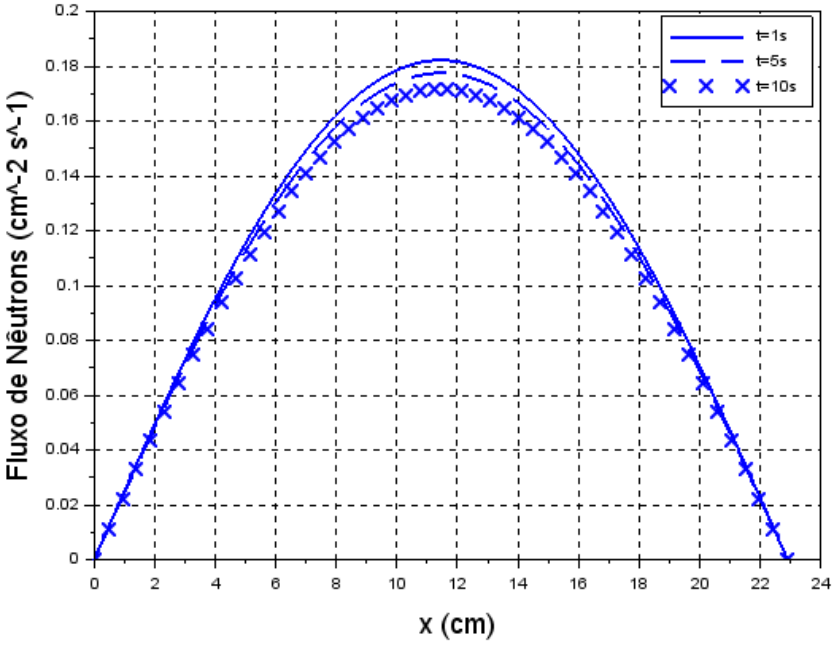

Figura 7: Fluxo de nêutrons para diferentes tempos

4.3 Caso Teste 3

Neste caso, aplica-se a metodologia vista no capitulo anterior em um problema com 2 grupos de energia e 6 grupos de precursores de nêutrons atrasados. Em que, o grupo 1 é escolhido para caracterizar o grupo rápido e o grupo 2 o grupo térmico. Sendo os parâmetros nucleares do problema apresentados nas Tabelas 6 e 7.

Tabela 6: Parâmetros Nucleares Caso Teste 3

Parâmetro	ϕ_1	ϕ_2
D$[cm]$	$1,0$	$0,5$
v$[cm/s]$	$1,0 \times 10^7$	$3,0 \times 10^5$
$\Sigma_a[cm^{-1}]$	$0,02$	$0,08$
$\nu\Sigma_f[cm^{-1}]$	$0,005$	$0,099$
$\Sigma_{1\to2}[cm^{-1}]$	$0,01$	0

Tabela 7: Parâmetros referentes aos nêutrons atrasados caso teste 3

i	β_i	$\lambda_1[s^{-1}]$
1	$0,00025$	$0,0124$
2	$0,00164$	$0,0305$
3	$0,00147$	$0,1110$
4	$0,00296$	$0,3010$
5	$0,00086$	$1,1400$
6	$0,00032$	$3,0100$

Para este caso teste tem-se uma placa com $L = 160$ cm e $k_{eff} = 0,8520306528$. Como condição inicial usou-se a solução para o caso estacionário encontrada por (ZANETTE, 2017) conforme foi utilizado para os casos anteriores. Pode-se observar o perfil da condição inicial utilizada para o fluxos rápido e térmicos normalizados nas figuras 8 e 9, respectivamente.

