UNIVERSIDADE FEDERAL DE PELOTAS

Instituto de Física e Matemática Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática



Dissertação

Solução da Equação de Condução de Calor Não Estacionária em Meios Multicompostos

Juliana Ávila Contreira

Juliana Ávila Contreira

Solução da Equação de Condução de Calor Não Estacionária em Meios Multicompostos

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática da Universidade Federal de Pelotas, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Modelagem Matemática

Orientador: Prof^a. Dr^a. Daniela Buske Coorientador: Prof. Dr. Marco Tullio Vilhena

Universidade Federal de Pelotas / Sistema de Bibliotecas Catalogação na Publicação

C764s Contreira, Juliana Ávila

Solução da equação de condução de calor não estacionária em meios multicompostos''''''''''' / Juliana Ávila Contreira ; Daniela Buske, orientadora ; Marco Tullio Villhena, coorientador. — Pelotas, 2017.

88 f.: il.

Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática, Instituto de Física e Matemática, Universidade Federal de Pelotas, 2017.

1. Parede multicomposta. 2. Condução de calor. 3. Conforto térmico. 4. Solução semi-analítica. I. Buske, Daniela, orient. II. Villhena, Marco Tullio, coorient. III. Título.

CDD: 536.2012

Elaborada por Ubirajara Buddin Cruz CRB: 10/901

Juliana Ávila Contreira

Solução da Equação de Condução de Calor Não Estacionária em Meios Multicompostos

Dissertação aprovada, como requisito parcial, para obtenção do grau de Mestre em Modelagem Matemática, Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática, Instituto de Física e Matemática, Universidade Federal de Pelotas.

Data da Defesa: 03 de março de 2017

Banca examinadora:

Daniela Buska	
Profa. Dra. Daniela Buske (Orientadora)	_
Doutora em Engenharia Mecânica pela Universidade	Federal do Rio Grande do Sul, Brasi

Prof. Dr. Marco Túllio Menna Barreto de Vilhena (Co-Orientador)

Doutor em Engenharia Mecânica pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Brasil

Prof. Dr. Bardo Ernst Josef Bodmann Doutor em Física pela Friedrich Alexander Universität Erlangen Nürnberg, Alemanha

Prof. Dr. Claudio Zen Petersen

Doutor em Engenharia Mecânica pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Brasil

Prof. Dr. Guilherme Jahnecke Weymar
Doutor em Engenharia Mecânica pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Brasil

Prof. Dr. Hugo Alexandre Soares Guedes

Doutor em Engenharia Agrícola pela Universidade Federal de Viçosa, Brasil

AGRADECIMENTOS

Agradeço

A Deus por iluminar meu caminho e me proporcionar empreender essa trajetória evolutiva;

Aos meus pais, Nelson e Luciana, e meu irmão Maurício pelo amor incondiocional, paciência e apoio que me deram não somente durante a realização desta dissertação, mas no decorrer de toda a minha vida;

Aos professores Daniela Buske e Marco T. M. B. de Vilhena pela confiança, amizade e valiosa orientação prestada;

Ao professor Guilherme Jahnecke Weymar pela paciência, amizade, dedicação e sugestões que foram decisivas para a obtenção dos resultados finais deste trabalho;

A CAPES pelo suporte financeiro e ao PPGMMat representado em seu corpo de funcionários e docentes;

E a todos que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho.

RESUMO

CONTREIRA, Juliana Ávila. Solução da Equação de Condução de Calor Não Estacionária em Meios Multicompostos. 2018. 88 f. Dissertação (Mestrado em Modelagem Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática, Instituto de Física e Matemática, Universidade Federal de Pelotas, Pelotas, 2018.

A temperatura, um dos principais fatores de degradação atuantes em revestimentos de fachadas, é responsável pela causa de inúmeros comportamentos nos materiais, provocando assim, variações físicas e químicas que podem resultar em determinadas patologias. O comportamento destes revestimentos quando submetidos as intempéries reflete diretamente no comportamento térmico dos ambientes internos das edificações, interferindo em aspectos importantes como conforto térmico dos usuários e sistemas de condicionamento de ar. Cada vez mais percebe-se que um projeto de edificações não pode ser resumido apenas em atender às necessidades de segurança, estética e comodidade dos usuários, mas também é necessária a criação de um meio ambiente favorável, além da necessidade de um estudo voltado às principais causas de patologias nos sistemas construtivos. Propõem-se então, neste trabalho, uma metodologia capaz de realizar de forma semi-analítica o cálculo dos fluxos de calor existentes na envoltória da edificação, dando especial atenção à paredes externas compostas por mais de uma camada. A distribuição de temperaturas nas camadas são soluções unidimensionais transientes de condução de calor. Tais soluções são obtidas através do método da transformada de Laplace e uma inversão numérica para uma parede composta de apenas um material. Também são apresentadas soluções para uma parede composta por duas, quatro e n camadas. Para uma análise do modelo proposto, são utilizadas propriedades termofísicas encontradas na literatura, sendo possível perceber que o modelo representa satisfatoriamente o comportamento dos materiais estudados. O modelo foi aplicado primeiramente para simular a transferência de calor em uma placa composta por dois materiais. Em um segundo momento esta formulação foi aplicada para uma parede composta por concreto e reboco e, por fim, em uma parede composta por quatro camadas. Os resultados obtidos através do modelo são de grande contribuição para uma avaliação mais precisa da troca de calor não-estacionário em paredes multicamadas, apresentando resultados válidos para descrever o gradiente de temperaturas e tornando possível a análise em cada ponto do elemento.

Palavras-chave: Parede multicomposta, condução de calor, conforto térmico, solução semi-analítica.

ABSTRACT

CONTREIRA, Juliana Ávila. Solution Transient Heat Conduction Equation for Multilayer Walls. 2018. 88 f. Dissertação (Mestrado em Modelagem Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática, Instituto de Física e Matemática, Universidade Federal de Pelotas, Pelotas, 2018.

The temperature, one of the main degradation factors active in facade coatings, is responsible for the cause of numerous behavior in the materials, thus causing, physical and chemical changes that may result in certain pathologies. The behavior of these coatings when subjected to inclement weather are reflected directly in the thermal behavior of the building internal environments, interfering on important aspects such as thermal comfort of users and air conditioning systems. Increasingly it is realize that a building project can not be reduced only to meet the security needs, aesthetics and comfort of users, but it is also necessary to create a favorable environment and the need for a study facing the main causes pathologies in construction systems. Propose then, in this work, a methodology capable of performing in a semi-analytical way the calculation of the existing heat flows in the envelope of the building, giving special attention to external walls composed of more than one layer. The distribution of temperatures in the layers are one-dimensional transient solutions of conduction of heat. Such solutions are obtained by the method of the Laplace transform method and numerical inversion for a wall composed of only one material. It will also be presented solutions for a wall composed two, four and n layers. For an analysis of the proposed model, we wil use thermo-physical properties found in the literature, and it is possible to perceive that the model represents satisfactorily the behavior of the materials studied. The model was first applied to simulate the heat transfer in a plate made up of two materials. In a second moment this formulation was applied composed of concrete and plaster, and finally a wall composed of four layers. The results obtained through the model are of great contribution to a more accurate evaluation of the non-stationary heat exchange in multilayer walls, presenting valid results to describe the temperature gradient and making possible the analysis at each point of the element.

Keywords: multilayer walls, heat conduction, thermal confort, solution semi-analytical.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 Figura 2	Composição das diferentes camadas de uma parede Trocas de calor através de paredes opacas (FROTA; SCHIFFER,	32
	2003)	36
Figura 3 Figura 4	Balanço de energia em um volume de controle elementar Parede externa submetida a um fluxo de calor $q(t)$	39 44
Figura 5	Placa plana composta de duas camadas submetida à um fluxo de calor $q(t)$	47
Figura 6	Placa plana composta de quatro camadas submetida à um fluxo de calor dependente do tempo	52
Figura 7	Placa plana composta de n camadas submetida à um fluxo de calor dependente do tempo	55
Figura 8	Perfil da temperatura ao longo da espessura da camada do material composto Aço/Cobre	60
Figura 9	Fluxos de calor ao longo da espessura da camada do material composto Aço/Cobre	60
Figura 10	Perfil da temperatura ao longo da espessura da camada do material composto Concreto/Reboco.	62
Figura 11	Fluxos de calor ao longo da espessura da camada do material composto Concreto/Reboco	63
Figura 12	Estrutura da parede calculada	64
Figura 13	Comparação entre as temperaturas Sol-Ar simuladas neste trabalho e as temperaturas Sol-Ar apresentadas no trabalho de BEYER;	
	VILHENA (1998)	66
Figura 14	Perfil da distribuição de temperatura ao longo da parede estudada.	67
Figura 15	Fluxos de calor simulados para uma parede com quatro camadas	68

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	Tipos de condição de contorno	43
Tabela 2 Tabela 3	Parâmetros termofísicos dos materiais de cada camada Temperaturas (°C) calculadas ao longo da camada do material com-	58
Tabela 0	posto Aço/Cobre	59
Tabela 4	Parâmetros termofísicos dos materiais da parede para o caso fictício	61
Tabela 5	Temperaturas calculadas ao longo da camada do material composto	
	Concreto/Reboco	61
Tabela 6	Parâmetros termofísicos dos materiais da parede composta por	
	quatro camadas	64
Tabela 7	Temperatura Sol-Ar	65
Tabela 8	Avaliação estatística da temperatura Sol-Ar	66

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

Caracteres Arábicos

 k_2

ics Alubicos
superfície de área (m^2)
pesos da Quadratura Gaussiana
calor específico $(J/kg.K)$
capacidade térmica específica $(J/kg^{\circ}C)$
local de mudança das camadas (m)
Coeficientes das Funções de Transferência
Coeficiente de correlação
elemento de área da superfície $\left(m^2\right)$
Equação Diferencial Parcial
taxa temporal de variação de energia interna $(J/K.m^3)$
taxa de calor gerado (W/m^3)
Funções de Green
Fração de Inclinação
Desvio fracional padrão
função conhecida
taxa de calor gerado (W/m^3)
Generalized Integral Transform Technique
valores do passo para continuidade analítica $\left(s\right)$
coeficiente de condutividade na interface $(W/m^2.K)$
coeficiente de condutância térmica superficial externa $(W/m^2.K)$
coeficiente de condutância térmica superficial interna $(W/m^2.K)$
intensidade de radiação solar incidente global (W/m^2)
condutividade térmica uniforme $(J/mseg^{\circ}C)$
condutividade térmica uniforme da camada 1 $(J/ms^{\circ}C)$

condutividade térmica uniforme da camada 2 $(J/ms^{\circ}C)$

```
k_3 condutividade térmica uniforme da camada 3 (J/ms^{\circ}C)
```

 k_4 condutividade térmica uniforme da camada 4 $(J/ms^{\circ}C)$

 k_n condutividade térmica uniforme da camada $n (J/ms^{\circ}C)$

 k_x condutividade térmica na direção $x (J/ms^{\circ}C)$

 k_y condutividade térmica na direção $y (J/ms^{\circ}C)$

 k_z condutividade térmica na direção $z (J/ms^{\circ}C)$

L espessura do sólido (m)

m massa elementar (daltons)

número de camadas

MPI Message Passing Interface

MDF Método das Diferenças Finitas

MEF Método dos Elementos Finitos

MVF Método dos Volumes Finitos

NMSE Normalized Mean Square Error

PMV Predicted Mean Vote

PDV Percentage of Dissatisfied

p variável temporal transformada

 p_k raízes da Quadratura Gaussiana

Q fluxo de calor transformado

q(t) fluxo de calor (W/m^2)

 q_x fluxo de calor na direção $x (W/m^2)$

 q_y fluxo de calor na direção $y (W/m^2)$

 q_z fluxo de calor na direção $z (W/m^2)$

r variável espacial cilíndrica

T temperatura média (°C)

 T_0 temperatura inicial (°C)

 T_1 temperatura média na camada 1 (°C)

 T_2 temperatura média na camada 2 (°C)

 T_{amb} temperatura média do ambiente interno (°C)

 T_B temperatura média do ambiente externo (°C)

 T_e temperatura do ar externo (°C)

 T_h temperatura média homogênea (°C)

 T_i temperatura do ar interno (°C)

 T_p temperatura média particular (°C)

- T_s temperatura média estacionária (°C)
- T_t temperatura média transiente (°C)
- \bar{T} temperatura média transformada (°C)
- $\overline{T_o}$ temperatura média observada (°C)
- $\overline{T_p}$ temperatura média predita (°C)
- t variável temporal (s)
- u energia interna específica
- U energia interna J
- V.C. volume de controle
- X(x) autofunções
- x distância longitudinal (m)
- y distância latitudinal (m)
- z distância vertical (m)

Caracteres Gregos

- β_m autovalores de Sturm Liouville
- λ coeficiente de condutância térmica $(W/m^2 \circ C)$
- β constante arbitrária
- ρ densidade de massa (kg/m^3)
- α difusividade térmica (m^2/s)
- α_1 difusividade térmica da camada 1 (m^2/s)
- α_2 difusividade térmica da camada 2 (m^2/s)
- α_3 difusividade térmica da camada 3 (m^2/s)
- α_4 difusividade térmica da camada 4 (m^2/s)
- α_n difusividade térmica da camada n (m^2/s)
- ∇ operador Laplaciano
- \mathcal{L} operador da transformada de Laplace
- σ desvio padrão
- θ coordenada esférica

SUMÁRIO

3 -	4 7
2.1Definição de Termos Técnicos32.1.1Alvenaria32.1.2Tipos de Alvenarias32.1.3Revestimentos32.1.4Revestimentos Argamassados32.1.5Revestimentos Não Argamassados32.1.6Mecanismos de trocas térmicas3	19 30 31 33 34 35 36
3.1 Equação geral da condução de calor	38 38 14 14 16 17 52 54
 4.1 Perfil de temperatura de uma placa plana composta por duas camadas 5 4.1.1 Aço/Cobre	58 58 58 61
	39 70
	U
ANEXO A - ANÁLISE DA DISTRIBUIÇÃO DE TEMPERATURA NUMA PA- REDE MULTICOMPOSTA	77

1 INTRODUÇÃO

O estudo da distribuição de temperatura é amplamente utilizado no setor da engenharia devido a sua aplicabilidade, seja para a utilização da união permanente de componentes metálicos como a soldagem, ferramentas revestidas, máquinas térmicas, paredes de alvenaria composta por vários materiais, sistemas de refrigeração, entre outros.

A base deste trabalho é o setor da construção civil, que após um período de crise, manifesta para os próximos anos, expectativas de crescimento no Brasil. Esta possibilidade traz consigo uma busca incessante na melhoria e aumento da qualidade e economia envolvidos durante e após o processo de construção.

A fachada de uma obra, independentemente de ser ela residencial ou comercial, é um dos elementos construtivos mais importantes para a edificação, além de ser uma espécie de capa protetora, a qual recebe todos os tipos de intempéries. São aplicados revestimentos nas fachadas com a finalidade de regularizar a superfície, proteger, aumentar a resistência das paredes, proporcionar estética, acabamento e conforto térmico.

Entende-se por revestimentos todos os procedimentos utilizados na aplicação de materiais de proteção e de acabamento sobre superfícies horizontais e verticais de uma obra de engenharia (FIORITO, 1994). Os revestimentos são formados por camadas de materiais diferentes sobrepostas umas às outras. Devido a isso eles devem ser tratados como tais, sendo necessária a análise das camadas uma a uma respeitando suas propriedades físicas e mecânicas.

Os revestimentos, principalmente os aplicados em fachadas, precisam ter uma boa resistência contra os fatores de degradação, por estarem sempre expostos aos fatores atmosféricos, biológicos, de carga e de uso. Segundo TESTING; MATERIALS (1996), fatores atmosféricos são todos os grupos de fatores associados com o ambiente natural, incluindo radiação, temperatura, chuva e outras formas de água, constituintes normais do ar, seus poluentes e vento. Portanto, esses fatores variam em função do seu ciclo diário e anual, bem como da localização geográfica da edificação.

A temperatura, um dos principais fatores de degradação atuantes nas fachadas, é

responsável pela causa de inúmeros comportamentos nos materiais, provocando assim, variações físicas e químicas. A principal alteração física causada pela variação de temperatura é a variação dimensional, mais conhecida como dilatação ou contração do material. Estas variações geram um estado de tensões internas que, quando ultrapassam o limite de resistência de uma placa cerâmica, por exemplo, causam trincas e fissuras, e, quando ultrapassam o limite de resistência da camada de esmalte causam gretamento (ROSCOE, 2008). Patologias semelhantes ocorrem nos revestimentos argamassados quando expostos a tais fatores.

Partindo deste ponto, cada vez mais percebe-se que um projeto de edificações não pode ser resumido em atender apenas às necessidades de segurança, estética e comodidade dos usuários, mas também é necessária a criação de um meio ambiente favorável, além da necessidade de um estudo voltado às principais causas de patologias nos sistemas construtivos. O ideal para a confecção de um projeto é obedecer as condições climáticas de cada região. No Brasil, país com clima predominantemente tropical, a construção de edifícios com fachadas inteiramente de vidro possuem beleza estética, mas tal aplicação resulta em um aquecimento excessivo do ambiente interno, fazendo com que aumente os custos com sistemas de ar condicionado.

Segundo DEAR; BRAGER (2002), conforto térmico é definido como a condição mental que expressa satisfação com o ambiente térmico que envolve a pessoa. A insatisfação com o ambiente térmico pode ser causada pela sensação de desconforto por calor ou frio quando o balanço térmico não é estável, ou seja, quando há diferenças entre o calor produzido pelo corpo e o calor perdido para o ambiente. A performance humana, como atividades intelectuais, manuais e perceptivas, geralmente apresentam um melhor rendimento quando realizadas em um ambiente que propicie uma temperatura adequada ao tipo de serviço realizado.

As condições desta variável se dão em função de uma série de variáveis, que podem ser ambientais (temperatura do ar, umidade relativa, temperatura média e velocidade do ar) e humanas (vestimenta e atividade), que determinam as trocas térmicas entre o corpo humano, o meio e as respostas fisiológicas e psicológicas do ser humano. Ao conhecer as condições e os parâmetros relativos ao conforto térmico dos ocupantes do ambiente, evitam-se desperdícios com aquecimento e refrigeração, muitas vezes desnecessários.

Os modelos matemáticos são instrumentos particularmente úteis no entendimento dos fenômenos de condução e convecção de calor. Estes modelos, que permitem uma avaliação da distribuição de temperatura, podem ser utilizados para melhorar o conforto térmico de edificações. Na estimativa da distribuição de temperatura numa parede composta, emprega-se a equação de condução de calor.

A solução para equação de condução de calor pode ser numérica ou analítica (semi-analítica). As soluções analíticas apresentam grandes vantagens devido a

obtenção de resultados mais exatos com baixo custo computacional. Essa vantagem se dá ao fato de, para obtenção de soluções mais precisas através de um método numérico, é necessário a utilização de malhas muito refinadas (com muitos pontos), inviabilizando assim certas soluções e tornando tantas outras muito demoradas, além da necessidade de máquinas muito potentes para encontrar tais soluções.

A proposta deste trabalho é a obtenção de soluções com aproximações semianalíticas de um problema térmico transiente em condução de calor num meio multicomposto, a fim de representar o comportamento de determinados materiais quando submetidos a transferências de calor.

Em diversas situações práticas da engenharia civil é possível presenciar componentes construtivos que possuam mais de uma camada, como por exemplo, alvenarias, lajes em concreto armado e pisos. As fachadas de edifícios construídos em alvenaria, tanto estrutural como não estrutural, são compostas por pelo menos cinco camadas de diferentes materiais: a base (alvenaria propriamente dita), chapisco, emboço, reboco e acabamento.

Para a realização do estudo utilizando um modelo matemático, o primeiro passo é analisar o problema real (a forma como ele ocorre na natureza) e descrevê-lo através de um modelo físico, utilizando equações matemáticas que melhor representem o fenômeno estudado. Neste trabalho, utiliza-se para representação do modelo físico a equação de condução do calor. A seguir, obtém-se um modelo matemático que precisa ser resolvido e propõe-se então uma técnica que melhor solucione o problema.

É necessário então conhecer o comportamento destes elementos construtivos, a fim de minimizar as patologias causadas a eles quando submetidos as intempéries. Em busca de um maior entendimento do assunto, foram realizadas pesquisas em trabalhos publicados neste campo.

Pode-se perceber que, na literatura, encontram-se disponíveis inúmeros trabalhos que se concentram no estudo de problemas de difusão de calor em meios multicompostos, em que são utilizados como metodologias métodos numéricos, funções de transferência, métodos semi-analíticos e transformada de Laplace.

Para atingir o objetivo proposto, o trabalho encontra-se organizado da seguinte maneira: no Capítulo 2 encontram-se os principais trabalhos sobre o estudo de problemas envolvendo meios multicompostos, através de uma breve revisão da literatura organizada em ordem cronológica. Além disso, são descritos os mecanismos de trocas térmicas neste mesmo capítulo. No capítulo 3 é apresentada a equação geral da condução de calor em coordenadas cartesianas, as soluções obtidas para o problema térmico unidimensional transiente em uma parede simples, duas camadas, quatro camadas e, por fim, a solução para um problema com uma parede composta por n camadas. Ambas resoluções foram encontradas através da técnica da transformada de Laplace. Encontram-se no Capítulo 4 os resultados numéricos obtidos com o mo-

delo. Por fim, no Capítulo 5 são apresentadas conclusões e algumas perspectivas da continuação do trabalho.

1.1 Justificativa

Em edificações localizadas em regiões quentes e úmidas, as tipologias arquitetônicas poderiam favorecer o aproveitamento dos ventos regionais, minimizando assim os gastos com energia para climatização das mesmas (BASTIDE et al., 2006). Entretanto, esta constatação não parece ser incorporada nos projetos arquitetônicos, resultando em edificações com baixa qualidade ambiental dos espaços internos e que dispõem dos sistemas de condicionamento artificial para corrigir esse problema.

Por outro lado, a concepção de edifícios que desconsideram as características climáticas regionais contribui fortemente para o aumento do aporte energético para proporcionar ambientes termicamente confortáveis (BASTIDE et al., 2006).

Segundo GRATIA; DE HERDE (2004), a grande permanência dos ocupantes estimula a preocupação com a qualidade do ambiente. Os ocupantes vêm exigindo um ambiente mais saudável e estimulante que é geralmente provido por meios mecânicos de refrigeração. Entretanto, a ventilação natural, se bem explorada, pode suprir tais expectativas com eficiência em boa parte do tempo de ocupação.

Ao estudar os aspectos relativos ao conforto térmico são encontradas na literatura duas abordagens diferentes e com prescrições distintas de como as condições microclimáticas das edificações podem ser administradas. A primeira, mais conhecida como estática, representa uma linha analítica, ou racional, da avaliação das sensações térmicas humanas e considera o homem como simples receptor passivo do ambiente térmico. A segunda, conhecida como adaptativa, considera o homem como um agente ativo, que interage com o ambiente em resposta às suas sensações e preferências térmicas. Tais abordagens são resultados de dois grandes grupos de pesquisas, sendo a primeira realizada em câmaras climatizadas e chamada de modelo estático, e a segunda, proveniente de pesquisas de campo, conhecida como modelo adaptativo.

