

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PELOTAS
Instituto de Física e Matemática
Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática



Dissertação

**Modelagem matemática aplicada a dispersão de poluentes em aterros
sanitários**

Josiane Konradt

Pelotas, 2024

Josiane Konradt

Modelagem matemática aplicada a dispersão de poluentes em aterros sanitários

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática do Instituto de Física e Matemática da Universidade Federal de Pelotas, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Modelagem Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Guilherme Jahnecke Weymar
Coorientador: Prof. Dr. Igor da Cunha Furtado

Pelotas, 2024

Universidade Federal de Pelotas / Sistema de Bibliotecas
Catalogação da Publicação

K82m Konradt, Josiane

Modelagem matemática aplicada a dispersão de poluentes em aterros sanitários [recurso eletrônico] / Josiane Konradt ; Guilherme Jahnecke Weymar, orientador ; Igor da Cunha Furtado, coorientador. — Pelotas, 2024.

109 f.

Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática, Instituto de Física e Matemática, Universidade Federal de Pelotas, 2024.

1. Dispersão de poluentes. 2. GILTT. 3. Separação de Variáveis. 4. Meio poroso. 5. Resíduo Sólido Urbano. I. Weymar, Guilherme Jahnecke, orient. II. Furtado, Igor da Cunha, coorient. III. Título.

CDD 515.723

MODELAGEM MATEMÁTICA APLICADA A DISPERSÃO DE POLUENTES EM ATERROS SANITÁRIOS

por

Josiane Konradt

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática, PPGMMat, do Instituto de Física e Matemática da Universidade Federal de Pelotas, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de

Mestre em Modelagem Matemática

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Guilherme Jahnecke Weymar – Orientador (UFPeI)

Prof. Dr. Igor da Cunha Furtado – Co-Orientador (IFSul)

Prof. Dr. Bardo Ernst Josef Bodmann (UFRGS)

Profa. Dra. Daniela Buske (UFPeI)

Prof. Dr. Ricardo Giumelli Marquezan (UFPeI)

Dedico este trabalho a meus pais, por ouvir, incentivar, apoiar, com toda atenção e compreensão.

AGRADECIMENTOS

Durante a trajetória do mestrado, vivi momentos que marcaram profundamente meu amadurecimento e me ajudaram a me tornar a pessoa que sou hoje. Houve momentos de alegria, mas também de tristeza e angústia, todos essenciais para o meu desenvolvimento como pesquisadora e profissional. Ao longo desse caminho, muitas pessoas cruzaram minha vida, cada uma contribuindo de maneira única para a construção dessa história. No entanto, algumas pessoas merecem ser mencionadas de forma especial, devido à importância que tiveram e continuam tendo em minha vida.

Aos meus pais, Jorge e Marleni, que sempre foram o alicerce sobre o qual construí minha vida. A confiança que vocês depositaram em mim, o amor incondicional que me ofereceram e a força que me transmitiram em cada passo dessa jornada foram fundamentais para que eu pudesse enfrentar os desafios com determinação e coragem. Vocês me ensinaram o valor do esforço, da perseverança e, acima de tudo, da integridade. Sem o apoio constante e o exemplo de vida que vocês me deram, nada disso teria sido possível. Meu profundo agradecimento por serem meus maiores incentivadores e por estarem sempre ao meu lado.

Ao meu irmão Josué, cuja presença em minha vida é um constante lembrete de companheirismo e apoio fraternal. Você sempre esteve lá, me incentivando a ser a melhor versão de mim mesma, sendo um refúgio de tranquilidade e compreensão ao longo dessa jornada.

À minha segunda família, tios Gildo e Rosane, que me receberam com tanto amor e generosidade durante minha trajetória acadêmica. O acolhimento e o carinho de vocês tornaram os dias mais leves e as dificuldades mais suportáveis, oferecendo um porto seguro nos momentos mais desafiadores.

Aos professores que cruzaram o meu caminho desde os primeiros anos de estudo até o ensino superior, cada um contribuiu, de forma única, para a minha formação acadêmica e pessoal. Em especial, aos meus orientadores, Dr. Guilherme Jahnecke Weymar e Dr. Igor da Cunha Furtado, que foram tão especiais e essenciais em cada etapa, me auxiliando e incentivando desde a iniciação científica. Minha gratidão se estende também à Prof. Dra. Daniela Buske e ao Dr. Régis Sperotto de Quadros, por suas palavras de incentivo, pelos dias compartilhados no laboratório, e pelo apoio constante em todas as conquistas, grandes e pequenas.

Ao meu amigo André Rickes, que, apesar da distância física, sempre esteve presente em minha vida. Compartilhamos muitos momentos em diversas etapas, e minha admiração por você permanece inalterada. Sua amizade foi e sempre será uma constante fonte de apoio e inspiração.

Às demais amigas que iluminaram o caminho, tornando os momentos difíceis

mais leves e os dias bons ainda melhores. A cada um de vocês, meu profundo agradecimento por compartilharem risos, angústias e conquistas, tornando essa jornada mais rica e significativa.

À Universidade Federal de Pelotas, por me proporcionar o privilégio de fazer parte de uma instituição pública de excelência, onde pude crescer não apenas como profissional, mas também como pessoa.

À CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior), pela concessão da bolsa de estudos que possibilitou a dedicação necessária para a realização deste trabalho. Sem esse apoio financeiro, seria muito mais difícil alcançar os objetivos propostos durante o mestrado.

E, por fim, a todos que, de alguma forma, direta ou indiretamente, contribuíram para que eu pudesse alcançar este momento. A cada gesto de apoio, palavra de incentivo e ato de generosidade, meu mais sincero e profundo agradecimento.

RESUMO

KONRADT, Josiane. **Modelagem matemática aplicada a dispersão de poluentes em aterros sanitários**. Orientador: Guilherme Jahnecke Weymar. 2024. 109 f. Dissertação (Mestrado em Modelagem Matemática) – Instituto de Física e Matemática, Universidade Federal de Pelotas, Pelotas, 2024.

Os lençóis freáticos desempenham um papel crucial para a manutenção do ecossistema, frequentemente funcionando como a principal fonte de água potável para inúmeras comunidades. Inúmeras regiões contam com esses reservatórios subterrâneos para suprir as demandas domésticas, agrícolas e industriais. Assim, a preservação tanto da qualidade quanto da quantidade dos lençóis freáticos é essencial para assegurar a segurança hídrica, fomentar a biodiversidade e promover a sustentabilidade ambiental. O presente trabalho tem como objetivo realizar um estudo sobre a propagação de contaminantes em aterros sanitários, a fim de observar como os lençóis freáticos podem ser atingidos por esses poluentes. Logo, será considerada a forma adimensional do modelo bidimensional, bem como o vazamento contínuo e uniforme de contaminantes de uma célula de armazenamento de resíduos sólidos urbanos (RSU). O modelo adotado foi resolvido utilizando dois métodos. O primeiro método aplicou a *Generalized Integral Laplace Transform Technique* (GILTT), onde a solução obtida é considerada analítica, exceto pelo erro de truncamento na série infinita. O segundo método utilizou a Separação de Variáveis, uma abordagem amplamente empregada na solução de equações diferenciais parciais que também fornece uma representação analítica do problema. Nos resultados obtidos, é apresentada uma análise sobre os parâmetros do modelo para verificar a influência que possuem na distribuição da concentração de contaminantes e a forma que o lençol freático pode ser atingido. Como esperado, os resultados mostram que a GILTT representou satisfatoriamente os dados observados e apresenta boa concordância entre os métodos analíticos. Constata-se também certa vantagem da solução por Separação de Variáveis em relação a GILTT, por possuir menos processos envolvidos para obter a solução final, gerando um custo computacional inferior.

Palavras-chave: Dispersão de poluentes. GILTT. Separação de Variáveis. Meio poroso. Resíduo Sólido Urbano.

ABSTRACT

KONRADT, Josiane. **Mathematical Modeling Applied to Pollutant Dispersion in Landfills**. Advisor: Guilherme Jahnecke Weymar. 2024. 109 f. Dissertation (Masters in Mathematics) – Institute of Physics and Mathematics, Federal University of Pelotas, Pelotas, 2024.

Groundwater plays a crucial role in maintaining ecosystems, often serving as the primary source of drinking water for numerous communities. Many regions rely on these underground reservoirs to meet domestic, agricultural, and industrial demands. Therefore, preserving both the quality and quantity of groundwater is essential to ensure water security, foster biodiversity, and promote environmental sustainability. The present work aims to study the propagation of contaminants in landfills, with the goal of observing how groundwater can be affected by these pollutants. Hence, the dimensionless form of the two-dimensional model will be considered, as well as the continuous and uniform leakage of contaminants from a cell of municipal solid waste (MSW) storage. The adopted model was solved using two methods. The first method applied the Generalized Integral Laplace Transform Technique (GILTT), where the solution obtained is considered analytical, except for the truncation error in the infinite series. The second method used the Separation of Variables, a widely employed approach in solving partial differential equations that also provides an analytical representation of the problem. The results present an analysis of the model parameters to verify their influence on the distribution of contaminant concentration and how groundwater can be affected. As expected, the results show that GILTT satisfactorily represented the observed data and there is good agreement between the analytical methods. There is also a certain advantage of the Separation of Variables solution over GILTT, as it involves fewer processes to obtain the final solution, resulting in lower computational costs.

Keywords: Dispersion of pollutants. GILTT. Separation of Variables. Porous medium. Solid Urban Waste.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Principais fontes de contaminação de águas subterrâneas.	18
Figura 2	Passos da técnica GILTT.	23
Figura 3	Esquema da classificação dos resíduos sólidos.	27
Figura 4	Corte da seção de um aterro sanitário.	39
Figura 5	Mapa de concentração do poluente no solo, para os parâmetros: $Pe = 2$ e $R = 1$	56
Figura 6	Mapa de concentração do poluente no solo, para os parâmetros: $Pe = 10$ e $R = 1$	58
Figura 7	Mapa de concentração do poluente no solo, para os parâmetros: $Pe = 2$ e $R = 5$	60
Figura 8	Mapa de concentração do poluente no solo, para os parâmetros: $Pe = 10$ e $R = 5$	62
Figura 9	Mapa de concentração do poluente no solo, para os parâmetros: $Pe = 2$, $R = 1$ e $\tau = 0,25$	64
Figura 10	Mapa de concentração do poluente no solo, para os parâmetros: $Pe = 2$, $R = 1$ e $\tau = 0,75$	65
Figura 11	Concentração média para $L^* = 1$ e $R = 1$	66
Figura 12	Concentração média para $L^* = 1$ e $Pe = 2$	67

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	Distribuição percentual do volume diário de RSU em função da adequação da destinação final no Brasil.	29
Tabela 2	Disposição final de resíduos sólidos urbanos no Brasil, por tipo de destinação (T/dia).	30
Tabela 3	Distribuição percentual do volume diário de RSU em função da adequação da destinação final no Brasil.	31
Tabela 4	Processos envolvidos no transporte de contaminantes.	34
Tabela 5	GILTT: Caso $Pe = 2, R = 1$ e $\tau = 0,20$	63
Tabela 6	Separação de Variáveis: Caso $Pe = 2, R = 1$ e $\tau = 0,20$	63
Tabela 7	GILTT: Caso $Pe = 10, R = 1$ e $\tau = 0,02$	63
Tabela 8	Separação de Variáveis: Caso $Pe = 10, R = 1$ e $\tau = 0,02$	63
Tabela 9	GILTT: Caso $Pe = 2, R = 5$ e $\tau = 0,10$	63
Tabela 10	Separação de Variáveis: Caso $Pe = 2, R = 5$ e $\tau = 0,10$	63
Tabela 11	GILTT: Caso $Pe = 10, R = 5$ e $\tau = 0,10$	63
Tabela 12	Separação de Variáveis: Caso $Pe = 10, R = 5$ e $\tau = 0,10$	63

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
ABRELPE	Associação Brasileira de Empresas de Limpeza Pública e Resíduos Especiais
EDO	Equação Diferencial Ordinária
EDP	Equação Diferencial Parcial
GILTT	<i>Generalized Integral Laplace Transform Technique</i>
GITT	<i>Generalized Integral Transform Technique</i>
NBR	Norma Brasileira
PLANARES	Plano Nacional de Resíduos Sólidos
PNRS	Política Nacional de Resíduos Sólidos
RSU	Resíduos Sólidos Urbanos

LISTA DE SÍMBOLOS

A, B	Matrizes de coeficientes do problema transformado com a expansão em autofunções
Bi	Número de Biot (Valor utilizado para a simulação $Bi = 2000$)
C	Concentração do contaminante
C_a	Concentração do soluto em equilíbrio com a massa absorvida
C^*	Concentração do contaminante adimensionalizada
C_0	Concentração na interface aterro/solo
C_0^*	Concentração na interface aterro/solo adimensionalizada
C_E	Solução para o problema no estado estacionário
C_i	Concentração inicial na célula de armazenamento de RSU
$\bar{C}_n(t)$	N-ésimo termo temporal presente na solução final do problema original
C_∞	Concentração de contaminante na interface solo/lençol freático
\tilde{C}	Função auxiliar que leva consigo as condições de contorno homogêneas
c_d	Coefficiente de dispersividade
D	Matriz diagonal
D^*	Coefficiente de difusão efetivo
D_d	Coefficiente de difusão
e^x	Função exponencial
F_a	Fluxo advectivo do soluto
F	Matriz de coeficientes do problema transformado na qual $F = -A^{-1} \cdot B$
d_i	i -ésimo autovalor da matriz F , onde $(i = 1, 2, 3, \dots, N)$
G	Matriz diagonal da exponencial dos autovalores
h_m	Coefficiente de película de transferência de massa
I	Matriz identidade
K	Condutividade hidráulica
K_d	Coefficiente de distribuição

L_x	Comprimento do domínio do problema
L_y	Distância do chorume ao lençol freático
N	Índice no qual a soma da expansão da concentração com base nas autofunções do problema auxiliar converge
n	Estimativa do parâmetro de ajuste (adimensional)
Pe	Número de Péclet
R	Fator de retardamento do solo
S	Massa do soluto sorvida
s	Variável temporal transformada
t	Tempo
T	Tonelada
\bar{V}	Velocidade média do fluido
V	Velocidade média do fluido adimensionalizada
V_y	Velocidade de advecção na direção y
x	Coordenada horizontal de massa transportada
X	Matriz dos autovetores
X^{-1}	Matriz inversa de X
Y	Coordenada vertical na direção do fluxo adimensionalizada
y	Profundidade do solo
z	Coordenada vertical na direção do fluxo
θ	Porosidade do solo
\mathcal{L}	Operador transformada de Laplace
\mathcal{L}^{-1}	Operador inverso da transformada de Laplace
λ_n	Raízes da equação transcendental
φ_n	Autofunções do problema de Sturm-Liouville
β_k	Raiz do método numérico de Newton-Raphson
ξ	Raízes da EDO associada ao problema de Sturm-Liouville
τ	Tempo adimensional
ρ_s	Densidade aparente do aquífero
n_e	Porosidade eficaz
ω	Coefficiente relacionado à tortuosidade
α	Coefficiente de difusividade
α_d	Coefficiente de difusão molecular
α_m	Coefficiente de difusão mecânica
$\frac{dh}{dl}$	Gradiente hidráulico

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	16
1.1	Objetivos	19
1.1.1	Objetivos gerais	19
1.1.2	Objetivos específicos	19
1.2	Organização do trabalho	20
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	21
2.1	Métodos utilizados: GITT e GILTT	21
2.2	Estudos acerca da dispersão de poluentes	24
2.3	Resíduos sólidos urbanos: Contexto brasileiro	27
2.3.1	Definição e classificação dos resíduos sólidos	27
2.3.2	Geração e coleta de resíduos sólidos urbanos no Brasil	28
3	MODELO MATEMÁTICO	33
3.1	Mecanismos de transporte de contaminantes em solos	33
3.1.1	Processos Físicos	34
3.1.2	Processos Químicos	36
3.2	Hipóteses	37
3.3	Processo de adimensionalização	40
3.4	Resolução da equação pelo método GILTT	44
3.5	Resolução da equação pelo método de Separação de Variáveis	51
4	RESULTADOS E DISCUSSÃO	55
4.1	Influência do número de Péclet	55
4.2	Influência do fator de retardamento	59
4.3	Norma máxima para os resíduos das soluções analíticas	62
4.4	Influência do comprimento adimensional	64
4.5	Concentração média adimensional	66
5	CONCLUSÃO	68
	REFERÊNCIAS	70
	ANEXO A TRABALHOS PRODUZIDOS DURANTE O MESTRADO	78

1 INTRODUÇÃO

A preocupação ambiental contemporânea se intensifica diante da ameaça crescente à disponibilidade de água doce, causada pela poluição resultante das atividades humanas, pelo aumento da população global, pelo consumo desenfreado e pelo desperdício. Esses fatores destacam a urgente necessidade de um manejo responsável dos nossos recursos hídricos, especialmente das reservas de água subterrânea.

A disponibilidade de água na Terra é heterogênea, manifestando-se em diversas formas e locais variados. A maior parte, cerca de 97%, consiste em água salgada, tornando-a inadequada para consumo direto ou para a irrigação de cultivos. Dos restantes 3% de água doce, estão armazenadas em geleiras, calotas polares, águas subterrâneas e em recursos superficiais. Entretanto, a maior parte da água doce superficial que as pessoas usam constituem apenas cerca apenas 1% está presente nos rios e lagos. Portanto, a gestão responsável da água é essencial para garantir que suas múltiplas aplicações para a vida no planeta sejam sustentáveis a curto, médio e longo prazo (U.S. GEOLOGICAL SURVEY, 2019).

No contexto mundial em relação à distribuição dos recursos hídricos e da população, tem-se que a Ásia, continente mais populoso e que possui aproximadamente 60% dos habitantes do mundo, possui cerca de 31% da disponibilidade total de água doce superficial do planeta; as Américas possuem 13% da população mundial e 41% da água doce disponível; o continente Africano, com 15% da população mundial e 10% de água doce disponível; a Europa, com 10% de população mundial e 7% de água doce disponível; por último a Oceania com 0,5% da população mundial e 10% da água doce disponível (WORLD POPULATION REVIEW, 2024).

No Brasil, a disponibilidade de recursos hídricos apresenta desigualdades significativas em relação à distribuição da população. Nesse contexto, algumas regiões brasileiras se destacam pela abundante disponibilidade de águas subterrâneas, notadamente aquelas situadas no âmbito do Sistema Aquífero Integrado Guarani/Serra Geral e da Província Amazônica. Por outro lado, há áreas onde a escassez de água é uma realidade devido às elevadas taxas de demanda, englobando regiões sedimentares em geral e aquelas caracterizadas pela presença de rochas cristalinas, particular-

mente encontradas no semiárido brasileiro (TUCCI, 2009).