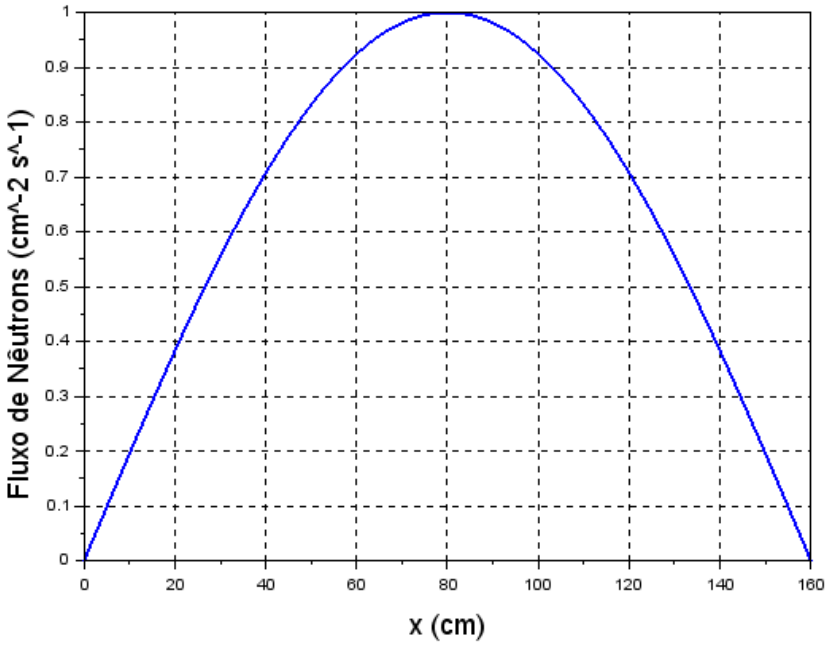

Figura 8: Solução da equação da difusão em estado estacionário para grupo rápido

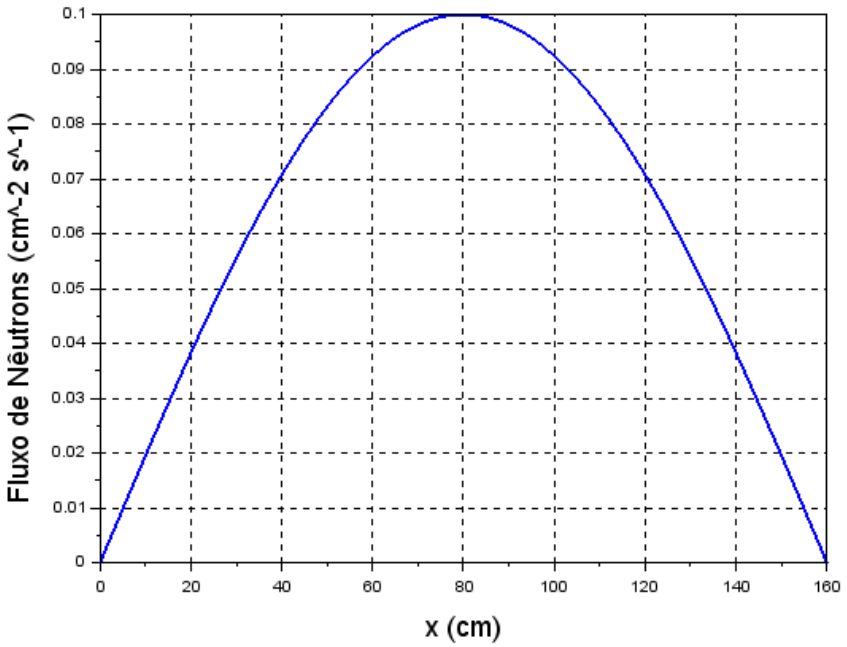

Figura 9: Solução da equação da difusão em estado estacionário para grupo térmico

As Tabelas 8 e 9 apresentam a convergência numérica dos fluxos rápido e térmico em $t = 1s$ e $x = 80$ cm com a diminuição de ε, respectivamente. Na Tabela 8 para ε igual a 10^{-5} temos uma concordância de 6 dígitos comparando-se com $\varepsilon = 10^{-8}$, já

para $\varepsilon = 10^{-7}$ tem-se uma concordância de 8 dígitos, o que indica que a medida que ε tende para zero a solução tende a estabilizar, o mesmo ocorre para a Tabela 9.

Tabela 8: Estabilidade numérica do fluxo rápido de nêutrons

ε	$\phi_1[cm^{-2}s^{-1}]$
10^{-3}	$0,000905058$
10^{-5}	$0,000889528$
10^{-6}	$0,000888144$
10^{-7}	$0,000888022$
10^{-8}	$0,000888010$

Tabela 9: Estabilidade numérica do fluxo térmico de nêutrons

ε	$\phi_2[cm^{-2}s^{-1}]$
10^{-3}	$0,000111869$
10^{-5}	$0,000109938$
10^{-6}	$0,000109766$
10^{-7}	$0,000109751$
10^{-8}	$0,000109749$

A fim de comparar os resultados obtidos neste trabalho, utilizou-se o trabalho desenvolvido por (CEOLIN, 2010). Na Tabela 10 tem-se os valores dos fluxos rápido e térmico encontrados no centro da placa em ambos trabalhos, no instante $t = 1s$. Observando-se os resultados apresentados na Tabela 10 tem-se uma concordância de 5 dígitos para o grupo rápido e 6 dígitos para o grupo térmico entre os dois métodos, o que demonstra o bom desempenho do Método Iterativo de Fonte.