Os estudos em câmaras climatizadas deram origem ao método mais conhecido para avaliação de conforto térmico e são realizados no interior de ambientes totalmente controlados pelo pesquisador, onde tanto as variáveis ambientais como as variáveis pessoais ou subjetivas são manipuladas, a fim de se encontrar a melhor combinação possível entre elas, resultando em uma situação favorável para a pesquisa em questão.

FANGER et al. (1974) realizaram diversos experimentos na Dinamarca sobre conforto térmico. Ele é o principal pesquisador da linha analítica de avaliação das sensações térmicas humanas. Suas equações e métodos tem sido utilizadas mun-

dialmente e serviram de base para a elaboração de Normas Internacionais importantes, fornecendo subsídios para o equacionamento e cálculos analíticos de conforto térmico e conhecido hoje como PMV (Predicted Mean Vote) e o PPD (Percentage of Dissatisfied).

Nas pesquisas realizadas em situações do cotidiano, com pessoas desempenhando suas atividades rotineiras, o pesquisador não interfere nas variáveis ambientais e pessoais, e as pessoas expressam suas sensações e preferências térmicas de acordo com escalas apropriadas. A partir desta avaliação, HUMPHREYS; NICOL (2002) propuseram o modelo adaptativo, supondo que as pessoas adaptam-se diferentemente ao lugar na qual estão inseridas como uma forma de ajuste do corpo ao meio térmico.

Estas duas linhas de pesquisas mostraram-se eficientes para o estudo do conforto térmico, porém, com o passar dos anos, a utilização dos modelos matemáticos conquistou maior espaço, visto que esses modelos exigem menos recursos e tempo do que o necessário para a investigação experimental. Através dos modelos matemáticos é possível pesquisar sistemas e objetos com os quais seria impossível realizar investigações experimentais, além de pesquisar o comportamento dos objetos em regimes anormais de funcionamento ou em regimes extremos.

De acordo com SODRÉ (2007), um modelo matemático é normalmente uma simplificação do mundo real ou alguma forma conveniente de trabalhar com essa variável. Respeitando e apresentando sempre suas características essenciais nos modelos desenvolvidos, de modo que o seu comportamento seja igual ou semelhante àquele sistema modelado. Tal modelo consiste em um conjunto de equações que representam de uma forma quantitativa as hipóteses que foram usadas na construção do modelo, as quais se apoiam sobre o sistema real. Estas equações são resolvidas em função de alguns valores conhecidos ou previstos pelo modelo real e podem ser testadas através da comparação com os dados conhecidos ou previstos com as medidas realizadas no mundo real.

As equações matemáticas de um modelo não proporcionam a própria explicação científica do modelo, mas simplesmente interpretam as hipóteses de um ponto de vista quantitativo propiciando a condição de dedução das consequências e assim mostrar quais detalhes deverão ser aceitos ou recusados.

Uma ferramenta capaz de viabilizar a elaboração deste estudo é o uso de modelos matemáticos que incluam informações sobre, a transferência de calor, meios multicompostos e condições de contorno dependentes do tempo.

O principal objetivo deste trabalho é que se consiga de uma forma rápida, analisar o comportamento térmico apresentado tanto pelos revestimentos quanto pelas alvenarias utilizadas amplamente na construção civil, quando submetidos a carregamentos térmicos externos.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Neste capítulo, apresenta-se uma revisão de trabalhos encontrados na literatura que utilizam modelos e soluções de problemas térmicos envolvendo meios com mais de um material.

BURCH; ZAR; FAISON (1987) apresentaram um procedimento experimental para medir o desempenho térmico dinâmico de amostras de paredes compostas usando um calorímetro de câmara quente calibrada, que gerou uma condição climática externa dependente do tempo, como um ciclo de temperatura diurna Sol—Ar. A taxa transiente de transferência de calor através da amostra de parede, foi determinada por um balanço energético da câmara de medição e comparada com a taxa prevista usando um modelo analítico e funções de transferência por condução.

ACKERMAN; DALE (1987) compararam medições experimentais e previsões computacionais das perdas de calor em paredes de concreto isoladas e não isoladas de porões em climas frios. As previsões foram feitas com um programa computacional de elementos finitos transiente bidimensional e pelo método de Mitalas (Funções de Transferência), na qual encontraram boa aproximação entre as previsões computacionais e as medições no campo.

Utilizando um calorímetro de câmara quente calibrada, (BURCH; ZAR; LICITRA, 1988) caracterizaram o desempenho dinâmico de amostras de parede de alvenaria com propriedades conhecidas de transferências de calor. A parede estudada foi instalada entre câmaras de medição climática do calorímetro. Foram geradas na câmara climática funções excitação dependentes do tempo, incluindo um ciclo Sol-Ar diurno, um ciclo diurno de quatro harmônicas, uma função degrau e um pulso triangular. O valor medido para cada função excitação, da taxa de transferência de calor da parede estudada, foi comparado a valores previstos usando um método analítico, apresentando boa aproximação dos resultados. Para cada função excitação foram determinados coeficientes empíricos das funções de transferência (CFT) para a parede, fazendo um ajuste de curvas das taxas medidas de transferência de calor. Os CFT's empíricos derivados dos testes de ciclo diurno predizem com sucesso a taxa de transferência de calor da parede para as outras funções excitação. Porém, este conjunto de CFT's não

são únicos e diferem daqueles obtidos de um modelo analítico.

Uma modelagem térmica da base de uma edificação com e sem piso isolado foi realizada através da instrumentação do porão de uma casa desocupada, que mediu os fluxos de calor e distribuição de temperaturas nas paredes isoladas e piso não isolado durante um ano. Este trabalho é apresentado em (CHORNEYKO; BESANT, 1989). Os dados medidos foram comparados com dois métodos de dimensionamento de fluxos de calor transientes e com um modelo de elementos finitos bidimensional que incorpora trocas internas de calor transiente.

BURCH; LICITRA; ZAR (1990) utilizaram a comparação entre dois métodos de teste para determinar os coeficientes da função de transferência para uma parede usando um calorímetro de câmara quente calibrada, onde verificaram e compararam experimentalmente dois métodos de teste dinâmico para caracterizar o desempenho térmico transiente de paredes compostas. Uma amostra da parede é interposta entre as duas câmaras condicionadas do calorímetro, a superfície exterior da parede é sujeita a uma função excitação variável com o tempo para a temperatura do ar. Na superfície interna, a temperatura do ar é mantida constante, sendo medida a resposta como fluxo de calor. Após este procedimento, derivou-se os coeficientes da função de transferência por condução que relacionaram a resposta medida de fluxo de calor com a função excitação. Os dois métodos de teste dinâmicos foram aplicados a uma parede de blocos de concreto ocos isolados que continham pontes térmicas significativas e fluxos laterais de calor. Os coeficientes empíricos da função de transferência derivados pelos métodos de teste estimaram com boa aproximação a resposta de fluxo de calor da parede quando a superfície exterior foi sujeita a funções excitações sensivelmente diferentes daquelas usadas para derivar os coeficientes.

Uma técnica para estender o método da transformada de Laplace de maneira a obter uma solução de forma fechada para problemas não lineares de mudança de fase, através de transformadas inversas conhecidas é apresentada no trabalho de KU; CHAN (1990). Os autores comparam as soluções obtidas com soluções exatas disponíveis na literatura.

Em 1990, BLACKWELL (1990) utilizou o método da transformada de Laplace combinada a soluções tabeladas da transformada inversa para obter uma solução analítica para o perfil de temperatura em um sólido semi infinito sujeito a uma fonte com decaimento exponencial (com a posição) e condição de contorno convectiva. Os parâmetros dimensionais apropriados foram identificados, apresentando-se então a temperatura como função destes parâmetros. Verificou-se que a temperatura máxima ocorre no interior do material quando este está sujeito ao resfriamento das superfícies expostas.

A condução de calor unidimensional em um sólido semi infinito, onde a temperatura superficial é uma função harmônica periódica, foi tema do trabalho de BUROW; WEIGAND (1990). Os autores mostraram uma solução aproximada simples para o

comportamento transiente deste sólido. Para isso, dividiram a solução encontrada em duas partes: uma representando a oscilação periódica estacionária e a outra descrevendo o comportamento transiente da temperatura desde a superfície do sólido. A parte estacionária é conhecida e a parte transiente é resolvida pela expansão em séries de potência.

SEEM et al. (1990) utilizaram um modelo para reduzir as funções de transferência através de um método de raiz dominante, mostrando que os métodos da função transferência são mais eficientes para resolver problemas de transferência de calor transientes com tempos longos que os esquemas numéricos de Euler, Crank—Nicolson ou outras técnicas clássicas. Mostra-se que as funções de transferência relacionam a saída presente de um sistema linear constante com uma série temporal das entradas presentes e passadas, e saídas passadas. As entradas são modeladas por uma função linear contínua por partes, apresentando assim, um novo modelo para reduzir o número de coeficientes nas funções de transferência que são usadas para resolver problemas de transferência de calor. O método mostra duas vantagens, a primeira é que se a função de transferência original é estável, a função de transferência reduzida também será estável; a segunda é que o método pode determinar as funções de transferência reduzidas para múltiplas entradas e simples saída.

Em CHEN; CHANG (1990), desenvolveu-se um método que combina o uso do método da transformada de Laplace com elementos finitos. Este método é bastante eficiente para resolver problemas de condução de calor linear unidimensional. Na formulação apresentada, os termos dependentes do tempo são removidos do problema usando o método da transformada de Laplace e então o método de elementos finitos é aplicado ao domínio espacial. A temperatura transformada é invertida numericamente para obter o resultado da quantidade física do problema proposto. Como não existe um incremento temporal é possível calcular diretamente as condições superficiais de um problema inverso sem incremento temporal.

Um método encontrado a partir da combinação de transformada de Laplace com o método de diferenças finitas (MDF) ou o método dos elementos finitos (MEF) foi empregado em problemas térmicos transientes não lineares e foi apresentado por CHEN; LIN (1991). O método faz uma discretização do domínio espacial nas equações governantes através de MDF ou MEF e os termos não lineares são linearizados por expansão em séries de Taylor. Os termos dependentes do tempo são removidos das equações linearizadas pela transformação de Laplace e os resultados a um tempo específico podem ser calculados sem incremento computacional no domínio temporal. Para mostrar a eficiência e precisão do método, foi estudado diversos problemas térmicos transientes não lineares unidimensionais.

No ano de 1991, CHANG; PYNE (1991) apresentaram uma solução analítica exata para a condução de calor em uma placa com duas camadas de materiais diferentes

com condutividade linearmente dependente da temperatura. O problema apresentado foi bidimensional sem fonte, com temperaturas prescritas em três lados e isolamento no quarto lado. A condutividade térmica foi considerada por uma transformação de Kirchhoff. O problema foi linearizado e resolvido por separação de variáveis. O trabalho mostra diferenças significativas na distribuição de temperatura e fluxo de calor entre casos de condutividade não dependente e dependente de temperatura.

Já em 1992, TSAI; CRANE (1992) apresentaram uma solução analítica utilizando o método da superposição de subproblemas e pelos autovalores e autofunções, para obter a distribuição de temperaturas em um sistema simétrico unidimensional com fluxo de calor em um lado e isolamento no outro, encontrando assim a transferência de calor entre superfícies com contato perfeito.

CHEN; LIN (1992) aplicaram novamente a combinação da transformada de Laplace com o método de diferenças finitas, mas desta vez utilizaram a técnica para resolver problemas de Stefan com condições de contorno radiativas e convectivas. O termo radiativo é linearizado por aproximação em séries de Taylor e então é aplicado o método híbrido ao problema. Este esquema é obtido pelo uso da técnica da transformada de Laplace para os termos dependentes do tempo e do MDF com grade fixa para o domínio espacial. Pode ser visto em vários exemplos ilustrados que obtem-se excelentes ajustes entre os resultados do método e outros de trabalhos anteriores. Para o problema de mudança de fase sujeita às condições de contorno não lineares, três ou quatro iterações são necessárias para obter um resultado convergente num tempo específico. As análises presentes também demonstram que a aplicação da técnica de transformada de Laplace não se limita a problemas de mudança de fase com condições de contorno lineares.

Em KOLEV; LINDEN (1993) apresenta-se uma aplicação da transformada de Laplace na solução de problemas de transferência de calor e massa transientes em sistemas de escoamento. Para resolver as equações diferenciais parciais (EDP) que descrevem fenômenos de transporte bidimensionais ou tridimensionais transientes, utilizaram uma técnica numérica, baseando-se na transformação do domínio temporal original no domínio de Laplace onde são feitas integrações numéricas, e por transformações inversas numéricas subsequentes obtiveram a solução final. O tempo computacional foi reduzido em comparação com as técnicas de diferenças finitas convencionais. A eficiência das técnicas propostas foram demonstradas por exemplos ilustrativos.

CHEN; LIN (1993) estudaram uma nova simulação numérica do problema de condução de calor hiperbólico que apresenta oscilação numérica na vizinhança de descontinuidades. No trabalho, os autores mostraram que técnicas híbridas baseadas na transformada de Laplace e métodos de volume de controle podem ser aplicados com sucesso para suprimir essas oscilações. O método da transformada de Laplace

é usado para remover os termos temporais e as equações transformadas são discretizadas pelo esquema de volume de controle. São ilustrados vários exemplos comparativos envolvendo um problema não linear com radiação superficial e a condução de calor hiperbólica em uma região composta, para verificar a precisão do método. Como vantagem desta técnica está a não necessidade de considerar os efeitos do número de Courant, uma variável local do domínio fluido que representa o fluxo advectivo em cada volume finito, nos resultados numéricos.

Para calcular a resposta transiente (e periódica estacionária) de uma parede composta sujeita a fluidos com temperatura variável periodicamente em um lado e constante no outro, ZEDAN; MUJAHID (1993) desenvolveram um método preciso e eficiente, em que a equação diferencial do problema é resolvida no domínio de Laplace e, após, transformada de volta para o domínio temporal. O método usado para a transformada inversa geral é a aproximação pela técnica da série de Fourier.

Através de medições em um calorímetro de câmara quente guarnecida e das características de transmissão de calor dinâmica de alguns tipos de paredes, BROWN; STEPHENSON (1993) mediram a resistência estacionária e as características de transmissão de calor transiente de diversas paredes. Para todas medições, as respostas das frequências medidas aproximam-se das respostas das frequências previstas. No entanto, a resistência térmica medida varia de 45 a 90 % da resistência térmica prevista. Concluíram que dentro das condições impostas aos dados e equações, onde assumiu-se a resistência térmica real do protótipo, o fluxo previsto utilizando os coeficientes da função Z de transferência foram suficientemente precisos para aplicações práticas.

Os procedimentos necessários para obtenção da solução de temperatura em problemas de multicamadas é amplamente abordado no livro de ÖZISIK (1993). O autor trata do tema através de uma maneira objetiva e didática, dedicando ainda, um capítulo a problemas unidimensionais com meio composto.

Para calcular a transferência detalhada de calor entre o solo e edifícios, com análise do efeito do isolamento, KRARTI; CLARIDGE; KREIDER (1994) desenvolveram um algoritmo por análise de frequência, através de um modelo dinâmico simples baseado na função $\mathbb Z$ de transferência. Fizeram a análise de sensitividade espectral para determinar o efeito de mudanças cíclicas nas temperaturas internas e externas. Desenvolveram uma solução semi-analítica a fim de validar os resultados com dados empíricos ou modelos numéricos tridimensionais detalhados e gerar fatores de resposta para fundações para utilização em programas de simulação.

CHOUDHURY; JALURIA (1994) obtiveram uma solução analítica para a distribuição de temperatura transiente em uma placa e em uma barra cilíndrica de comprimento finito movendo-se a velocidade constante e sujeita à transferência de calor convectivo na superfície. A inclusão dos primeiros 25 termos da série foi sufici-

ente para obter uma solução convergente na maioria dos casos. A solução analítica foi comparada com soluções numéricas obtidas previamente para este problema de fronteira móvel, obtendo uma excelente aproximação entre resultados analíticos e numéricos, indicando a importância da solução analítica para validação dos esquemas numéricos. Investigou-se a variação do campo de temperatura dentro do material com o tempo. Para tempos muito pequenos, após o início do processo, as soluções numéricas são muitas vezes aproximadas, nestes casos os resultados analíticos são particularmente úteis.

Baseados em soluções fundamentais da condução de calor transiente em meio simples semi-infinito, XIN; TAO (1994) investigaram uma solução analítica para a condução de calor transiente em dois meios semi-infinitos em contato com diversos materiais. O contato pode ser perfeito ou não, inclusive com fonte de calor entre os meios.

BEYER; VILHENA (1998) desenvolveram uma metodologia baseada na solução de problemas unidimensionais, obtidos com a aplicação do método nodal, através da transformada de Laplace. Para calcular o fluxo de calor existente na envoltória da edificação (paredes externas multicompostas da edificação), o problema diferencial em uma direção é transformado do domínio tempo para o domínio complexo s pela transformada de Laplace. A equação de condução de calor transiente resolvida por BEYER; VILHENA (1998) foi:

$$\frac{\partial^2 T_i(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha_i} \frac{\partial T_i(x,t)}{\partial t}, \qquad \begin{aligned} x_i &< x < x_{i+1} \\ i &= 1, 2, ..., M \\ t &> 0 \end{aligned} \tag{1}$$

sujeita às condições de contorno de condutância de contato e para as interfaces das regiões o contato térmico perfeito. A condição inicial utilizada foi uma função ajustada conforme a distribuição de temperaturas nos diversos meios ao fim de cada período de cálculo, no caso de condição externa cíclica. A equação resultante foi trabalhada para encontrar as constantes de integração, e o retorno para o domínio tempo é feito pela integral de inversão resolvida por Quadratura Gaussiana. Esta metodologia foi aplicada para um problema com duas dimensões, representado pela equação (2):

$$\frac{\partial^2 T_i(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_i(x,y,t)}{\partial y^2} = \frac{1}{\alpha_i} \frac{\partial T_i(x,y,t)}{\partial t}, \qquad \begin{cases} x_i \le x \le x_5 \\ 1 \le i \le 4 \\ t > 0 \\ y_1 \le y \le y_5 \end{cases}$$
 (2)

onde i são os meios participantes do problema e α a difusividade térmica. BEYER; VI-LHENA (1998) resolveram o problema para temperaturas médias, de forma a reduzir o

problema 2D (duas dimensões) para 1D (uma dimensão). Utilizou-se condição de contorno de terceira espécie em x e y. Para condição de interfaces foi considerado contato térmico perfeito. Nesta transformação, o efeito da segunda dimensão manifesta-se em um termo fonte. Para resolver este termo foi proposto o uso de uma equação auxiliar, que tem seus coeficientes encontrados iterativamente para cada ponto de Quadratura Gaussiana. Os dois procedimentos, 1D e 2D mostraram-se satisfatórios, sendo que o procedimento 1D com ótima precisão e o procedimento 2D necessitando, após o conhecimento do caminho mostrado neste trabalho, uma maior pesquisa na equação ideal ao problema em análise, dependente das condições de contorno.

Utilizando computação paralela os autores SARDIÑA; HENDERSON; NETO (1999) descreveram a solução da equação de transferência de calor por condução em meios unidimensionais e bidimensionais, constituindo uma ferramenta fundamental para a obtenção de soluções numéricas para problemas de engenharia. Empregou-se a biblioteca de funções MPI (Message Passing Interface), utilizada em programas que exploram a existência de múltiplos processadores baseando-se na passagem de mensagens. Como caso teste consideraram um problema de transferência de calor transiente unidimensional. Utilizando uma aproximação de diferenças finitas explícita com uma técnica de decomposição de domínio o algoritmo fica totalmente paralelizável. Considerou-se um segundo caso teste, em um meio bidimensional homogêneo para o qual empregou-se uma formulação implícita. O meio é dividido em dois subdomínios, e para os nós da malha computacional localizados na interface a temperatura no meio adjacente é tomada com um atraso de um intervalo de tempo, o que torna o algoritmo paralelizável.

Uma aplicação, com ferramentas revestidas, foi abordada no trabalho desenvolvido por DU; LOVELL; WU (2000). Os autores consideraram um problema térmico unidimensional em regime permanente, de duas camadas, com condição de contorno de isolamento térmico em uma das faces e temperatura prescrita na superfície oposta. Apresentaram duas técnicas gerais para determinar o campo de temperatura com materiais que tenham revestimentos finos. O primeiro método trata-se de uma técnica numérica baseada em elementos finitos, cujo revestimento deve possuir uma espessura limite, o segundo método é utilizado para aplicações em que a espessura do revestimento é muito pequena, mostrando-se mais eficiente do que o primeiro. Para comparar os métodos foram apresentados exemplos de uma camada de revestimento, usando três tipos de revestimentos diferentes, no qual o método de aproximações por uma camada é mais eficiente quando trata-se de um revestimento com espessura muito fina.

Em ASEKA (2003) desenvolveu-se uma metodologia semi-analítica para solução de problemas de condução de calor bidimensional, não estacionária em meios multi-compostos. Esta metodologia combina os métodos nodal, com parâmetros concentra-

dos e a técnica da transformada de Laplace. Inicialmente aplica-se o método nodal. A equação diferencial parcial que descreve o problema, equação (3), é integrada transversalmente em relação a uma das variáveis espaciais.

$$\frac{\partial^2 T_i(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_i(x,y,t)}{\partial y^2} = \frac{1}{\alpha_i} \frac{\partial T_i(x,y,t)}{\partial t}, \qquad \begin{cases} em \ x_1 < x < x_{n+1} \\ y_1 < y < y_2 \\ t > 0, \ i = 1, 2, ..., n \end{cases}$$
(3)

esta equação (3) está sujeita às mesmas condições de contorno, de interface e inicial utilizadas no trabalho de BEYER; VILHENA (1998). Em seguida, utiliza-se o método de parâmetros concentrados, substitui-se a distribuição de temperatura nos contornos superior e inferior pelo seu valor médio. Os problemas diferenciais unidimensionais resultantes são resolvidos com o uso da técnica da transformada de Laplace, cuja inversão calcula-se numericamente e os resultados foram comparados com os disponíveis na literatura. O avanço deste trabalho em relação ao de BEYER; VILHENA (1998) consistiu em substituir a necessidade de interpolação quadrática por expressões que relacionam as temperaturas no contorno do meio com as temperaturas médias. Para isto três aproximações foram impostas: a primeira aproximou as temperaturas na fronteira por seus valores médios e as outras aproximações foram utilizadas as fórmulas de integração numérica de Hermite.