Observando em números especificamente, o Brasil possui 2,8% da população mundial e 12% da água doce disponível no planeta. Contudo, dentro do próprio país ocorre um caso semelhante de desigualdade de distribuição, pois 70% dessa água está localizada na Bacia Amazônica, justamente onde a densidade populacional é a menor do país. Em contrapartida, a região Nordeste do Brasil possui cerca de 30% da população brasileira e somente 5% da água doce disponível (AUGUSTO et al., 2012).

Ainda no contexto Brasileiro, Tucci (2009) destaca que no mundo todo e no Brasil, a agricultura é o maior consumidor de água. Estima-se que 69% das águas consumidas no mundo são dedicadas à agricultura, 23% à indústria, e 8% ao abastecimento da população. No Brasil, essas porcentagens são, respectivamente, 68%, 14% e 18%.

Em relação as águas subterrâneas, estas podem ser definidas como todas que ocorrem abaixo da superfície do solo, ocupando os espaços porosos entre as partículas das rochas sedimentares ou preenchendo as fraturas, falhas e fissuras em rochas compactas. Elas desempenham um papel essencial na retenção da umidade do solo e no abastecimento de rios, lagos e pântanos, influenciadas pela interação entre as forças de adesão e gravidade (LEGNER, 2013).

Hirata et al. (2019), destacam que 52% dos 5.570 municípios brasileiros dependem total (36%) ou parcialmente (16%) das águas subterrâneas para o abastecimento público.

No entanto, essa dependência coloca um foco crítico na preservação da qualidade das águas subterrâneas, uma vez que a dispersão de contaminantes é um processo complexo que ocorre nos diferentes meios existentes, como o ar, a água e o solo. Na água, poluentes podem se espalhar rapidamente através das correntes, prejudicando ecossistemas aquáticos e representando uma ameaça à saúde humana. Além disso, no solo, contaminantes podem infiltrar-se, atingindo lençóis freáticos e tornando-se uma fonte de poluição de longo prazo. Desta forma, a compreensão desses processos de dispersão é fundamental para a gestão eficaz de poluentes e a mitigação de impactos ambientais adversos.

As águas subterrâneas apresentam alto padrão de qualidade físico-química e bacteriológica. Apesar de serem naturalmente protegidas, mas não imunes, dos intermediários de contaminação, essas águas dispensam em alguns casos tratamentos físico-químicos.

A poluição das águas subterrâneas pode resultar tanto de fontes diretas quanto indiretas, frequentemente associadas a atividades humanas ou processos naturais. Devido à complexidade técnica de remediação e os custos elevados, em casos de contaminação, os processos de remediação podem ser dispendiosos, demandando longos períodos de tempo (MMA – MINISTÉRIO DO MEIO AMBIENTE E MUDANÇA DO CLIMA, 2007). A Figura 1 apresenta as principais fontes de contaminação de

águas subterrâneas.

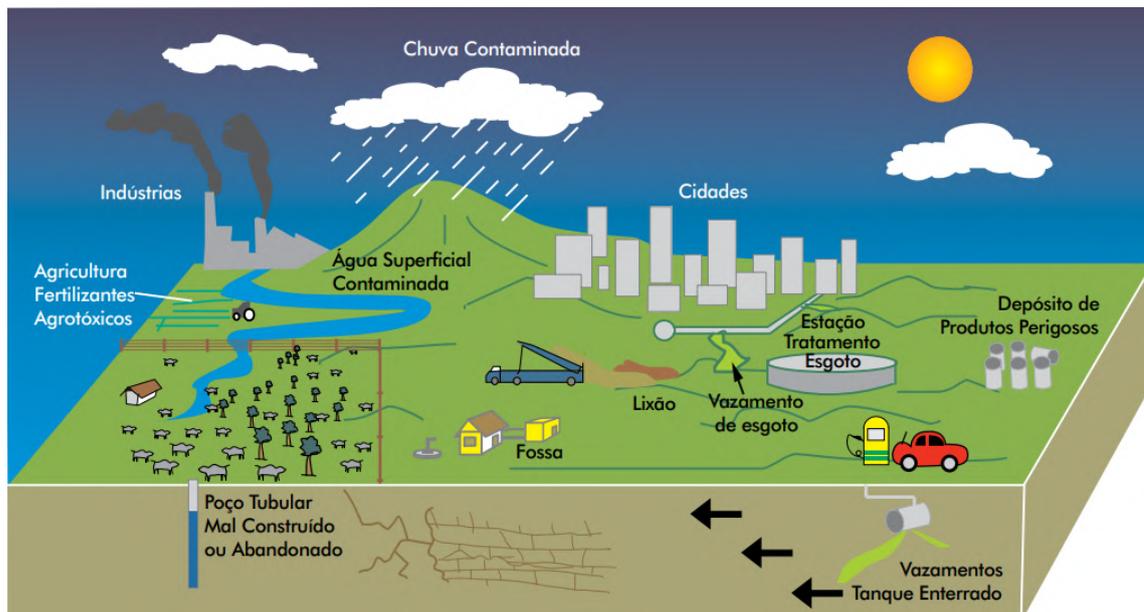


Figura 1 – Principais fontes de contaminação de águas subterrâneas.

Fonte: MMA – Ministério do Meio Ambiente e Mudança do Clima (2007).

A Figura 1 apresenta diferentes formas possíveis de contaminação de águas subterrâneas, como por exemplo, fertilizantes e agrotóxicos utilizados na agricultura, indústrias que despejam toneladas de resíduos tóxicos em rios, prejudicando o ecossistema e tornando a água imprópria para o consumo. No contexto deste trabalho, os lixões, aterros controlados e sanitários são outras formas que poluem os recursos hídricos, devido a disposição inadequada de resíduos sólidos urbanos (RSU), os quais apresentam um aumento expressivo nos últimos anos.

Os materiais de consumo não reutilizáveis quando são descartados de forma inadequada, as implicações negativas se estendem, afetando diretamente a qualidade dos recursos hídricos e, conseqüentemente, ameaçando o equilíbrio do meio ambiente, a fauna e, por conseguinte, a saúde da espécie humana. Logo, identifica-se a necessidade de estudos acerca de um conjunto de sistemas e medidas, tais como destinação adequada e uma gestão eficiente que garanta ao máximo o reaproveitamento e reciclagem.

Segundo Moreira; Tirabassi (2004) os processos que governam o transporte e a difusão de poluente são numerosos e complexos, não sendo possível descrevê-los sem o auxílio de modelos matemáticos, que se tornam instrumentos técnicos indispensáveis para a gestão ambiental. Desta forma, a modelagem matemática pode ser compreendida como um recurso que possibilita o diagnóstico de questões relacionadas à qualidade da água e na subsequente formulação de estratégias para resolvê-las.

O presente trabalho pretende realizar um estudo do modelo matemático bidimensi-

onal do transporte de contaminantes num aterro sanitário. Para isso será considerada a forma adimensional do modelo de dispersão de poluentes no meio poroso, tendo como hipótese o vazamento contínuo e uniforme de poluente de uma célula de armazenamento de RSU. Para a resolução do modelo será utilizado a *Generalized Integral Laplace Transform Technique* (GILTT) e o Método de Separação de Variáveis a fim de obter duas soluções da forma analítica do modelo transiente de transporte de massa num meio poroso saturado. Desse modo, o objetivo deste trabalho, assim como a sua estruturação, estão descritos nas seções seguintes.

1.1 Objetivos

1.1.1 Objetivos gerais

O objetivo central deste trabalho é realizar o estudo do modelo matemático bidimensional do transporte de contaminantes que está situado no solo, abaixo de um aterro sanitário. Além disso, o estudo pretende realizar simulações computacionais do modelo para observar, através dos resultados, como a propagação do contaminante se comporta e de que maneira pode prejudicar o lençol freático, ao considerar diversos parâmetros, como o número de Péclet (Pe), o fator de retardamento do solo (R) e o comprimento adimensional (L^*).

1.1.2 Objetivos específicos

Os objetivos específicos deste trabalho são:

- Realizar um levantamento bibliográfico sobre a propagação de contaminantes no meio poroso devido os poluentes lançados por um aterro sanitário e como o lençol freático pode ser atingido;
- Apresentar soluções analíticas para o modelo de propagação do contaminante no meio poroso em uma célula de resíduos sólidos num aterro sanitário, através dos métodos GILTT e Separação de Variáveis;
- Fazer a implementação computacional no software online *Google Colaboratory* em linguagem Python para a solução obtida;
- Analisar os resultados numéricos obtidos sobre a concentração de contaminantes num aterro sanitário;
- Buscar contribuir através de estudos com a possível melhoria e preservação dos recursos hídricos e conseqüentemente do meio ambiente.

1.2 Organização do trabalho

Este trabalho está organizado em cinco capítulos, sendo este o primeiro capítulo apresentado.

No segundo capítulo será apresentado a revisão bibliográfica a respeito dos trabalhos que vieram sendo publicados sobre a dispersão de poluentes, além de estudos que utilizam o mesmo ou semelhantes métodos que o presente trabalho utilizará para resolver o modelo, além de um panorama sobre o contexto brasileiro dos RSU.

No terceiro capítulo encontra-se o modelo matemático, onde é apresentado a fundamentação teórica acerca dos mecanismos de transporte de contaminantes em solos, abordando as propriedades físicas e químicas do problema. No processo matemático, apresenta-se o processo de adimensionalização do problema e a solução através das técnicas escolhidas.

No penúltimo capítulo são exibidos os resultados, comparando as soluções dos métodos e analisando, no modelo, a importância dos parâmetros como o número de Péclet, fator de retardamento do solo, comprimento adimensional e concentração média. Por fim, no último capítulo do trabalho, constam as conclusões.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Atualmente, há uma vasta gama de trabalhos publicados sobre a dispersão de poluentes, alguns dos quais serão discutidos na sequência. Este capítulo englobará autores relacionados à pesquisa em questão, seja por abordarem a dispersão de poluentes em meios porosos, pelos métodos utilizados para resolver esses problemas, ou por trabalhos que empregam as técnicas usadas no presente estudo.

2.1 Métodos utilizados: GITT e GILTT

Problemas de engenharia mais elaborados envolvendo escoamento de fluido e condução de calor, normalmente recaem em equações diferenciais parciais que raramente possuem solução analítica fechada, sendo necessária então, a utilização de métodos numéricos ou de métodos de natureza híbridos analíticos-numéricos para a obtenção dos potenciais desejados.

A Técnica da Transformada Integral Generalizada ou *Generalized Integral Transform Technique* (GITT) e a Técnica da Transformada Integral Generalizada com Laplace ou *Generalized Integral Laplace Transform Technique* (GILTT), as quais tem sido utilizadas com êxito para esses tipos de problemas, alcançando excelentes resultados não só do ponto de vista da precisão de solução como também tem-se mostrado bastante eficiente sob a ótica de custos computacionais e viabilidade na solução de problemas típicos em engenharia, com taxas de convergência satisfatórias (CENE-DESE, 2005). A seguir, serão apresentados os trabalhos que utilizam esses métodos em diferentes problemas.

Lopes (2005) em seu trabalho, realizou a modelagem e a simulação computacional do processo de transporte de contaminantes em meios porosos, onde especificamente elaborou-se três modelos, solucionados por meio da aplicação GITT. Estabeleceu uma sequência efetivamente prática, na qual se visualizou a remoção do efluente contaminado do solo e posterior separação do soluto contaminante. Dessa forma, o primeiro modelo simula a remoção de poluentes de solos e os outros dois modelos simulam a remoção do soluto visando o tratamento do efluente removido do solo por meio do

fenômeno da biosorção em reator de leito fixo, um em circuito aberto e outro em circuito fechado. Com isso, tentou-se abordar as etapas necessárias para a remediação de um solo já contaminado. A resolução foi desenvolvida por meio da GITT visando definir os parâmetros-chave de projeto para sua otimização.

Petersen (2011), em seu trabalho sobre o comportamento de um reator nuclear, utilizou a GITT para resolver as equações da cinética espacial bidimensionais e tridimensionais com o modelo de difusão, aplicando tal técnica nas coordenadas espaciais.

Ferreira (2015) realizou um estudo do processo de extração usando fluidos supercríticos. A modelagem matemática dos problemas físicos foi feita através das equações de conservação de massa das espécies químicas, que foram resolvidas através da técnica GITT, a qual demonstrou ser capaz de resolver com eficácia os problemas analisados. A excelente concordância dos resultados numéricos do estudo com os da literatura demonstrou a coerência desta abordagem e adequação para aferir resultados para essa classe de problemas.

No trabalho Alves; Ramos; Maia (2016), estes tratam de uma solução analítico-numérica híbrida empregando a GITT para transferência de calor por convecção forçada em escoamento laminar newtoniano sob condições de contorno de Dirichlet, considerando um perfil de entrada de temperatura uniforme. Destacam que a GITT foi aplicada com sucesso na obtenção de soluções para problemas multidimensionais difusivos e difusivo-convectivos.

Quando se refere ao estudo de transporte de poluentes em aterros sanitários, Albuquerque (2018), apresentou um estudo sobre a propagação de contaminantes presentes no solo a partir do vazamento contínuo e uniforme de poluentes em uma célula de armazenamento de RSU num aterro sanitário. No trabalho, foi utilizada a técnica da GITT, para resolver o problema de transporte de contaminantes. O estudo visa obter parâmetros para serem utilizados na prevenção da contaminação do solo e do lençol freático.

Em relação à técnica GILTT, a qual será utilizada no presente trabalho, esta compreende os seguintes passos descritos no trabalho de Buske (2008) e representados através da Figura 2.

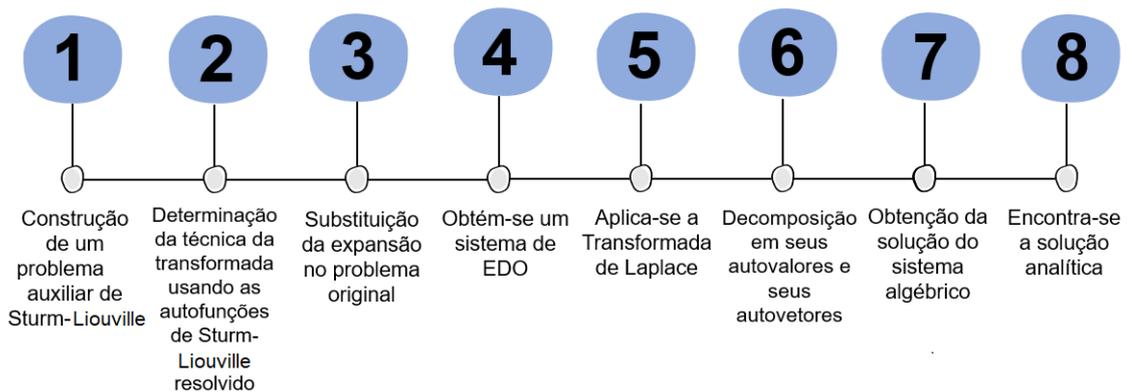


Figura 2 – Passos da técnica GILTT.

Fonte: Adaptado de Buske (2008).

Em 2004, Buske realizou um estudo sobre a solução analítica para a equação de advecção-difusão em um contexto bidimensional estacionário que modelou a dispersão de poluentes na atmosfera, para tal foi utilizado o método GILTT. Os resultados numéricos e estatísticos foram apresentados, comparando-os com dados experimentais e da literatura existente, demonstrando a eficácia do modelo proposto nos experimentos difusivos considerados.

No trabalho de Moreira et al. (2006), foi apresentada uma solução analítica para a equação de advecção-difusão bidimensional não estacionária, com o objetivo de simular a dispersão de poluentes na camada limite planetária. A metodologia adotada consiste na aplicação da técnica GILTT para resolver a equação de advecção-difusão, seguida pela solução do problema estacionário. Além disso, foram realizadas simulações numéricas e comparações estatísticas com dados experimentais disponíveis na literatura.

Diferentes trabalhos, utilizando a GILTT, buscaram estudar a dispersão de poluentes na atmosfera com o objetivo de prever as possíveis consequências negativas ao impacto ambiental ou a fim de simular possibilidades de uma qualidade superior do ar foram publicadas, pode-se destacar Moreira et al. (2009), Degrazia (2005), Mello (2006), Buske (2008), Silva (2012), Weymar (2012) e Weymar (2016).

O método GILTT, também é amplamente utilizado na modelagem da dispersão de poluentes nos recursos hídricos. Pode-se referenciar os trabalhos de Oliveira (2009), Machado (2019a) e Garcia (2021), que apresentaram as soluções de modelos utilizando a técnica e, a partir dos resultados encontrados, a GILTT representou satisfatoriamente os dados observados e apresentou boa concordância entre os métodos semi-analíticos.

Em um estudo recente, Konradt (2022) empregou a técnica GILTT no meio poroso para o problema unidimensional de transporte de poluentes em aterros sanitários, sendo que para a modelagem específica de dispersão em meios porosos esta téc-

nica ainda não havia sido utilizada. Desta forma, o presente trabalho pretende dar continuidade explorando o modelo bidimensional através da técnica.

2.2 Estudos acerca da dispersão de poluentes

No decorrer dos últimos anos, diferentes estudos foram desenvolvidos na tentativa de avaliar como as águas subterrâneas são atingidas pelo aterros sanitários localizados na superfície.

Em 2002, Lange et al. apresentam os resultados de um programa experimental que teve por objetivo a determinação em laboratório dos parâmetros de transporte de contaminantes, metais pesados em amostras de solos da área do aterro de RSU do município de Catas Altas, Minas Gerais. Para a realização dos ensaios de coluna foram coletadas amostras indeformadas de solo natural (amostras cilíndricas com 7 cm de diâmetro e 13 cm de altura) da área do aterro. Os resultados obtidos neste trabalho permitem observar um significativo potencial de retenção de metais pesados nos solos da área em estudo, especialmente para o elemento cromo.

No trabalho de Favero; Muniz; Santos (2007), foi desenvolvido um código computacional bidimensional para simular a dispersão de poluentes líquidos em solos. O método adotado para a discretização da equação diferencial do modelo foi o de volumes finitos. Além disso, foram realizados experimentos em laboratório, unidimensional e bidimensional, referentes à dispersão de algumas substâncias em meios porosos, sendo que estes resultados obtidos foram usados para comparar com resultados das simulações. Como conclusões foi possível observar uma concordância dos resultados obtidos numericamente com os resultados experimentais, podendo prever a dimensão da área contaminada por algum acidente e elaborar estratégias de remediação do local.

No mesmo ano, 2007, Gonçalves procurou determinar parâmetros como fator de retardamento, coeficiente de dispersão/difusão e a dispersividade no transporte de íons potássio e nitrato para diferentes valores de temperatura em experimentos. Os resultados mostram que a temperatura apresentou influência na velocidade da solução no meio poroso e no coeficiente de dispersão, além de que as variações de temperatura não apresentam influência sobre os valores do parâmetro fator de retardamento, ou seja, efeitos mecânicos dominam.

Korf et al. (2008) realizaram a montagem de um equipamento de coluna capaz de avaliar a condutividade hidráulica de solos e simular transporte de contaminantes neste meio, a fim de estudar a capacidade de atenuação dos mesmos por diferentes solos da região norte do Rio Grande do Sul. Destacando que seria possível a retirada de parâmetros necessários à simulação numérica do movimento de plumas de contaminações pelo solo através de tal equipamento.