Tabela 10: Resultados numéricos

	(CEOLIN, 2010)	Método Iterativo de Fonte	Diferença Absoluta
$\phi_1[cm^{-2}s^{-1}]$	$0,00088019499$	$0,000879889$	$3,060 \times 10^{-7}$
$\phi_2[cm^{-2}s^{-1}]$	$0,00010976394$	$0,000108745$	$1,019 \times 10^{-8}$

Nas Figuras 10, 11 e 12 temos representado graficamente os valores dos fluxos rápido e térmico e da concentração de um dos grupos de precursores para diferentes tempos. Para este caso o erro máximo admitido foi de 10^{-8} e utilizou-se um $\Delta x = 1$.

Assim como nos casos anteriores, observa-se um comportamento subcrítico, este comportamento pode ser melhor observado nos gráficos 3-D, Figura 13 para o grupo 1 e Figura 14 para o grupo 2. Na Tabela 11 tem-se o valor dos fluxos no centro da placa para o grupo rápido e térmico para diferentes tempos.

Tabela 11: Fluxos do grupo 1 e grupo 2

tempo (s)	$\phi_1[cm^{-2}s^{-1}]$	$\phi_2[cm^{-2}s^{-1}]$
1	$0,000879889$	$0,000108745$
2	$0,000848293$	$0,000104841$
3	$0,000816697$	$0,000100937$
4	$0,000785101$	$0,000097032$
5	$0,000753505$	$0,000093128$
6	$0,000721908$	$0,000089223$
7	$0,000690313$	$0,000085319$
8	$0,000658716$	$0,000081414$
9	$0,000627120$	$0,000077510$
10	$0,000595524$	$0,000073606$