FROTA; SCHIFFER (2003) contribuíram com a literatura sobre o fenômeno da troca de calor em paredes de edificações, através da temperatura externa do ar do coeficiente de absorção de radiação solar da superfície externa da parede (fachada), da radiação solar global incidente na superfície e da condutância superficial interna e externa. Chegaram a uma equação que permite encontrar o valor da temperatura na superfície exterior da fachada.

Em 2004, SILVA (2004) apresentou uma formulação numérica para a solução da equação de condução de calor do tipo Euler em avanço (do inglês forward) em geometrias tridimensionais, através do método dos volumes finitos (MVF) usando uma integração explícita no tempo. Empregou-se um volume de controle do tipo centrado no vértice, sendo formado pelo encontro das medianas com o baricentro dos elementos finitos. Utilizaram-se malhas não estruturadas para a resolução do problema e implementaram um programa no código computacional Fortran90 dividido em três módulos: o primeiro importa a geometria, a malha e as condições de contorno geradas pelo programa comercial MSC.Patran; o segundo módulo é responsável pela conversão da estrutura de elementos, para a estrutura de dados por aresta; e o último resolve problemas de condução de calor nos regimes estacionário e transiente empregando a estrutura de dados baseada em aresta. Os resultados obtidos foram comparados com o solver comercial MSC.Nastran e visualizados na ferramenta livre OpenDX.

O trabalho apresenta um programa flexível quanto a geometria analisada.

SADAT (2006) apresentou para a condução de calor transiente, um modelo de segunda ordem em uma placa, obtido pelo método de perturbação. Foi mostrado que este modelo simples é preciso, mesmo para valores elevados do número de Biot numa região em torno do centro da placa. Sendo, o número de Biot, um parâmetro adimensional que fornece um índice da razão entre o coeficiente de transferência convectiva de calor na superfície do sólido e a condutância específica do sólido, ou seja, a razão das resistências dentro de um determinado corpo e na superfície do mesmo. Esta razão determina a significância da variação das temperaturas dentro de um corpo quando sujeito ao aquecimento ou arrefecimento a partir de um gradiente térmico aplicado à sua superfície.

A fim de selecionar novos materiais, ligantes asfálticos e combinações que apresentem menores custos de construção e maior qualidade e desempenho das rodovias, TRAMONTINI (2007) apresentou em seu trabalho o desenvolvimento de um modelo matemático de correlação da temperatura do ar e insolação, com a temperatura de pavimentos rígidos e flexíveis a diferentes profundidades. Obtém-se a solução semi-analítica da equação diferencial parcial através da transformada de Laplace, considerando o pavimento uma estrutura unidimensional, composta de duas camadas distintas com coeficientes térmicos diferentes. A inversão é feita de maneira numérica.

A obtenção da solução analítica de um problema de condução de calor em uma geometria cilíndrica bidimensional em regime transiente composto por três camadas foi determinada usando coordenadas polares e o método de separação de variáveis no trabalho de SINGH; JAIN; RIZWAN-UDDIN (2007). Durante a apresentação dos cálculos dos autovalores relatou-se que para problemas bidimensionais ou tridimensionais tem-se autovalores imaginários (números complexos). Os autores afirmam que a solução encontrada é válida para qualquer combinação de contorno de primeira e segunda espécie. Por fim, encontra-se um exemplo para ilustrar a solução analítica obtida.

Com o intuito de analisar a propagação de uma onda térmica, RAMADAN (2008) mostrou uma solução semi-analítica de um problema de transferência de calor por condução. A solução foi encontrada considerando um problema unidimensional, em regime transiente composto por duas camadas. Para coordenadas cartesianas, a solução foi obtida utilizando a transformada de Laplace e para as coordenadas cilíndrica e esférica encontra-se a solução através de um método computacional baseado na inversão numérica da transformada de Laplace.

FERNANDES (2009) dedica-se a obtenção e aplicação de soluções analíticas baseadas em funções de Green (FG) em técnicas de problemas inversos. O estudo foi voltado a problemas decorrentes de fonte de calor desconhecidas com a geração do calor devido ao atrito presentes em processos de usinagem ortogonal. Apresentou

a solução analítica de vários problemas de condução de calor unidimensionais, bidimensionais e tridimensionais transientes. Mostrou também resultados em forma de gráficos permitindo um melhor entendimento físico das soluções e a sua verificação. Abordou dois problemas de otimização através da aplicação de soluções analíticas. Um dos problemas trata-se da estimativa de propriedades térmicas enquanto o outro refere-se ao desenvolvimento do método de observadores dinâmicos usando funções de Green. O uso das FG na estimativa de parâmetros reduziu drasticamente o tempo computacional gasto enquanto no método dos observadores introduziu maior confiança e estabilidade à técnica.

Em BEHERA (2009) desenvolveu-se várias soluções para diferentes problemas de condução de calor unidimensionais transientes. Para isso, ele adotou um modelo de parâmetros acoplados para verificar a variação do campo de temperatura, tanto para uma geometria cilíndrica como em uma placa. Para resolver as equações de condução de calor transiente, foi utilizado o método de aproximação polinomial. As soluções obtidas em todos os casos dependem da temperatura, do número de Biot, do parâmetro da fonte de calor e do tempo.

O objetivo principal de MAESTRE; CUBILLAS; PÉREZ—LOMBARD (2010) foi comparar a precisão e a velocidade de dois métodos utilizados para resolver de forma analítica um problema térmico de transferência de calor por condução unidimensional, em regime transiente composto por duas camadas. A primeira metodologia utilizada foi o método da transformada de Laplace para calcular os fatores resposta e a segunda, um programa computacional para obter os coeficientes da função transferência. Os autores mostraram que o primeiro método por tratar-se de uma solução exata obteve menor tempo computacional, mostrando-se mais eficiente.

Visando aplicações em áreas industriais, o trabalho desenvolvido por KAYHANI; NOROUZI; DELOUEI (2011) analisou um problema de transferência de calor, em regime permanente composto por duas camadas e com solução obtida em coordenadas cilíndricas. Utilizando condições de contorno homogêneas foi aplicado o método de separação de variáveis para encontrar a solução. Os autores propuseram esse estudo para a aplicação em um tubo de refrigeração composto de duas camadas, com um fluxo de calor variando na espessura do tubo.

Em BELGHAZI; BASTTISTI; TRIVELLATO (2012) resolveu-se um problema de transferência de calor, unidimensional, transiente em um meio composto por camada dupla através da derivação da parte homogênea da solução encontrada pelo método de separação de variáveis e expressando o termo fonte em forma de série. A fonte à qual estão submetidas as camadas é uma fonte em movimento. A convergência da série foi alcançada para os primeiros vinte autovalores usando o método de Newton-Raphson.

O choque térmico, como a troca de calor entre o ambiente e a fachada foi apre-

sentado no trabalho de BARBOSA (2013). O carregamento térmico do tipo choque ocorre quando existe uma variação muito brusca de temperatura, ou seja, alta taxa de carregamento no material, ficando suas deformações dependentes da velocidade em que o choque percorre no mesmo, até que se atinja o equilíbrio. Em BARBOSA (2013) resolveu-se a equação diferencial parcial de difusão do calor em sólidos para identificar matematicamente a distribuição de temperatura no interior da parede. Para isso considerou a parede como um sólido composto de cinco camadas. O problema passou a ser um sistema de cinco EDP's, e como os resultados foram bastante próximos um do outro, este sistema serviu para mostrar que é possível transformar uma parede de cinco materiais em uma parede com apenas um material equivalente aos cinco e ainda assim obter resultados satisfatórios. Os resultados obtidos na análise térmica mostraram que, embora a temperatura do ar caia bruscamente esses efeitos não são sentidos pela superfície da cerâmica no mesmo instante em que acontece a queda brusca que caracteriza o choque térmico. Com os resultados obtidos em análise mecânica, pode-se concluir que pela teoria de acumulação de danos, os choques térmicos podem impor micro danos à estrutura que, se somados a outros tipos de patologias, podem acelerar a diminuição da vida útil da estrutura.

A aplicação da solução híbrida da Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT) na solução da equação de condução de calor em aletas longitudinais bidimensionais de perfil não variável com condutividade térmica dependente da temperatura foi trabalhado por CABRAL et al. (2014). Foi considerado neste estudo a geração de energia decaindo exponencialmente com a posição, caracterizando assim, um problema não linear e não homogêneo. Para isso utilizaram a formulação em termos de variáveis adimensionais com objetivo de simplificar o estudo do domínio da solução, a partir do balanço de energia aplicado no volume de controle. Foram estudados dois casos limites para Biot tendendo a zero e infinito obtendo-se resultados semelhantes aos obtidos por uma sub-rotina contida na linguagem de programação científica Fortran.

Por meio de Funções de Green, OLIVEIRA (2015) dedicou-se à obtenção de solução analítica em condução de calor, decorrente de um problema térmico unidimensional transiente com meio multicamada. As equações utilizadas neste problema foram:

$$\frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha_1} \frac{\partial T_1}{\partial t} \,, \tag{4a}$$

$$\frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha_2} \frac{\partial T_2}{\partial t} \,. \tag{4b}$$

sujeitas à uma condição de fluxo de calor em x=0 e fluxo nulo na outra extremidade (x=L), e uma condição inicial constante. Entre as camadas utilizou-se condições de

interface considerando contato térmico perfeito. A solução encontrada foi:

$$T_{i}(x,t) = \sum_{j=1}^{M} \left\{ \int_{x_{j}}^{x_{j+1}} G_{ij}(x,t|x',0) F_{j}(x') dx' + \alpha_{j} \int_{0}^{t} \int_{x_{j}}^{x_{j+1}} G_{ij}(x,t|x',\tau) \frac{g_{j}(x',\tau)}{k_{j}}(x') dx' d\tau \right\}$$
(5)

onde $x_j \leq x \leq x_{j+1}$, para j=1,2,...M, são os limites de cada camada, e, $G_{ij}(x,t|x',\tau)$ é a função de Green para problemas multicamadas. Obteve-se o perfil de temperatura para o meio de dupla-camada e verificou-se a validade da solução analítica através da comparação com soluções exatas e numéricas de problemas térmicos correlacionados e específicos. Uma aplicação importante de soluções de dupla camada é dada pela análise de uma ferramenta de usinagem com revestimento. Neste sentido, duas análises do comportamento térmico em ferramentas revestidas foram abordadas. A autora verificou que os parâmetros térmicos e geométricos envolvidos possibilitaram uma melhor distribuição da temperatura na região de corte, diminuindo os desgastes presentes nesse processo aumentando a vida útil da ferramenta. Foi mostrado que os revestimentos com as propriedades térmicas do material de cobalto, tiveram um aumento de temperatura, enquanto os revestimentos de óxido de alumínio Al_2O_3 e nitreto de titânio TiN apresentaram uma diminuição de temperatura na interface ferramenta-revestimento.

HICKMANN et al. (2015) mostraram uma análise térmica em modo estacionário, a qual determina os efeitos das cargas térmicas estáveis em uma estrutura. Uma comparação entre a solução analítica e numérica, via método dos elementos finitos para a equação de Laplace em uma geometria simples foi estudada a fim de validar o método numérico. O MEF foi aplicado a um perfil de barragem hipotética para a determinação do campo de temperatura. Através deste método verificou-se a importância de se explorar métodos numéricos para resolução de problemas de engenharia cujo domínio de estudo é irregular, o que dificulta em demasiado a obtenção de solução analítica.

Com a intenção de facilitar o entendimento e exemplificar os tipos de materiais, técnicas construtivas, bem como algumas peculiaridades da transferências de calor, a próxima seção trata destes fundamentos teóricos.

2.1 Definição de Termos Técnicos

2.1.1 Alvenaria

É um sistema construtivo formado de um conjunto coeso e rígido de tijolos ou blocos, unidos entre si, com ou sem argamassa de ligação, em camadas horizontais que se sobrepõem uma sobre as outras. Este sistema pode ser empregado na confecção de diversos elementos construtivos, como por exemplo, em paredes, abóbodas, sapatas e muros.

A principal função da alvenaria é adequar e estabelecer a separação entre ambientes, especialmente a alvenaria externa, que tem a responsabilidade de separar o ambiente externo do interno, atuando como uma espécie de freio, barreira e filtro seletivo, controlando uma série de ações e movimentos complexos.

Pode-se destacar a resistência à umidade e aos movimentos térmicos, resistência à pressão do vento, isolamento térmico e acústico, resistência à infiltrações de vapor pluvial, controle da migração de vapor de água e regulagem da condensação. Além disso, pode servir de base ou substrato para aplicação de revestimentos em geral e proporcionar segurança aos usuários e ocupantes da edificação. Essas são algumas das propriedades da alvenaria.

Tal elemento construtivo pode ser empregado e dimensionado com o intuito de resistir cargas, sendo chamada de alvenaria estrutural ou auto portante, pois além do seu peso próprio, ela suporta cargas como o peso das lajes, telhados e pavimentos superiores. Este tipo de alvenaria é bastante utilizado na construção de prédios habitacionais. Quando a alvenaria não é dimensionada para resistir cargas verticais além de seu peso próprio, ela é chamada de alvenaria de vedação.

2.1.2 Tipos de Alvenarias

Quanto aos materiais, as alvenarias podem ser executadas, de acordo com (RIP-PER, 1995):

Pedras naturais

- a) Pedras irregulares usando-se pedras em estado natural, simplesmente encaixadas entre si ou assentadas com argamassa;
- b) Pedras regulares usando-se pedras naturais trabalhadas, com formas regulares ou não, assentadas com juntas secas ou juntas argamassadas, alinhadas ou desencontradas (travadas).

Pedras artificiais

- a) Blocos de concreto São elementos produzidos com dimensões de $19 \times 19 \times 39$ cm e $15 \times 19 \times 39$ cm, vazados com resistência a compressão de até 30 MPa, assentados com argamassa, ou podem ser utilizados em sistemas de construção em alvenaria armada.
- b) Blocos silicocalcário São elementos produzidos com areia e cal viva endurecidas ao vapor sobre pressão elevada, com as mesmas características dos blocos de concreto.
- c) Blocos de concreto leve São elementos de concreto leve, fabricados a partir de uma mistura de cimento, cal, areia e pó de alumínio, autoclavado, que permite a

formação de um produto de elevada porosidade, leve, resistente e estável. O produto é apresentado em blocos ou painéis, com dimensões e espessuras variadas, que permitem a execução de paredes de vedação e lajes.

- d) Tijolos cerâmicos Elementos fabricados por prensagem ou extrusão da argila, que após um processo de pré-secagem natural, passa pelo processo de queima controlada sob alta temperatura, produzindo blocos maciços ou furados com dimensões padronizadas e normatizadas. São tradicionalmente utilizados nas alvenarias de vedação nas construções.
- e) Blocos de solo-cimento São elementos fabricados a partir da massa de solos argilosos ou areno-argilosos mais cimento Portland, com baixo teor de umidade, em prensa hidráulica, formando tijolos maciços. Podem ser construídas também, paredes monolíticas, através do apiloamento da massa em formas deslizantes, entre pilares guia.

As alvenarias, com exceção das aparentes, são revestidas. A seguir será comentado sobre os tipos de revestimentos usuais da construção civil. Na figura 1, pode ser observado alguns dos revestimentos usuais aplicados em uma parede de alvenaria composta por quatro camadas.

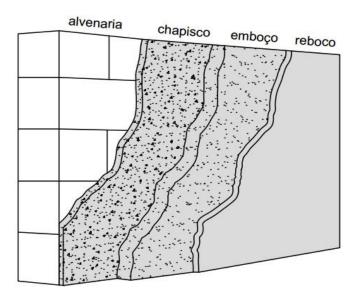


Figura 1: Composição das diferentes camadas de uma parede.

A figura 1 representa um modelo determinístico, onde os fenômenos são representados por um conjunto de variáveis de entrada e um conjunto de variáveis de saída, cujos valores dependem dos valores das variáveis de entrada.

No caso deste trabalho, o modelo representa a transferência de calor através da condução em uma parede de alvenaria ou outros materiais determinados, tendo ainda, como condições de contorno e iniciais certas intempéries.

Sabe-se ainda que nenhuma superfície com interface é perfeita, existindo entre as camadas alguns fatores como a rugosidade, por exemplo. Para representar matematicamente esta hipótese deve ser utilizado um modelo estocástico. Porém, isto vai além do foco deste trabalho, onde assumiu-se que existe contato térmico perfeito entre as camadas.

2.1.3 Revestimentos

De acordo com BAUER (1994), o revestimento é a fase da obra em que se faz a regularização das superfícies verticais (paredes) e horizontais (pisos e tetos). Portanto, os revestimentos são executados para proporcionar maior resistência ao choque ou abrasão (resistência mecânica), impermeabilizar, tornar as superfícies mais higiênicas (laváveis) ou ainda aumentar as qualidades de isolamento térmico e acústico.

Os revestimentos de paredes têm por finalidade regularizar a superfície, proteger contra intempéries, aumentar a resistência da parede e proporcionar estética e acabamento. Os revestimentos de paredes são classificados de acordo com o material utilizado em revestimentos argamassados e não-argamassados.

2.1.4 Revestimentos Argamassados

Os revestimentos argamassados são os procedimentos tradicionais da aplicação de argamassas sobre as alvenarias e estruturas com o objetivo de regularizar e uniformizar as superfícies, corrigindo as irregularidades, prumos, alinhamentos dos painéis e quando se trata de revestimentos externos, atuam como camada de proteção contra a infiltração de águas de chuvas. O procedimento tradicional e técnico é constituído da execução de no mínimo de três camadas superpostas, contínuas e uniformes: chapisco, emboço e reboco.

Chapisco é argamassa básica de cimento e areia grossa, na proporção de 1:3 ou 1:4, bastante fluída, que aplicada sobre as superfícies previamente umedecidas e tem a propriedade de produzir um véu impermeabilizante, além de criar um substrato de aderência para a fixação de outro elemento.

O emboço é a argamassa de regularização que deve determinar a uniformização da superfície, corrigindo as irregularidades, prumos, alinhamento dos painéis e cujo traço depende do que vier a ser executado como acabamento. É o elemento que proporciona uma capa de impermeabilização das alvenarias de tijolos ou blocos e cuja espessura não deve ser maior que 1,5 cm. O emboço é constituído de uma argamassa grossa de cal e areia no traço 1:3. Usualmente adiciona-se cimento na argamassa do emboço constituindo uma argamassa mista, em geral nos traços 1/2:1:5; 1:1:6; 1:2:9 (cimento, cal e areia).

Reboco é a argamassa básica de cal e areia fina, onde a nata de cal (água e

cal hidratada) adicionada em excesso no traço, constitui uma argamassa gorda (com abundância de aglomerante), que tem a característica de pequena espessura (na ordem de 2 mm) e de preparar a superfície, com aspecto agradável, acetinado, com pouca porosidade, para a aplicação de pintura.

Além dos revestimentos tradicionais mencionados anteriormente, existem o reboco hidrófugo, reboco impermeável, barra lisa de cimento (cimento queimado), estuque lúcido (barra lustra), reboco travertino, massa lavada, reboco raspado, granilito e massa acílica.

2.1.5 Revestimentos Não Argamassados

São revestimentos de paredes, constituídos por outros elementos naturais ou artificiais, assentados sobre emboço de regularização, com argamassa colante ou estruturas especiais de fixação. Esses produtos têm procedimentos de assentamento ou fixação específicos, segundo as características de seus elementos. Entre os mais utilizados estão os revestimentos cerâmicos e as pastilhas de porcelana.

Os revestimentos cerâmicos são produtos industrializados com grande controle do processo de fabricação, que exigem atenção desde a composição da massa, que utiliza argilas, filitos, talcos, feldspatos (grês) e areias (quartzo), até a classificação final do material, caracterizado por elementos cerâmicos, de grande variedade de cores, brilhantes e acetinados, em diversos padrões, lisos e decorados, de alta vitrificação, ou sejam, de grande coesão, resistência a compressão e abrasão. A espessura média é de 5,4 mm. A face posterior (tardoz) não é vidrada e apresenta saliências para aumentar a capacidade de aderência da argamassa de assentamento.

Por sua vez, os revestimentos de pastilhas de porcelana são produtos cerâmicos de grês (argila pura de alta vitrificação), produzido com alta tecnologia, cuja característica principal é ter teor de absorção praticamente 0%. A sua aplicação requer mão de obra especializada (pastilheiro), cujo assentamento poderá ser executado por dois métodos: convencional (sobre emboço rústico sarrafeado) ou com argamassa colante (sobre emboço sarrafeado ou desempenado).

Existem ainda os revestimentos com tijoletas cerâmicas (tijolo aparente), com pedra natural, mármores e granitos polidos, revestimento de madeira, de plástico ou vinílico e revestimento de alumínio.

Conforme descrito anteriormente, tanto as alvenarias quanto os revestimentos tem a função de proteger a edificação contra intempéries. Por mais eficazes que sejam, elas não conseguem impedir que ocorra transferência de calor, o que é possível ser minimizado de acordo com a necessidade. Para isso, no entanto, é necessário que se saiba como estas transferências ocorrem. Na seção a seguir, são relacionados os mecanismos de trocas térmicas.

2.1.6 Mecanismos de trocas térmicas

As trocas de calor que envolvem variações de temperatura são denominadas trocas secas, em contraposição à denominação de trocas úmidas, relativa às trocas térmicas que envolvem água. Os mecanismos de trocas secas são convecção, radiação e condução. Condução é a passagem de calor de uma zona para outra de um mesmo corpo ou de corpos diversos em íntimo contato, devido ao movimento molecular dos mesmos, sem que se verifiquem deslocamentos materiais no corpo ou sistema considerado. Convecção por sua vez, é a passagem do calor de uma zona a outra de um fluido por efeito do movimento relativo das partículas do mesmo, movimento esse provocado pela diferença de pressão ocasionada pela diferença de temperatura e consequente diferença de densidade da massa fluida considerada. Por último e não menos importante, a radiação é a transmissão de calor verificada entre dois corpos de temperaturas diferentes, imersos em um mesmo meio mais ou menos transparente a esta espécie de radiação (FROTA; SCHIFFER, 2003).

Segundo FROTA; SCHIFFER (2003), em uma construção, o comportamento térmico ocorre da seguinte forma: o sol, importante fonte de calor, incide sobre o edifício representando sempre um certo ganho de calor, que será função da intensidade da radiação incidente e das características térmicas dos parâmetros do edifício. Os elementos da edificação, quando expostos aos raios solares, diretos ou difusos, ambos radiação de alta temperatura, podem ser classificados como opacos, transparentes e translúcidos.

A figura 2 demonstra ilustrativamente as trocas de calor através de paredes opacas, que é a situação que melhor representa um sistema de revestimentos. No caso de uma parede opaca exposta à radiação solar e sujeita à uma determinada diferença de temperatura entre os ambientes que os separam, os mecanismos de trocas térmicas podem ser esquematizados da seguinte forma no caso de uma parede opaca. Aqui T_e a temperatura do ar externo (°C); T_i a temperatura do ar interno (°C); T_g a intensidade de radiação solar incidente global (W/m^2) ; h_e e h_i os coeficientes de condutância térmica superficial externa e interna, respectivamente, expressos em $(W/m^2.K)$; e λ o coeficiente de condutância térmica $(W/m^2.K)$.