Ainda no ano de 2008, Inforzato propôs o estudo da dispersão de poluentes em um sistema tridimensional ar-água, sistema que, no caso, foi considerado uma parte de um curso aquático, como um lago ou uma represa juntamente com o meio aéreo, ou seja, existe a integração simultânea de dois meios distintos, visto que em quantidades significativas, o contaminante não só se faz presente em ambos os meios, mas também se movimenta de um para o outro. Para tal, foi realizada uma discretização espacial com vistas ao uso do método de elementos finitos, bem como uma discretização temporal conveniente para obter aproximações da solução das equações envolvidas no modelo. Na simulações apresentadas, os resultados mostraram-se totalmente de acordo com as expectativas para os fenômenos considerados.

Oliveira (2009), apresenta um estudo paramétrico da contaminação para o entorno de um aterro sanitário, considerando na simulação o fenômeno da advecção-dispersão e sorção, sendo utilizando um programa comercial e obtendo assim, como resultado, uma simulação simplificada, utilizando diferentes valores de dispersividade, para representar o padrão de fluxo da água subterrânea e a consequente evolução de uma pluma de contaminação.

Trabalho como o de Neves (2012) demonstra a solução analítica para a equação de advecção-difusão e a aplicabilidade do método de Separação de Variáveis em problemas de dispersão de poluentes em corpos hídricos, como em rios e canais. O modelo proposto mostrou-se coerente em relação aos dados considerados e destaca que não foram encontrados comparativos na literatura.

Rosa; Dalmolin; Copetti (2012) realizaram um estudo no desativado aterro da Caturrita, localizado no município de Santa Maria, Rio Grande do Sul. Através de pontos de coleta de chorume e análise das amostras, foi possível verificar que os resultados encontrados mostram que a contaminação das águas do corpo receptor dos efluentes do aterro é elevada, tornando suas águas impróprias até mesmo para a descarga em outro corpo de água. Ainda, é destacado que devido à ausência de ações de remediação e monitoramento da área, estima-se que, até a completa estabilização do aterro, esperada para aproximadamente 30 anos, ainda sejam lançados no corpo receptor 14,5 mg de carbono orgânico solúvel, fósforo, nitrogênio, sódio, potássio, cálcio e ferro.

No trabalho de Nakamura et al. (2014) foi realizado um estudo que avaliou a qualidade da água subterrânea no entorno do aterro sanitário do município de Visconde do Rio Branco no estado de Minas Gerais, durante o período de setembro de 2010 a outubro de 2011. O monitoramento da qualidade da água na área do aterro foi dado considerando três poços instalados, e também três nascentes presentes no local. Os resultados apresentam diversas inconformidades, como a contaminação por elementos como o mercúrio, manganês e a bactéria *Escherichia coli*.

No trabalho desenvolvido por Santos (2015a), o qual realizou um estudo sobre os contaminantes no solo que ficam abaixo de uma lagoa de estabilização genérica, utili-

zando como técnica a dos volumes finitos, gerando uma malha estruturada bidimensional e realizaram-se as simulações considerando regime laminar, meio isotrópico, solo saturado, escoamento monofásico e isotérmico. Como resultados foi possível verificar que a concentração dos poluentes considerados, cádmio e cobre, com a distância longitudinal e com a profundidade obteve-se uma boa concordância com o observado na literatura.

Outro autor denominado Santos, no mesmo ano de 2015a, modelou e simulou o transporte de poluentes em aquíferos livres, usando o regime de escoamento permanente e transiente para o poluente baseado na equação advecção-dispersão. O modelo construído fundamentou-se no método de diferenças finitas, com aplicação do esquema de Crank Nicolson. A área de aplicação do modelo situa-se na malha urbana da cidade de Araguari, Minas Gerais, sendo introduzidas fontes de poluição hipotéticas, pontuais, difusas e lineares, disseminadas na malha. Os resultados mostram que o modelo apresenta de forma satisfatória o padrão de transporte de poluentes em águas subterrâneas, evidenciando que a pluma de contaminante é influenciada pela direção e sentido do fluxo subterrâneo.

Em 2016, Silva propôs um modelo matemático para a simulação numérica da propagação de poluentes na região saturada do solo, contemplado o mecanismos de advecção, difusão, sorção e reação química. O modelo matemático obtido, foi discretizado usando o método de volumes finitos, o qual apresenta um desempenho satisfatório inclusive quando comparado com um meio semi-infinito, podendo visualizar a extensão e o comportamento de uma pluma de contaminação.

No trabalho de Furtado (2017) é encontrada uma solução de um problema de fluxo unidimensional e transiente de água em meio não saturado, representado matematicamente pela equação de Richards. São empregadas as relações constitutivas de Van Genuchten, além de buscar obter soluções de representação analítica, para problemas de classe não linear sem necessidade de linearização, perturbação ou modelos de discretização.

Sousa et al. (2018), estudaram o comportamento hidrodispersivo de solutos provenientes de campos maduros de petróleo, ou seja, campos que já ultrapassaram seu pico de produção. Buscou-se determinar os parâmetros de transporte como fator de retardo, coeficiente de dispersão hidrodinâmica e dispersividade em amostras de solo, através de ensaios de colunas em laboratórios. Com os resultados obtidos, conclui-se que o avanço dos solutos em meios saturados apresentam significativa dispersão e aumento da concentração relativa em um curto espaço de tempo.

Lima (2018) em seu trabalho, possuía o objetivo de analisar a infiltração e migração dos contaminantes da água de produção de petróleo em solo areno-argiloso não saturado compactado com a finalidade de definir parâmetros que possibilitassem a tomada de decisões na construção de barreiras de contenção e na mitigação em casos

de derramamento na área de produção.

No trabalho de Machado (2019b) foi utilizado uma modelagem numérica através do método dos volumes finitos, com o auxílio de um software comercial para realização do estudo da dispersão de monóxido de carbono, como poluente veicular, em uma microrregião urbana localizada em Ponta Grossa, Paraná. Os resultados de concentração do elemento estavam dentro dos limite de acordo com os padrões da qualidade do ar nacionais.

Mais recentemente, Murcia (2020) modelou a dispersão de lixiviados de RSU através de solo saturado em um estudo de caso utilizando o aterro municipal de Jacarezinho, no estado de Paraná. Da simulação realizada, concluiu-se que o aterro tem potencial para poluição de solos e águas subterrâneas do entorno.

2.3 Resíduos sólidos urbanos: Contexto brasileiro

2.3.1 Definição e classificação dos resíduos sólidos

A classificação de resíduos sólidos é realizada de acordo com a Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT) e a Norma Brasileira (NBR) 10004, estabelecida em 2004. Essa classificação envolve a identificação da origem dos resíduos, seus constituintes e características, bem como a comparação desses constituintes com listagens de resíduos e substâncias conhecidos por seu impacto na saúde e no meio ambiente (ABNT – ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2004).

Um resíduo é qualquer material que pode ser reutilizado e reciclado, mas para que isso aconteça, é necessário separar o material de acordo com sua composição. Dessa forma, o material ainda possui valor econômico para ser reaproveitado.

Os resíduos sólidos são classificados em resíduos nos estados sólido e semi-sólido, originados de atividades industriais, domésticas, hospitalares, comerciais, agrícolas, de serviços e de varrição. A Figura 3 ilustra a classificação dos resíduos sólidos de acordo com sua periculosidade.

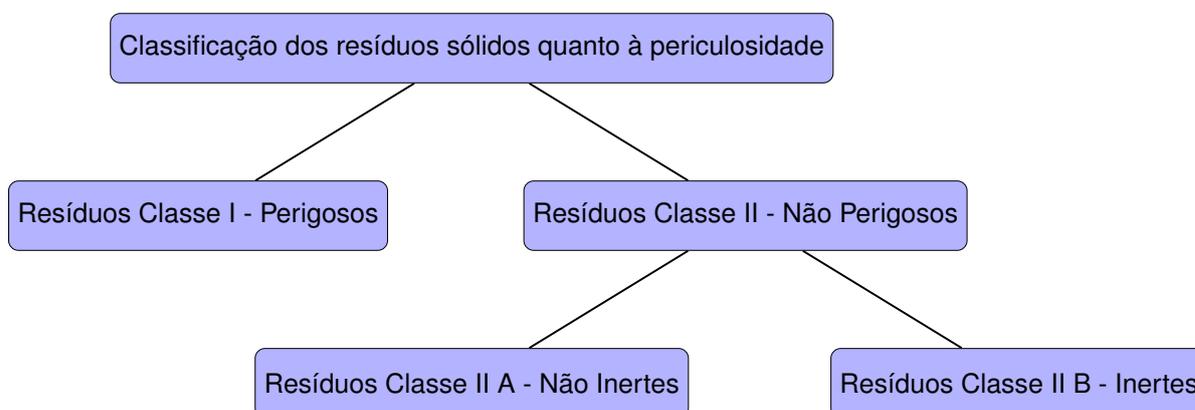


Figura 3 – Esquema da classificação dos resíduos sólidos.

Os resíduos classificados como Classe I - Perigosos são aqueles que apresentam periculosidade, como inflamabilidade, corrosividade, reatividade, toxicidade e patogenicidade. Os Resíduos Classe II - Não Perigosos, por sua vez, são subdivididos em Classe II A - Não Inertes, que podem ter propriedades como biodegradabilidade, combustibilidade ou solubilidade em água, e Classe II B - Inertes, que são resíduos que não têm seus constituintes solubilizados em concentrações superiores aos padrões de potabilidade da água, exceto aspecto, cor, turbidez, dureza e sabor.

No processo de classificação, as diretrizes iniciais são fornecidas pela NBR 10007, que aborda a amostragem dos resíduos. Evidencia-se a necessidade de conhecer a fonte do resíduo. Caso não seja possível obter esse conhecimento, é possível realizar um ensaio de lixiviação dos resíduos de acordo com a NBR 10005. Com base nessa norma, é verificado se a amostra de resíduo possui componentes que conferem periculosidade. Para determinar se um resíduo é perigoso ou não, é preciso verificar se a amostra apresenta componentes com concentrações superiores ao estabelecido pela Norma de classificação dos resíduos. Se a concentração for superior, ele será classificado como Classe I - Perigoso. Caso contrário, será classificado como Classe II - Não Perigoso.

Se um resíduo for categorizado como Classe II - Não Perigoso, é necessário verificar se é classificado como Não Inerte ou Inerte. Essa determinação é feita pela NBR 10006, que trata do processo de solubilização de resíduos. Nesse caso, se a amostra possuir constituintes solubilizados em concentrações superiores às estabelecidas na tabela que contém os elementos e seus limites máximos de solubilização em miligramas por litro, a classificação será de Não Inerte, Classe II A. Caso contrário, o resíduo será classificado como Inerte, ou seja, Resíduo Classe II B - Inerte.

Destaca-se a importância da classificação dos resíduos, pois ela possibilita o gerenciamento adequado desses materiais e que neste trabalho está sendo estudado os Resíduos Classe II – Não perigosos dispostos em aterros sanitários.

2.3.2 Geração e coleta de resíduos sólidos urbanos no Brasil

A destinação de resíduos sólidos é um desafio complexo que envolve diversas abordagens. Um dos métodos tradicionais é o lixão, também conhecido como vazadouro a céu aberto, que consiste na disposição do lixo diretamente sobre o terreno, sem quaisquer precauções ambientais ou de saúde pública. Nesse cenário, não são implementadas medidas de proteção, o que pode resultar em sérios impactos negativos.

Outra alternativa, consiste no aterro controlado, onde o lixo coletado é despejado sem tratamento prévio. No entanto, diariamente, após a coleta, os resíduos são cobertos com uma camada de terra, que tem o propósito de reduzir os potenciais danos à saúde pública e minimizar os impactos ambientais. Embora represente um avanço

em relação ao lixão, o aterro controlado ainda deixa margem para preocupações e trás consequências negativas.

A abordagem mais avançada e eficiente é o aterro sanitário, que envolve a disposição adequada dos resíduos no solo, sob rigoroso controle técnico e operacional. O objetivo é assegurar que nem os resíduos sólidos, nem seus efluentes líquidos ou gasosos, causem danos à saúde pública ou ao meio ambiente. Isso é alcançado seguindo as regulamentações ambientais e as normas técnicas oficiais, garantindo a proteção da saúde pública e do ecossistema. Portanto, a escolha do método de destinação de resíduos desempenha um papel crucial na preservação do ambiente e da qualidade de vida da sociedade.

A Associação Brasileira de Empresas de Limpeza Pública e Resíduos Especiais (ABRELPE) elabora relatórios anualmente, onde publica dados nacionais e regionais sobre a gestão de resíduos sólidos a fim de facilitar a estruturação e a implementação de ações, programas e políticas públicas que permitam superar os déficits observados e fazer os avanços necessários para atender a legislação vigente e as novas demandas da sociedade.

A Tabela 1 apresenta dados sobre a disposição final de RSU no Brasil a partir do ano de 2003, primeiro ano em que a ABRELPE começou a divulgar informações sobre os RSU.

Tabela 1 – Distribuição percentual do volume diário de RSU em função da adequação da destinação final no Brasil.

	Destinação adequada	Destinação inadequada
2003	40,49%	59,51%
2004	40%	60%
2005	58%	42%
2006	62,2%	37,8%
2007	38,6%	61,4%

Fonte: ABRELPE (2003), (2004), (2005), (2006), (2007).

A significativa diferença entre os anos de 2004 e 2005 deve-se ao fato da pesquisa da ABRELPE ter registrado um melhor índice de adequação ambiental na disposição final. Entretanto, não representa um fator positivo em sua totalidade, pois estas duas pesquisas foram realizadas em capitais dos estados brasileiros e cidades maiores, não abrangendo municípios menores que poderiam estar destinando os RSU de forma inadequada.

A partir do ano de 2009, realizando um comparativo com o ano anterior, a

ABRELPE começou a disponibilizar a quantidade de toneladas por dia (T/dia) de destinação de RSU no Brasil, conforme a Tabela 2 apresenta:

Tabela 2 – Disposição final de resíduos sólidos urbanos no Brasil, por tipo de destinação (T/dia).

	Aterro Sanitário	Aterro Controlado	Lixão
2008	81.710	29.877	37.612
2009	91.524	38.459	31.101
2010	99.919	42.231	31.433
2011	103.335	43.032	31.628
2012	105.111	43.881	32.296
2013	110.232	46.041	32.946
2014	113.975	47.272	33.986
2015	116.631	47.942	34.177
2016	114.189	45.500	33.948
2017	115.801	44.881	35.368
2018/2019 ¹	118.631	45.830	34.850

Fonte: ABRELPE (2008), (2009), (2010), (2011), (2012), (2013), (2014), (2015), (2016), (2017), (2019).

Através da Tabela 2 observa-se um aumento geral na quantidade de resíduos destinados a aterros sanitários ao longo dos anos, passando de 81.710 T/dia em 2008 para 118.631 T/dia em 2018/2019. Percebe-se algumas flutuações anuais, mas a tendência geral é de aumento, indicando um crescimento contínuo na produção de resíduos e no sistema de coleta.

¹A ABRELPE nos anos de 2018 e 2019 produziu apenas um documento sobre o panorama dos resíduos sólidos no Brasil, onde considerou que não houve incremento com o passar de um ano.

Tabela 3 – Distribuição percentual do volume diário de RSU em função da adequação da destinação final no Brasil.

	Destinação adequada	Destinação inadequada
2020	60,2%	39,8%
2021	60,5%	39,5%
2022	61,0%	39,0%

Fonte: ABRELPE (2020), (2021), (2022).

Ao longo dos anos, temos observado uma tendência positiva na gestão de RSU, com um aumento significativo na disposição correta desses resíduos em aterros sanitários e uma correspondente redução na prática de envio aos lixões. Esse movimento reflete uma maior conscientização ambiental e um compromisso crescente com a preservação do meio ambiente e a saúde pública.

Entretanto, recentemente, no relatório do ano de 2022, foi observado que a disposição final em aterros sanitários alcançou a taxa de 61%, destacando que os demais 39% ainda são destinados a lixões e aterros controlados. Essa realidade nos lembra da necessidade contínua de estudos aprofundados sobre a destinação desses resíduos, visando a proteção da saúde dos seres vivos e a preservação do meio ambiente, garantindo que a positiva trajetória na gestão de resíduos seja mantida e expandida.

Destaca-se que no ano de 2010, o Governo Federal promulgou a Lei 12.305, instituindo a Política Nacional de Resíduos Sólidos (PNRS), estabelecendo um marco jurídico fundamental para a gestão do setor de resíduos sólidos. Ao elencar as premissas e diretrizes para o manejo de resíduos sólidos, a PNRS atribui à União, estados e municípios papéis distintos, porém complementares. Além disso, a nova lei estabeleceu alguns mecanismos de alcance para uma das suas principais metas, sendo ela a eliminação de todos os vazadouros a céu aberto existentes no país até o ano de 2014 (HEBER; SILVA, 2014), o que ainda não ocorreu.

Como perspectivas futuras sobre os RSU no Brasil, destaca-se que após 12 anos de espera, no dia 14 de abril de 2022, o Plano Nacional de Resíduos Sólidos (PLANARES) foi publicado. Anteriormente a Lei 12.305 de 2010 que instituiu a PNRS, e que previa a elaboração do PLANARES, onde deveriam ser apresentados programas, projetos e ações para o atendimento das metas previstas em Lei e conseqüentemente melhorar a gestão de resíduos sólidos no Brasil. Além disso, o Plano tem horizonte de 20 anos, sendo atualizado a cada quatro anos.

Um dos pontos mais importantes do PLANARES é quando mencionado o Programa Nacional Lixão Zero, o qual foi criado pelo Ministério do Meio Ambiente em 2019. Este programa prevê a erradicação dos lixões em território nacional, minimiza-

ção dos impactos ambientais decorrentes das pressões que os RSU exercem sobre os recursos naturais e realizar as mudanças necessárias para a destinação ambientalmente adequada dos resíduos sólidos.

Neste mesmo contexto, o PLANARES (2022) estipula nove metas para o RSU, entre elas:

- Meta 3: destaca a eliminação de práticas de disposição final inadequada e encerrar lixões e aterros controlados até 2024. Entretanto, no ano de 2020 ainda existiam 3001 pontos que dispõem inadequadamente o RSU, ou seja, estas unidades inadequadas recebem diariamente mais de 80 mil toneladas de resíduos, tornando estes locais detentores de índices elevados de poluição ambiental;
- Meta 5: comenta sobre a promoção da inclusão social e emancipação econômica de catadores de materiais reutilizáveis e recicláveis;
- Metas 6, 7, 8 e 9: mencionam sobre a recuperação da fração seca, reciclagem da fração orgânica, recuperação e aproveitamento energético de biogás e por meio de tratamento térmico de RSU, respectivamente.