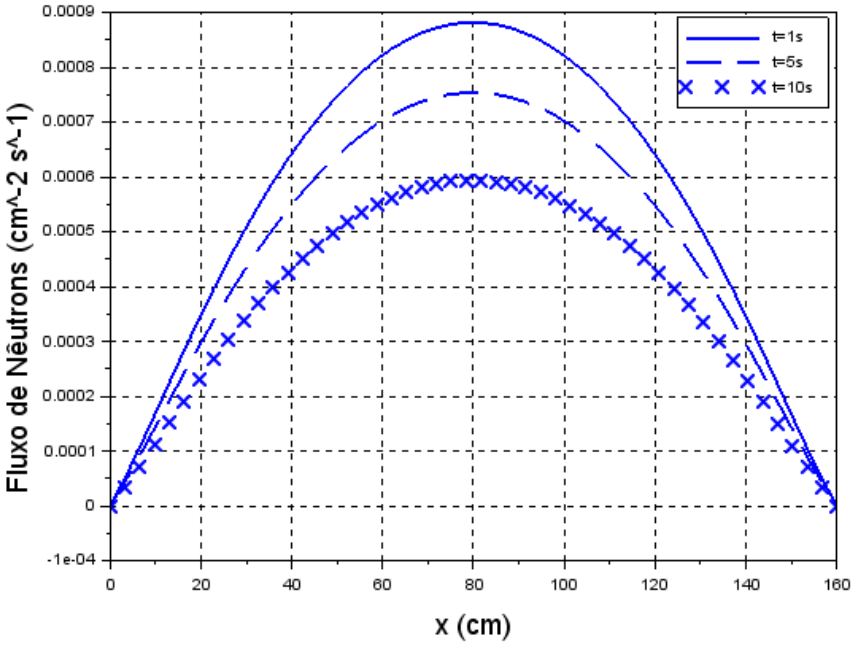

Figura 10: Fluxo de nêutrons rápidos para vários tempos

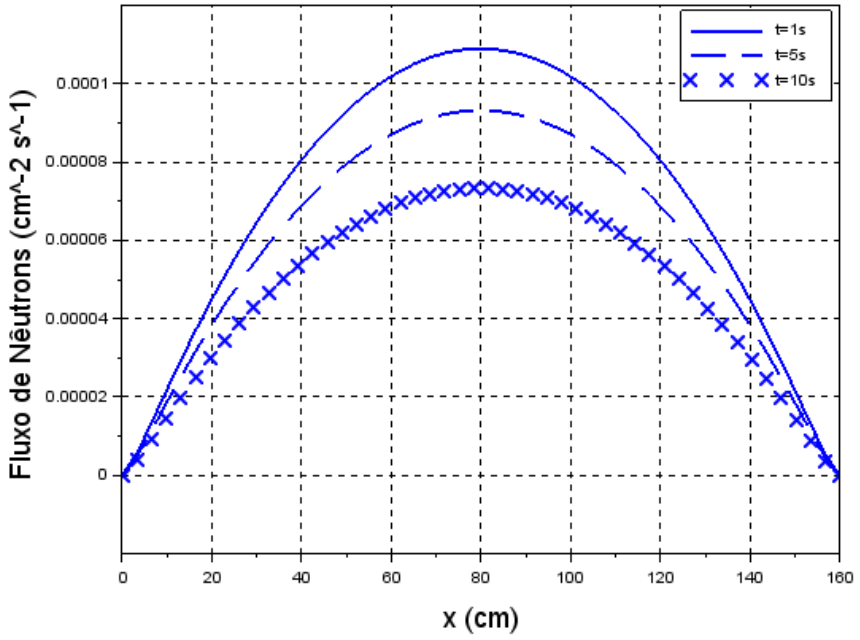

Figura 11: Fluxo de nêutrons térmicos para vários tempos

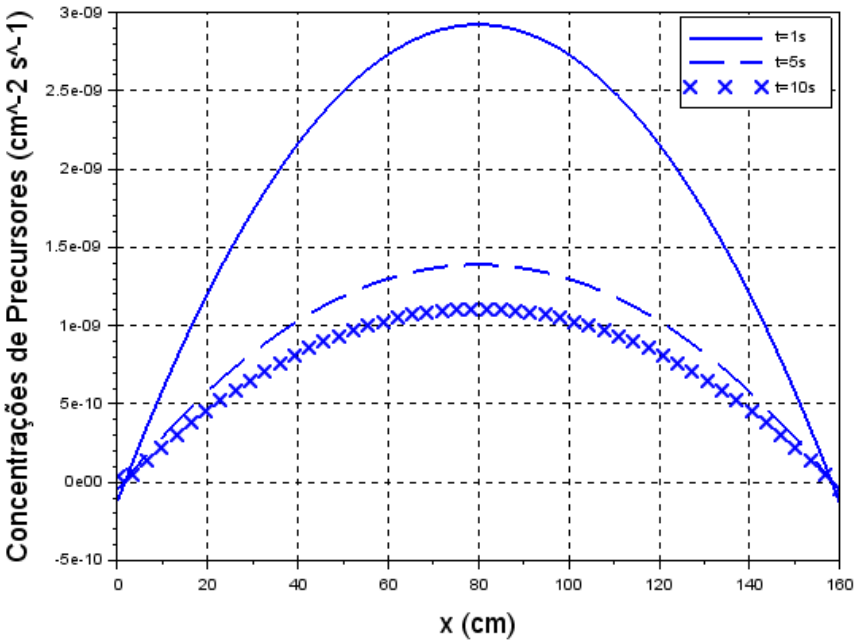

Figura 12: Concentração de percursores de nêutrons para vários tempos

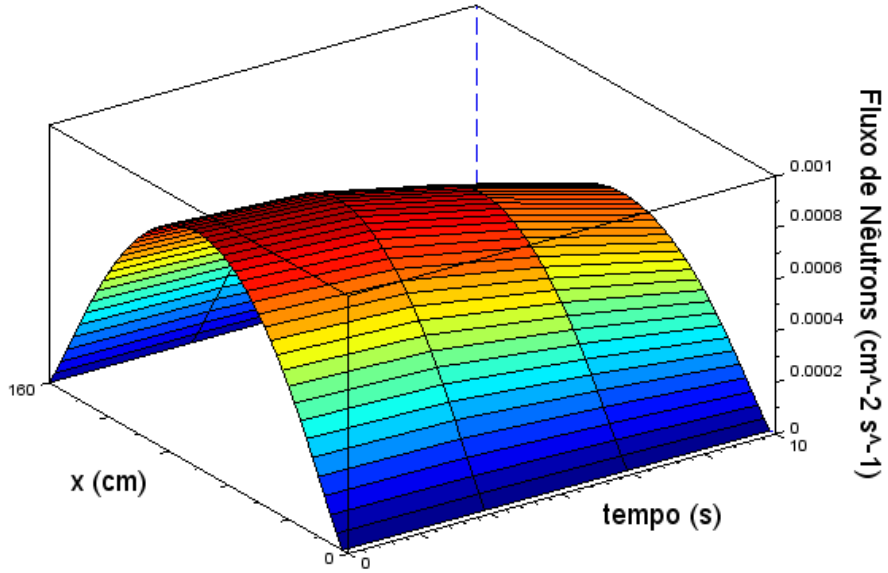

Figura 13: Fluxo de nêutrons rápidos 3-D

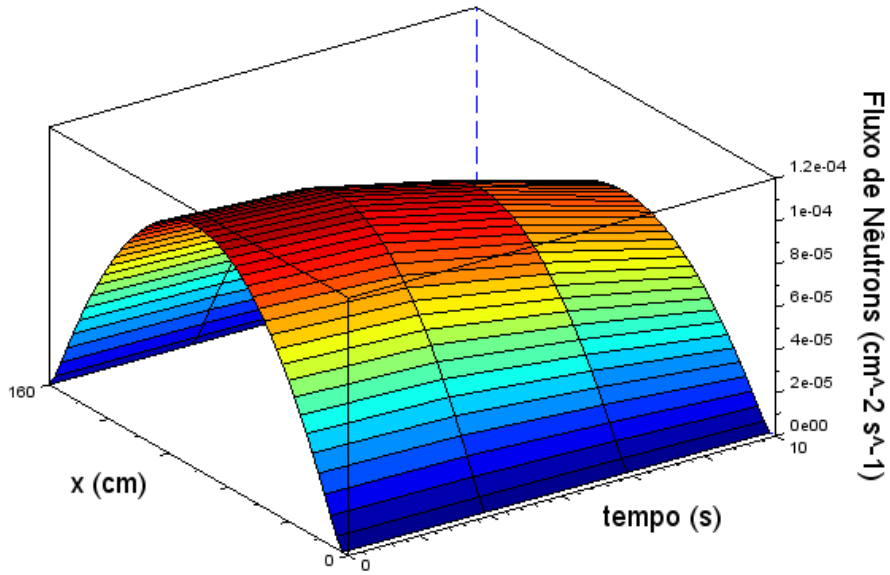

Figura 14: Fluxo de nêutrons térmicos 3-D

Tabela 12: Parâmetros Perturbados

Parâmetro	Valor máximo	Valor mínimo	Valor médio
D_1	$1,690369386$	$0,300309588$	$0,995339487$
D_2	$0,814172898$	$0,150154794$	$0,482163846$
$\nu\Sigma_{f1}$	$0,008458103$	$0,001520376$	$0,004989240$
$\nu\Sigma_{f2}$	$0,167318013$	$0,031393183$	$0,099355598$
Σ_{R1}	$0,018453435$	$0,014501714$	$0,016477575$
Σ_{R2}	$0,125595291$	$0,074220025$	$0,099907658$
Σ_{s12}	$0,012142712$	$0,002001944$	$0,007072328$

4.4 Análise Pertubativa

Nesta seção, a metodologia desenvolvida neste trabalho é aplicada ao problema Caso teste 3 e neste, é introduzida uma pertubação nos parâmetros nucleares. Um único parâmetro é perturbado a cada teste. O intuito desta análise é observar o grau de interferência de cada parâmetro na convergência numérica do problema e do comportamento da solução.

Para a análise perturbativa, é utilizado uma função randômica, que a cada iteração realizada pelo método o parâmetro perturbado assume um novo valor proporcional ao seu próprio valor. Para isto, utiliza-se uma função do *Scilab* chamada *rand*, sendo que toda vez que esta função é chamada ela assume um novo valor entre 0 e 1. Deste modo, para que o parâmetro perturbado oscile dentro de uma faixa determinada de valores, maiores e menores que o parâmetro real, subtraí-se $0,5$ da função *rand* e multiplica-se por 2. Assim, a variação produzida será de -1 a 1. Desta maneira, o fator perturbativo fica da seguinte forma

$$\alpha = \Psi.\gamma.(\textit{rand} - 0,5).2, \tag{77}$$