Neste trabalho, assim como na figura 2, são estudadas as trocas de calor através da radiação do sol em uma parede externa. A incidência da radiação, fluxo de radiação solar absorvida e dissipada para o exterior e a radiação solar refletida são caracterizados e representados na seção 4.3 através da temperatura Sol-Ar, calculada.

O método da temperatura sol-ar utilizado é um cálculo transiente que tem como principal forma de realização atualmente o uso do Método da Função de Transferência (MITALAS, 1968). Este método necessita de um cálculo prévio do fluxo transiente através de pulsos unitários para encontrar-se após a Função Transferência.

A temperatura interna, é obtida primeiramente através do cálculo da quantidade de

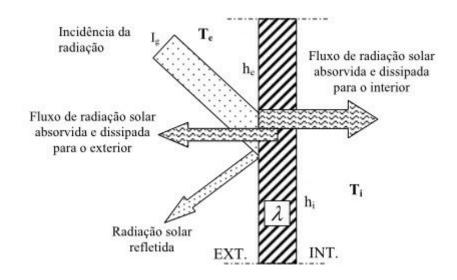


Figura 2: Trocas de calor através de paredes opacas (FROTA; SCHIFFER, 2003)

calor absorvida pela parede externa e dissipada através dos materiais que compõem tal elemento. Esta parede tem como condição de contorno uma função seno e é composta por mais de um material, ou seja, possui mais de um coeficiente de condutância térmica.

Através da obtenção destes valores é possível a determinação da distribuição de temperatura nas camadas e a adequação do dimensionamento de condicionamento de ar, a fim de garantir o devido conforto térmico aos ocupantes da edificação.

2.1.7 Conforto Térmico

Define-se conforto térmico como o estado mental que expressa a satisfação do homem com o ambiente térmico que o circunda (HEATING; ENGINEERS, 1997). A não satisfação pode ser causada pela sensação de desconforto pelo calor ou pelo frio, quando o balanço térmico não é estável, ou seja, quando há diferenças entre o calor produzido pelo corpo e o calor perdido para o ambiente. Existem em torno de 3 normas brasileiras que tratam de conforto térmico: ABNT-NBR-15220 (2003), que trata do desempenho térmico de edificações; ABNT-NBR-16401 (2008), que trata das instalações de ar-condicionado (Parâmetros de conforto térmico); e a ABNT-NBR-15575 (2013), que trata dos requisitos gerais para desempenho térmico. A norma internacional para averiguar o conforto témico em ambientes é a ISO-7730 (2005).

Cabe ressaltar que conforto térmico é diferente de neutralidade térmica, uma vez que neutralidade térmica é um estado físico, no qual todo o calor gerado pelo organismo através do metabolismo, seja trocado em igual proporção com o ambiente ao redor, não havendo nem acúmulo de calor, nem perda excessiva do mesmo, mantendo a temperatura corporal constante. Neutralidade térmica é uma condição necessária

mas não suficiente para que uma pessoa esteja em conforto térmico. Um indivíduo que estiver exposto a um campo assimétrico de radiação, pode muito bem estar em neutralidade térmica, porém não estará em conforto térmico.

Um indivíduo em estado de conforto térmico apresenta ótimos níveis de saúde, conforto e desempenho de suas atividades.

A facilidade ou dificuldade para efetivar as trocas térmicas com o meio físico é o que indica o grau de conforto térmico permitido pelo ambiente, o que implica em conhecer os valores limites da temperatura, da umidade relativa e da velocidade do ar.

A combinação dos valores para estas variáveis deve evitar sensações desagradáveis causadas por exagerada perda de calorias pelo corpo, desigualdade de temperatura entre as diversas partes do corpo ou dificuldade de eliminar o calor produzido pelo organismo.

Fica claro, no entanto, que estas sensações referidas anteriormente não são funções somente das condições ambientais, mas também de capacidade de aclimatação ao meio, dos hábitos alimentares, da atividade e do tipo de vestuário de cada usuário.

O equilíbrio térmico no frio realiza-se pelo esforço do calor metabólico e, no quente por regulação das perdas por evaporação. As trocas caloríficas por radiação entre a pele e um corpo qualquer são essenciais na medida em que a pele humana tem características excelentes de absorção e de emissão (FROTA; SCHIFFER, 2003).

Pode-se afirmar que é através da pele que se realizam as trocas de calor, ou seja, a pele é o principal órgão termo-regulador do organismo humano. A temperatura da pele é regulada pelo fluxo sanguíneo que a percorre, ou seja, quanto mais intenso o fluxo, mais elevada sua temperatura.

Ao sentir desconforto térmico, o primeiro mecanismo fisiológico a ser ativado é a regulagem vasomotora do fluxo sanguíneo da camada periférica do corpo, a camada subcutânea, através da vasodilatação ou vasoconstrição, reduzindo ou aumentando a resistência térmica dessa camada.

Outro mecanismo de termo-regulação da pele é a transpiração, que tem início quando as perdas por convecção e radiação são inferiores às perdas necessárias à termo-regulação.

Além de analisar os tipos de trocas térmicas realizadas pelo corpo humano, para se aproximar ao máximo do conforto térmico e entender como ocorrem estas trocas entre a edificação e o meio ambiente, é necessário ainda encontrar uma maneira de calcular esta troca. Para isso é preciso saber qual a equação que melhor representa a transferência de calor entre o ambiente externo e o interno através de uma parede, ou seja, a condução.

3 MODELO FÍSICO-MATEMÁTICO

O desempenho térmico das paredes externas tem participação importante no comportamento e influencia nas temperaturas dos seus ambientes internos, influenciando também aspectos como conforto térmico, dimensionamento dos sistemas de climatização e consumo de energia. Esta variação do desempenho térmico é provocada pelo aquecimento e/ou resfriamento da superfície da terra a qual a edificação está submetida, simultaneamente com o tipo de material utilizado para a composição das paredes.

Para a estimativa da temperatura em uma parede utiliza-se a equação de condução de calor, e é resolvida pela técnica da transformada de Laplace, onde a inversão é realizada através do método da Quadratura Gaussiana. A solução da EDP, apresentada anteriormente, possibilita a interpretação física do fenômeno, apresentando neste ponto uma vantagem em relação às metodologias empíricas ou numéricas.

Através desta aplicação, o principal objetivo é a otimização de isolantes, para isto calculou-se a distribuição de temperatura e, consequentemente, o fluxo de calor que entra no ambiente condicionado, pois as envoltórias das edificações estão normalmente em processo transiente de transferência de calor, seja em resfriamento ou aquecimento.

O problema foi subdividido, apresenta-se neste capítulo, a formulação matemática do problema e as soluções unidimensionais transientes da condução de calor para uma parede composta por uma, duas, quatro e n camadas, respectivamente.

3.1 Equação geral da condução de calor

Os principais objetivos do estudo da condução de calor são determinar a distribuição de temperatura em um meio e calcular o fluxo de calor utilizando a Lei de Fourier (HSU, 1970).

Proporciona-se através deste estudo o conhecimento da integridade estrutural do meio em alguns pontos e em determinados momentos, como durante a expansão térmica, estresse térmico, expansões e delexões. É possível ainda, otimizar a espes-

sura de um material isolante ou fazer uso da compatibilidade entre materiais, revestimentos especiais ou adesivos usado com o material.

Para conhecer a distribuição de temperatura, o primeiro passo é a formulação do problema. Para isso é necessário definir um volume de controle (V.C.) aplicando um balanço de energia para identificar os processos de transmissão de calor no volume de controle, introduzindo as equações das taxas de calor encontra-se então uma equação diferencial parcial a ser solucionada.

A solução da EDP pode ser obtida através de vários métodos, alguns deles são: aplicação dos métodos da transformada de Laplace, Função de Green, separação de variáveis e séries de Fourier.

A seguir, apresenta-se a demonstração da equação geral da condução de calor através do balanço de energia da figura 3 e equação (6).

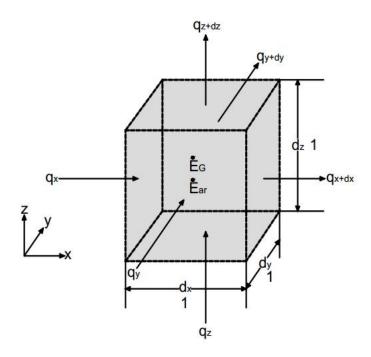


Figura 3: Balanço de energia em um volume de controle elementar.

$$\begin{pmatrix} \text{Fluxo} \\ \text{de Calor} \\ \text{no V.C.} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{Taxa de} \\ \text{Calor} \\ \text{gerada} \\ \text{no V.C.} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Taxa temporal} \\ \text{de variação da} \\ \text{energia interna} \\ \text{no V.C.} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{Fluxo de Calor} \\ \text{que deixa o} \\ \text{V.C.} \end{pmatrix}$$

$$(II) \qquad (III) \qquad (IV) \qquad (6)$$

Supõe-se que o processo de transferência de calor no volume de controle é feito apenas por condução; a geração de calor pode ser por transformação mecânica,

elétrica, química ou nuclear em calor, no volume de controle; e a taxa de variação da quantidade de energia no volume de controle ou energia acumulada é uma função da variação da energia interna, cinética ou potencial.

As equações que representam o termo (I) da equação (6), nas direções x, y e z, são respectivamente:

$$q_x = -k_x dA \frac{\partial T}{\partial x} = -k_x dy dz \frac{\partial T}{\partial x},$$
 (7a)

$$q_{y} = -k_{y} dA \frac{\partial T}{\partial y} = -k_{y} dx dz \frac{\partial T}{\partial y}, \qquad (7b)$$

$$q_z = -k_z \, dA \, \frac{\partial T}{\partial z} = -k_z \, dx \, dy \frac{\partial T}{\partial z} \,. \tag{7c}$$

sendo k_x , k_y e k_z a condutividade térmica nas direções x, y e z, T representa a temperatura média e q_x , q_y e q_z são os fluxos de calor, respectivamente.

O termo (II) que representa a taxa de calor gerado, pode ser representado como:

$$\dot{E}_G = g(x, y, z, t) dx dy dz, \qquad (8)$$

em que g(x,y,z,t) representa a taxa de calor gerado por unidade de volume, com unidade (W/m^3) .

Em (III), a taxa temporal de variação da energia interna pode ser escrita como:

$$\dot{E}_{ar} = \frac{\partial U}{\partial t} = m \frac{\partial u}{\partial t} = \rho \, dx \, dy \, dz \, c \frac{\partial T}{\partial t} \,, \tag{9}$$

sendo c o calor específico; m a massa elementar do V.C., ρ a densidade, u a energia interna específica e U a energia interna.

Por fim, os fluxos de calor que deixam o V.C., termo (IV) são representados pelas equações (10a), (10b) e (10c), e podem ser escritos por um expansão em série de Taylor. Foi utilizada a expansão linear da série de Taylor, pois esta, representa grande parte dos modelos utilizados.

Para esses termos são feitas aproximações lineares da seguinte forma:

$$q_{x+dx} = q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx \,, \tag{10a}$$

$$q_{y+dy} = q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y} dy, \qquad (10b)$$

$$q_{z+dz} = q_z + \frac{\partial q_z}{\partial z} dz \,. \tag{10c}$$

Substituindo as equações (7a), (7b), (7c), (8), (9), (10a), (10b) e (10c) na equação

do balanço de energia, obtém-se:

$$q_x + q_y + q_z + g(x, y, z, t) \times dx \times dy \times dz = \rho \times c \times dx \times dy \times dz \frac{\partial T}{\partial t} + q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx + q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y} dy + q_z + \frac{\partial q_z}{\partial z} dz + ordem \ superior \ .$$
(11)

onde, ordem superior é o erro encontrado ao truncar a série.

Simplificando a equação (11), tem-se:

$$g(x, y, z, t) dx dy dz = \rho c dx dy dz \frac{\partial^2 T}{\partial t} + \frac{\partial^2 q_x}{\partial x} dx + \frac{\partial^2 q_y}{\partial y} dy + \frac{\partial q_z}{\partial z} dz.$$
 (12)

Uma das maneiras mais utilizadas para solucionar o problema de fechamento da equação (12) é baseada na Lei de Fourier (HSU, 1970), na qual assume que o fluxo de calor é proporcional à magnitude do gradiente de temperatura. Assim, assumindo $dx\,dy\,dz$ valores unitários:

$$g(x, y, z, t) dx dy dz = \rho c dx dy dz \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx dy dz$$
$$- \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) dx dy dz - \frac{\partial}{\partial z} \left(k_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) dx dy dz . \tag{13}$$

Reescreve-se a equação (13) da seguinte maneira:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) + g(x, y, z, t) = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}. \tag{14}$$

Assim, encontra-se na literatura a solução da equação (14) para diversos casos, que dependem da geometria do problema, dos tipos das condições de contorno e das condições iniciais do problema. A seguir, exemplificam-se algumas fórmulas oriundas de tais simplificações:

A) Condutividade térmica uniforme e constante ($k_x = k_y = k_z = k$). Esta propriedade do material é associada à propagação do calor no meio durante as variações de temperatura e tempo.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{g(x, y, z, t)}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}.$$
 (15)

Em que α representa a difusividade térmica e é uma grandeza específica do material, dada por:

$$\alpha = \frac{k}{\rho C} \,, \tag{16}$$

sendo k a condutividade térmica $(J/ms^{\circ}C)$, ρ a densidade de massa (Kg/m^{3}) , e C a

capacidade térmica específica $(J/Kg^{\circ}C)$.

A equação (15a) pode ser reescrita em uma notação mais simplificada da seguinte forma:

$$\nabla^2 T + \frac{g(x, y, z, t)}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}, \tag{17}$$

onde $\nabla^2(.)=\frac{\partial^2(.)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2(.)}{\partial y^2}+\frac{\partial^2(.)}{\partial z^2}$ é o operador matemático chamado de Laplaciano no sistema de coordenadas cartesianas tridimensional.

A equação (17) representa a forma mais adequada de escrever a equação da condução de calor, pois independe do sistema de coordenadas adotado. Para trabalhar com outro sistema de coordenadas basta substituir o Laplaciano do sistema de interesse. Como por exemplo, para o sistema de coordenadas cilíndrico e esférico os Laplacianos, tornam-se:

$$\nabla^{2}(.) = \frac{1}{r} \frac{\partial(.)}{\partial r} \left(r \frac{\partial(.)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^{2}} \frac{\partial^{2}(.)}{\partial \phi^{2}} + \frac{\partial^{2}(.)}{\partial z^{2}}, \tag{18}$$

$$\nabla^{2}(.) = \frac{1}{r^{2}} \frac{\partial(.)}{\partial r} \left(r^{2} \frac{\partial(.)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^{2} sin\theta} \frac{\partial(.)}{\partial \theta} \left(sin\theta \frac{\partial(.)}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^{2} sin^{2}\theta} \frac{\partial^{2}(.)}{\partial \phi^{2}}. \tag{19}$$

B) Sem geração de calor e k constante tem-se a equação de Fourier

$$\nabla^2 T = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \tag{20}$$

C) Regime estacionário e k uniforme e constante tem-se a equação de Poisson

$$\nabla^2 T + \frac{g(x, y, z, t)}{k} = 0 \tag{21}$$

D) Regime estacionário, sem geração de calor, k uniforme e constante, equação de Laplace

$$\nabla^2 T = 0 \tag{22}$$

A equação (15a) pode estar sujeita às seguintes condições de contorno:

 geometria infinita (condição natural), ou seja, é a situação onde a distribuição de temperatura é prescrita na superfície de contorno, (primeiro tipo)

$$T(x_i, t) = f_i(x, t), (23a)$$

fluxo de calor prescrito (segundo tipo)

$$-k\frac{\partial T}{\partial x} = f_i(x,t), \qquad (23b)$$

• condição de contorno de convecção (condição de contorno do terceiro tipo)

$$-k\frac{\partial T}{\partial x} + h_i T \bigg|_{xi} = f_i(x,t),$$
 (23c)

condição de contorno do quarto tipo, espessura fina sem convecção

$$-k\frac{\partial T}{\partial x} = f_i(x,t) - (\rho cb)_i \frac{\partial T}{\partial t} \bigg|_{x_i}, \tag{23d}$$

• ou condição de contorno do quinto tipo, espessura fina com convecção

$$-k\frac{\partial T}{\partial x} + h_i T \bigg|_{xi} = f_i(x,t) - (\rho cb)_i \frac{\partial T}{\partial t} \bigg|_{xi},$$
 (23e)

onde, i representa a interface, $f_i(x,t)$ é uma função conhecida, x é a distância (m) e h_i é o coeficiente de condutância térmica $(W/m^{2\circ}C)$. Para as condições homogêneas, considera-se $f_i(r,t)$ nula.

Apresenta-se na tabela 1 a numeração das diferentes combinações possíveis de condições de contorno, considerando as coordenadas cartesianas, OLIVEIRA (2015):

Descrição	Tipo de contorno	Notação
Sem efeito físico de contorno	Tipo zero	0
Temperatura prescrita	Dirichlet	1
Fluxo de calor prescrito	Neumann	2
Convecção	Robin	3
Espessura fina, sem convecção	Quarto tipo	4
Espessura fina, com convecção	Quinto tipo	5

Tabela 1: Tipos de condição de contorno

Cabe ressaltar que dependendo das condições de contorno e iniciais utilizadas podem surgir novos problemas.

Na próxima seção são apresentadas soluções para a equação de condução de calor em uma parede simples, em uma parede com duas, quatro e n camadas, respectivamente.

3.2 Solução da Equação de Condução de Calor

3.2.1 Problema térmico unidimensional transiente em uma parede simples

Apresenta-se inicialmente uma solução do problema térmico unidimensional com apenas uma camada. A solução é obtida pelo método da transformada de Laplace e para calcular a sua inversa utilou-ze o método da Quadratura Gaussiana (inversão numérica).

Este procedimento tem o objetivo de facilitar o entendimento e a verificação das soluções apresentadas posteriormente para paredes com mais de uma camada.

3.2.1.1 Transformada de Laplace

Considera-se um pedaço de parede de uma edificação, representado na figura 4, sujeito às condições de contorno e inicial (25a), (25b) e (25c). Assim, tem-se:

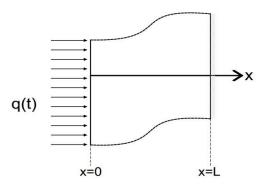


Figura 4: Parede externa submetida a um fluxo de calor q(t).

$$\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T(x,t)}{\partial t},$$
(24)

$$-k \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \bigg|_{x=0} = q(t)$$
, (25a)

$$\left. \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \right|_{x=L} = 0,$$
 (25b)

$$T(x,0) = F(x) = T_0$$
. (25c)

O problema acima descrito bem como a aplicação da transformada de Laplace a seguir podem ser encontrados nos textos básicos de transferência de calor (ÖZISIK, 1993). Apresenta-se a resolução do problema proposto utilizando a transformada de Laplace. Inicialmente aplica-se a transformada de Laplace na equação (24) e nas

condições de contorno (25a), (25b) e (25c):

$$\frac{d^2\bar{T}(x,p)}{dx^2} = \frac{1}{\alpha} (p\bar{T}(x,p) - T_0),$$
 (26)

$$-k\frac{d\bar{T}(x,p)}{dx}\bigg|_{x=0} = Q(p), \qquad (27a)$$

$$\frac{d\bar{T}(x,p)}{dx}\bigg|_{x=L} = 0,$$
 (27b)

onde, $\mathcal{L}\{q(t)\ t \to p\} = Q(p),\ \bar{T}(x,p) = \mathcal{L}\{T(x,t); t \to p\}$, sendo \mathcal{L} o operador transformada de Laplace.

A resolução da equação (26), conforme as condições de contorno (27a) e (27b), consiste na separação em duas soluções: solução homogênea associada e solução particular $\bar{T}(x,p) = \bar{T}_h(x,p) + \bar{T}_p(x,p)$. Inicialmente encontra-se a solução homogênea dada pela equação:

$$\bar{T}_h(x,p) = A(p)e^{\sqrt{\frac{p}{\alpha}}x} + B(p)e^{-\sqrt{\frac{p}{\alpha}}x}.$$
 (28)

sendo A e B coeficientes dependentes de p.

A solução particular é descrita a seguir:

$$\bar{T}_p(x,p) = \frac{T_0}{p} \,. \tag{29}$$

Então $\bar{T}(x,p)$:

$$\bar{T}(x,p) = A(p)e^{\sqrt{\frac{p}{\alpha}}x} + B(p)e^{-\sqrt{\frac{p}{\alpha}}x} + \frac{T_0}{p}.$$
 (30)

Para obter os coeficientes A e B da equação (30), aplicam-se as condições de contorno (27a) e (27b). Quando x=0:

$$A(p)\sqrt{\frac{p}{\alpha}} - B(p)\sqrt{\frac{p}{\alpha}} = \frac{-Q_p}{k}.$$
 (31a)

 $\mathsf{Em}\; x = L \mathsf{:}$

$$A(p)\sqrt{\frac{p}{\alpha}}e^{\sqrt{\frac{p}{\alpha}}L} - B(p)\sqrt{\frac{p}{\alpha}}e^{-\sqrt{\frac{p}{\alpha}}L} = 0.$$
 (31b)

As equações (31a) e (31b) resultam em um sistema de equações:

$$\begin{cases}
A(p)\sqrt{\frac{p}{\alpha}} - B(p)\sqrt{\frac{p}{\alpha}} = \frac{-Q_p}{k} \\
A(p)\sqrt{\frac{p}{\alpha}}e^{\sqrt{\frac{p}{\alpha}}L} - B(p)\sqrt{\frac{p}{\alpha}}e^{-\sqrt{\frac{p}{\alpha}}L} = 0
\end{cases}$$
(32)

Resolvendo o sistema com auxílio do software WolframMathematica10.2 e substituindo os valores encontrados na equação (30), obtém-se a solução transformada:

$$\bar{T}(x,p) = -\left(\left(\frac{\alpha e^{\sqrt{\frac{p}{\alpha}}x}Q(p)}{(1+e^{2l\sqrt{\frac{p}{\alpha}}})kp}\right) \times \sqrt{\frac{p}{\alpha}}\right) + \left(\left(\frac{\alpha e^{2L\sqrt{\frac{p}{\alpha}}-\sqrt{\frac{p}{\alpha}}x}Q(p)}{(1+e^{2L\sqrt{\frac{p}{\alpha}}})kp}\right) \times \sqrt{\frac{p}{\alpha}}\right) + \frac{\bar{T}_0}{p}.$$
 (33)

O sistema representado na equação (32) é um sistema mal condicionado. Devido a isto para resolvê-lo não basta apenas utilizar o método de eliminação de Gauss com pivoteamento, já que um problema mal condicionado poderá ser numericamente instável. Para assegurar a convergência da solução, utilizou-se a continuação analítica (PETERSEN, 2011), ou seja, resolve-se o problema de condução do calor para um passo de tempo h onde a convergência da solução está assegurada e utiliza-se esta solução como condição inicial para o próximo passo.