Outro ponto bastante destacado no documento da PLANARES (2022), é a previsão de que em 20 anos ocorra a recuperação de 48,1% da massa total de RSU em âmbito nacional, desta forma, quase metade do lixo gerado deverá deixar de ser aterrado e passar a ser reaproveitado por meio da reciclagem, compostagem, biodigestão e recuperação energética. Atualmente, apenas 2,2% dos RSU são reciclados.

3 MODELO MATEMÁTICO

3.1 Mecanismos de transporte de contaminantes em solos

O conhecimento do mecanismo de transporte de massa nos solos é de fundamental importância para o entendimento do comportamento da dispersão de poluentes. Especificamente neste trabalho, visto que é abordado efluentes que escoam de um aterro sanitário.

De acordo com Gilham (1987), há uma ampla variedade de processos que estão envolvidos no transporte de solutos. No entanto, esses processos são difíceis de quantificar e complexos de modelar devido à diversidade de materiais geológicos, às características do substrato, às condições geotécnicas do local e às propriedades dos poluentes envolvidos no problema.

Ainda, Lima (2018) define o transporte de soluto em solos como o movimento dos compostos dissolvidos na água através dos poros do solo. Esse movimento depende de uma série de fatores, incluindo as características da solução (densidade, concentração, polaridade, solubilidade, cossolvência, volatilidade, pH, potencial iônico, teor e finura de sólidos em suspensão), as propriedades do solo (teor e tipo de matéria orgânica, distribuição granulométrica, mineralogia, teor de finos, distribuição de vazios, capacidade de troca catiônica, permeabilidade e grau de saturação) e as condições ambientais (temperatura, presença de micro-organismos, pressão e tempo).

Os principais processos envolvidos no transporte de contaminantes podem ser divididos em mecanismos de migração (que permitem o deslocamento) e mecanismos de atenuação (que retardam ou desaceleram a migração). Isso compreende os processos de advecção, dispersão hidrodinâmica (dispersão mecânica e difusão molecular), adsorção, precipitação e complexação (PEREIRA; CHANG; SOTO, 2011).

De forma geral, pode-se organizar os mecanismos fundamentais de transporte de poluentes em solos em classificações físicas e químicas, com as seguintes subdivisões a seguir:

Tabela 4 – Processos envolvidos no transporte de contaminantes.

Processos físicos	Advecção Difusão Molecular Dispersão Mecânica
Processos químicos	Adsorção-Desorção e Troca Iônica Precipitação-Dissolução Óxido-Redução Co-solvência Complexação Filtração

Fonte: Moncada (2004).

Estes processos citados na Tabela 4 serão melhores explicados a seguir.

3.1.1 Processos Físicos

3.1.1.1 Advecção

A advecção é um dos mecanismos de transporte de maior influência na migração de contaminantes (MACKAY; ROBERTS; CHERRY, 1985). Sendo que este processo resulta de um fluxo que transporta a substância no espaço sem alterar a sua identidade ou sem que a substância sofra reação química (CHAPRA, 1997). Ou seja, os sólidos dissolvidos são carregados junto com a água subterrânea que flui. A quantidade de soluto transportada depende da sua concentração nas águas subterrâneas e da quantidade de água subterrânea em movimento.

A velocidade média de água nos poros, também chamada de velocidade de advecção na direção y , dada pelo termo V_y , é definida por:

$$V_y = \frac{K}{n_e} \frac{dh}{dl}, \quad (1)$$

sendo K a condutividade hidráulica, n_e é a porosidade eficaz e $\frac{dh}{dl}$ é o gradiente hidráulico. Além disso, a abreviatura n é usada no contexto de fluxo e transporte sob condições saturadas.

Desse modo o fluxo advectivo de massa de soluto (contaminante) em meios porosos é fornecido por:

$$F_a = V_y n_e C, \quad (2)$$

onde, F_a é o fluxo advectivo do soluto e C a concentração do contaminante.

3.1.1.2 Dispersão Hidrodinâmica

De acordo com Freeze; Cherry (1979), a dispersão hidrodinâmica é um fenômeno em que ocorre a propagação do soluto por diferentes trajetórias no solo. Esse espalhamento resulta em uma ocupação maior do volume pelo contaminante em comparação com o fenômeno de advecção isolado. Conseqüentemente, a concentração diminui, enquanto a frente de contaminação aumenta sua velocidade. No entanto, nesse caso, ocorre uma transição mais suave nos valores de concentração da substância de interesse.

3.1.1.3 Difusão Molecular

Segundo Chapra (1997), a difusão molecular está ligada ao transporte de um soluto devido a movimentos aleatórios das moléculas de um fluido, podendo ocorrer inclusive quando a velocidade é nula. A direção do movimento de transporte dos solutos é do local de maior para o de menor concentração, ou seja, tais movimentos aleatórios ocorrerão enquanto houver um gradiente de concentração na região contaminada até que as partículas atinjam o equilíbrio (VASCONCELOS, 2008). Portanto, o coeficiente de difusão (D_d) é dado por:

$$D_d = \frac{D^*}{\omega}, \quad (3)$$

onde D^* é o coeficiente de difusão efetivo e ω é um coeficiente que está relacionado à tortuosidade. Ainda, Fetter; Boving; Kreamer (2018) destacam que em meios porosos, a difusão não pode ocorrer tão rapidamente quanto na água porque os íons devem seguir caminhos mais longos à medida que viajam em torno dos grãos minerais. Portanto, um coeficiente de difusão efetivo, deve ser usado.

3.1.1.4 Dispersão Mecânica

As moléculas de água em um meio poroso percorrem caminhos diferentes, logo, cada uma encontra condições de escoamento diferentes. Portanto, algumas apresentam velocidades menores e outras maiores que a velocidade específica, calculada pela lei de Darcy e pela porosidade efetiva do meio (VASCONCELOS, 2008). Essas variações da velocidade no escoamento das partículas são responsáveis pelos espalhamento do poluente, mecanismo conhecido como dispersão mecânica (BEAR, 1972).

Dessa forma, definimos o coeficiente de dispersão mecânica por:

$$\alpha_m = c_d \bar{V}, \quad (4)$$

sendo c_d é o coeficiente de dispersividade e \bar{V} é a velocidade média.

O coeficiente de dispersão hidrodinâmica (α) é definido pela soma do coeficiente

de dispersão molecular (α_d) e mecânica:

$$\alpha = \alpha_d + \alpha_m. \quad (5)$$

Com o aumento da velocidade, a dispersão mecânica acaba possuindo uma participação efetiva do processo de transporte de poluentes, podendo sobrepor-se aos efeitos da dispersão molecular.

3.1.2 Processos Químicos

Segundo Vasconcelos (2008), a composição mineralógica do solo, a superfícies específica dos sólidos, a concentração propriamente dita do poluente na solução contaminada, o tipo de substância poluente, o pH e a temperatura, exercem forte influencia nas reações químicas. Portanto, para que ocorra uma avaliação mais precisa da contaminação da água subterrânea é necessário um entendimento de como os processos químicos e físicos interagem.

3.1.2.1 Adsorção-Dessorção e Troca Iônica

Dentre as reações que podem ocorrer com a presença de um contaminante, acredita-se que a adsorção seja a mais importante no processo de amenização do fluxo do poluente (BERTICELLI et al., 2018). Albuquerque (2018), destaca que estes processos podem ser caracterizados por isotermas, ou seja, que descrevem a relação de equilíbrio entre as concentrações de poluentes oriundas da sorção e dissolução para uma dada temperatura. A isoterma é definida por:

$$S = K_d C_a, \quad (6)$$

onde, S é a massa de soluto sorvida, K_d é um coeficiente de distribuição, C_a é a concentração de soluto em solução em equilíbrio com a massa de soluto absorvido. A partir do processo acima, como resultado obtém-se o parâmetro de fator de retardamento, denominado de R , o qual é dado por:

$$R = 1 + \frac{\rho_s}{\theta} K_d, \quad (7)$$

sendo ρ_s representa a densidade aparente do aquífero, θ é a porosidade para meios saturados e K_d o coeficiente de distribuição.

3.1.2.2 Precipitação-Dissolução

A precipitação proporciona a acumulação de materiais na interface das partículas do solo, formando uma nova massa sólida e seus efeitos são bem significativos quando se trata de contaminação por metais pesados e metais de transição.

As reações de precipitação-dissolução ocorrem em função de mecanismos diferentes, porém interdependentes, Normalmente, esses mecanismos ocorrem ao mesmo tempo no ambiente (VASCONCELOS, 2008).

3.1.2.3 Óxido-Redução

As reações de oxidação e redução resultam na mudança da valência dos elementos envolvidos através do ganho ou perda de elétrons. A reação que resulta na perda de elétrons é chamada de oxidação e o ganho de elétrons é denominado de redução (ALBUQUERQUE, 2018).

3.1.2.4 Co-solvência

Consiste na dissolução de uma substância em mais de um solvente. Ocorre em geral com substâncias orgânicas como resultado da introdução de certa quantidade de um solvente orgânico na subsuperfície. A presença de solventes promove um aumento da interação entre o soluto e o solvente que ocorre juntamente com a água. A mistura resultante pode aumentar significativamente a mobilidade de substâncias em comparação com o caso em que o solvente é a água pura. Em particular, a solubilidade de uma substância orgânica pode aumentar e a capacidade de sorção do solo pode diminuir (THOME; KNOP, 2006).

3.1.2.5 Complexação

Em condições químicas especiais de temperatura e pH pode haver a formação de complexos a partir da combinação de moléculas ou átomos mais simples. Óxidos metálicos são complexos formados diretamente da solução ou em combinação com substâncias orgânicas tais como os ácidos húmicos (NOBRE, 1987).

3.1.2.6 Filtração

Além de substâncias dissolvidas, a água subterrânea contaminada muitas vezes contém partículas em suspensão, que podem ser o próprio poluente, como bactérias ou pó pouco solúvel, ou conter substâncias poluentes sorvidas, como no caso de metais ou compostos orgânicos sorvidos em grãos de argila ou matéria orgânica coloidal (DOMENICO; SCHWARTZ, 1991).

3.2 Hipóteses

Neste trabalho, foi utilizado o modelo de dispersão de efluentes no meio poroso, descrito em Albuquerque (2018), bem como as seguintes hipóteses fundamentais, considerando os processos físicos e químicos associados a migração de contaminantes no solo:

- O solo é considerado um meio poroso saturado, ou seja, todos os poros estão plenamente preenchidos de água;
- O escoamento do contaminante através do solo é transiente e bidimensional;
- O lançamento do contaminante é contínuo;
- As propriedades físicas do meio contaminante e do solo são consideradas constantes (homogêneas);
- Considera-se apenas os efeitos mecânicos na dispersão de contaminantes;
- O efeito advectivo do contaminante na direção x (componente horizontal) é desprezível quando comparado com o termo difusivo;
- O fluxo de massa em y (componente vertical) é muito maior do que em x ;
- Não há migração de contaminantes através dos contornos do eixo x ;
- O processo difusivo no solo é desprezível quando comparado a difusão no contaminante;
- Considera-se o perfil uniforme de velocidade para escoamento do contaminante.

Através da Figura 4 podemos observar o modelo bidimensional utilizado neste trabalho, onde é representado um esquema simplificado de uma célula de armazenamento de RSU, sendo o local onde ocorre o transporte da concentração de contaminantes através do meio poroso até chegar no lençol freático, em que $y = 0$ representa a fronteira entre o aterro sanitário e o solo e $y = L_y$ representa o limite entre o solo e o lençol freático.

Conforme apresentado no trabalho de Albuquerque (2018), a equação que modela o transporte de contaminante num meio poroso saturado é dada por:

$$R \frac{\partial C}{\partial t} = \alpha \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \right) - V_y \frac{\partial C}{\partial y}, \quad (8)$$

onde R foi definido em (7), C é a concentração do contaminante, t é o tempo, α foi definido em (5), x é a coordenada horizontal de massa transportada, y é definido como coordenada vertical na direção do fluxo e V_y representa a velocidade de advecção na direção y , dada pela expressão (1).

Para o problema em estudo serão utilizadas duas condições de contorno na direção x , onde é considerada a condição de contorno para $x = 0$, isto é, o fluxo de concentração de contaminante nessa direção para qualquer y entre 0 e L_y será nulo:

$$\frac{\partial C(0, y, t)}{\partial x} \approx 0, \quad (9)$$

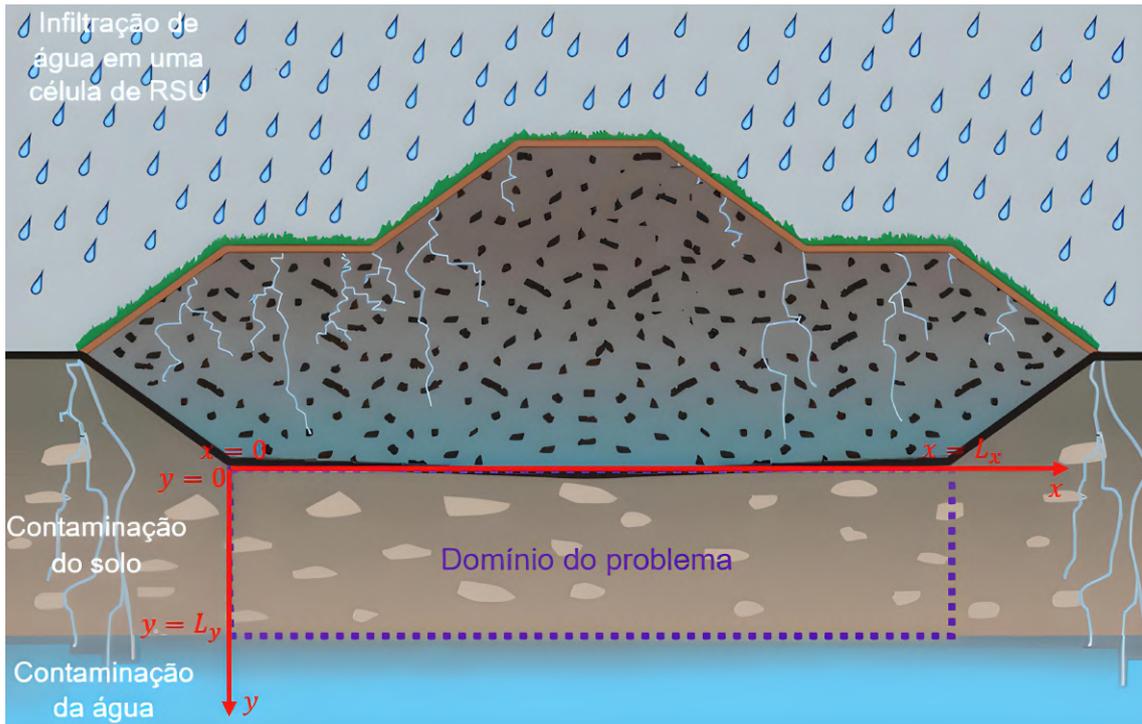


Figura 4 – Corte da seção de um aterro sanitário.
Fonte: Adaptado de CONDER (2017).

Com relação a $x = L_x$, é considerado que a concentração de contaminante foi totalmente diluída, deste modo também não se tem fluxo de concentração de contaminante, portanto:

$$\frac{\partial C(L_x, y, t)}{\partial x} \approx 0, \quad (10)$$

Da mesma forma, serão utilizadas duas condições de contorno na direção y :

$$C(x, 0, t) = C_0, \quad (11)$$

onde C_0 é a concentração na interface aterro/solo, sendo que a condição (11) corresponde ao vazamento contínuo e uniforme de chorume de uma célula de RSU. Também tem-se:

$$-\alpha \frac{\partial C}{\partial y}(x, L_y, t) = h_m(C - C_\infty), \quad (12)$$

sendo L_y é considerada a distância do chorume ao lençol freático, h_m representa o coeficiente de película de transferência de massa, C_∞ representa a concentração de contaminante na interface solo/lençol freático. A condição de contorno (12) representa o fluxo convectivo situada na parte de contato entre o solo e o lençol freático.

E para a condição inicial, temos:

$$C(x, y, 0) = C_i, \quad (13)$$

onde C_i é a concentração inicial do contaminante na célula de armazenamento de RSU.

3.3 Processo de adimensionalização

Na sequência será apresentado o processo de adimensionalização para a equação (8), pois segundo Çengel; Cimbala (2007) ao realizar-se a adimensionalização, as relações entre os parâmetros-chave do problema são identificadas, além de o número de parâmetros em uma equação adimensional ser menor do que o número de parâmetros no espaço original.

Entretanto, sabe-se que para atender as normas é necessário de valores absolutos, contudo, não são encontrados valores de experimentos realizados, seja em pesquisas de campos ou laboratoriais, que abordem as características do presente estudo. Com a realização do processo de adimensionalização, a solução admite outros tipos de escola, pois o modelo possui liberdade de escala pois uma constante multiplicada pela solução, continua sendo solução. Além disso, o presente trabalho tem como objetivo verificar como os parâmetros estudados representam a física que esta sendo parametrizada e levada em consideração para o problema.

Desta forma, para este processo de adimensionalização será considerado os parâmetros encontrados em Albuquerque (2018):

$$X = \frac{x}{L_x}, \quad (14)$$

onde X é a coordenada horizontal de massa transportada adimensionalizada. Ainda:

$$Y = \frac{y}{L_y}, \quad (15)$$

sendo Y é a coordenada vertical na direção do fluxo adimensionalizada. Admite-se também:

$$\tau = \frac{\alpha}{L_y^2} t, \quad (16)$$

onde τ é o tempo adimensional. Considera-se também:

$$V = \frac{V_y}{\bar{V}} = 1, \quad (17)$$

tal que V é a velocidade média do fluido adimensionalizada, vale ressaltar que considera-se $V = 1$, pois o escoamento será considerado nesse trabalho do tipo pistão, ou seja, a velocidade do fluido é considerada constante, logo $V_y = \bar{V}$. Também toma-se:

$$Bi = \frac{h_m L_y}{\alpha}, \quad (18)$$

sendo Bi o número de Biot, o qual é dado pela razão do processo convectivo pelo difusivo. Admite-se ainda:

$$Pe = \frac{\bar{V}L_y}{\alpha}, \quad (19)$$

onde Pe é o número de Péclet, sendo a razão do processo advectivo pelo difusivo.

Destaca-se, ainda, que os parâmetros Bi e Pe são importantes no presente estudo por possuírem relação com diferentes outros parâmetros do modelo.