onde Ψ é o parâmetro que se deseja perturbar e a constante γ é a porcentagem de variação desejada.

A partir desta análise, determina-se qual a máxima perturbação permitida em cada parâmetro nuclear. Na Tabela 12 tem-se o maior valor e o menor valor admitido em cada parâmetro, de forma que o algoritmo consiga convergir numericamente.

As Figura 15 e Figura 16 apresentam os fluxos rápido e térmico, onde cada uma das subfiguras ilustra o comportamento do fluxo encontrado no Caso teste 3, perturbado e em estado normal. Sendo que, para cada perturbação utiliza-se o valor médio apresentado na tabela anterior.

Observando-se as Figuras 15 e 16, nota-se que pequenas perturbações causadas nos parâmetros do problema, tem-se significativas mudanças nas curvas dos fluxos. Em relação aos coeficientes de difusão, com uma pequena variação de D_1 e D_2 tem-se

um pequeno achatamento dos fluxos rápido e térmico como pode ser visto através das figuras. Em relação aos parâmetros de fissão, nota-se que os fluxos diminuíram, como era esperado, visto que o problema foi perturbado com uma diminuição do parâmetro de fissão, em cada caso. No caso das remoções, nota-se uma leve peculiaridade entre os dois casos, para uma pequena diminuição do coeficiente de remoção do grupo 1, teve-se um pequeno aumento dos fluxos rápido e térmico. No caso do coeficiente de remoção do grupo 2, teve-se um comportamento fora do esperado, visto que o fluxo rápido teve uma diminuição, enquanto o fluxo térmico teve um pequeno aumento. Acredita-se que este comportamento deve-se ao fato de que ao desacoplarmos o sistema de equações tenha-se perdido a fiel relação de influência entre o acoplamento dos fluxos. O mesmo problema acontece na perturbação do parâmetro Σ_{s12}, onde para uma diminuição do coeficiente de espalhamento, provoca-se um acentuado crescimento do fluxo rápido no centro da placa em comparação ao fluxo não perturbado, o que foge do comportamento normal esperado. Para o fluxo térmico temos uma grande diminuição do mesmo, como era esperado.