Para obter a solução que modela a distribuição de temperatura, aplica-se a transformada inversa de Laplace utilizando Quadratura Gaussiana (HEYDARIAN; MULLINEAU, 1981).

3.2.2 Condições de Interface

Quando dois materiais de diferentes condutividades térmicas, digamos k_1 e k_2 , estão em contato, tem-se um contorno comum chamado de interface. A condição na interface é representada pela equação (34).

$$\begin{pmatrix}
\text{Condução do} \\
\text{calor no meio 1}
\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
\text{Condução do calor nas} \\
\text{Iacunas entre os dois meios}
\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
\text{Condução do} \\
\text{calor no meio 2}
\end{pmatrix}$$
(34)

$$-k_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} \bigg|_i = h_c (T_1 - T_2)_i = -k_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} \bigg|_i, \tag{35}$$

sendo i a interface e h_c o coeficiente de condutividade na interface. Esta equação (35) descreve a existência de resistência de contato.

Para o caso de contato térmico perfeito entre as superfícies, temos $h_c \to \infty$, então a equação (35) passa a ter a seguinte forma:

$$T_1 = T_2$$
, (35a)

$$-k_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} = -k_2 \frac{\partial T_2}{\partial x}, \qquad (35b)$$

em que, as equações (35a) e (35b) representam, a condutividade da temperatura e a continuidade do fluxo de calor na interface, respectivamente.

Desta maneira, é possível calcular a transferência de calor em um problema térmico com mais de uma camada, pois além de utilizar as condições de contorno e inicial, usa-se também as condições de interface.

Problema térmico unidimensional com duas camadas 3.2.3

3.2.3.1 Transformada de Laplace

O problema representado pela figura 5 é descrito matematicamente através das equações de difusão do calor, dadas pelas equações (36a) e (36b):

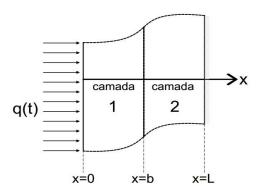


Figura 5: Placa plana composta de duas camadas submetida à um fluxo de calor q(t).

$$\frac{\partial^2 T_1(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha_1} \frac{\partial T_1(x,t)}{\partial t}, \quad para \quad 0 < x < b.$$
 (36a)

$$\frac{\partial^2 T_1(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha_1} \frac{\partial T_1(x,t)}{\partial t}, \qquad para \qquad 0 < x < b.$$

$$\frac{\partial^2 T_2(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha_2} \frac{\partial T_2(x,t)}{\partial t}, \qquad para \qquad b < x < L.$$
(36a)

onde $T_1(x,t)$ e $T_2(x,t)$ são as temperatuas médias nas camadas 1 e 2, respectivamente, α_1 e α_2 são as difusividades térmicas dos materiais de cada camada. Para o cálculo da difusividade utiliza-se $\alpha = k/\rho s$, sendo k a condutividade térmica $(J/ms^{\circ}C)$, ρ a densidade de massa (kg/m^3) , c a capacidade térmica específica $(J/ms^{\rm o}C)$ e L é o comprimento da parede (m).

As equações (36a) e (36b) estão sujeitas às seguintes condições de contorno e inicial:

$$-k_1 \frac{\partial T_1(x,t)}{\partial x} \bigg|_{x=0} = q(t) , \qquad (37a)$$

$$-k_2 \frac{\partial T_2(x,t)}{\partial x} \bigg|_{x=L} = 0,$$
(37b)

$$T_1(x,0) = T_2(x,0) = T_0$$
. (37c)

e as condições de continuidade (contato térmico perfeito entre as camadas) dadas

por:

$$T_1 \bigg|_{x=b} = T_2 \bigg|_{x=b}, \tag{38a}$$

$$T_1 \Big|_{x=b} = T_2 \Big|_{x=b},$$

$$-k_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} \Big|_{x=b} = -k_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} \Big|_{x=b}.$$
(38a)

As equações (36a) e (36b) são resolvidas utilizando a transformada de Laplace. Aplicando este método nas equações (36a) e (36b), obtém-se:

$$\frac{d^2\bar{T}_1(x,p)}{dx^2} = \frac{1}{\alpha_1} (p\bar{T}_1(x,p) - T_0), \qquad (39a)$$

$$\frac{d^2\bar{T}_2(x,p)}{dx^2} = \frac{1}{\alpha_2} (p\bar{T}_2(x,p) - T_0).$$
 (39b)

A solução da equação (39a), consiste na separação de duas soluções: solução homogênea e solução particular, conforme equação (26). A solução homogênea é dada pela equação (40):

$$\bar{T}_{h1}(x,p) = A(p)e^{\sqrt{\frac{p}{\alpha_1}}x} + B(p)e^{-\sqrt{\frac{p}{\alpha_1}}x}.$$
(40)

A solução particular é obtida resolvendo a equação a seguir:

$$\frac{d^2 \bar{T}_{p1}(x,p)}{dx^2} - \frac{p}{\alpha_1} \bar{T}_{p1}(x,p) = -\frac{T_0}{\alpha_1}, \tag{41}$$

Obtém-se como solução a seguinte equação:

$$\bar{T_{p1}}(x,p) = \frac{T_0}{p}$$
 (41 a)

A solução transformada completa para a primeira camada da parede é representada pela soma das soluções homogênea e particular, mostrada a seguir:

$$\bar{T}_1(x,p) = A(p)e^{\sqrt{\frac{p}{\alpha_1}}x} + B(p)e^{-\sqrt{\frac{p}{\alpha_1}}x} + \frac{T_0}{p}$$
 (42)

O problema (39b) é resolvido de forma análoga a equação (39a) , portanto a solução é:

$$\bar{T}_2(x,p) = C(p)e^{\sqrt{\frac{p}{\alpha_2}}x} + D(p)e^{-\sqrt{\frac{p}{\alpha_2}}x} + \frac{T_0}{p}.$$
 (43)

Para obter os coeficientes A, B, C e D das equações (42) e (43), aplicam-se as

condições de contorno e de continuidade transformadas dadas por:

$$-k_1 \frac{d\bar{T}_1(x,p)}{dx} \bigg|_{x=0} = Q(p),$$
 (44a)

$$-k_2 \frac{d\bar{T}_2(x,p)}{dx}\bigg|_{x=L} = 0,$$
 (44b)

$$\bar{T}_1(x,p)\bigg|_{x=b} = \bar{T}_2(x,p)\bigg|_{x=b},$$
 (45a)

$$\begin{aligned}
\bar{T}_{1}(x,p) \Big|_{x=b} &= \bar{T}_{2}(x,p) \Big|_{x=b}, \\
-k_{1} \frac{d\bar{T}_{1}(x,p)}{dx} \Big|_{x=b} &= -k_{2} \frac{d\bar{T}_{2}(x,p)}{dx} \Big|_{x=b},
\end{aligned} \tag{45a}$$

onde $\mathcal{L}\{q(t)\} = Q(p), \ \bar{T}_1(x,p) = \mathcal{L}\{T_1(x,t); t \to p\} \ \mathbf{e} \ \bar{T}_2(x,p) = \mathcal{L}\{T_1(x,t); t \to p\}$, sendo \mathcal{L} o operador da transformada de Laplace.

Quando x = 0 aplicando a equação (44a) em:

$$A(p)\sqrt{\frac{p}{\alpha_1}} - B(p)\sqrt{\frac{p}{\alpha_1}} = \frac{-Q_p}{k_1}.$$
 (46)

Utilizando a segunda condição de contorno (44b), obtém-se:

$$-k_2C(p)\sqrt{\frac{p}{\alpha_2}}e^{\sqrt{\frac{p}{\alpha_2}}L} + k_2D(p)\sqrt{\frac{p}{\alpha_2}}e^{-\sqrt{\frac{p}{\alpha_2}}L} = 0.$$
(47)

Aplicando a segunda condição de continuidade (45a), tem-se:

$$A(p)e^{\sqrt{\frac{p}{\alpha_1}b}} + B(p)e^{-\sqrt{\frac{p}{\alpha_1}b}} = C(p)e^{\sqrt{\frac{p}{\alpha_2}b}} + D(p)e^{-\sqrt{\frac{p}{\alpha_2}b}}.$$
 (48)

Por fim, quando x = b (45b):

$$-k_1 A(p) \sqrt{\frac{p}{\alpha_1}} e^{\sqrt{\frac{p}{\alpha_1}}b} + k_1 B(p) \sqrt{\frac{p}{\alpha_1}} e^{-\sqrt{\frac{p}{\alpha_1}}b} = -k_2 C(p) \sqrt{\frac{p}{\alpha_2}} e^{\sqrt{\frac{p}{\alpha_2}}b} + k_2 D(p) \sqrt{\frac{p}{\alpha_2}} e^{-\sqrt{\frac{p}{\alpha_2}}b}.$$

$$(49)$$

As equações (46), (47), (48) e (49) resultam em um sistema de equações:

$$\begin{cases} uA(p) - uB(p) = \frac{-Q(p)}{k_1} \\ -k_1 u e^{ub} A(p) - k_1 u e^{-ub} B(p) + k_2 v e^{vb} C(p) - k_2 v e^{-vb} D(p) = 0 \\ -k_2 v e^{vL} C(p) + k_2 v e^{-vL} D(p) = 0 \\ e^{ub} A(p) + e^{-ub} B(p) - e^{vb} C(p) - e^{-vb} D(p) = 0 \end{cases}$$
(50)

onde $u=\sqrt{\frac{p}{\alpha_1}}$ e $v=\sqrt{\frac{p}{\alpha_2}}$. A solução obtida resolvendo o sistema é:

$$A(p) = Q(p)(ue^{2vb}k_1 + ue^{2vL}k_1 + ve^{2vb}k_2 - ve^{2vL}k_2)/(uk_1 \times (-ue^{2vb}k_1 + ue^{2ub+2vb}k_1 - ue^{2vL}k_1 + ue^{2ub+2vL}k_1 - ve^{2vb}k_2 + ve^{2ub+2vL}k_2 + ve^{2ub+2vL}k_2)),$$

$$B(p) = (e^{2ub}Q(p)(ue^{2vb}k_1 + ue^{2vL}k_1 - ve^{2vb}k_2 + ve^{2vL}k_2))/(uk_2 \times (-ue^{2vb}k_1 + ue^{2ub+2vb}k_1 - ue^{2vL}k_1 + ue^{2ub+2vL}k_1 + ue^{2ub+2vL}k_1 + ue^{2vb}k_2 - ve^{2vb+2vb}k_2 + ve^{2vL}k_2 + ve^{2ub+2vL}k_2)),$$

$$(51)$$

$$C(p) = (2Q(p)exp^{ub+vb})/(-ue^{2vb}k_1 + ue^{2ub+2vb}k_1 - ue^{2vL}k_1 + ue^{2ub+2vL}k_1 - ve^{2vb}k_2 - ve^{2ub+2vb}k_2 + ve^{2vL}k_2 + ve^{2ub+2vL}k_2),$$

$$D(p) = (2Q(p)e^{ub+vb+2vL})/(-ue^{2vb}k_1 + ue^{2ub+2vb}k_1 - ue^{2vL}k_1 + ue^{2ub+2vL}k_1 - ve^{2vb}k_2 - ve^{2ub+2vb}k_2 + ve^{2vL}k_2 + ve^{2ub+2vL}k_2).$$

Uma vez que os coeficientes das equações (42) e (43) estão determinados, há condições de inverter a solução pela transformada inversa de Laplace. Esse procedimento resulta:

$$T_i(x,t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{p=\gamma-j\infty}^{\gamma+j\infty} e^{pt} \bar{T}_i(x,p) dp, \quad onde \quad i=1:2.$$
 (52)

sendo i o número de camadas e γ o raio de origem.

Devido à impossibilidade de determinar as singularidades do integrando que aparece no lado direito da equação anterior, não se pode aplicar o Teorema dos Resíduos para obter o resultado analítico da integral. Assim, na sequência é apresentada uma solução aproximada da integral presente na equação (52) usando inversão numérica. A inversão numérica é feita utilizando o método da Quadratura Gaussiana.

3.2.3.2 Quadratura Gaussiana

A Quadratura Gaussiana é um método de integração numérica, que consiste na substituição de uma integral por uma soma ponderada. Utiliza polinômios ortogonais para a aproximação das funções a serem integradas. Como estes polinômios efetivamente aproximam as funções, é possível a utilização de esquemas de integração numérica baseadas em polinômios ortogonais. Segundo (BEYER; VILHENA, 1998), a derivação das fórmulas de quadratura, em termos gerais, inclui a normalização do intervalo de integração, a amostragem da função a ser aproximada nas raízes desigualmente espaçadas do polinômio ortogonal e a geração do polinômio de interpolação.

Para obter a inversão da transformada de Laplace, (42) e (43), para o domínio tempo, é utilizada a equação (52).

Fazendo $pt=p_k$ na equação (52) para excluir o parâmetro t no termo exponencial, que é a função peso e fazendo a mudança da variável $p=\frac{p_k}{t}$, obtém-se:

$$T_i(x,t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma'-i\infty}^{\gamma'+j\infty} e^p \frac{\bar{T}_i(x,\frac{p_k}{t})}{t} dp, \qquad (53)$$

onde, $\gamma^{'}=\frac{c}{t}.$ Tem-se então a fórmula de quadratura do tipo:

$$\int_{A}^{b} w(x)f(x)dx \cong \sum_{k=1}^{n} a_{k}f(x_{k}).$$
(54)

Em HEYDARIAN; MULLINEAU (1981) afirmam que a fórmula de Quadratura Gaussiana adequada é:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + j\infty} e^p \frac{F(p)}{p} dp = \sum_{k=1}^n a_k F(p_k), \qquad (55)$$

sendo $F(p_k)$ uma função relacionada com $\bar{T}_i(x, \frac{p_k}{t})$ deve ser obtida por:

$$F(p_k) = \frac{p_k}{t} \bar{T}_i(x, \frac{p_k}{t}). \tag{56}$$

Substituindo (56) em (55) resulta em:

$$T_i(x,t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma - j\infty}^{\gamma + j\infty} e^p \frac{F(p)}{p} dp = \sum_{k=1}^n a_k(\frac{p_k}{t}) \bar{T}_i(x, \frac{p_k}{t}).$$
 (57)

Através de (57) é possível calcular $T_i(x,t)$ substituindo p por $\frac{p_k}{t}$. Sabendo ainda, que p_k são as raízes do polinômio:

$$(-1)^n \sum_{r=0}^n A(n,r) p^{n-r} = 0, (58)$$

sendo

$$A(n,r) = \frac{(-1)^{n-r} n\{(n+r-1)!\}}{r!(n-r)!}.$$
(59)

Os termos a_k da equação (55) são as soluções de:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k p_k^{-r} = \frac{1}{r!}, \qquad 0 \le r \le (n-1).$$
 (60)

A partir disto, é possível obter $T_i(x,t)$ substituindo p por $\frac{p_k}{t}$ utilizando juntamente os valores de a_k encontrados em (STROUD; SECREST, 1966).

É importante ressaltar que, para a obtenção da solução das equações (36a) e (36b) através do método da transformada de Laplace é necessário que o fluxo de calor q(t) seja constante ou somente dependente da posição, ou ainda uma função exponencial, $q(t) = C_1 e^{(-C_2 t)}$, com C_1 e C_2 não nulos. Na seção a seguir é proposta a solução da equação de condução do calor em quatro camadas, com um fluxo de calor dependente do tempo, através da transformada de Laplace.

3.2.4 Problema térmico unidimensional com quatro camadas

3.2.4.1 Transformada de Laplace

O problema representado pela figura 6 é descrito matematicamente através das equações de condução do calor:

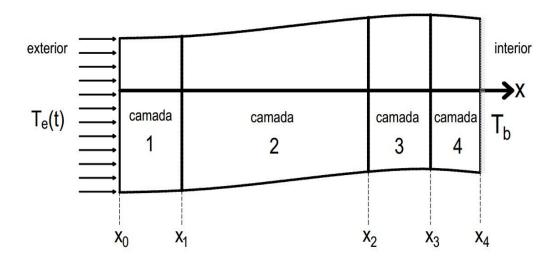


Figura 6: Placa plana composta de quatro camadas submetida à um fluxo de calor dependente do tempo.

$$\frac{\partial^2 T_1(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha_1} \frac{\partial T_1(x,t)}{\partial t}, \qquad para \qquad 0 < x < x_1$$
 (61a)

$$\frac{\partial^2 T_2(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha_2} \frac{\partial T_2(x,t)}{\partial t}, \qquad para \qquad x_1 < x < x_2$$
 (61b)

$$\frac{\partial^2 T_3(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha_3} \frac{\partial T_3(x,t)}{\partial t}, \qquad para \qquad x_2 < x < x_3 \qquad (61c)$$

$$\frac{\partial^2 T_4(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha_4} \frac{\partial T_4(x,t)}{\partial t}, \qquad para \qquad x_3 < x < x_4 \qquad (61d)$$

$$\frac{\partial^2 T_4(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha_4} \frac{\partial T_4(x,t)}{\partial t}, \qquad para \qquad x_3 < x < x_4$$
 (61d)

sendo T_1 , T_2 , T_3 e T_4 as temperatuas médias nas camadas 1, 2, 3 e 4 respectivamente, α_1 , α_2 , α_3 e α_4 as difusividades térmicas dos materiais de cada camada.

As equações (61a), (61b), (61c) e (61d) estão sujeitas às seguintes condições de contorno e inicial:

$$T_1\Big|_{x=x_0} = T_e(t) = C_1 \cos(C_2 t + C_3) + C_4 \sin(C_5 t + C_6),$$
 (62a)

$$T_4 \bigg|_{x=x_4} = T_b \,, \tag{62b}$$

$$T_1(x,0) = T_2(x,0) = T_3(x,0) = T_4(x,0) = T_0,$$
 (62c)

onde $T_e(t)$ representa a variação da temperatura, no período de um dia, a qual a face externa da edificação (fachada) está submetida.

As condições de continuidade (contato térmico perfeito entre as camadas) a que estão sujeitas as equações (61a), (61b), (61c) e (61d) são:

$$T_1 \Big|_{x=x_1} = T_2 \Big|_{x=x_1}$$
, (63a)

$$-k_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} \bigg|_{x=x_1} = -k_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} \bigg|_{x=x_1}, \tag{63b}$$

$$T_2\Big|_{x=x_2} = T_3\Big|_{x=x_2}$$
, (63c)

$$T_{2} \Big|_{x=x_{2}} = T_{3} \Big|_{x=x_{2}},$$

$$-k_{2} \frac{\partial T_{2}}{\partial x} \Big|_{x=x_{2}} = -k_{3} \frac{\partial T_{3}}{\partial x} \Big|_{x=x_{2}},$$
(63d)

$$T_3 \bigg|_{x=x_2} = T_4 \bigg|_{x=x_2},$$
 (63e)

$$T_{3} \Big|_{x=x_{3}} = T_{4} \Big|_{x=x_{3}}, \tag{63e}$$

$$-k_{3} \frac{\partial T_{3}}{\partial x} \Big|_{x=x_{3}} = -k_{4} \frac{\partial T_{4}}{\partial x} \Big|_{x=x_{3}}. \tag{63f}$$

As equações (61a), (61b), (61c) e (61d) são resolvidas utilizando a transformada de Laplace. Esta resolução é feita de forma análoga ao apresentado na seção 4.4.1.

As soluções transformadas completas para cada camada da parede são represen-

tadas por:

$$\bar{T}_1(x,p) = A(p)e^{\sqrt{\frac{p}{\alpha_1}}x} + B(p)e^{-\sqrt{\frac{p}{\alpha_1}}x} + \frac{\bar{T}_0}{p},$$
 (64a)

$$\bar{T}_2(x,p) = C(p)e^{\sqrt{\frac{p}{\alpha_2}}x} + D(p)e^{-\sqrt{\frac{p}{\alpha_2}}x} + \frac{\bar{T}_0}{p},$$
 (64b)

$$\bar{T}_3(x,p) = E(p)e^{\sqrt{\frac{p}{\alpha_3}}x} + F(p)e^{-\sqrt{\frac{p}{\alpha_3}}x} + \frac{\bar{T}_0}{p},$$
 (64c)

$$\bar{T}_4(x,p) = G(p)e^{\sqrt{\frac{p}{\alpha_4}}x} + H(p)e^{-\sqrt{\frac{p}{\alpha_4}}x} + \frac{\bar{T}_0}{p}$$
 (64d)

Para obter os coeficientes A, B, C, D, E, F, G e H das equações (64a), (64b), (64c) e (64d), utilizam-se as condições de contorno e de continuidade transformadas dadas por:

$$|\bar{T}_1(x,p)|_{x=x_0} = T_e(p),$$
 (65a)

$$|\bar{T}_4(x,p)|_{x=x_4} = T_b(p)$$
, (65b)

$$\bar{T}_1(x,p)|_{x=x_1} = \bar{T}_2(x,p)|_{x=x_1}$$
, (65c)

$$-k_1 \frac{d\bar{T}_1(x,p)}{dx} \bigg|_{x=x_1} = -k_2 \frac{d\bar{T}_2(x,p)}{dx} \bigg|_{x=x_1},$$
 (65d)

$$\bar{T}_2(x,p)|_{x=x_2} = \bar{T}_3(x,p)|_{x=x_2},$$
 (65e)

$$-k_2 \frac{d\bar{T}_2(x,p)}{dx} \bigg|_{x=x_2} = -k_3 \frac{d\bar{T}_3(x,p)}{dx} \bigg|_{x=x_2},$$
 (65f)

$$\bar{T}_3(x,p)|_{x=x_3} = \bar{T}_4(x,p)|_{x=x_3}$$
, (65g)

$$-k_3 \frac{d\bar{T}_3(x,p)}{dx}\bigg|_{x=x_3} = -k_4 \frac{d\bar{T}_4(x,p)}{dx}\bigg|_{x=x_3}.$$
 (65h)

Uma vez que os coeficientes das equações (64a), (64b), (64c) e (64d) estão determinados, há condições de inverter a solução pela transformada inversa de Laplace assim como resolvido no item 3.2.3.

3.2.5 Problema térmico unidimensional com n camadas

3.2.5.1 Transformada de Laplace

A fim de encontrar uma solução genérica que represente uma parede composta por n materiais, nesta seção é apresentada a resolução generalizada do problema de condução de calor em meio multicompostos. Tal problema é representado pela figura 7:

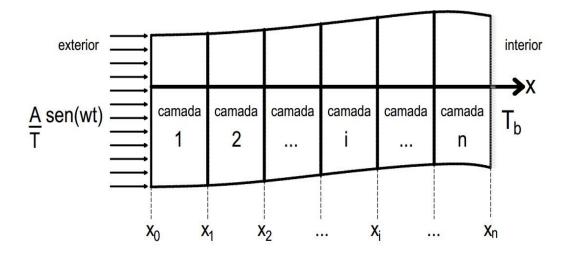


Figura 7: Placa plana composta de n camadas submetida à um fluxo de calor dependente do tempo.