Além disso, considera-se:

$$L^* = \left(\frac{L_y}{L_x} \right)^2, \quad (20)$$

também supõe-se:

$$C^* = \frac{C - C_\infty}{\Delta C}, \quad (21)$$

sendo C^* a concentração de contaminante adimensionalizada e $\Delta C = C_0 - C_\infty$. A concentração na interface aterro/solo adimensionalizada (C_0^*) é:

$$C_0^* = \frac{C_i - C_\infty}{\Delta C}, \quad (22)$$

Reescrevendo a equação (21) e isolando C , obtém-se :

$$C = C^* \Delta C + C_\infty. \quad (23)$$

Fazendo uso dos parâmetros adimensionais, considerando $\frac{\partial C}{\partial t}$ e que $t = \frac{\tau L_y^2}{\alpha}$, tem-se:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial(C^* \Delta C + C_\infty)}{\partial(\frac{\tau L_y^2}{\alpha})}, \quad (24)$$

reescrevendo (24), obtém-se:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \alpha \frac{\Delta C}{L_y^2} \frac{\partial C^*}{\partial \tau}. \quad (25)$$

Da mesma forma, fazendo novamente o uso dos parâmetros adimensionais, resultando em:

$$\frac{\partial C}{\partial x} = \frac{\partial(C^* \Delta C + C_\infty)}{\partial(L_x X)}, \quad (26)$$

que pode ser reescrito da forma:

$$\frac{\partial C}{\partial x} = \frac{\Delta C}{L_x} \frac{\partial C^*}{\partial X}. \quad (27)$$

Em y , tem-se:

$$\frac{\partial C}{\partial y} = \frac{\partial(C^* \Delta C + C_\infty)}{\partial(L_y Y)}, \quad (28)$$

logo:

$$\frac{\partial C}{\partial y} = \frac{\Delta C}{L_y} \frac{\partial C^*}{\partial Y}. \quad (29)$$

Para o termo $\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$, tem-se:

$$\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial(L_x X)} \frac{\partial(C^* \Delta C + C_\infty)}{\partial(L_x X)}, \quad (30)$$

logo:

$$\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = \frac{\Delta C}{L_x^2} \frac{\partial^2 C^*}{\partial X^2}. \quad (31)$$

De mesma forma, considerando $\frac{\partial^2 C}{\partial y^2}$, tem-se:

$$\frac{\partial^2 C}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial(L_y Y)} \frac{\partial(C^* \Delta C + C_\infty)}{\partial(L_y Y)}, \quad (32)$$

ou seja, chega-se:

$$\frac{\partial^2 C}{\partial y^2} = \frac{\Delta C}{L_y^2} \frac{\partial^2 C^*}{\partial Y^2}. \quad (33)$$

Substituindo a equação (25), (29), (31) e (33) na equação (8):

$$R \left(\alpha \frac{\Delta C}{L_y^2} \frac{\partial C^*}{\partial \tau} \right) = \alpha \left(\frac{\Delta C}{L_x^2} \frac{\partial^2 C^*}{\partial X^2} + \frac{\Delta C}{L_y^2} \frac{\partial^2 C^*}{\partial Y^2} \right) - V_y \frac{\Delta C}{L_y} \frac{\partial C^*}{\partial Y}, \quad (34)$$

multiplicando ambos os lados por $\frac{L_y^2}{\Delta C \alpha}$, obtém-se:

$$R \left(\alpha \frac{\Delta C}{L_y^2} \frac{\partial C^*}{\partial \tau} \right) \frac{L_y^2}{\Delta C \alpha} = \alpha \left(\frac{\Delta C}{L_x^2} \frac{\partial^2 C^*}{\partial X^2} + \frac{\Delta C}{L_y^2} \frac{\partial^2 C^*}{\partial Y^2} \right) \frac{L_y^2}{\Delta C \alpha} - V_y \frac{\Delta C}{L_y} \frac{\partial C^*}{\partial Y} \frac{L_y^2}{\Delta C \alpha}, \quad (35)$$

simplificando os termos da equação (35):

$$R \frac{\partial C^*}{\partial \tau} = \frac{L_y^2}{L_x^2} \frac{\partial^2 C^*}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 C^*}{\partial Y^2} - \frac{V_y L_y}{\alpha} \frac{\partial C^*}{\partial Y}, \quad (36)$$

como suposto anteriormente $L^* = \left(\frac{L_y}{L_x} \right)^2$, $V_y = \bar{V}$ e $\frac{\bar{V} L_y}{\alpha} = Pe$, obtém-se:

$$R \frac{\partial C^*}{\partial \tau} = L^* \frac{\partial^2 C^*}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 C^*}{\partial Y^2} - Pe \frac{\partial C^*}{\partial Y}, \quad (37)$$

a equação (37) conhecida como a equação governante do transporte de contaminante no meio poroso saturado na forma adimensional.

Em relação a condição de contorno em X dada pela equação (9), substituindo (27) em (9):

$$\frac{\Delta C}{L_x} \frac{\partial C^*}{\partial X}(0, Y, \tau) = 0, \quad (38)$$

a qual pode ser reescrita da forma:

$$\frac{\partial C^*}{\partial X}(0, Y, \tau) = 0. \quad (39)$$

Em relação a segunda condição em X dada pela equação (10), substituindo (27) em (10):

$$\frac{\Delta C}{L_x} \frac{\partial C^*}{\partial X}(1, Y, \tau) = 0, \quad (40)$$

obtendo assim:

$$\frac{\partial C^*}{\partial X}(1, Y, \tau) = 0. \quad (41)$$

Considerando a primeira condição de contorno na direção Y dada pela equação (11) e substituindo C_0 por $(\Delta C + C_\infty)$ e C por $(C^* \Delta C + C_\infty)$:

$$C^*(X, 0, \tau) \Delta C + C_\infty = \Delta C + C_\infty, \quad (42)$$

como os termos ΔC e C_∞ da equação (42) simplificam-se, tem-se:

$$C^*(X, 0, \tau) = 1, \quad (43)$$

sendo que a condição (43) representa a concentração constante na célula de RSU que fica entre o aterro e o solo, representada pela equação adimensionalizada.

Em relação a segunda condição de contorno dada pela equação (12), substituindo a equação (29) e considerando que $C - C_\infty = C^* \Delta C$, da equação (21):

$$\alpha \frac{\Delta C}{L_y} \frac{\partial C^*}{\partial Y}(X, 1, \tau) = -h_m C^*(X, 1, \tau) \Delta C, \quad (44)$$

simplificando e reescrevendo a equação (44):

$$\frac{\partial C^*}{\partial Y}(X, 1, \tau) + \frac{h_m L_y}{\alpha} C^*(X, 1, \tau) = 0, \quad (45)$$

e considerando $\frac{h_m L_y}{\alpha} = Bi$, tem-se:

$$\frac{\partial C^*}{\partial Y}(X, 1, \tau) + Bi C^*(X, 1, \tau) = 0. \quad (46)$$

Logo, a condição de contorno (46) está na forma adimensional, a qual representa o fluxo convectivo situada na parte de contato entre o solo e o lençol freático. Além da equação estar na forma homogênea o que é importante para a utilização da separação de variáveis posteriormente.

Em relação a condição inicial do problema, substitui-se as equações (22) e (23) na

equação (13):

$$C^*(X, Y, 0)\Delta C + C_\infty = C_0^*\Delta C + C_\infty, \quad (47)$$

e, simplificando:

$$C^*(X, Y, 0) = C_0^*. \quad (48)$$

Sendo que a equação (48) agora está da forma adimensional e corresponde ao vazamento contínuo e uniforme de chorume em uma célula de RSU.

Portanto, com o processo de adimensionalização, obtém-se:

$$\begin{cases} R\frac{\partial C^*}{\partial \tau} = L^*\frac{\partial^2 C^*}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 C^*}{\partial Y^2} - Pe\frac{\partial C^*}{\partial Y}, & \text{(Equação na forma adimensional)} \\ C^*(X, Y, 0) = C_0^*, & \text{(Condição inicial)} \\ \frac{\partial C^*}{\partial X}(0, Y, \tau) = 0, \quad \frac{\partial C^*}{\partial X}(1, Y, \tau) = 0, & \text{(Condições de contorno em } X) \\ C^*(X, 0, \tau) = 1, \quad \frac{\partial C^*}{\partial Y}(X, 1, \tau) + BiC^*(X, 1, \tau) = 0. & \text{(Condições de contorno em } Y) \end{cases} \quad (49)$$

3.4 Resolução da equação pelo método GILTT

Com as equações adimensionalizadas, representadas de forma coletiva por (49), inicia-se a resolução do problema.

O método da GILTT exige que as condições de contorno sejam homogêneas, mas isto não ocorre com a condição de contorno na direção Y . Com o objetivo de homogeneizá-las será utilizado o método de superposição (HAHN; ÖZISIK, 1993) para que a GILTT possa ser aplicada adequadamente:

$$C^*(X, Y, \tau) = C^{**}(X, Y, \tau) + C_E(Y), \quad (50)$$

onde C^{**} é uma função auxiliar que leva consigo a condição de fronteira homogênea e C_E é a solução para o problema no estado estacionário. Assim, substituindo (50) na equação que governa o transporte de poluentes no meio poroso:

$$R\frac{\partial C^{**}}{\partial \tau} = L^*\frac{\partial^2 C^{**}}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 C^{**}}{\partial Y^2} + \frac{d^2 C_E}{dY^2} - Pe\left(\frac{\partial C^{**}}{\partial Y} + \frac{dC_E}{dY}\right), \quad (51)$$

usando a propriedade da distributividade:

$$R\frac{\partial C^{**}}{\partial \tau} = L^*\frac{\partial^2 C^{**}}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 C^{**}}{\partial Y^2} + \frac{d^2 C_E}{dY^2} - Pe\frac{\partial C^{**}}{\partial Y} - Pe\frac{dC_E}{dY}. \quad (52)$$

A partir da equação (52), temos duas equações diferenciais, uma EDO e outra equação diferencial parcial (EDP).

A equação que representa a EDO é dada por (53):

$$\frac{d^2 C_E}{dY^2} - Pe\frac{dC_E}{dY} = 0, \quad (53)$$

e as condições de contorno são dadas pelas seguintes equações:

$$C_E(0) = 1, \quad (54)$$

$$\frac{dC_E(1)}{dY} + BiC_E(1) = 0. \quad (55)$$

Para a resolução da equação diferencial (53) devemos determinar a equação característica associada:

$$\xi^2 - Pe\xi = 0 \Rightarrow \begin{cases} \xi_1 = 0, \\ \xi_2 = Pe. \end{cases} \quad (56)$$

Como a equação característica (56) possui duas raízes distintas, temos que a solução geral é da forma:

$$C_E(Y) = c_1 + c_2 e^{PeY}. \quad (57)$$

Usando as condições de contorno dadas por (54) e (55), obtém-se:

$$c_1 = \frac{-e^{Pe}Pe - Bi e^{Pe}}{Bi - e^{Pe}Pe - Bi e^{Pe}}, \quad c_2 = \frac{Bi}{Bi - e^{Pe}Pe - Bi e^{Pe}}, \quad (58)$$

logo a equação (53) possui a solução analítica dada por:

$$C_E(Y) = \frac{e^{Pe}(Pe + Bi) - Bi e^{PeY}}{e^{Pe}(Pe + Bi) - Bi}. \quad (59)$$

De maneira análoga, a EDP obtida da equação (52) é dada por:

$$R \frac{\partial C^{**}}{\partial \tau} = L^* \frac{\partial^2 C^{**}}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 C^{**}}{\partial Y^2} - Pe \frac{\partial C^{**}}{\partial Y}, \quad (60)$$

e as suas condições de contorno na direção X são fornecidas pelas seguintes equações:

$$\frac{\partial C^{**}}{\partial X}(0, Y, \tau) = 0, \quad (61)$$

$$\frac{\partial C^{**}}{\partial X}(1, Y, \tau) = 0, \quad (62)$$

e as suas condições de contorno na direção Y são fornecidas pelas seguintes equações (63) e (64):

$$C^{**}(X, 0, \tau) = 0, \quad (63)$$

$$\frac{\partial C^{**}}{\partial Y}(X, 1, \tau) + BiC^{**}(X, 1, \tau) = 0, \quad (64)$$

e a condição inicial de (60) é dada por:

$$C^{**}(X, Y, 0) = C_0^* - C_E(Y). \quad (65)$$

Para obter a solução $C^{**}(X, Y, \tau)$ da equação descrita acima, utilizou-se o método GILTT. Para isso, primeiramente, é tomado o problema auxiliar de Sturm-Liouville considerando a direção X :

$$\frac{d^2\varphi}{dX^2} + \frac{\lambda^2}{L^*} \varphi = 0, \quad (66)$$

$$\frac{d\varphi(0)}{dX} = 0, \quad (67)$$

$$\frac{d\varphi(1)}{dX} = 0, \quad (68)$$

sendo que a equação diferencial possui como solução as autofunções (HAHN; ÖZISIK, 1993):

$$\varphi_n(X) = \cos\left(\frac{\lambda_n}{\sqrt{L^*}}X\right), \quad (69)$$

aplicando as condições de contorno, obtemos os autovalores associados a cada autofunção. Eles devem satisfazer a seguinte equação:

$$\lambda_n = n\pi\sqrt{L^*}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (70)$$

A seguir, a solução da EDP (60) é expandida como uma série em termo das autofunções da equação (69):

$$C^{**}(X, Y, \tau) = \sum_{n=0}^N \varphi_n(X) \bar{C}_n(Y, \tau), \quad (71)$$

onde $\bar{C}_n(\tau)$ são termos a serem determinados e N é o índice no qual a soma (81) converge, sendo a expansão da concentração com base nas autofunções do problema auxiliar.

Substituindo a solução (71) na equação (60):

$$R \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\sum_{n=0}^N \bar{C}_n(Y, \tau) \varphi_n(X) \right] = L^* \left[\sum_{n=0}^N \bar{C}_n(Y, \tau) \varphi_n''(X) \right] + \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \left[\sum_{n=0}^N \bar{C}_n(Y, \tau) \varphi_n(X) \right] - Pe \frac{\partial}{\partial Y} \left[\sum_{n=0}^N \bar{C}_n(Y, \tau) \varphi_n(X) \right], \quad (72)$$

e aplicando o operador integral $\int_0^1 (\cdot) \varphi_m(X) dX$ em ambos lados da equação, notando

que, pela equação (70), $\varphi_n''(X) = -\lambda_n^2 \varphi_n(X)$, obtemos:

$$R \frac{\partial \bar{C}_n(Y, \tau)}{\partial \tau} \left[\sum_{n=0}^N \int_0^1 \varphi_m(X) \varphi_n(X) dX \right] = -\lambda_n^2 \bar{C}_n(Y, \tau) \left[\sum_{n=0}^N \int_0^1 \varphi_m(X) \varphi_n(X) dX \right] + \frac{\partial^2 \bar{C}_n(Y, \tau)}{\partial Y^2} \left[\sum_{n=0}^N \int_0^1 \varphi_m(X) \varphi_n(X) dX \right] - Pe \frac{\partial \bar{C}_n(Y, \tau)}{\partial Y} \left[\sum_{n=0}^N \int_0^1 \varphi_m(X) \varphi_n(X) dX \right]. \quad (73)$$

Seja $d_{m,n} = \int_0^1 \varphi_m(X) \varphi_n(X) dX$ da equação, calculando seu valor concluímos que

$$d_{m,n} = \int_0^1 \varphi_m(X) \varphi_n(X) dX = \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq n, \\ 1, & \text{se } m = n = 0, \\ \frac{1}{2}, & \text{se } m = n \neq 0. \end{cases} \quad (74)$$

Portanto, em todos os somatórios da equação (73) os termos são todos nulos, exceto quando $m = n$. Portanto, (73) se resume em:

$$R \frac{\partial \bar{C}_n(Y, \tau)}{\partial \tau} = -\lambda_n^2 \bar{C}_n(Y, \tau) + \frac{\partial^2 \bar{C}_n(Y, \tau)}{\partial Y^2} - Pe \frac{\partial \bar{C}_n(Y, \tau)}{\partial Y}. \quad (75)$$

Para a resolução da EDP (75), resolvemos o problema auxiliar de Sturm-Liouville em Y :

$$\frac{d^2 \psi}{dY^2} + \beta^2 \psi = 0, \quad (76)$$

$$\psi(0) = 0, \quad (77)$$

$$\frac{d\psi(1)}{dY} + Bi\psi(1) = 0, \quad (78)$$

sendo que a equação diferencial possui como solução as autofunções (HAHN; ÖZISIK, 1993):

$$\psi_k(Y) = \text{sen}(\beta_k Y), \quad (79)$$

aplicando as condições de contorno, obtemos os autovalores associados a cada autofunção, eles devem satisfazer a seguinte equação transcendental:

$$\beta_k \cot(\beta_k) + Bi = 0, \quad (80)$$

os autovalores β_k são as raízes da equação transcendental (80) e foram calculados pelo método de Newton-Raphson.

A seguir, a solução da EDP (75) é expandida como uma série em termo das auto-

funções:

$$\bar{C}_n(Y, \tau) = \sum_{k=0}^K \psi_k(Y) \tilde{C}_k(\tau), \quad (81)$$

onde $\tilde{C}_k(\tau)$ são termos a serem determinados e K é o índice no qual a equação (81) converge, sendo a expansão da concentração com base nas autofunções do problema auxiliar.

Substituindo a expansão (81) na equação (75):

$$R \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\sum_{k=0}^K \psi_k(Y) \tilde{C}_k(\tau) \right] = -\lambda_n^2 \left[\sum_{k=0}^K \psi_k(Y) \tilde{C}_k(\tau) \right] + \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \left[\sum_{k=0}^K \psi_k(Y) \tilde{C}_k(\tau) \right] - Pe \frac{\partial}{\partial Y} \left[\sum_{k=0}^K \psi_k(Y) \tilde{C}_k(\tau) \right], \quad (82)$$

e aplicando o operador integral $\int_0^1 (\cdot) \psi_l(Y) dY$ em ambos lados da equação, notando que, pela equação (76), $\psi_k''(Y) = -\beta_k^2 \psi_k(Y)$:

$$\tilde{C}_k'(\tau) \left[\sum_{k=0}^K R \int_0^1 \psi_k(Y) \psi_l(Y) dY \right] = \tilde{C}_k(\tau) \left\{ -\lambda_n^2 \left[\sum_{k=0}^K \int_0^1 \psi_k(Y) \psi_l(Y) dY \right] - \beta_k^2 \left[\sum_{k=0}^K \int_0^1 \psi_k(Y) \psi_l(Y) dY \right] - Pe \left[\sum_{k=0}^K \int_0^1 \psi_k'(Y) \psi_l(Y) dY \right] \right\}, \quad (83)$$

podendo ser reescrita da forma:

$$\tilde{C}_k'(\tau) \left[\sum_{k=0}^K R \int_0^1 \psi_k(Y) \psi_l(Y) dY \right] + \tilde{C}_k(\tau) (\lambda_n^2 + \beta_k^2) \left[\sum_{k=0}^K \int_0^1 \psi_k(Y) \psi_l(Y) dY \right] + \left[\sum_{k=0}^K Pe \int_0^1 \psi_k'(Y) \psi_l(Y) dY \right] = 0. \quad (84)$$

Logo, reescrevemos a equação (84) na forma matricial:

$$A \cdot Z'(\tau) + B \cdot Z(\tau) = 0, \quad (85)$$

onde $Z(\tau) = \{\tilde{C}_k\}$, com $k = 0, 1, 2, \dots$; $A = \{a_{k,l}\}$, onde $a_{k,l} = R \int_0^1 \psi_k(Y) \psi_l(Y) dY$ e $B = \{b_{k,l}\}$, onde $b_{k,l} = (\lambda_n^2 + \beta_k^2) \int_0^1 \psi_k(Y) \psi_l(Y) dY + Pe \int_0^1 \psi_k'(Y) \psi_l(Y) dY$.