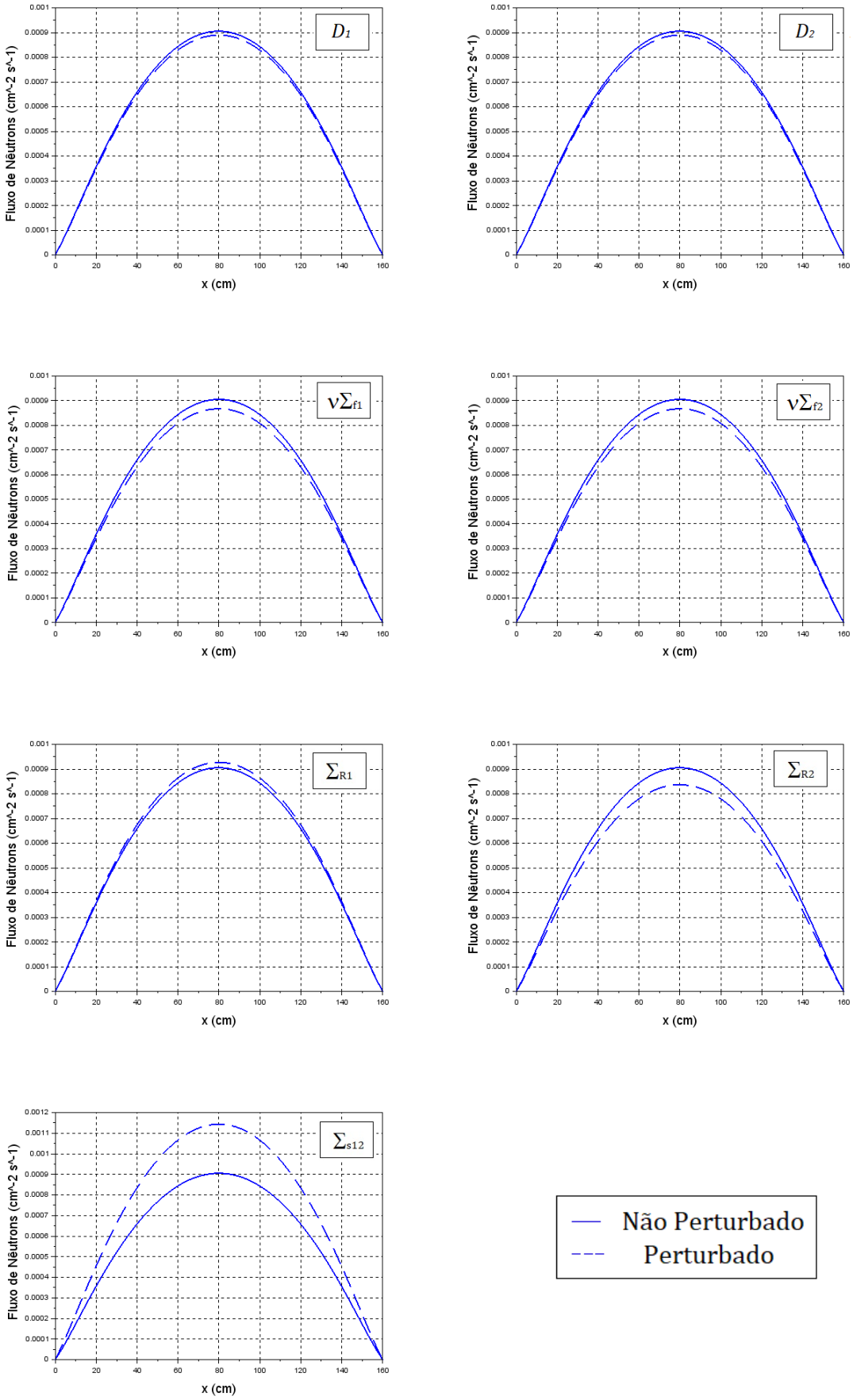

Figura 15: Gráfico do fluxo de nêutrons rápidos: com e sem perturbação

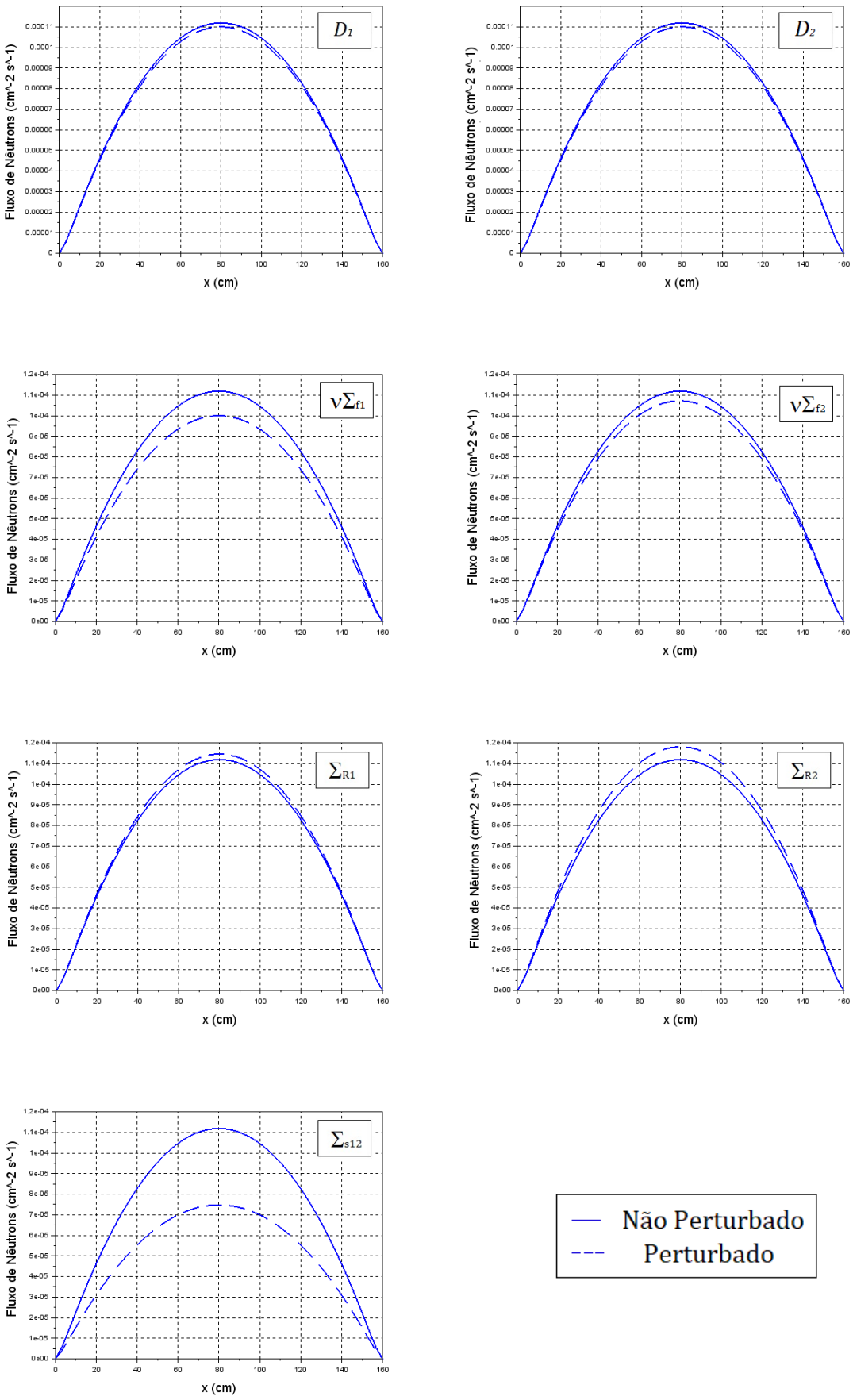

Figura 16: Gráfico do fluxo de nêutrons térmicos: com e sem perturbação

5 CONCLUSÃO

Neste trabalho é apresentada uma solução híbrida para a equação de cinética espacial de difusão de nêutrons unidimensional em geometria cartesiana considerando o modelo multigrupo com 1 e 6 grupos de precursores de nêutrons atrasados.

Lembrando que estas equações são de difícil solução no ponto de vista numérico já que elas são do tipo *stiff*, devido a grande diferença entre as escalas de tempo dos nêutrons prontos gerados e os nêutrons gerados através do decaimento. O que torna este problema um desafio na física de reatores e demonstra a importância de trabalhos nesta área.

Frente a isso, resolve-se problemas *benchmarks* da física de reatores nucleares com intuito de validar a metodologia proposta. De acordo com os resultados apresentados, pode-se observar a precisão da metodologia e a boa concordância de dígitos em relação aos casos comparados.

Uma importante característica a ser destacada é que as equações são resolvidas de forma analítica em cada iteração, na qual aplica-se a transformada de Laplace na variável temporal, recaindo em um conjunto de EDO's que são resolvidas através de métodos clássicos da literatura para EDO's.