A equação que descreve o problema mostrado na figura 7 é:

$$\frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha_1} \frac{\partial T_1}{\partial t}, \qquad para \qquad x_0 < x < x_1$$
 (66a)

$$\frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha_1} \frac{\partial T_1}{\partial t}, \quad para \quad x_0 < x < x_1
\frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha_2} \frac{\partial T_2}{\partial t}, \quad para \quad x_1 < x < x_2$$
(66a)

$$\frac{\partial^2 T_i}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha_i} \frac{\partial T_i}{\partial t}, \qquad para \qquad x_{\cdots} < x < x_i$$
 (66c)

$$\frac{\partial^2 T_n}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha_n} \frac{\partial T_n}{\partial t}, \qquad para \qquad x_{n-1} < x < x_n$$
 (66d)

sendo $T_1,\,T_2,\ldots,\,T_i,\,\ldots$ e T_n as temperaturas médias de cada camada da parede, $\alpha_1,$ $\alpha_2, \ldots, \alpha_i, \ldots$ e α_n as difusividades térmicas dos materiais de cada camada.

As equações (66a), (66b), (66c) e (66d) estão sujeitas às seguintes condições de contorno e inicial:

$$T_1 \bigg|_{x=x_0} = \frac{A}{T} \sin \omega(t) ,$$
 (67a)
 $T_n \bigg|_{x=x_0} = T_b ,$ (67b)

$$T_n \bigg|_{x=x_-} = T_b \,, \tag{67b}$$

$$T_1(x,0) = T_2(x,0) = \dots = T_i(x,0) = \dots = T_n(x,0) = T_0,$$
 (67c)

e as condições de continuidade (contato térmico perfeito entre as camadas):

$$T_1 \bigg|_{x=x_1} = T_2 \bigg|_{x=x_2}$$
, (68a)

$$T_1 \Big|_{x=x_1} = T_2 \Big|_{x=x_1}, \tag{68a}$$

$$-k_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} \Big|_{x=x_1} = -k_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} \Big|_{x=x_1}, \tag{68b}$$

$$T_i \bigg|_{x=x_i} = T_{(i+1)} \bigg|_{x=x_i},$$
 (68e)

$$-k_i \frac{\partial T_i}{\partial x} \bigg|_{x=x_i} = -k_{...} \frac{\partial T_{...}}{\partial x} \bigg|_{x=x_i}, \tag{68f}$$

$$T_{n-1}\Big|_{x=x_{n-1}} = T_n\Big|_{x=x_{n-1}},$$
 (68g)

$$-k_{n-1} \frac{\partial T_{n-1}}{\partial x} \bigg|_{x=x_{n-1}} = -k_n \frac{\partial T_n}{\partial x} \bigg|_{x=x_{n-1}}.$$
 (68h)

As equações (66a), (66b), (66c) e (66d) são resolvidas utilizando a transformada de Laplace. Esta resolução é feita de forma análoga ao apresentado na seção 4.4.1.

As soluções transformadas completas para cada camada da parede são representadas por:

$$\bar{T}_1(x,p) = A_1(p)e^{\sqrt{\frac{p}{\alpha_1}}x} + A_2(p)e^{-\sqrt{\frac{p}{\alpha_1}}x} + \frac{\bar{T}_0}{p},$$
(69a)

$$\bar{T}_2(x,p) = A_3(p)e^{\sqrt{\frac{p}{\alpha_2}}x} + A_4(p)e^{-\sqrt{\frac{p}{\alpha_2}}x} + \frac{\bar{T}_0}{p},$$
(69b)

$$\bar{T}_i(x,p) = A_5(p)e^{\sqrt{\frac{p}{\alpha_i}}x} + A_6(p)e^{-\sqrt{\frac{p}{\alpha_i}}x} + \frac{\bar{T}_0}{p},$$
 (69c)

$$\bar{T}_n(x,p) = A_{2n-1}(p)e^{\sqrt{\frac{p}{\alpha_n}}x} + A_{2n}(p)e^{-\sqrt{\frac{p}{\alpha_n}}x} + \frac{\bar{T}_0}{p}.$$
(69d)

Para obter os coeficientes $A_1, A_2, A_3, A_4, \ldots, A_{2i-1}, A_{2i}, \ldots, A_{2n-1}$ e A_{2n} das equações (69a), (69b), (69c) e (69d), aplica-se as condições de contorno e de continuidade transformadas.

Obtém-se dessa maneira um sistema de 2n equações envolvendo as constantes

 $A_1, A_2, A_3, A_4, \ldots, A_{2i-1}, A_{2i}, \ldots, A_{2n-1}$ e A_{2n} , resolve-se o sistema para determinar as constantes.

Uma vez que os coeficientes das equações (69a), (69b), (69c) e (69d) estão determinados, há condições de inverter a solução pela transformada inversa de Laplace assim como resolvido no item 3.2.3.

É possível observar que o após a resolução da equação de condução do calor transiente de um material composto por duas camadas, as resoluções para quatro e sucessivamente para n camadas ocorrem de forma análoga. A principal alteração que ocorre com o acréscimo de camadas é o aumento dos coeficientes a determinar, este crescimento ocorre da forma 2n, ou seja, para calcular a transferência de calor por condução em um material composto de duas camadas têm-se quatro coeficientes a determinar.

3.3 Índices Estatísticos

Para a comparação entre os dados da temperatura Sol-Ar simulados no modelo com os dados encontrados por BEYER; VILHENA (1998) foram utilizados índices estatísticos da literatura. Para a elaboração desta análise estatística, emprega-se um programa desenvolvido por Hanna em 1989 (HANNA, 1989).

As notações utilizadas para os índices o e p indicam, respectivamente, as quantidades observadas e preditas, \overline{T} é a temperatura média e σ é o desvio padrão.

Os índices estatísticos aplicados são definidos do seguinte modo:

- 1. Erro quadrático médio normalizado: $NMSE = \frac{\overline{(T_o T_p)^2}}{\overline{T_o T_p}}$ informa sobre todos os desvios entre as condições dos modelos e as distribuições observadas. É uma estatística adimensional e seu valor deve ser o menor possível para um bom modelo.
- 2. Coeficiente de correlação: $COR = \frac{\overline{(T_o \overline{T_o})(T_p \overline{T_p})}}{\sigma_o \sigma_p}$ descreve o grau de associação ou concordância entre as variáveis. Para um boa perfomance o seu valor deve ser 1.
- 3. Fração de Inclinação: $FB=\frac{\overline{T_o}-\overline{T_p}}{0.5(\overline{T_o}+\overline{T_p})}$ informa a tendência do modelo de superestimar ou subestimar as distribuições observadas. O valor ótimo é zero.

4 RESULTADOS NUMÉRICOS

O uso apropriado dos modelos matemáticos deve ser baseado no estudo das suas capacidades de representarem corretamente situações reais. A maneira mais adequada para testar a sua capacidade de representar situações reais é comparando os resultados obtidos através do modelo com resultados observados em experimentos (MOREIRA; VILHENA; CARVALHO, 2007).

Entretanto, não foram encontrados dados experimentais na literatura para comparação dos resultados obtidos pelo modelo apresentado. Desta maneira, utilizam-se dois trabalhos distintos baseados na resolução da equação de condução de calor em meios multicompostos para comparação.

Neste capítulo, apresentam-se os resultados obtidos para meios compostos por duas e quatro camadas.

4.1 Perfil de temperatura de uma placa plana composta por duas camadas

4.1.1 Aço/Cobre

Para uma análise do modelo proposto, utilizam-se as mesmas propriedades termofísicas do trabalho de OLIVEIRA (2015). O problema térmico estudado é definido por uma placa plana de duas camadas, onde cada camada é composta de um determinado material. Conforme a figura 5, L representa o comprimento da placa e b o local de mudança das camadas. Nesta aplicação, na camada 1 tem-se as propriedades termofísicas do aço AISI 1010, enquanto na camada 2 tem-se as propriedades termofísicas do cobre. A tabela 2 apresenta as propriedades de ambos os materiais.

Tabela 2: Parâmetros termofísicos dos materiais de cada camada

Características	Aço AISI 1010	Cobre
Condutividade térmica (W/mk)	64	401
Difusividade térmica (m^2/s)	$18,8 \times 10^{-6}$	117×10^{-6}

Considera-se ainda, que a placa está submetida a tais condições: fluxo de calor prescrito de $4\times 10^5 W/m^2$; fluxo nulo de calor quando x=L; contato térmico perfeito em x=b; temperatura inicial: $T_0=0^{\rm o}C$; comprimento de placa: $L=5\times 10^{-2}m$; e divisão das camadas: $b=\frac{L}{2}m$.

A solução desse problema é dada pela equação (52) e foi implementada utilizando o código computacional Fortran90. Conforme mencionado na solução da equação de condução de calor para um material composto de duas camadas, foi utilizado nesta resolução continuidade analítica. Os valores do passo h foram, $4.0 \ s$ e $8.0 \ s$, respectivamente. Apresenta-se na tabela 3, as temperaturas encontradas no sólido estudado considerando três tempos constantes t=0s, t=50s e t=100s.

Tabela 3: Temperaturas (°C) calculadas ao longo da camada do material composto Aço/Cobre.

Comprimento (m)	t = 0s	t = 50s	t = 100s
0,005	0	187,3958	343,2549
0,010	0	120,3962	238, 0624
0,015	0	94,6750	191,8123
0,020	0	80, 4274	170,3354
0,025	0	69,6321	158,9609
0,030	0	68,2177	157, 7402
0,035	0	67,1015	156, 8813
0,040	0	66,2927	156,3120
0,045	0	65,8022	155, 9870
0,050	0	65,6377	155, 8813

Na figura 8, o comportamento térmico da solução de dupla camada do material aço/cobre é apresentado:

Conforme retratado na figura 8, é possível observar que o perfil de temperatura da segunda camada tem um comportamento aparentemente constante em relação ao da primeira camada. Isso é devido a condutividade térmica do material ser muito alta, tornando-o um bom condutor e assim dissipando o calor de uma forma mais rápida.

Observa-se também que, pelo comportamento apresentado na figura 8, a temperatura começa a aumentar no local de incidência do fluxo de calor em função do tempo, esta característica é transferida as outras camadas através da condução, influenciando a alteração da temperatura ao longo da placa.

O acréscimo de temperatura ocorre de forma mais rápida nas regiões próximas à face da placa (x=0,005m) que em seu interior, quando x=0,050m, o que é fisicamente coerente, pois retrata uma certa dificuldade de dissipação do calor, causada pela difusividade térmica apresentada pelos materiais utilizados. Como o aço AISI 1010 possui menor difusividade térmica que o cobre, na primeira camada ocorre uma

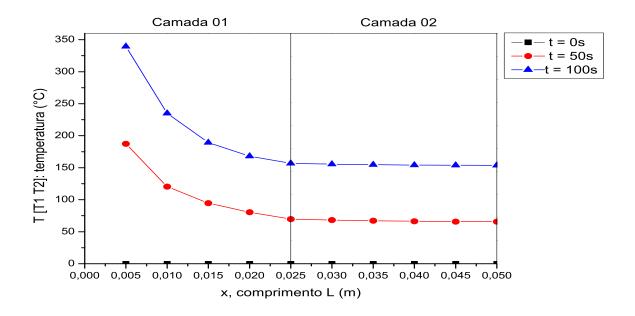


Figura 8: Perfil da temperatura ao longo da espessura da camada do material composto Aço/Cobre.

maior variação de temperatura em relação a temperatura apresentada na face externa da placa.

Após a obtenção da distribuição de temperaturas ao longo da camada, é possível obter a distribuição dos fluxos de calor em cada ponto da placa, através da Lei de Fourier. Tais fluxos calculados estão representados na figura 9:

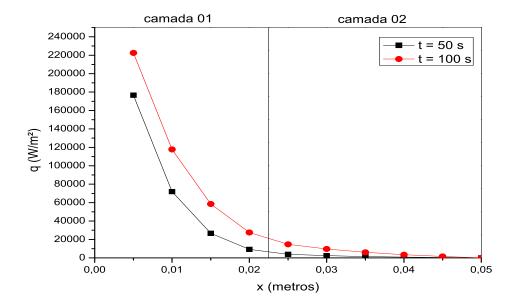


Figura 9: Fluxos de calor ao longo da espessura da camada do material composto Aço/Cobre.

O comporamento do fluxo de calor é similar ao comportamento das temperaturas calculadas, isso ocorre devido a dependência entre estes parâmetros. Uma vez que o fluxo está intimamente relacionado ao valor da temperatura.

Pode-se observar também, que na segunda camada, onde o material é mais condutivo, o fluxo sofre pouca alteração, ou seja, aproximadamente constante.

4.1.2 Concreto/Reboco

Aplica-se o modelo a um caso fictício para analisar a distribuição de temperatura para materiais com baixa condutividade térmica. Na camada 1 tem-se as propriedades termofísicas do concreto pesado, enquanto na camada 2 tem-se as propriedades termofísicas do reboco. A tabela 4 apresenta as propriedades de ambos os materiais.

Tabela 4: Parâmetros termofísicos dos materiais da parede para o caso fictício

Características	Concreto pesado	Reboco
Condutividade térmica (W/mk)	1,731	0,727
Difusividade térmica (m^2/s)	$9,187 \times 10^{-7}$	$5,43 \times 10^{-7}$

As condições de contorno e o problema utilizados neste caso fictício são os mesmos do caso anterior (aço/cobre), com exceção dos parâmetros termofísicos dos materiais, que foram substituídos pelos parâmetros termofísicos dos materiais utilizados, concreto e reboco. Os resultados são apresentados na tabela 5.

Tabela 5: Temperaturas calculadas ao longo da camada do material composto Concreto/Reboco.

X (m)	t = 0s	t = 50s	t = 100s	t = 150s	t = 200s
0,005	0	152, 1207	256,2927	349,2589	755,6241
0,010	0	69,7609	165,0017	241,8813	517,8430
0,015	0	22,5174	87,8839	158,5586	360,1439
0,020	0	6,1933	41,0536	93,7867	234,1712
0,025	0	$1,9354 \times 10^{-1}$	20,7567	57,9211	157,3221
0,030	0	$2,8483 \times 10^{-2}$	5,9365	22,2185	68,8842
0,035	0	$3,9324 \times 10^{-3}$	1,5891	7,9901	28,3402
0,040	0	$5,2228 \times 10^{-4}$	$4,0780 \times 10^{-1}$	2,7696	11, 3235
0,045	0	$6,8803 \times 10^{-4}$	$1,0654 \times 10^{-1}$	1,0042	4,8222
0,050	0	$1,7310 \times 10^{-4}$	$4,8819 \times 10^{-2}$	$5,9016 \times 10^{-1}$	3, 1672

Como é possível observar, na tabela 5, as regiões próximas a face externa da parede (x=0,00m) possuem temperaturas mais elevadas, conforme aumenta o tempo ao qual elas estão expostas ao fluxo de calor, já na região mais próxima ao interior da

edificação, ou seja, quando x=L, a temperatura se mostra muito próxima a temperatura inicial. Isso ocorre devido aos materiais utilizados para compor a parede representada, uma vez que a condutividade térmica de ambos os materiais é relativamente inferior aos materiais aplicados no caso anterior.

Pode-se afirmar então que o ambiente interno desta edificação sofre uma alteração mínima de temperatura quando a face externa está exposta ao fluxo de calor utilizado por um tempo de até 200s.

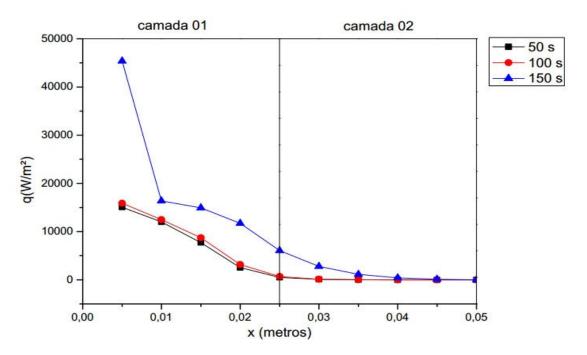


Figura 10: Perfil da temperatura ao longo da espessura da camada do material composto Concreto/Reboco.

É possível observar ainda, na figura 10 que o material da camada dois, reboco, é mais condutivo do que o material da camada um, o concreto, devido a primeira camada ter uma variação de temperatura maior em relação a segunda camada.

De maneira similar ao realizado para uma placa composta de Aço/Cobre, foram calculados os fluxos de calor ao longo da parede composta por Concreto/Reboco, apresentados na figura 11:

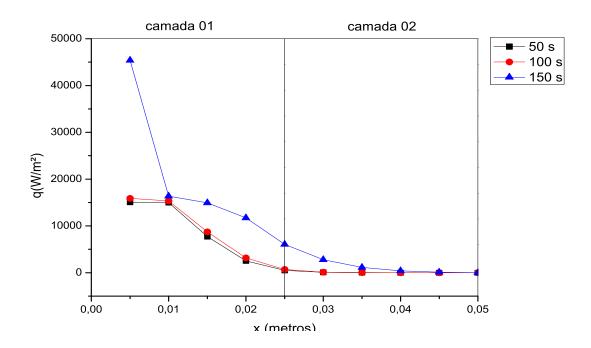


Figura 11: Fluxos de calor ao longo da espessura da camada do material composto Concreto/Reboco.

4.2 Perfil de temperatura do problema térmico unidimensional transiente com quatro camadas

Para avaliar o comportamento da solução encontrada para a condução de calor em uma parede composta por quatro camadas utilizam-se as mesmas condições de contorno e informações do problema resolvido em BEYER; VILHENA (1998) e comparam-se os resultados obtidos.

BEYER; VILHENA (1998) utilizaran, para resolver o problema de condução de calor em uma parede multicomposta o método da temperatura Sol-Ar. Este método é um cálculo transiente que tem como principal forma de realização o uso do Método da Função de Transferência, necessitando um cálculo prévio do fluxo transiente através de pulsos unitários, para encontrar-se após a Função de Transferência. O incremento temporal existe quando já se conhece a Função de Transferência, devendo ser de magnitude do pulso unitário inicial (BEYER; VILHENA, 1998).

O problema consiste em uma parede com quatro camadas, representada pela figura 12, constituída por 0,025 m de estuque, 0,10 m de concreto pesado, 0,025 m de material isolante e 0,020 m de reboco, os materiais possuem condutividade térmica e coeficiente de difusão conforme a tabela 6.

Não há resistência térmica de contato entre as camadas. A temperatura interna é mantida constante, em 24° C. A temperatura externa evolui como função horária com

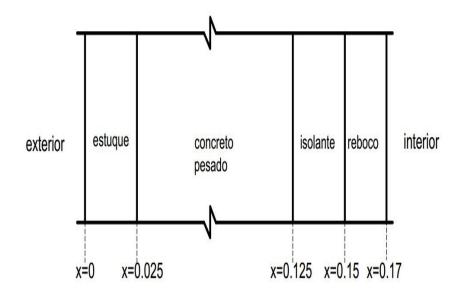


Figura 12: Estrutura da parede calculada.

Tabela 6: Parâmetros termofísicos dos materiais da parede composta por quatro camadas

Material	Condutividade térmica $(W/m.^{\circ}C)$	Difusividade Térmica (m^2/s)
Estuque	0,692	$4,434 \times 10^{-7}$
Concreto pesado	1,731	$9,187 \times 10^{-7}$
Isolante	0,043	$1,6 \times 10^{-6}$
Reboco	0,727	$5,43 \times 10^{-7}$

ciclo de um dia, segundo a Temperatura Sol-Ar retirada de BROWN; STEPHENSON (1993).

Para obter os valores da temperatura Sol-Ar, representados na tabela 7, durante o período de um dia (24 horas) foi utilizado um ajuste de curvas para a função representada pela equação (70) com o método dos mínimos quadrados.

$$q = \alpha I_t + h_o(t_o - t_s) - \xi \delta R, \tag{70}$$

onde q é o fluxo de calor (W/m^2) ; α é absortância da superfície para a radiação solar; I_t é a radiação solar total incidente na superfície (W/m^2) ; h_o é o coeficiente de transferência de calor por condução e radiação de onda longa na superfície externa (W/m^2) ; t_o é a temperatura de ar externo $(^{\circ}C)$; t_s é a temperatura superficial $(^{\circ}C)$; t_s é a diferença entre a radiação

de onda incidente na superfície do céu e entorno e a radiação emitida por um corpo negro na temperatura do ar externo (W/m^2) .

A temperatura Sol-Ar foi escolhida como uma função excitação, devido esta função ser mal-comportada, ou seja, os problemas decorrentes de seu uso, se resolvidos, permitem dizer que a grande maioria de outras excitações também serão resolvidas.

Da mesma forma que no trabalho de BEYER; VILHENA (1998), os valores da temperatura Sol-Ar repetem-se consecutivamente por um período mínimo de quatro dias, tempo necessário para o sistema entrar em regime periódico e não há ocorrência de nebulosidade atmosférica.

Tabela 7: Temperatura Sol-Ar

Tempo (h)	T_{sa} (BEYER; VILHENA (1998))	T_{sa} (calculado)
1	25, 43	27,6489
2	24, 88	23,7536
3	24, 44	22,3758
4	24, 11	23, 115
5	24,00	24,9548
6	25, 104	26,7729
7	26,382	27,8607
8	27,918	28, 2233
9	29,764	28,5303
10	31,70	29,7435
11	33,752	32, 5916
12	35,85	37, 1299
13	40,446	42,5895
14	46,682	47,5934
15	50,86	50,6571
16	52,35	50,7664
17	50,618	47,787
18	43,948	42,5313
19	31, 316	36, 4527
20	29,83	31,0954
21	28,62	27,531
22	27,52	26,0157
23	26,64	26,0065
24	25,98	26,5144

De acordo com a figura 13, a curva de aproximação utilizada descreve de forma eficiente o comportamento das temperaturas estudadas. Porém, os valores encontrados variam em até $2^{\circ}C$ quando comparados com os valores encontrados no trabalho de BEYER; VILHENA (1998), conforme mostrado na tabela 7.

Para avaliar os resultados obtidos, apresentam-se os valores dos índices es-

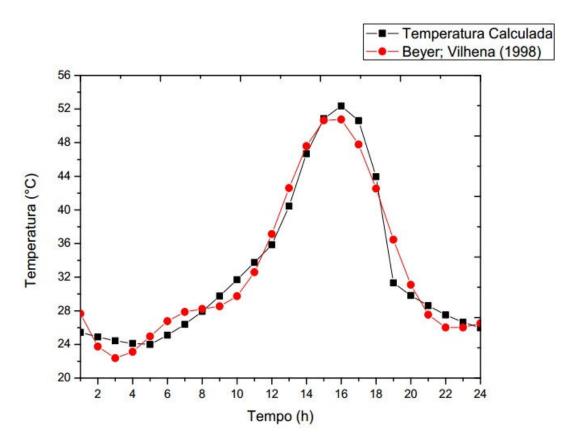


Figura 13: Comparação entre as temperaturas Sol-Ar simuladas neste trabalho e as temperaturas Sol-Ar apresentadas no trabalho de BEYER; VILHENA (1998).

tatísticos, conforme mostrados na tabela 8.