Ainda, considerando $F = A^{-1} \cdot B$, reescreve-se a equação (85) da forma:

$$Z'(\tau) + F \cdot Z(\tau) = 0. \quad (86)$$

A condição inicial da equação diferencial matricial, obtém-se aplicando os mesmos

procedimentos, realizados na EDP, na equação (65). Obtendo como resultado:

$$Z(0) = A^{-1} \cdot H, \quad (87)$$

onde $H = R \int_0^1 [C_0^* - C_E(Y)] \psi_l(Y) dY$ e desta forma a condição inicial está bem definida.

Finalmente, resolvemos a EDO matricial (86). Aplicando a transformada de Laplace, denotada por $\mathcal{L}\{(\cdot), \tau \rightarrow s\}$, em ambos os lados:

$$s\mathcal{L}\{Z(\tau), \tau \rightarrow s\} - Z(0) + F \cdot \mathcal{L}\{Z(\tau), \tau \rightarrow s\} = 0. \quad (88)$$

Considerando que a matriz F da equação (88) seja diagonalizável, tem-se:

$$F = X \cdot D \cdot X^{-1}, \quad (89)$$

onde D é a matriz diagonal cujos elementos são os autovalores de F , X é a matriz cujas colunas são os autovetores linearmente independentes de F e X^{-1} é sua inversa. Substituindo a equação (89) na (88):

$$s\mathcal{L}\{Z(\tau), \tau \rightarrow s\} - Z(0) + X \cdot D \cdot X^{-1} \cdot \mathcal{L}\{Z(\tau), \tau \rightarrow s\} = 0, \quad (90)$$

a qual pode ser reescrita da forma:

$$s\mathcal{L}\{Z(\tau), \tau \rightarrow s\} + X \cdot D \cdot X^{-1} \cdot \mathcal{L}\{Z(\tau), \tau \rightarrow s\} = Z(0), \quad (91)$$

isolando o termo $\mathcal{L}\{Z(\tau), \tau \rightarrow s\}$, obtém-se:

$$\mathcal{L}\{Z(\tau), \tau \rightarrow s\} = X \cdot (s \cdot I + D)^{-1} \cdot X^{-1} \cdot Z(0). \quad (92)$$

Aplicando a transformada inversa de Laplace, denotada por $\mathcal{L}^{-1}\{(\cdot), s \rightarrow \tau\}$, em ambos lados da equação (92), concluí-se que:

$$Z(\tau) = X \cdot \mathcal{L}^{-1}\{(s \cdot I + D)^{-1}, s \rightarrow \tau\} \cdot X^{-1} \cdot Z(0), \quad (93)$$

denotamos a matriz $(s \cdot I + D)$ da forma:

$$(s \cdot I + D) = \begin{pmatrix} s + d_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s + d_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & s + d_N \end{pmatrix}, \quad (94)$$

denotando por d_0, d_1, \dots, d_N os autovalores da matriz F . Da estrutura diagonal da

matriz, pode-se escrever a inversa da matriz como:

$$(s \cdot I + D)^{-1} = \begin{pmatrix} s + d_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s + d_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & s + d_N \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{s+d_0} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+d_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{s+d_N} \end{pmatrix}, \quad (95)$$

aplicando a transformada inversa de Laplace elemento a elemento, resulta em:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\{(s \cdot I + D)^{-1}, s \rightarrow \tau\} &= \\ &= \begin{pmatrix} \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s+d_0}, s \rightarrow \tau\} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s+d_1}, s \rightarrow \tau\} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s+d_N}, s \rightarrow \tau\} \end{pmatrix}, \quad (96) \end{aligned}$$

executando a inversão da transformada de Laplace na equação (96) e usando os resultados padrões da teoria da transformada de Laplace, que podem ser encontrados tabelados em livros como Spiegel (1965), onde $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s+a}\} = e^{-a\tau}$, sendo $a = d_0, d_1, \dots, d_N$, obtém-se:

$$\mathcal{L}^{-1}\{(s \cdot I + D)^{-1}, s \rightarrow \tau\} = \begin{pmatrix} e^{-d_0\tau} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{-d_1\tau} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{-d_N\tau} \end{pmatrix} = G(\tau). \quad (97)$$

Com a matriz $G(\tau)$ definida em (97), conclui-se que a solução da EDO matricial (86) é:

$$Z(\tau) = X \cdot G(\tau) \cdot X^{-1} \cdot Z(0). \quad (98)$$

Portanto, a solução do modelo bidimensional da dispersão de poluentes em meios porosos, representadas pelas equações (49) é dada por:

$$C^*(X, Y, \tau) = \sum_{n=0}^N \varphi_n(X) \left[\sum_{k=0}^K \psi_k(Y) \tilde{C}_k(\tau) \right] + C_E(Y), \quad (99)$$

onde $\varphi_n(X)$ é definida pela equação (69), onde $\varphi_n(X) = \cos\left(\frac{\lambda_n}{\sqrt{L^*}}X\right)$ e $\psi_k(Y)$ é definida na equação (79), onde $\psi_k(Y) = \text{sen}(\beta_k Y)$ e $\tilde{C}_k(\tau)$ é definida por (98), onde $Z(\tau) = \{\tilde{C}_k\}$.

3.5 Resolução da equação pelo método de Separação de Variáveis

Além de ser apresentada a solução via método GILTT, também será apresentada a solução pelo método de Separação de Variáveis, pois é uma técnica validada na resolução do problema de dispersão de poluentes em diferentes meios, além da utilidade em casos unidimensional ou bidimensional e amplamente difundido na literatura. Além disso, Hahn; Özisik (1993) destacam que o método é altamente útil na solução de problemas de valor de contorno no campo da físico-matemática para problemas homogêneos.

Desta forma, para obter a solução $C^{**}(X, Y, \tau)$ da equação (50), utilizou-se o método de Separação de Variáveis. Através desta abordagem, busca-se alcançar uma solução analítica para a equação de advecção-difusão aplicada ao problema da dispersão de poluentes no meio poroso, assumindo que a solução transiente é da forma:

$$C^{**}(X, Y, \tau) = \psi(X)\phi(Y)\Gamma(\tau), \quad (100)$$

portanto, tem-se:

$$\frac{\partial C^*}{\partial \tau} = \frac{\partial[\psi(X)\phi(Y)\Gamma(\tau)]}{\partial \tau} = \psi(X)\phi(Y)\frac{d\Gamma(\tau)}{d\tau}, \quad (101)$$

$$\frac{\partial^2 C^*}{\partial X^2} = \frac{\partial^2[\psi(X)\phi(Y)\Gamma(\tau)]}{\partial X^2} = \phi(Y)\Gamma(\tau)\frac{d^2\psi(X)}{dX^2}, \quad (102)$$

$$\frac{\partial^2 C^*}{\partial Y^2} = \frac{\partial^2[\psi(X)\phi(Y)\Gamma(\tau)]}{\partial Y^2} = \psi(X)\Gamma(\tau)\frac{d^2\phi(Y)}{dY^2}, \quad (103)$$

$$\frac{\partial C^*}{\partial Y} = \frac{\partial[\psi(X)\phi(Y)\Gamma(\tau)]}{\partial Y} = \psi(X)\Gamma(\tau)\frac{d\phi(Y)}{dY}. \quad (104)$$

Substituindo (101), (102), (103) e (104) na equação que governa o transporte de poluentes na forma adimensional (37):

$$R\psi(X)\phi(Y)\frac{d\Gamma(\tau)}{d\tau} = L^*\phi(Y)\Gamma(\tau)\frac{d^2\psi(X)}{dX^2} + \psi(X)\Gamma(\tau)\frac{d^2\phi(Y)}{dY^2} - Pe\psi(X)\Gamma(\tau)\frac{d\phi(Y)}{dY}, \quad (105)$$

dividindo ambos os lados pelo termo $\psi(X)\phi(Y)\Gamma(\tau)$, obtém-se:

$$\underbrace{R \frac{1}{\Gamma(\tau)} \frac{d\Gamma(\tau)}{d\tau}}_{=-\lambda^2} = \underbrace{L^* \frac{1}{\psi(X)} \frac{d^2\psi(X)}{dX^2}}_{=-\beta^2} + \frac{1}{\phi(Y)} \frac{d^2\phi(Y)}{dY^2} - Pe \frac{1}{\phi(Y)} \frac{d\phi(Y)}{dY}. \quad (106)$$

A partir da equação (106), resulta em:

$$\frac{d\Gamma(\tau)}{d\tau} = \frac{-\lambda^2}{R} \Gamma(\tau). \quad (107)$$

Resolvendo a EDO (107) por Separação de Variáveis:

$$\Gamma(\tau) = K_1 e^{-\frac{\lambda^2}{R}\tau}. \quad (108)$$

Considerando a EDO e as condições de contorno, pelo problema já ser conhecido, considera-se o caso em que:

$$L^* \frac{1}{\psi(X)} \frac{d^2\psi(X)}{dX^2} = -\beta^2, \quad (109)$$

ou ainda:

$$\frac{d^2\psi(X)}{dX^2} = - \underbrace{\frac{\beta^2}{L^*}}_{=a^2} \psi(X), \quad (110)$$

onde a condição de contorno é dada por:

$$\frac{d\psi}{dX} = 0, \quad X = 0, 1. \quad (111)$$

Portanto, a equação diferencial possui como solução as autofunções (HAHN; ÖZISIK, 1993):

$$\psi(X) = \cos(\alpha_n X), \quad (112)$$

onde:

$$\alpha_n = n\pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (113)$$

e então define-se:

$$\beta_n = n\pi\sqrt{L^*} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (114)$$

Por fim, obtém-se a seguinte EDO:

$$-\lambda^2 = -\beta_n^2 + \frac{1}{\phi(Y)} \frac{d^2\phi(Y)}{dY^2} - Pe \frac{1}{\phi(Y)} \frac{d\phi(Y)}{dY}. \quad (115)$$

ou então reescrevendo:

$$0 = \frac{d^2\phi(Y)}{dY^2} - Pe \frac{d\phi(Y)}{dY} + \underbrace{(\lambda^2 - \beta_n^2)}_{=v^2} \phi(Y). \quad (116)$$

Desta forma, pode-se definir:

$$\begin{cases} \phi(0) = 0, \\ \frac{d\phi(1)}{dY} + Bi \cdot \phi(1) = 0, \end{cases} \quad (117)$$

Para resolver a EDO (117), supõe-se que a solução é da forma $\phi(Y) = e^{\eta Y}$, logo:

$$\eta^2 - Pe\eta + v^2 = 0, \quad (118)$$

onde a solução é dada por:

$$\eta = \frac{Pe \pm \sqrt{Pe^2 - 4v^2}}{2}. \quad (119)$$

Para o caso em que $Pe^2 - 4v^2 = 0$ e $Pe^2 - 4v^2 > 0$ conclui-se que:

$$\phi(Y) = 0. \quad (120)$$

No caso $Pe^2 - 4v^2 < 0$ ou de forma análoga $v^2 > \frac{Pe^2}{4}$, tem-se a solução geral da forma:

$$\phi(Y) = e^{\frac{Pe}{2}Y} \left(K_2 \cos \left(\sqrt{v^2 - \left(\frac{Pe}{2}\right)^2} Y \right) + K_3 \sen \left(\sqrt{v^2 - \left(\frac{Pe}{2}\right)^2} Y \right) \right). \quad (121)$$

Aplicando as condições de contorno, obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{Pe}{2} \sen \left(\sqrt{v^2 - \left(\frac{Pe}{2}\right)^2} \right) + \sqrt{v^2 - \left(\frac{Pe}{2}\right)^2} \cos \left(\sqrt{v^2 - \left(\frac{Pe}{2}\right)^2} \right) + \\ Bi \sen \left(\sqrt{v^2 - \left(\frac{Pe}{2}\right)^2} \right) = 0. \end{aligned} \quad (122)$$

Considerando $m = \sqrt{v^2 - \left(\frac{Pe}{2}\right)^2}$, a equação (122) é simplificada para:

$$\frac{Pe}{2} \sen(m) + m \cos(m) + Bi \sen(m) = 0. \quad (123)$$

Dividindo a equação (123) por $\text{sen}(m)$ resulta em:

$$\frac{Pe}{2} + m_i \cot(m_i) + Bi = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4, \dots \quad (124)$$

Note que os valores de m são obtidos através de uma equação transcendental. Para a obtenção destes valores utiliza-se o método de Newton-Raphson. Assim os valores de v estão determinados:

$$v_i = \sqrt{m_i^2 + \left(\frac{Pe}{2}\right)^2}, \quad i = 1, 2, 3, 4, \dots \quad (125)$$

Portanto, a solução é dada por:

$$C^{**}(X, Y, \tau) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{n,i} e^{-\frac{(v_i^2 + \beta_n^2)}{R} \tau} \cos\left(\frac{\beta_n}{\sqrt{L^*}} X\right) e^{\frac{Pe}{2} Y} \text{sen}\left(\sqrt{v^2 - \left(\frac{Pe}{2}\right)^2} Y\right). \quad (126)$$

Com a condição inicial, equação (65), determina-se os valores das constantes $A_{n,i}$ na solução do problema. Assim, a solução fica:

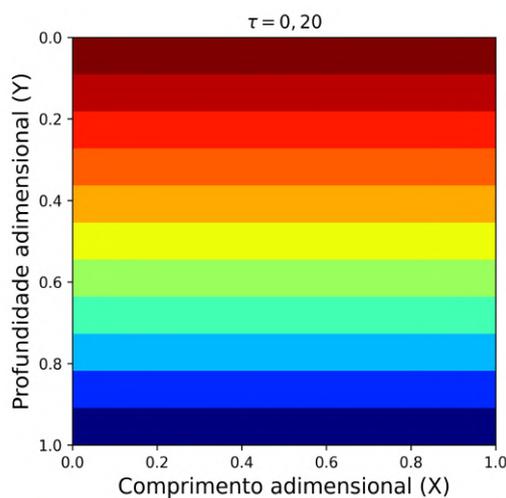
$$C^{**}(X, Y, \tau) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\int_0^1 [C_0 - C_F(Y)] e^{-\frac{Pe}{2} Y} \text{sen}\left(\sqrt{v_i^2 - \left(\frac{Pe}{2}\right)^2} Y\right) dY}{\int_0^1 \text{sen}^2\left(\sqrt{v_i^2 - \left(\frac{Pe}{2}\right)^2} Y\right) dY} e^{-\frac{(v_i^2 + \beta_n^2)}{R} \tau} e^{\frac{Pe}{2} Y} \text{sen}\left(\sqrt{Pe^2 - v_i^2} Y\right). \quad (127)$$

4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

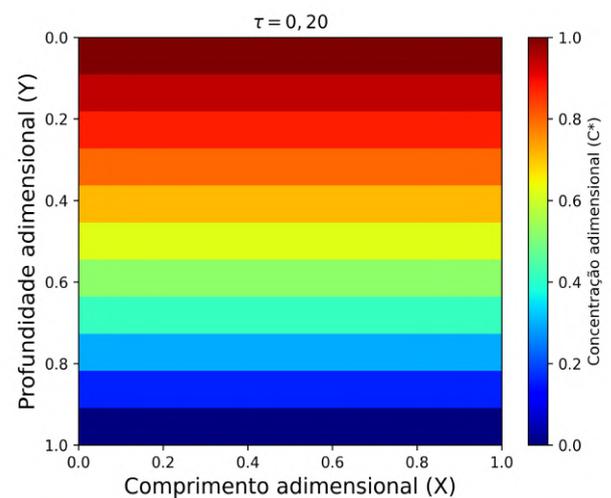
A partir das soluções obtidas pelo método GILTT, equação (99), e pela abordagem de Separação de Variáveis, equação (127), foram realizadas simulações através do software online *Google Colaboratory* em linguagem Python, onde se considerou alguns parâmetros fixos e outros variáveis, de forma a observar o mesmo problema apresentado em Albuquerque (2018). Além disso, nas simulações apresentadas a seguir, considerou-se o parâmetro $Bi = 2000$.

4.1 Influência do número de Péclet

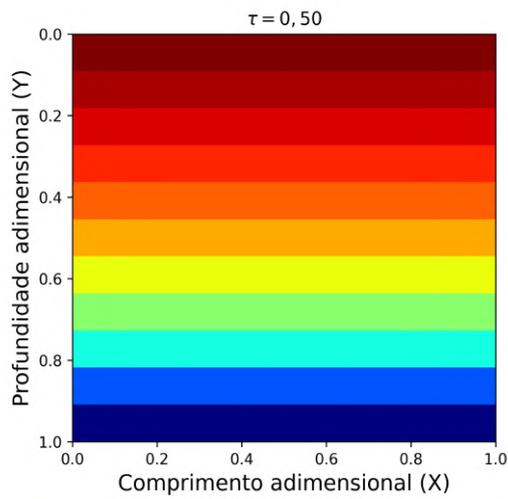
As Figuras (5a) a (5h) apresentam a distribuição da concentração adimensional do poluente considerando fixos $Pe = 2$, $R = 1$ e para diferentes valores de τ .