A metodologia mostra-se eficaz na resolução das equações de cinética da teoria multigrupo considerando meio homogêneo, unidimensional, geometria cartesiana e P precursores de nêutrons atrasados. Embora, neste, não se tenha apresentado resultados numéricos para o problema heterogêneo é importante destacar a generalidade do método aqui mostrado, já que sua aplicação é facilmente estendida para problemas mais complexos, como problemas envolvendo mais grupos de energia e/ou meio heterogêneo, diferentes geometrias e até mesmo, por exemplo, problemas bidimensionais combinando a metodologia com outras transformadas integrais generalizadas.

Por fim, cabe salientar que o método apresentado mostra-se vantajoso para a solução das equações de cinética espacial para o caso homogêneo, entretanto, o caso heterogêneo ainda é um problema em aberto, onde há a necessidade de uma averiguação mais precisa, visto que aqui não apresenta-se resultados numéricos que atestem a eficácia desta metodologia.

REFERÊNCIAS

ABOANBER, A. E. Generalized Runge Kutta method for two and three dimensional space time diffusion equations with a variable time step., **Journal of Physics A: Mathematical and General**, v.35, p.1024–1040, 2007.

BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. Rio de Janeiro: LTC, 2015.

CEOLIN, C. **Solução Analítica da Equação de Cinética de Difusão Mulrigrupo de Nêutrons em Geometria Cartesiana Unidimensional Pela Técnica da Transformada Integral**. 2010. Dissertação de Mestrado — PROMEC/UFRGS, Porto Alegre/RS.

CEOLIN, C. **A equação unidimensional de difusão de nêutrons com modelo multigrupo de energia e meio heterogêneo**: avaliação do fluxo para problemas estacionários e de cinética. 2014. Tese de Doutorado — PROMEC/UFRGS, Porto Alegre/RS.

CORNO, S.; DULLA, S.; PICCA, P.; RAVETTO, P. Analytical approach to the neutron kinetics of the non-homogeneous reactor., **Progress in Nuclear Energy**, v.50, n.8, p.847–865, 2008.

DUDERSTADT, J. J.; HAMILTON, L. J. **Nuclear reactor analysis**. New York: Wiley New York, 1976. v.84.

HAN, S.; DULLA, S.; RAVETTO, P. Computational methods for multidimensional neutron diffusion problems., **Science and Technology of Nuclear Installations**, v.2009, 2009.

HASSANZADEH, H.; POOLADI-DARVISH, M. Comparison of different numerical Laplace inversion methods for engineering applications., **Applied mathematics and computation**, v.189, n.2, p.1966–1981, 2007.

HOEVEN, M. Van der. World energy outlook 2012., **Paris: International Energy Agency**, 2012.

KUZNETSOV, A. On the Convergence of the Gaver–Stehfest Algorithm., **SIAM Journal on Numerical Analysis**, v.51, n.6, p.2984–2998, 2013.

LAMARSH, J. R.; BARATTA, A. J. **Introduction to nuclear engineering**. New York: Prentice hall, 2001.

NAHLA, A. A.; AL-MALKI, F. A.; ROKAYA, M. Numerical Techniques for the Neutron Diffusion Equations in the Nuclear Reactors., **Adv. Studies Theor. Physics**, v.6, p.649–664, 2012.

PETERSEN, C. Z. **Solução analítica das equações da cinética pontual e espacial da teoria de difusão de nêutrons pelas técnicas da GITT e decomposição**. 2011. Tese de Doutorado — PROMEC/UFRGS, Porto Alegre/RS.

PETRONOTíCIAS. **A CAPACIDADE MUNDIAL DE GERAÇÃO NUCLEAR DE ENERGIA PODERÁ DUPLICAR ATÉ 2050. Disponível em**: <https://petronoticias.com.br/archives/101826> Acesso em: 03 de abr. 2018.

SOARES, M. G. **Cálculo em uma variável complexa**. Rio de Janeiro: Impa, 2012.

SPIEGEL, M. R.; PAEZ, J. D. A. **Teoría y problemas de transformadas de Laplace**:[teoría y 450 problemas resueltos]. México: McGraw-Hill Book Co, 1970.

STACEY, W. M. **Nuclear reactor physics**. New York: John Wiley & Sons, 2007.

VALKÓ, P. P.; ABATE, J. Comparison of sequence accelerators forthe Gaver method of numerical Laplace transform inversion., **Computers & Mathematics with Applications**, v.48, n.3-4, p.629–636, 2004.

ZANETTE, R. **Solucão da Equacão de Difusão de Nêutrons Multigrupo Multirregião Estacionária em Geometria Cartesiana pelo Método da Potência via Fronteiras Fictícias**. 2017. Dissertação de Mestrado — PPGMAT/UFPEL, Pelotas/RS.