Tabela 8: Avaliação estatística da temperatura Sol-Ar

NMSE	COR	FB
$3,18675 \times 10^{-8}$	0,940225	-0,0000516353

É importante frisar que os resultados encontrados podem ser considerados satisfatórios, levando em consideração que os índices estatísticos apresentados estão perto de seus valores ideais.

Cabe ressaltar, que para o cálculo desses valores, HANNA (1989) orienta que sejam comparados os valores observados em experimentos com os valores calculados através do modelo. Por falta de experimentos que descrevam este modelo, neste trabalho, foram utilizados como dados observados, os valores da temperatura Sol-Ar calculados no trabalho de BEYER; VILHENA (1998).

A solução desse problema foi implementada utilizando o código computacional Fortran90 e é apresentada na figura 14. O comportamento térmico da distribuição de temperatura na parede externa composta por quatro camadas e sujeita à uma condição de contorno dependente do tempo foi plotada considerando uma variação

de tempo de 11 horas. Este intervalo de tempo foi escolhido por representar a temperatura Sol-Ar de forma crescente, ou seja, é o período em que a parede esta sujeita à um contínuo aquecimento solar.

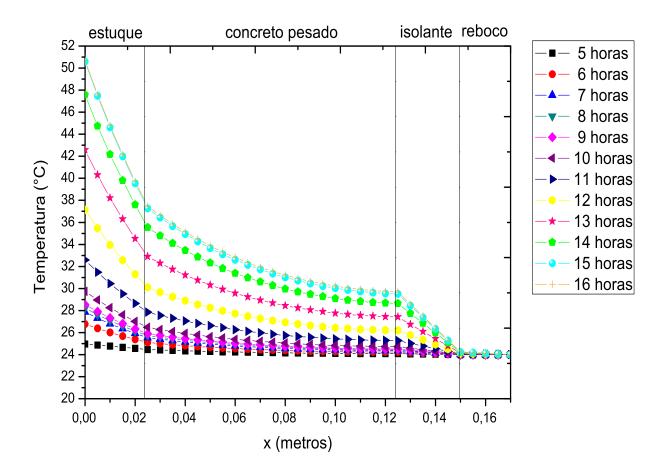


Figura 14: Perfil da distribuição de temperatura ao longo da parede estudada.

Na figura 14 é possível observar o comportamento da parede composta por quatro camadas quando submetida a uma temperatura. Com o passar do tempo, o fluxo de calor ao qual a parede esta submetida aumenta, de acordo com a temperatura Sol-Ar calculada, por consequência a temperatura da camada mais externa da parede (x=0,00m) também aumenta.

Percebe-se nitidamente a diferença de condutividade e difusividade de cada material componente da parede. O reboco se mostra bom condutor, enquanto que o estuque e o isolante são maus condutores. O modelo proposto representa a distribuição de temperaturas em uma parede multicomposta.

Quanto mais alta a temperatura Sol-Ar maior é o declínio da temperatura no material estuque, isso ocorre devido a baixa difusividade térmica deste material.

Para uma melhor análise do comportamento da parede quando submetida a temperatura calculada, foram analisados também os fluxos de calor ao qual a parede é submetida. Através da figura 15 é possível verificar que quanto maior o fluxo calculado, maior a temperatura encontrada naquele ponto da parede.

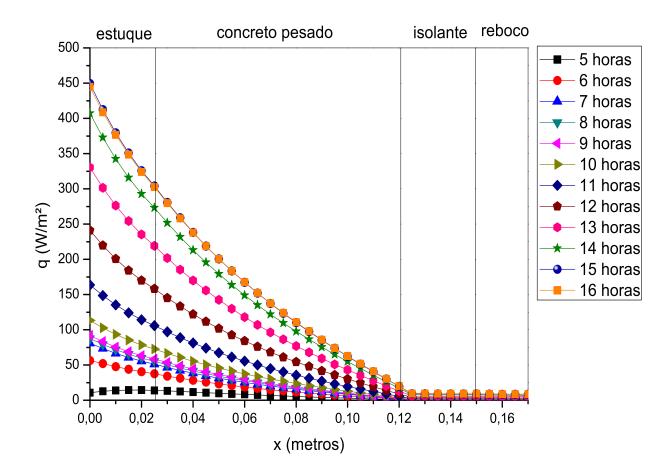


Figura 15: Fluxos de calor simulados para uma parede com quatro camadas.

É possível verificar então que o modelo proposto representa a distribuição de temperaturas em uma parede multicomposta e com apenas alguns ajustes, representa também o seu fluxo de calor.

5 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS

O presente trabalho foi baseado em uma abordagem semi-analítica para determinar a condução de temperatura em paredes multicompostas. A solução foi obtida através do método da transformada de Laplace e permite flexibilidade em relação a possibilidade de calcular qualquer tipo de parede ou placa plana. Para um melhor entendimento foram apresentadas soluções para a equação de conducão de calor em uma parede simples, composta por duas, quatro e n camadas, respectivamente.

Como foco do estudo, a formulação de distribuição unidimensional de temperatura para paredes multicompostas mostrou-se válida para descrever o gradiente de temperaturas em um meio com duas camadas. Embora a avaliação tenha sido feita considerando uma placa de usinagem com revestimento, possuindo espessuras muito pequenas, a mesma equação serve para representar o que ocorre em uma parede, alterando apenas os parâmetros termofísicos dos materiais a serem utilizados.

A aplicação da continuação analítica foi de grande importância para a garantia da convergência dos resultados obtidos, essa necessidade ocorreu devido ao fato dos valores de espessura, condutividade e difusividade térmica serem discrepantes entre si, com alguns valores muito pequenos e outros muito grandes, originando uma matriz mal condicionada.

A solução obtida para a análise térmica fornece o comportamento das temperaturas em qualquer ponto desejado da parede e consequentemente da sua estrutura. Além disso, pode-se observar a variação de temperatura conforme o tempo em que a parede é exposta a fonte de calor e através dessas temperaturas é possível analisar o comportamento mecânico e o conforto térmico da estrutura.

Para trabalhos futuros, pretende-se buscar outras técnicas como funções de Green e teorema de Duhamel utilizando multiplicadores de Lagrange para levar as informações das condições de interface nas regiões, além da adição de mais variáveis para tornar o modelo mais realista possível.

REFERÊNCIAS

ABNT-NBR-15220. Desempenho térmico de edificações. **Associação Brasileira de Normas Técnicas**, [S.I.], p.66, 2003.

ABNT-NBR-15575. Edificações Habitacionais. **Associação Brasileira de Normas Técnicas**, [S.I.], p.63, 2013.

ABNT-NBR-16401. Instalações de ar-condicionado. **Associação Brasileira de Normas Técnicas**, [S.I.], p.66, 2008.

ACKERMAN, M.; DALE, J. Measurement and prediction of insulated and aninsulated basement wall heat losses in a heating climate. **ASHRAE Transactions**, [S.I.], v.93, part 1, 1987.

ASEKA, I. B. Solução da Equação de Condução de Calor Bidimensional, em Meios Multicompostos, pelos Métodos Nodal, com Parâmetros Concentrados, e a Técnica da Transformada de Laplace. 2003. Tese de Doutorado — Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

BARBOSA, A. Estudo Numérico Computacional e Analítico do Choque Térmico em Fachadas de Edificações. 2013. Dissertação de Mestrado — Faculdade de Tecnologia da Universidade de Brasília, Brasília, DF.

BASTIDE, A.; LAURET, P.; GARDE, F.; BOYER, H. Building energy efficiency and thermal comfort in tropical climates Presentation of a numerical approach for predicting the percentage of well—ventilated living spaces in buildings using natural ventilation. **Energy and Buildings**, [S.I.], v.v. 38, 2006.

BAUER, R. **Materiais de construção, 5 ed.** 5.ed. [S.I.]: LTC — Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., Rio de Janeiro, RJ, 1994. 935p.

BEHERA, P. Analysis of Transient Heat Conduction in Different Geometries. 2009. Dissertaçãoo de Mestrado — National Institute of Technology, Rourkela, Orissa, India.

BELGHAZI, E.; BASTTISTI, L.; TRIVELLATO, F. Numerical processing of thin–film thermoter data for determining transient heat fluxes. **International Journal of Heat and Mass Transfer**, [S.I.], v.36, p. 3645–3662, 2012.

BEYER, P.; VILHENA, M. T. Condução de Calor Não-Estacionária em Paredes Externas Multi-Compostas. 1998. Tese de Doutorado — PROMEC - Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

BLACKWELL, B. Temperature profile in semi—infinite body with exponential source and convective boudary condition. **ASME Journal of Heat Transfer**, [S.I.], v.112, 1990.

BROWN, W.; STEPHENSON, D. Guarded hot box measurements of the dynamic heat transmission characteristics of seven wall specimens. **ASHRAE Transactions**, [S.I.], v.99, part 1, 1993.

BURCH, D.; LICITRA, B.; ZAR, R. A comparison of two test methods for determining transfer function coefficients for a wall using a calibrated hot box. **ASME Journal of Heat Transfer**, [S.I.], v.112, 1990.

BURCH, D.; ZAR, R.; FAISON, T. A procedure for measuring the dynamic thermal performance of wall specimens using a calibrated hot box. **ASHRAE Transactions**, [S.I.], v.93, part 2, 1987.

BURCH, D.; ZAR, R.; LICITRA, B. A method for characterizing the dynamic performance of wall specimes using a calibrated hot box. **ASHRAE Transactions**, [S.I.], v.94, part 1, 1988.

BUROW, P.; WEIGAND, B. One-dimensional heat conduction in a semi—infinite solid with the surface temperature a harmonic function of time: a simple approximate solution for the transiente behavior. **ASME Journal of Heat Transfer**, [S.I.], v.112, 1990.

CABRAL, E. T.; PONTES, F. A.; MIYAGAWA, E. N.; MACEDO, E. N.; QUARESMA, J. N. N. Soluções da equação da condução do calor bidimensional com condutividade térmica dependente da temperatura e geração de calor. **Congresso Brasileiro de Engenharia Química**, [S.I.], v.20, p.1–10, 2014.

CHANG, K.; PYNE, U. Analytical solution for heat conduction in a two-material-layer slab with linearly temperature dependent conductivity. **ASME Journal of Heat Transfer**, [S.I.], v.113, 1991.

CHEN, H.-T.; CHANG, S.-M. Application of the hybrid method to inverse heat conduction problems. **Int. J. Heat Mass Transfer**, [S.I.], v.33, n.4, 1990.

CHEN, H.-T.; LIN, J.-Y. Hybrid Laplace trnsform technique for non—linear transient thermal problems. **Int. J. Heat Mass Transfer**, [S.I.], v.34, n.4/5, 1991.

CHEN, H.-T.; LIN, J.-Y. Hybrid Laplace trnsform technique for Stefan problems with radiation—convection boundary condition. **Int. J. Heat Mass Transfer**, [S.I.], v.35, n.12, 1992.

CHEN, H.-T.; LIN, J.-Y. Numerical analysis for hyperbolic heat conduction. **Int. J. Heat Mass Transfer**, [S.I.], v.36, n.11, 1993.

ASHRAE/DOE/BTECC/CIBSE CONFERENCE, P. of the (Ed.). **Thermal modeling of a basement with insulated and uninsulated floor**. Orlando: Thermal performance of the exterior envelopes of buildings IV. Orlando, 1989. v.IV.

CHOUDHURY, S.; JALURIA, Y. Analytical solution for the transient temperature distribution in a moving rod or plate of finite length with surface heat transfer. **Int. J. Heat Mass Transfer**, [S.I.], v.37, n.8, 1994.

DEAR, R. D.; BRAGER, G. Thermal comfort in naturally ventilated buildings: revisions to ASHRAE Standard 55. **Energy and Buildings**, [S.I.], v.34, 2002.

DU, F.; LOVELL, M. R.; WU, T. Boundary elemnet method analysis of temperature fields in coated cutting tools. **Solids and Structures**, [S.I.], v.38, p. 4557–4570, 2000.

FANGER, P.; OSTERGARD, J.; OLESEN, S.; LUNDADSEN, T. The Effect on Man's Comfort of a Uniform Air Flow Differente Directions. **ASHRAE Transactions**, [S.I.], v.80, part. 2, 1974.

FERNANDES, A. **Funções de Green**: Soluções Analíticas Aplicadas a Problemas Inversos em Condução de Calor. 2009. Dissertação de Mestrado — Universidade Federal de Uberlândia.

FIORITO, A. Manual de Argamassas e Revestimentos — Estudos e Procedimentos de Execução. [S.l.]: Editora Pini, São Paulo, SP, 1994. 223p.

FROTA, A.; SCHIFFER, S. **Manual de Conforto Térmico**. [S.I.]: Studio Nobel, São Paulo, SP, 2003. 243p.

GRATIA, E.; DE HERDE, A. Is day natural ventilation still possible in office buildings. **Buildings and Environment**, [S.I.], v.v. 39, 2004.

HANNA, S. R. Confidence limit for air quality models as estimated by boodstrap and jacknife resampling methods. **Atmos. Environ.**, [S.I.], v.23, p.1385–1395, 1989.

HEATING, R. American Society of; ENGINEERS, A.-C. **ASHRAE**: Fundamentals Handbook. [S.I.]: American Society of Heating, Refrigerating and Air- Conditioning Engineers - Atlanta, 1997.

HEYDARIAN, M.; MULLINEAU, N. Solution of Parabolic Partial Differential Equations. **Appl. Math. Modelling**, [S.I.], v.5, p.448–449, 1981.

HICKMANN, T.; GRAMANI, L.; KAVISKI, E.; GARCIA, E. Solução Analítica e Numérica da Equação da Condução de Calor Aplicada a Barragem de Concreto. **Seminário Nacional de Grandes Barragens**, [S.I.], v.30, p.1–18, 2015.

HSU, H. **Análise de Fourier**. [S.I.]: Livros Técnicos e Científicos Ltda., Rio de Janeiro, RJ, 1970.

HUMPHREYS, M.; NICOL, F. The validity of ISO-PMV for predicting comfort votes in every—day thermal environments. **Energy and Buildings**, [S.I.], v.34, 2002.

ISO-7730, I. S. Ergonomics of the thermal environment - Analytical determination and interpretation of thermal comfort using calculation of the PMV and PPD indices and local thermal comfort criteria.

KAYHANI, M.; NOROUZI, M.; DELOUEI, A. A general analytical solution for heat conduction in cylindrical multilayer composite laminates. **Elsevier**, [S.I.], v.52, p 73–82, 2011.

KOLEV, S.; LINDEN, W. Van der. Application of Laplace transforms for the solution of transient mass and heat transfer problems in flow systems. **Int. J. Heat Mass Transfer**, [S.I.], v.36, n.1, 1993.

KRARTI, M.; CLARIDGE, D.; KREIDER, J. A foundation heat transfer algorithm for detailed building energy programs. **ASHRAE Transactions**, [S.I.], v.100, 1994.

KU, J.; CHAN, S. A generalized Laplace transform technique for phase—change problems. **ASME Journal of Heat Transfer**, [S.I.], v.99, part 1, 1990.

MAESTRE, I.; CUBILLAS, P.; PÉREZ-LOMBARD, L. Transient heat conduction in multi-layer walls: An efficient strategy for laplace's method. **Energy and Buildings**, [S.I.], v.42, p. 541-546, 2010.

MITALAS, G. Calculation of Transient Heat Flow through Walls and Roofs. [S.I.]: ASHRAE Transactions, 1968. v.74, Part 2.

MOREIRA, D.; VILHENA, M.; CARVALHO, C. Tritium dispersion simulation in the atmosphere from ANGRA I Nuclear Power Plant. **International Journal of Nuclear Energy and Tecnology**, [S.I.], v.3, p. 118–130, 2007.

OLIVEIRA, G. **Solução analítica multicamada em condução de calor** : Aplicação em ferramentas revestidas. 2015. Dissertação de Mestrado — Universidade Federal de Uberlândia, Uberlandia — MG.

ÖZISIK, M. **Heat Conduction**. [S.I.]: Wiley-Interscience publication, Nova York, NY, 1993.

PETERSEN, C. Z. Solução Analítica das Equações da Cinética Pontual e Espacial da Teoria de Difusão de Nêutrons pelas Técnicas da Gitt e Decomposição. 2011. Tese de Doutorado — PROMEC - Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

RAMADAN, K. Semi-analytical solutions for the duas phase lag heat conduction in multilayered media. **Elsevier**, [S.I.], v.48, p. 14–25, 2008.

RIPPER, E. **Manual prático de materiais de construção**. [S.I.]: Pini, São Paulo, SP, 1995. 235p.

ROSCOE, T. M. **Patologias em Revestimento Cerâmico de Fachada**. 2008. Monografia — Universidade Federal de Minas Gerais, Minas Gerais.

SADAT, H. A Second Order Model for Transient Heat Conduction in a Slab with Convective Boundary Conditions. **Applied Thermal Engineering**, [S.I.], v.26, pp 962–965, 2006.

SARDIÑA, I.; HENDERSON, L.; NETO, A. Solução da Equação de Condução de Calor por Decomposição de Domínio. **Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica**, [S.I.], v.15, 1999.

SEEM, J.; KLEIN, S.; BECKMAN, W.; MITCHELL, J. Model reduction of transfer functions using a dominant root method. **ASME Journal of Heat Transfer**, [S.I.], v.112, 1990.

SILVA, S. Solução Numérica da Equação de Difusão de Calor em Geometrias Tridimensionais. 2004. Dissertação de Mestrado — Universidade Federal de Pernambuco.

SINGH, S.; JAIN, P.; RIZWAN-UDDIN. Analytical solution to transient heat conductions in polar coordinates with multiple layers in radical direction. **Elsevier**, [S.I.], v.47, p. 261–273, 2007.

SODRÉ, U. **Modelos Matemáticos**. [S.I.]: Notas de aulas, Departamento de Matemática da UEL, Londrina/PR, 2007. 27p.

STROUD, A.; SECREST, D. **Gayssian Quadrature Formulas**. [S.I.]: Prentice Hall, New Jersey, 1966.

TESTING, A. S. for; MATERIALS. Standard recommended practice for developing short—term accelerated test for prediction of the service life of building and materials. [S.I.]: ASTM - Philadelphia, 1996.

TRAMONTINI, R. Modelagem Matemática da Transferência de Calor em Pavimentos Rígidos e Flexíveis. 2007. Dissertação de Mestrado — Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul, UNIJUÍ, Ijuí — RS.

TSAI, Y.; CRANE, R. An analytical solution of a one-dimensional thermal contact conductance problem with one heal flux and one insulated boundary condition. **ASME Journal of Heat Transfer**, [S.I.], v.114, 1992.

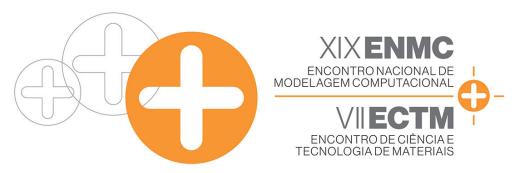
XIN, R.; TAO, W. Analytical solution for transient heat conduction in two semi-infinite bodies in contact. **ASME Journal of Heat Transfer**, [S.I.], v.116, 1994.

ZEDAN, M.; MUJAHID, A. Laplace transform solutions for heat transfer in composite walls with periodic boundary conditions. **ASME Journal of Heat Transfer**, [S.I.], v.115, 1993.

Anexos

ANEXO A - ANÁLISE DA DISTRIBUIÇÃO DE TEMPERA-TURA NUMA PAREDE MULTICOMPOSTA

Artigo apresentado e publicado nos anais do XIX Encontro Nacional de Modelagem Computacional (ENMC 2016) que se realizou na cidade de João Pessoa na Paraíba no período de 19 a 21 de outubro de 2016.



19 a 21 de Outubro de 2016 Universidade Federal da Paraíba – João Pessoa - PA

ANÁLISE DA DISTRIBUIÇÃO DE TEMPERATURA NUMA PAREDE MULTICOMPOSTA

Juliana Ávila Contreira¹ - julianacontreira@hotmail.com Guilherme Jahnecke Weymar² - guicefetrs@gmail.com Daniela Buske³ - danielabuske@gmail.com Régis Sperotto Quadros⁴ - quadros99@gmail.com

- ¹Universidade Federal de Pelotas, PPG em Modelagem Matemática Pelotas, RS, Brasil
- ²Universidade Federal de Pelotas, Centro de Engenharias Pelotas, RS, Brasil

Abstract. O comportamento dos revestimentos aplicados em fachadas quando submetidos as intempéries refletem diretamente no comportamento térmico dos ambientes internos da edificação, interferindo em aspectos importantes como conforto térmico dos usuários e sistemas de condicionamento de ar. Cada vez mais percebe-se que um projeto de edificações não pode ser resumido em atender às necessidades de segurança, estética e comodidade dos usuários, é preciso também, a criação de um meio ambiente favorável, além da necessidade de um estudo voltado as principais causas de patologias nos sistemas construtivos. O ideal para a confecção de um projeto é obedecer as condições climáticas de cada região, propiciando aos usuários conforto térmico aliado a menores gastos com sistemas de condicionamento de ar. Neste trabalho, desenvolve-se uma metodologia semi-analítica com a finalidade de calcular o fluxo de calor transiente em paredes de edificações com duas camadas. O método baseia-se na aplicação da transformada de Laplace com inversão por Quadratura Gaussiana. A formulação de distribuição unidimensional de temperatura para paredes multicompostas mostrou-se válida para descrever o gradiente de temperaturas em um meio com duas camadas, possibilitando a análise da temperatura em qualquer ponto da parede.

Keywords: Parede multicomposta, condução de calor, conforto térmico, modelo semi-analítico

1. INTRODUÇÃO

A fachada de uma obra, independentemente de ser ela residencial ou comercial é um dos elementos construtivos mais importantes para a edificação, além de ser uma espécie de capa protetora da edificação, a qual recebe todos os tipos de intempéries. São aplicados revestimentos nas fachadas com a finalidade de regularizar a superfície, proteger, aumentar a resistência das paredes e proporcionar estética e acabamento.

³⁻⁴Universidade Federal de Pelotas, PPG em Modelagem Matemática - Pelotas, RS, Brasil

Entende-se por revestimentos todos os procedimentos utilizados na aplicação de materiais de proteção e de acabamento sobre superfícies horizontais e verticais de uma obra de engenharia, Fiorito (1994). Os revestimentos são formados por camadas de materiais diferentes sobrepostas umas às outras, devido a isso eles devem ser tratados como tais, sendo necessária a análise das camadas uma a uma respeitando suas propriedades físicas e mecânicas.