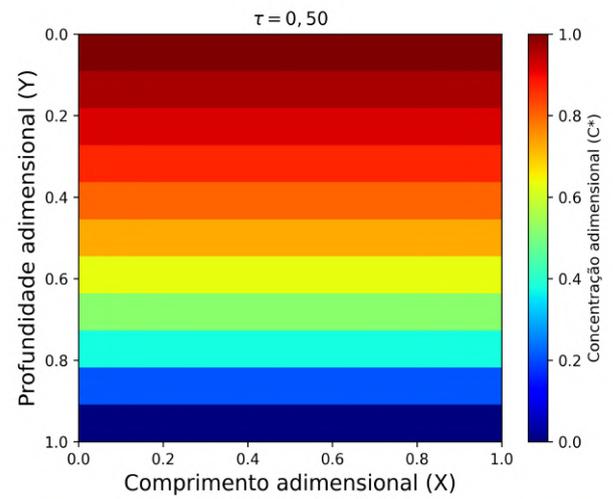
(a) GILTT



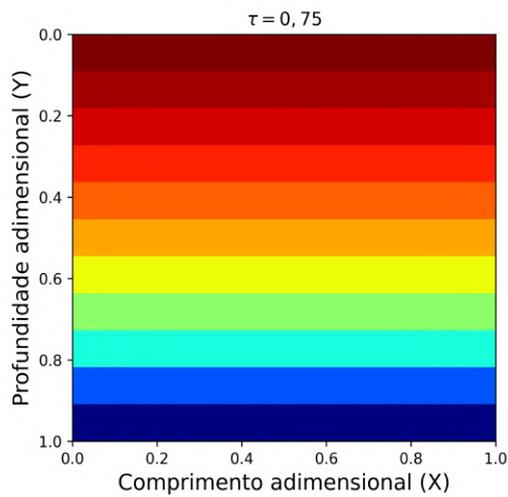
(b) Separação de Variáveis



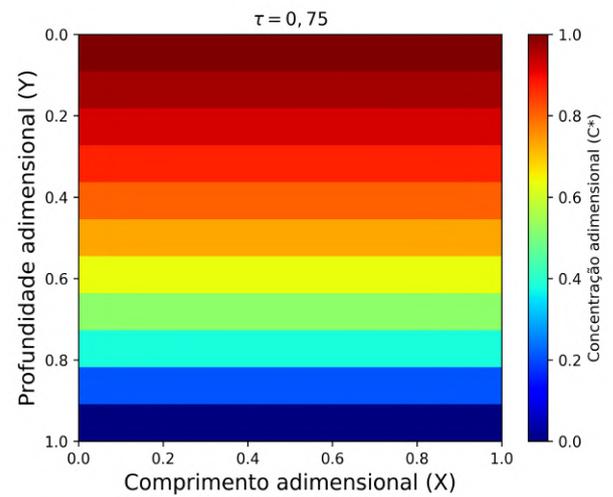
(c) GILTT



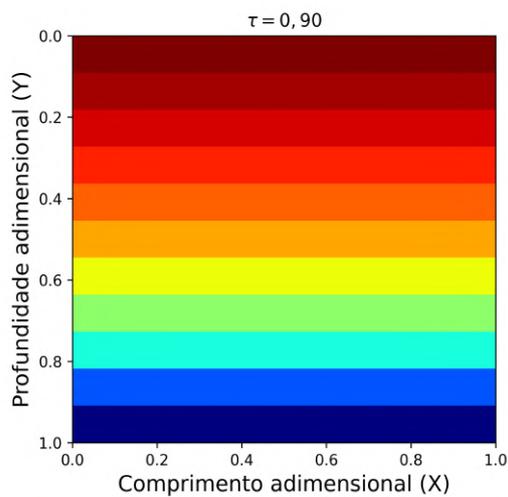
(d) Separação de Variáveis



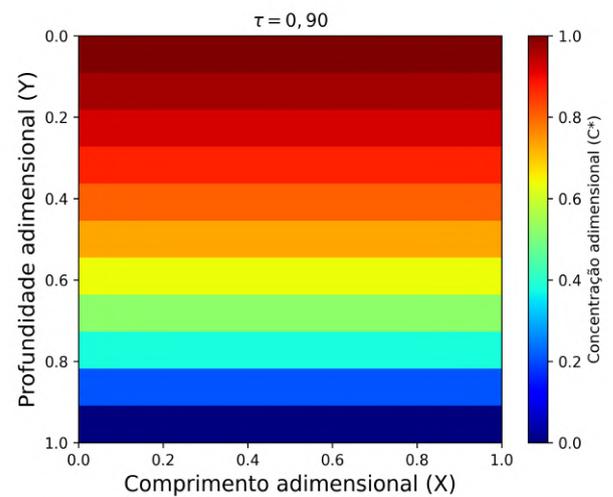
(e) GILTT



(f) Separação de Variáveis



(g) GILTT



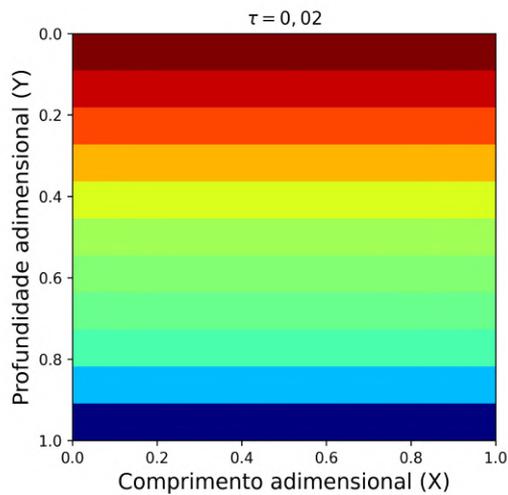
(h) Separação de Variáveis

Figura 5 – Mapa de concentração do poluente no solo, para os parâmetros: $Pe = 2$ e $R = 1$.

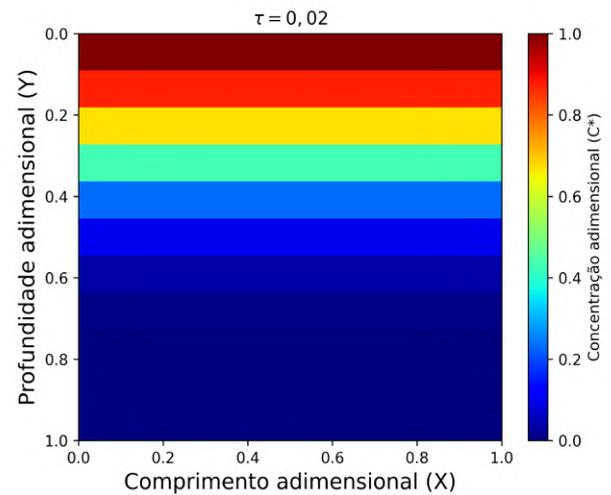
Fonte: Dos Autores.

Comparando as simulações, percebe-se que para ambos métodos os resultados são semelhantes. Com $Pe = 2$, observa-se que com o decorrer do tempo o escoamento do poluente é lento, além de que para $\tau > 0,50$ a distribuição da concentração do poluente não se modifica, ou seja, a solução estacionária é dominante e a transiente realizada apenas uma parcela de correção. Assim, para valores considerados baixos no parâmetro Pe , o escoamento do poluente é lento e portanto, o lençol freático acaba sendo atingido com valores de concentração adimensional inferiores a 0,1.

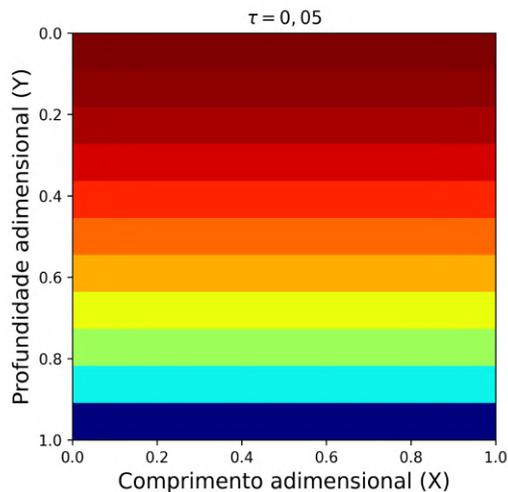
De maneira análoga, as Figuras (6a) a (6h) apresentam a distribuição da concentração adimensional do poluente considerando fixos $Pe = 10$, $R = 1$ e o valor de τ variando.



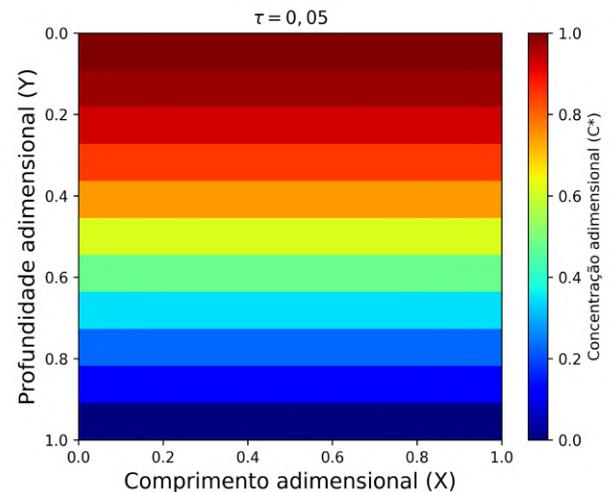
(a) GILTT



(b) Separação de Variáveis



(c) GILTT



(d) Separação de Variáveis

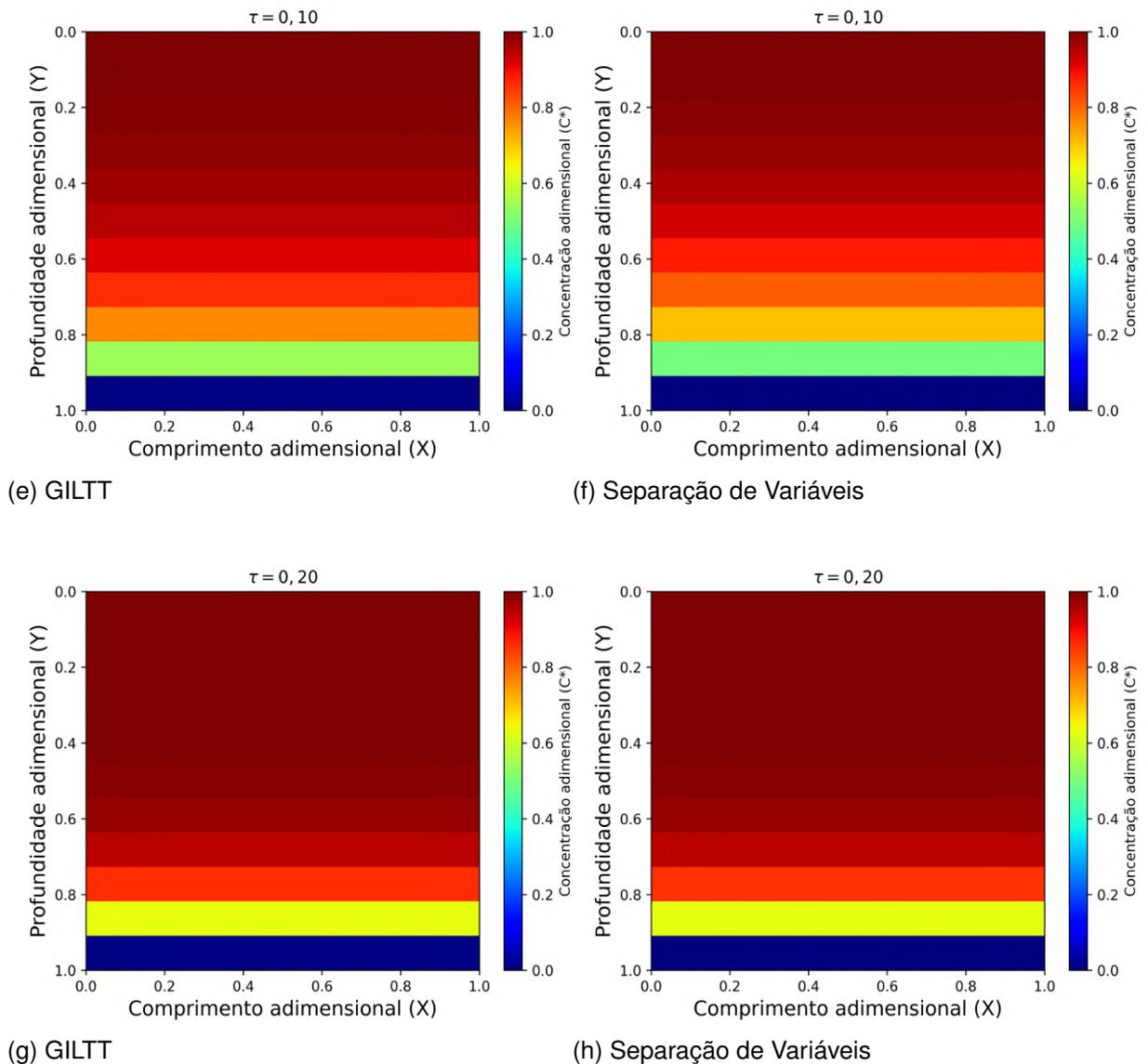


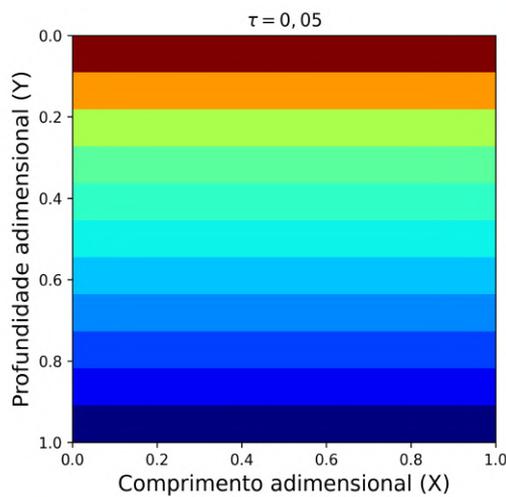
Figura 6 – Mapa de concentração do poluente no solo, para os parâmetros: $Pe = 10$ e $R = 1$.
Fonte: Dos Autores.

Considerando $Pe = 10$, ou seja, uma significativa diferença para $Pe = 2$, percebe-se que o poluente oriundo da célula de RSU contamina de forma mais significativa o solo em um tempo menor, devido ao fato do contaminante escorrer com uma velocidade maior e contaminar menos o solo, ou seja, o processo de advecção é maior que o de difusão. Ainda, quando comparado os resultados pelo método GILTT, entre o tempo de $\tau = 0,02$ e $\tau = 0,05$, evidencia-se que existe uma saturação da concentração, em torno do valor máximo, pois em uma diferença de tempo pequena, a concentração varia de uma forma notória. Ou seja, a diferença entre os dois indica que a aproximação de pelo menos uma solução não é suficiente, portanto a análise do termo residual para ambos indica qual a solução mais precisa. Para que ambas as soluções apresentem resultados semelhantes é necessário de um tempo superior, neste caso em

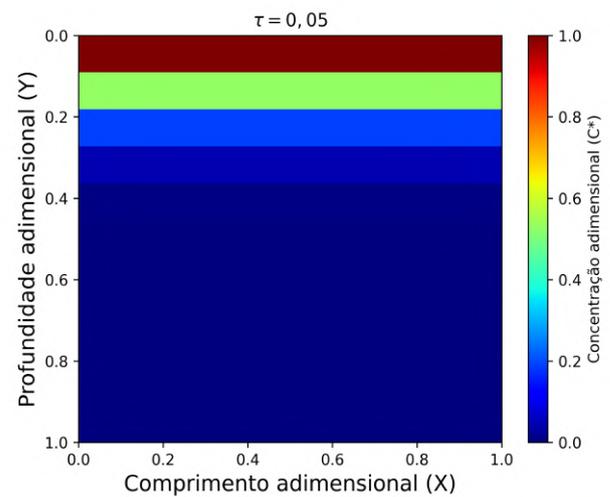
$\tau = 0,10$ as soluções ficam mais próximas e em $\tau = 0,20$ são análogas. Desta forma, nota-se que para $\tau = 0,20$ o contaminante atingiu 90% do solo, sendo que os índices são considerados altos. Desta forma, as possíveis causas ao lençol freático podem ser significativas, devido a concentração de poluente que pode atingi-lo.

4.2 Influência do fator de retardamento

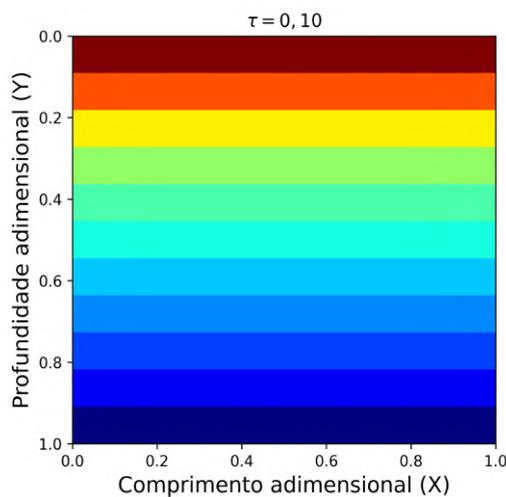
Para a análise da influência do fator de retardamento foram simulados praticamente os mesmos casos anteriores do número de Péclet alterando somente o valor do R para comparação com os gráficos anteriores, assim foi considerado fixos $Pe = 2$, $R = 5$ e para diferentes valores de τ .



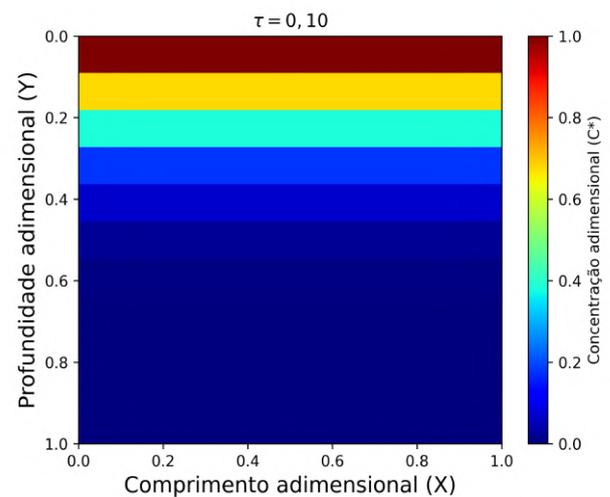
(a) GILTT



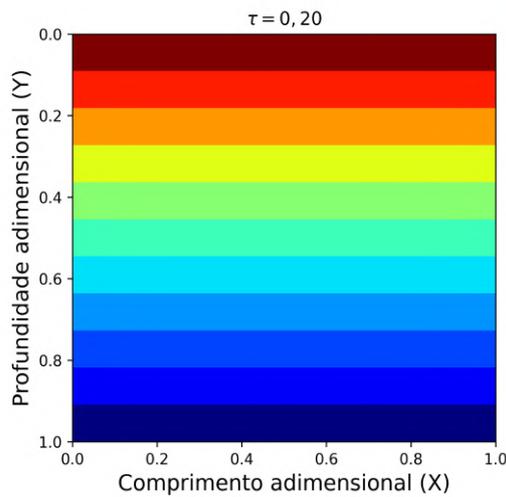
(b) Separação de Variáveis



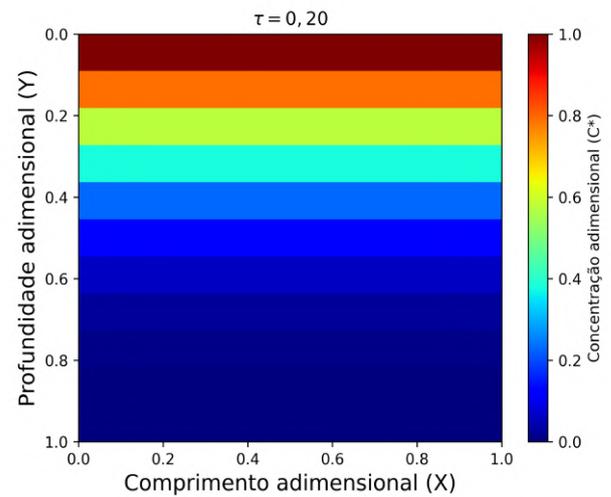
(c) GILTT



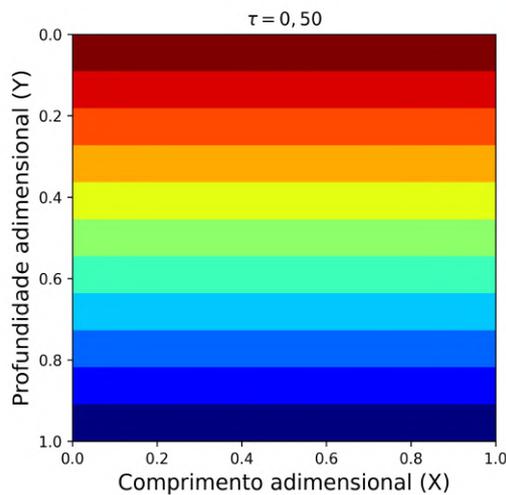
(d) Separação de Variáveis



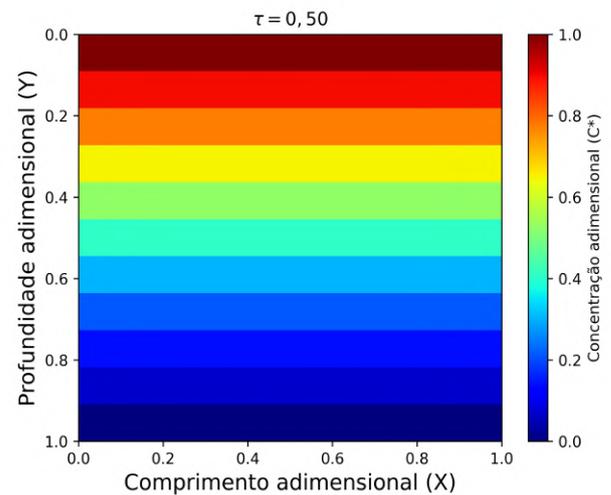
(e) GILTT



(f) Separação de Variáveis



(g) GILTT



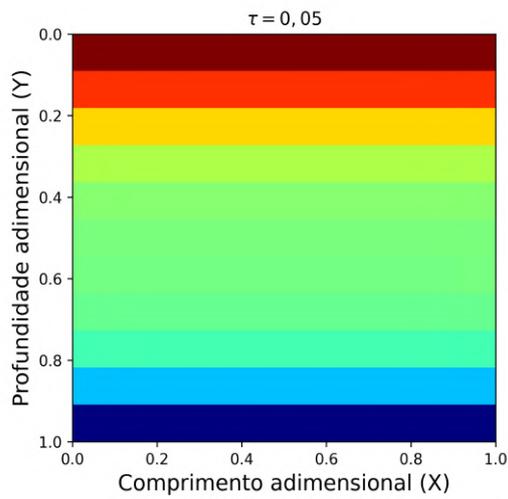
(h) Separação de Variáveis

Figura 7 – Mapa de concentração do poluente no solo, para os parâmetros: $Pe = 2$ e $R = 5$.