Os revestimentos utilizados para proteger as alvenarias externas são responsáveis também pela transmissão da temperatura externa ao ambiente interno da edificação, impactando diretamente no conforto térmico do ambiente.

Segundo Dear; Brager (2002), conforto térmico é definido como a condição mental que expressa satisfação com o ambiente térmico que envolve a pessoa. A insatisfação com o ambiente térmico pode ser causada pela sensação de desconforto por calor ou frio quando o balanço térmico não é estável, ou seja, quando há diferenças entre o calor produzido pelo corpo e o calor perdido para o ambiente. A performance humana, como atividades intelectuais, manuais e perceptivas, geralmente apresentam um melhor rendimento quando realizadas em um ambiente que propicie um conforto térmico.

A proposta deste trabalho, é a obtenção de soluções com aproximações semi-analíticas de um problema térmico transiente em condução de calor num meio multicomposto.

2. DESCRIÇÃO E SOLUÇÃO DO PROBLEMA

A equação de condução do calor é dada por uma equação diferencial parcial (EDP) e será resolvida pela técnica da transformada de Laplace, onde a inversão será realizada através do método da Quadratura Gaussiana. Através desta aplicação o principal objetivo é calcular o fluxo de calor que entra no ambiente condicionado, pois as envoltórias das edificações estão normalmente em processo transiente de transferência de calor, seja em resfriamento ou aquecimento. O desempenho térmico das paredes externas, tem participação importante no comportamento térmico dos seus ambientes internos, influenciando aspectos como conforto térmico, dimensionamento dos sistemas de climatização e consumo de energia.

Neste trabalho pretende-se contribuir com uma avaliação mais precisa da troca de calor não-estacionário em paredes multicamadas externas de edificações, para esse fim o trabalho trata-se de uma técnica semi-analítica para obter a distribuição de temperaturas. Com a solução final é possível analisar a movimentação de cargas térmicas dentro da parede. A partir disso torna-se mais fácil a obtenção do fluxo de calor que entra em um ambiente condicionado, possibilitando assim o melhor dimensionamento da espessura e determinação do material de cada componente de uma parede multicomposta, além de proporcionar um uso adequado de aquecimento ou refrigeração nas construções.

A análise térmica consiste em determinar a distribuição unidimensional de temperatura no interior da parede estudada quando submetida a um carregamento térmico, este dimensionamento se dará através da técnica da transformada de Laplace. Para isso é necessário determinar o valor da temperatura em cada elemento infinitesimal da parede.

Seja um elemento multicomposto, conforme representado na Figura 1, a parede é composta por dois meios, cada um representando um elemento construtivo, como chapisco e tijolo. O problema tem no lado direito uma temperatura, mantida constante, para que represente um ambiente submetido a um condicionamento de ar. No lado esquerdo existe um fluxo de calor q(t), e um coeficiente de condução conhecido. A delimitação das camadas se dá em x=b, onde admite-se haver contato térmico perfeito, considerando que as camadas são compostas

por materiais diferentes.

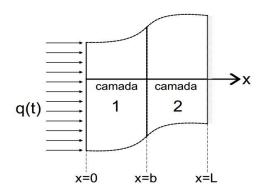


Figure 1- Sólido estudado: placa plana composta de duas camadas

Tal problema é descrito matematicamente através das equações de difusão do calor:

$$\frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha_1} \frac{\partial T_1}{\partial t}, \qquad para \qquad 0 < x < b \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha_2} \frac{\partial T_2}{\partial t}, \qquad para \qquad b < x < L \tag{1b}$$

onde T_1 e T_2 são as temperatuas médias nas camadas 1 e 2, respectivamente, α_1 e α_2 são as difusividade térmicas dos materiais de cada camada. Para o cálculo da difusividade utiliza-se $\alpha = k/\rho s$, sendo k a condutividade térmica $(J/ms^{\rm o}C)$, ρ a densidade de massa (kg/m^3) , s a capacidade térmica específica $(J/ms^{\rm o}C)$ e L é o comprimento da parede (m).

As Equações (1) e (1b) estão sujeitas às seguintes condições de contorno e inicial:

$$-k_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} \bigg|_{x=0} = q(t) \tag{2}$$

$$-k_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} \bigg|_{x=L} = 0 \tag{2 a}$$

$$T_1(x,0) = T_2(x,0) = T_0$$
 (2 b)

e as condições de continuidade (contato térmico perfeito entre as camadas):

$$T_1 \bigg|_{x=b} = T_2 \bigg|_{x=b} \tag{3}$$

$$-k_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} \bigg|_{x=b} = -k_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} \bigg|_{x=b}$$
 (3 a)

O problema acima descrito bem como a aplicação da transformada de Laplace a seguir podem ser encontrados nos textos básicos de transferência de calor Özisik (1993). As Equações (1) e (1b) são resolvidas utilizando a transformada de Laplace. Aplica-se inicialmente a transformada de Laplace nas Equações (1) e (1b), obtendo as seguintes equações:

$$\frac{d^2\bar{T}_1(x,p)}{dx^2} = \frac{1}{\alpha_1}(p\bar{T}_1(x,p) - T_0) \tag{4}$$

$$\frac{d^2\bar{T}_2(x,p)}{dx^2} = \frac{1}{\alpha_2} (p\bar{T}_2(x,p) - T_0)$$
 (4 a)

A solução da Equação (4), consiste na separação de duas soluções: solução complementar e solução particular. A solução complementar é dada pela Equação (5 a):

$$\frac{d^2\bar{T}_1(x,p)}{dx^2} - \frac{p\bar{T}_1(x,p)}{\alpha_1} = 0 \tag{5}$$

$$\bar{T}_{c1}(x,p) = A(p)e^{\sqrt{\frac{p}{\alpha_1}}x} + B(p)e^{-\sqrt{\frac{p}{\alpha_1}}x}$$
 (5 a)

A solução particular é obtida resolvendo a equação a seguir:

$$\frac{d^2\bar{T}_1(x,p)}{dx^2} = 0 ag{6}$$

Obtém-se como solução da Equação (5), a seguinte equação:

$$\bar{T}_{p1}(x,p) = \frac{T_0}{p}$$
 (6 a)

A solução transformada completa para a primeira camada da parede é representada pela soma da solução complementar e particular, mostrada a seguir:

$$\bar{T}_1(x,p) = A(p)e^{\sqrt{\frac{p}{\alpha_1}}x} + B(p)e^{-\sqrt{\frac{p}{\alpha_1}}x} + \frac{\bar{T}_0}{p}$$

$$\tag{7}$$

O problema (4 a) é resolvido de forma análoga a Equação (4) , portando a solução encontrada é:

$$\bar{T}_2(x,p) = C(p)e^{\sqrt{\frac{p}{\alpha_2}}x} + D(p)e^{-\sqrt{\frac{p}{\alpha_2}}x} + \frac{\bar{T}_0}{p}$$
 (8)

Para obter os coeficientes A , B, C e D das Equações (7) e (8) , aplica-se as condições de contorno e de continuidade transformadas.

$$-k_1 \frac{\partial \bar{T}_1(x,p)}{\partial x} \bigg|_{x=0} = Q(p) \tag{9}$$

$$-k_2 \frac{\partial \bar{T}_2(x,p)}{\partial x} \bigg|_{x=L} = 0 \tag{9 a}$$

$$|\bar{T}_1(x,p)|_{x=b} = |\bar{T}_2(x,p)|_{x=b}$$
 (10)

$$-k_1 \frac{\partial \bar{T}_1(x,p)}{\partial x} \bigg|_{x=b} = -k_2 \frac{\partial \bar{T}_2(x,p)}{\partial x} \bigg|_{x=b}$$
 (10 a)

onde $\bar{T}_1(x,p)=\mathcal{L}\{T_1(x,t);t\to p\}$ e $\bar{T}_2(x,p)=\mathcal{L}\{T_1(x,t);t\to p\}$, sendo \mathcal{L} o operador da transformada de Laplace.

Quando x = 0:

$$A(p)\sqrt{\frac{p}{\alpha_1}} - B(p)\sqrt{\frac{p}{\alpha_1}} = \frac{-Q_p}{k_1}$$
(11)

Utilizando a segunda condição de contorno (9 a), obtém-se:

$$-k_2 C(p) \sqrt{\frac{p}{\alpha_2}} e^{\sqrt{\frac{p}{\alpha_2}}L} + k_2 D(p) \sqrt{\frac{p}{\alpha_2}} e^{-\sqrt{\frac{p}{\alpha_2}}L} = 0$$

$$(12)$$

Quando x = b:

$$-k_1 A(p) \sqrt{\frac{p}{\alpha_1}} e^{\sqrt{\frac{p}{\alpha_1}}b} + k_1 B(p) \sqrt{\frac{p}{\alpha_1}} e^{-\sqrt{\frac{p}{\alpha_1}}b} = -k_2 C(p) \sqrt{\frac{p}{\alpha_2}} e^{\sqrt{\frac{p}{\alpha_2}}b} + k_2 D(p) \sqrt{\frac{p}{\alpha_2}} e^{-\sqrt{\frac{p}{\alpha_2}}b}$$

$$(13)$$

Por fim, aplicando a segunda condição de continuidade (10 a), tem-se:

$$A(p)e^{\sqrt{\frac{p}{\alpha_1}}b} + B(p)e^{-\sqrt{\frac{p}{\alpha_1}}b} = C(p)e^{\sqrt{\frac{p}{\alpha_2}}b} + D(p)e^{-\sqrt{\frac{p}{\alpha_2}}b}$$

$$\tag{14}$$

As Equações (11), (12), (13) e (14) resultam em um sistema de equações:

$$\begin{cases}
uA(p) - uB(p) = \frac{-Q(p)}{k_1} \\
-k_1 u e^{ub} A(p) - k_1 u e^{-ub} B(p) + k_2 v e^{vb} C(p) - k_2 v e^{-vb} D(p) = 0 \\
-k_2 v e^{vL} C(p) + k_2 v e^{-vL} D(p) = 0 \\
e^{ub} A(p) + e^{-ub} B(p) - e^{vb} C(p) - e^{-vb} D(p) = 0
\end{cases}$$
(15)

onde
$$u=\sqrt{\frac{p}{\alpha_1}}$$
 e $v=\sqrt{\frac{p}{\alpha_2}}$. A solução obtida resolvendo o sistema é:
$$A(p)=Q(p)(ue^{2vb}k_1+ue^{2vL}k_1+ve^{2vb}k_2-ve^{2vL}k_2)/(uk_1\times (-ue^{2vb}k_1+ue^{2ub+2vb}k_1-ue^{2vL}k_1+ue^{2ub+2vL}k_1-ve^{2vb}k_2+ve^{2ub+2vL}k_1+ve^{2ub+2vL}k_2))$$

$$B(p) = (e^{2ub}Q(p)(ue^{2vb}k_1 + ue^{2vL}k_1 - ve^{2vb}k_2 + ve^{2vL}k_2))/(uk_2 \times (-ue^{2vb}k_1 + ue^{2ub+2vb}k_1 - ue^{2vL}k_1 + ue^{2ub+2vL}k_1 + ue^{2ub+2vL}k_1 + ue^{2vb}k_2 - ve^{2ub+2vb}k_2 + ve^{2vL}k_2 + ve^{2ub+2vL}k_2))$$
(16)

$$C(p) = \frac{(2Q(p)exp^{ub+vb})}{(-ue^{2vb}k_1 + ue^{2ub+2vb}k_1 - ue^{2vL}k_1 + ue^{2ub+2vL}k_1 - ve^{2vb}k_2 - ve^{2ub+2vb}k_2 + ve^{2vL}k_2 + ve^{2ub+2vL}k_2)}$$

$$D(p) = (2Q(p)e^{ub+vb+2vL})/(-ue^{2vb}k_1 + ue^{2ub+2vb}k_1 - ue^{2vL}k_1 + ue^{2ub+2vL}k_1 - ve^{2vb}k_2 - ve^{2ub+2vb}k_2 + ve^{2vL}k_2 + ve^{2ub+2vL}k_2)$$

Uma vez que os coeficientes das Equações (7) e (8) estão determinados, há condições de inverter a solução pela transformada inversa de Laplace. Esse procedimento resulta:

$$T_i(x,t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{p=\gamma-j\infty}^{\gamma+j\infty} e^{pt} \bar{T}_i(x,p) dp$$
 (17)

Devido à impossibilidade de determinar as singularidades do integrando que aparece no lado direito da equação acima, não se pode aplicar o Teorema dos Resíduos para obter o resultado analítico da integral. Assim, na sequência será apresentada uma solução aproximada da integral presente na Equação (17) usando inversão numérica. A inversão numérica é feita utilizando o método da Quadratura Gaussiana.

2.1 QUADRATURA GAUSSIANA

A Quadratura Gaussiana é um método de integração numérica, o que consiste na substituição de uma integral por uma soma ponderada. Utiliza polinômios ortogonais para a proximação das funções a serem integradas, como estes polinômios efetivamente aproximam as funções, é possível a utilização de esquemas de integração numérica baseadas em polinômios ortogonais. Segundo Beyer; Vilhena (1998), a derivação das fórmulas de quadratura, em termos gerais, inclui a normalização do intervalo de integração, a amostragem da função a ser aproximada nas raízes desigualmente espaçadas do polinômio ortogonal e a geração do polinômio de interpolação.

Para obter a inversão da transformada de Laplace, (7) e (8), para o domínio tempo, é utilizada a Equação (17).

Fazendo $pt = p_k$ na Equação (17) para excluir o parâmetro t no termo exponencial, que é a função peso e fazendo a mudança da variável $p = \frac{p_k}{t}$, obtém-se:

$$T_i(x,t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma'-i\infty}^{\gamma'+j\infty} e^p \frac{\bar{T}_i(x,\frac{p}{t})}{t} dp$$
(18)

onde, $\gamma' = \frac{c}{t}$.

Heydarian; Mullineau (1981) afirmam que a fórmula de Quadratura Gaussiana adequada é:

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + j\infty} e^p \frac{F(p)}{p} dp = \sum_{k=1}^n a_k F(p_k)$$
(19)

sendo $F(p_k)$ uma função relacionada com $\bar{T}_i(x,\frac{p_k}{t})$ deve ser obtida por:

$$F(p_k) = \frac{p_k}{t} \bar{T}_i(x, \frac{p_k}{t}) \tag{20}$$

Substituindo (20) em (19):

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + j\infty} e^p \frac{F(p)}{p} dp = \sum_{k=1}^n a_k(\frac{p_k}{t}) \bar{T}_i(x, \frac{p_k}{t})$$

$$\tag{21}$$

sendo a_k e p_k respectivamente os pesos e as raízes da Quadratura Gaussiana.

Através de (21) é possível calcular $T_i(x,t)$ substituindo p por $\frac{p_k}{t}$. Sabendo ainda, que p_k são as raízes do polinômio:

$$(-1)^n \sum_{r=0}^n a(n,r) p^{n-r} = 0$$
(22)

sendo

$$a(n,r) = \frac{(-1)^{n-r} n\{(n+r-1)!\}}{r!(n-r)!} \sum_{r=0}^{n} a(n,r) p^{n-r}$$
(23)

Os termos a_k da equação (19) são as soluções de:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k p_k^{-r} = \frac{1}{r!} \ 0 \le r \le (n-1)$$
 (24)

A partir disto, é possível obter $T_i(x,t)$ substituindo p por $\frac{p_k}{t}$ utilizando juntamente os valores de a_k encontrados em Stroud; Secrest (1966).

3. RESULTADOS

Para uma análise do modelo proposto, utilizam-se as mesmas propriedades termofísicas do trabalho de Oliveira (2015). O problema térmico estudado é definido por uma placa plana de duas camadas, onde cada camada é composta de um determinado material. Conforme a Figura 1, L representa o comprimento da placa e b o local de mudança das camadas. Nesta aplicação, na camada 1 tem-se as propriedades termofísicas do aço AISI 1010, enquanto na camada 2 tem-se as propriedades termofísicas do cobre. A Tabela 1 apresenta as propriedades de ambos os materiais.

Table 1- Parâmetros termofísicos dos materiais de cada camada.

Características	Aço AISI 1010	Cobre
Condutividade térmica (W/mk)	64	401
Difusividade térmica (m^2/s)	$18,8 \times 10^{-6}$	117×10^{-6}

Considera-se ainda, que a placa está submetida a tais condições: fluxo de calor prescrito de $4 \times 10^5 W/m^2$; temperatura inicial: $T_0 = 0^{\rm o}C$; comprimento de placa: $L = 5 \times 10^{-2} m$; e divisão das camadas: $b = \frac{L}{2}m$.

A solução desse problema é dada pela Equação (17) e foi implementada utilizando o código computacional FORTRAN 90. Para assegurar a convergência da solução, utilizou-se a continuação analítica Petersen (2011), ou seja, resolve-se o problema de condução do calor para um passo de tempo h onde a convergência da solução está assegurada e utiliza-se esta solução como condição inicial para o próximo passo. Apresenta-se na Figura 2, o comportamento térmico da solução de dupla camada considerando três tempos constantes $t=0s,\,t=50s$ e t=100s.

Na Figura 2, é possível observar que o perfil temperatura da segunda camada tem um comportamento aparentemente constante em relação ao da primeira camada, isso é devido a condutividade térmica do material ser muito alta, tornando-o um bom condutor e assim dissipando o calor de uma forma mais rápida.

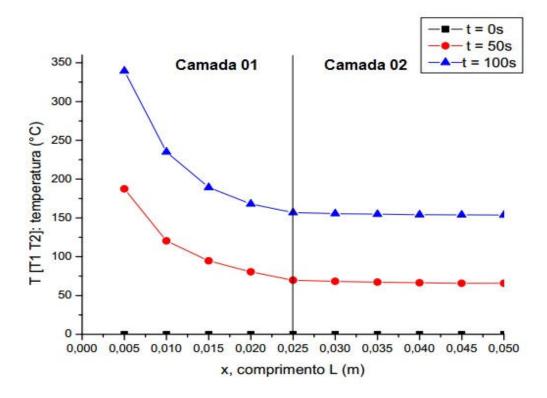


Figure 2- Perfil da temperatura ao longo da espessura da camada do material composto Aço/Cobre.

Pode-se observar pelo comportamento da Figura 2 que a temperatura começa a aumentar no local de incidência do fluxo de calor em função do tempo. Esta característica é transferida

as outras camadas através da condução, influenciando a alteração da temperatura ao longo da placa.

O acréscimo de temperatura ocorre de forma mais rápida nas regiões próximas à face da placa (x=0,005m) que em seu interior, quando x=0,050m, o que é fisicamente coerente, pois retrata uma certa dificuldade de dissipação do calor, causada pela difusividade térmica apresentada pelos materiais utilizados. Como o aço AISI 1010 possui menor difusividade térmica que o cobre, na primeira camada ocorre uma maior variação de temperatura em relação a temperatura apresentada na face externa da placa.

Na Tabela 2, apresentam-se as temperaturas encontradas para as camadas 1 e 2 em x=b, mostrando que a condição de continuidade $(T_1=T_2)$ é satisfeita para os três tempos analisados.

Tempo (s)	T_1	T_2
t = 0	0	0
t = 50	69,6321	69,6321
t = 100	158,9609	158,9609

Table 2- Condições de continuidade.

4. CONCLUSÕES

O presente trabalho foi baseado em uma abordagem semi-analíca para determinar a condução de temperatura em paredes multicompostas. A solução foi obtida através do método da transformada de Laplace e permite flexibilidade em relação a possibilidade de calcular qualquer tipo de parede ou placa plana. Para um melhor entendimento foram apresentadas duas soluções para a equação de conducão de calor em uma parede simples, a primeira foi feita por separação de variáveis e a segunda pela técnica da transformada de Laplace.

Como foco do estudo, a formulação de distribuição unidimensional de temperatura para paredes multicompostas mostrou-se válida para descrever o gradiente de temperaturas em um meio com duas camadas. Embora a avaliação tenha sido feita considerando uma placa de usinagem com revestimento, possuindo espessuras muito pequenas, a mesma equação serve para representar o que ocorre em uma parede, alterando apenas os parâmetros termofísicos dos materiais a serem utilizados. A aplicação da continuação analítica foi de grande importância para a garantia da convergência dos resultados obtidos, essa necessidade ocorreu devido ao fato dos valores de espessura, condutividade e difusividade térmica serem discrepantes entre si, com alguns valores muito pequenos e outros muito grandes, originando uma matriz mal condicionada.

Agradecimentos

Os autores agradecem o apoio financeiro concedido pela CAPES e CNPQ.

REFERENCES

Beyer, P. e Vilhena, M.T. (1998), "Condução de Calor Não-Estacionária em Paredes Externas Multi-Compostas", Tese de Doutorado, PROMEC - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

- Dear, R. D. e Brager, G. (2002), "Thermal comfort in naturally ventilated buildings: revisions to ASHRAE Standard 55", in *Energy and Buildings*, vol. 34.
- Fiorito, A.J. (1994), "Manual de Argamassas e Revestimentos Estudos e Procedimentos de Execução", Pini (ed.), 223 p, São Paulo, SP.
- Heydarian, M. e Mullineau, N. (1981), "Solution of Parabolic Partial Differential Equations", in *Appl. Math. Modelling*, vol. 5, pg 448-449.
- Oliveira, G.C. (2015), "Solução analítica multicamada em condução de calor: Aplicação em ferramentas revestidas", Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlandia, MG.
- Özisik, M.N.(1994), "Heat Conduction", Wiley-Interscience publication (ed.), Nova York, NY.
- Petersen, C. Z. (2011), "Solução Analítica das Equações da Cinética Pontual e Espacial da Teoria de Difusão de Nêutrons pelas Técnicas da Gitt e Decomposição", Tese de Doutorado, PROMEC Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.
- Stroud, A.H. e Secrest, D.(1966), "Gayssian Quadrature Formulas", Prentice Hall (ed.), New Jerseyn.

ANALYSIS OF THE TEMPERATURE DISTRIBUTION IN A MULTI COMPOSITE WALL

Abstract. The behavior of coatings applied to facades when subjected the elements directly reflect the thermal performance of the building internal environments, interfering with important aspects such as thermal comfort of users and air conditioning systems. Increasingly it is clear that a building project can not be reduced to meet the security needs, aesthetics and comfort of users, you need also to create a favorable environment, and the need for a study facing the main causes pathologies in construction systems. Ideal for preparation of a project is to obey the climatic conditions of each region, providing thermal comfort to users combined with lower spending on air conditioning systems. In this work, we develop a semi-analytical approach for the purpose of calculating the transient heat flow into building walls with two layers. The method is based on applying the Laplace transform to reverse Quadrature Gaussian. The one-dimensional formulation temperature distribution for multicomponent walls proved to be valid to describe the temperature gradient in a medium with two layers, enabling the analysis of temperature at any point on the wall.

Keywords: Multilayer Walls, heat conduction, thermal comfort, semi-analytical model.