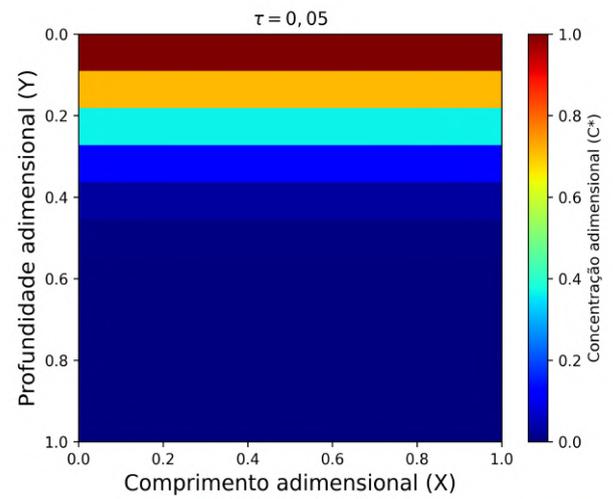
Fonte: Dos Autores.

Através das Figuras (7a) a (7h) é possível perceber para ambos métodos os resultados não estão em plena concordância, entretanto, destaca-se que foi utilizado inversões numéricas no código, o que pode ocasionar na diferença de soluções. Além disso, percebe-se que considerando um tempo relativamente alto, o campo de concentração do contaminante cobre cerca de 50% do solo, ou seja, uma significativa diferença do campo de concentração quando considerado $Pe = 2$ e $R = 1$. Também, pode-se verificar que existe um perfil linear, ou seja, neste caso a difusividade não possui tanta relevância. Desta forma, pode-se concluir que o parâmetro R tende a reter a dispersão do poluente.

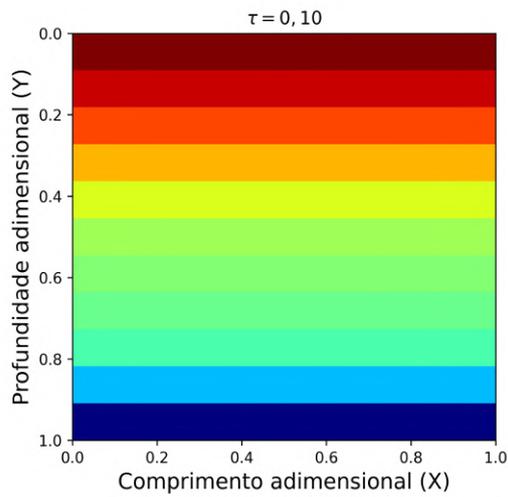
As Figuras (8a) a (8h) apresentam a distribuição da concentração adimensional do poluente considerando fixos $Pe = 10$ e $R = 5$, sendo que o valor de τ altera.



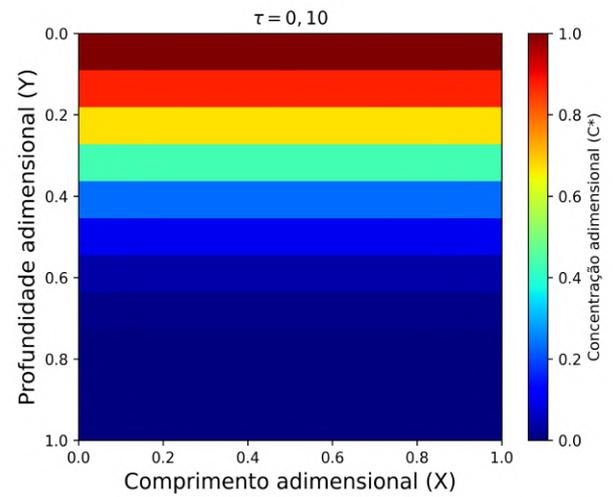
(a) GILTT



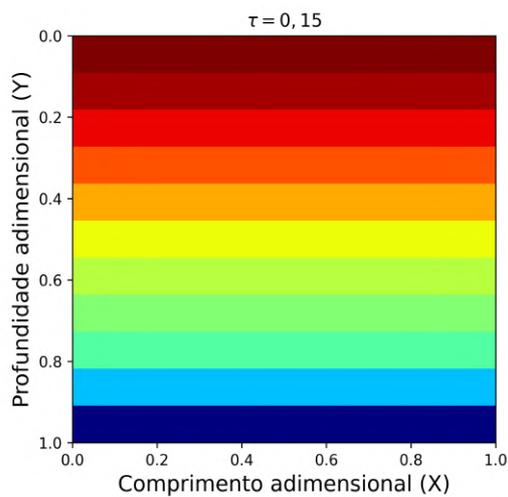
(b) Separação de Variáveis



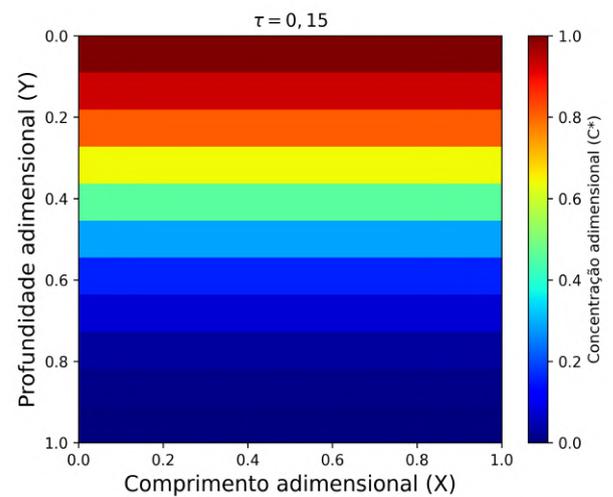
(c) GILTT



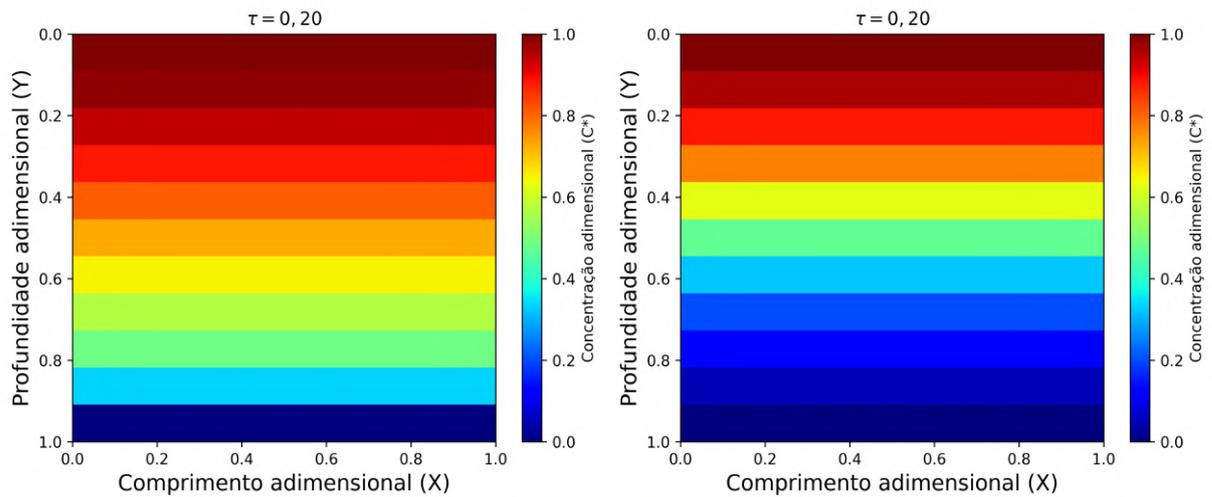
(d) Separação de Variáveis



(e) GILTT



(f) Separação de Variáveis



(g) GILTT

(h) Separação de Variáveis

Figura 8 – Mapa de concentração do poluente no solo, para os parâmetros: $Pe = 10$ e $R = 5$.
Fonte: Dos Autores.

As simulações mostram que para tempos pequenos, como $\tau = 0,05$ e $\tau = 0,10$, o campo de concentração de contaminantes tende a se propagar mais lentamente, principalmente quando comparado com as simulações que apresenta o mesmo valor para o parâmetro Pe mas com $R = 1$, ou seja, Figuras (6a) a (6h). Através das simulações é possível observar que conforme o valor de R aumenta, a concentração adimensional será menor, ou seja, a concentração de contaminante é retida pela porosidade do solo, desta forma, exigindo um tempo maior para a concentração de contaminante atingir o lençol freático. Ainda, pode ser observado na Figura (8g) e (8h), onde é considerado $\tau = 0,20$, percebe-se que não foi alcançado a estabilidade da concentração, necessitando um tempo maior.

Portanto, com a análise de diferentes valores parâmetro o parâmetro R , evidencia-se que possui um efeito significativo na propagação de contaminantes no solo.

4.3 Norma máxima para os resíduos das soluções analíticas

A partir da equação que governa o transporte de poluentes dada por (37), a qualidade da solução é avaliada analisando o pior cenário, que é o maior desvio da solução aproximada em relação à solução verdadeira.

$$\mathcal{R}(R) = \left\| \left\| R \frac{\partial C}{\partial \tau} - L^* \frac{\partial^2 C}{\partial X^2} - \frac{\partial^2 C}{\partial Y^2} + Pe \frac{\partial C}{\partial Y} \right\| \right\|_{\infty}, \quad (128)$$

onde a norma máxima residual é dada por:

$$\max_{(x,y) \in \Gamma} \left\{ \left\| \left\| R \frac{\partial C}{\partial \tau} - L^* \frac{\partial^2 C}{\partial X^2} - \frac{\partial^2 C}{\partial Y^2} + Pe \frac{\partial C}{\partial Y} \right\| \right\} \right\}. \quad (129)$$

Serão analisados alguns casos que apresentam a norma máxima residual e a relação com o número de termos utilizados para alguns casos:

Tabela 5 – GILTT: Caso $Pe = 2$, $R = 1$ e $\tau = 0,20$

Nº de termos	Norma Máxima Residual
5	1,79558263021713E-01
10	1,71986723193541E-01
20	9,34307968867069E-02
40	4,76273250058030E-02

Tabela 6 – Separação de Variáveis: Caso $Pe = 2$, $R = 1$ e $\tau = 0,20$

Nº de termos	Norma Máxima Residual
5	4,44848270484835E-16
10	4,44848270484835E-16
20	4,44848270484835E-16
40	4,44848270484835E-16

Tabela 7 – GILTT: Caso $Pe = 10$, $R = 1$ e $\tau = 0,02$

Nº de termos	Norma Máxima Residual
5	1,43344688044754E+01
10	8,66869964154383E+00
20	4,97084641560523E+00
40	2,55720608385504E+00

Tabela 8 – Separação de Variáveis: Caso $Pe = 10$, $R = 1$ e $\tau = 0,02$

Nº de termos	Norma Máxima Residual
5	3,19744231092045E-14
10	3,19882212759152E-14
20	3,19882212893561E-14
40	3,19882212893561E-14

Tabela 9 – GILTT: Caso $Pe = 2$, $R = 5$ e $\tau = 0,10$

Nº de termos	Norma Máxima Residual
5	6,15381684455405E-01
10	4,84664742836086E-01
20	2,58527452480000E-01
40	1,32983390561249E-01

Tabela 10 – Separação de Variáveis: Caso $Pe = 2$, $R = 5$ e $\tau = 0,10$

Nº de termos	Norma Máxima Residual
5	4,23532736659737E-15
10	4,22558309626343E-15
20	4,22558309621309E-15
40	4,22558309621309E-15

Tabela 11 – GILTT: Caso $Pe = 10$, $R = 5$ e $\tau = 0,10$

Nº de termos	Norma Máxima Residual
5	1,43344688044752E+01
10	8,66869964154393E+00
20	4,97084641560530E+00
40	2,55720608384722E+00

Tabela 12 – Separação de Variáveis: Caso $Pe = 10$, $R = 5$ e $\tau = 0,10$

Nº de termos	Norma Máxima Residual
5	3,10862446895043E-14
10	3,09563712452842E-14
20	3,09563712488823E-14
40	3,09563712488823E-14

4.4 Influência do comprimento adimensional

As Figuras (9a), (9b), (9c) e (9d) apresentam a distribuição da concentração adimensional do poluente considerando fixos $Pe = 2$, $R = 1$ e $\tau = 0,25$, sendo que o valor de L^* altera.

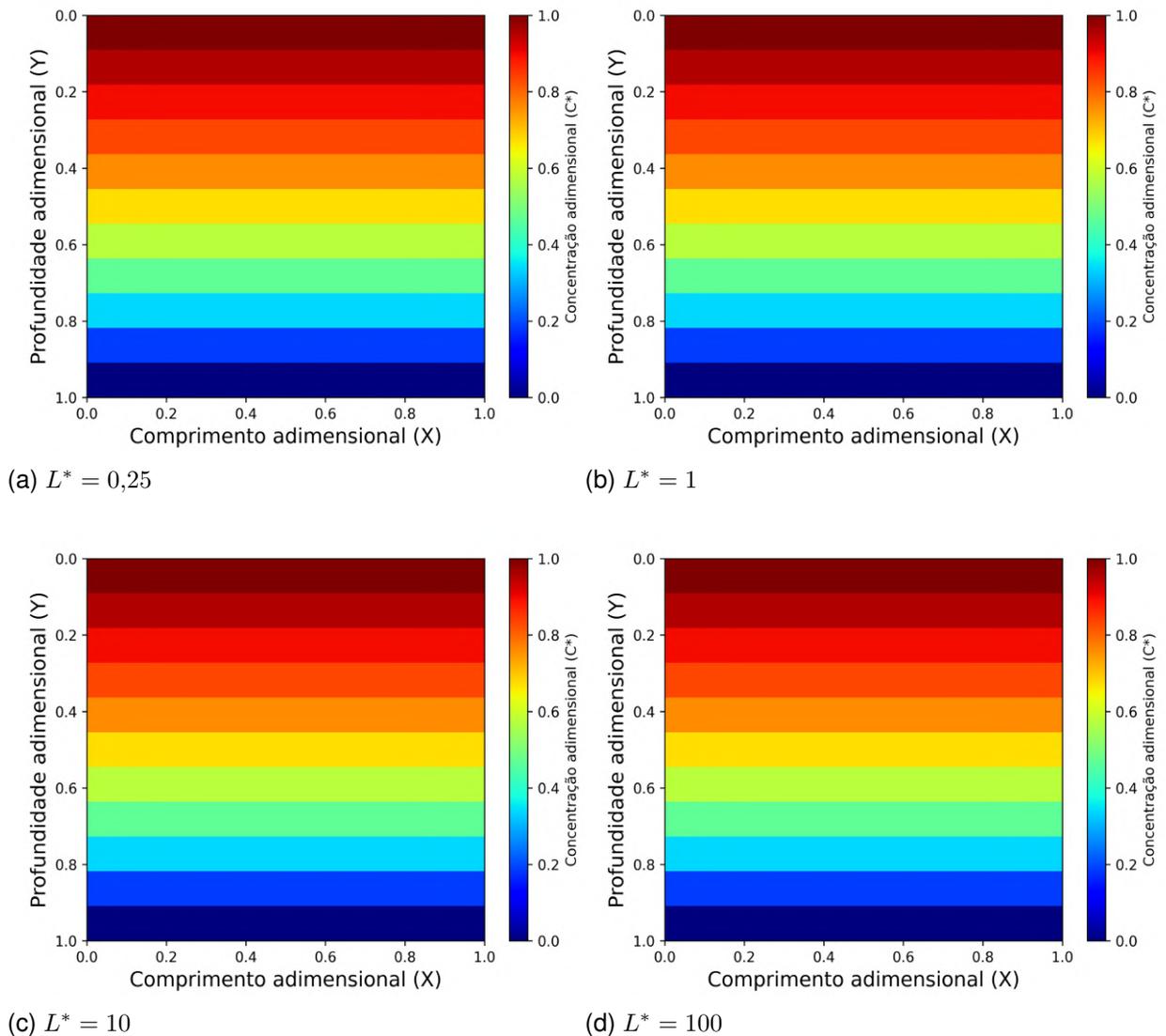


Figura 9 – Mapa de concentração do poluente no solo, para os parâmetros: $Pe = 2$, $R = 1$ e $\tau = 0,25$.

Fonte: Dos Autores.

Ainda, as Figuras (10a), (10b), (10c) e (10d) apresentam a distribuição da concentração adimensional do poluente considerando fixos os mesmo parâmetros, mas em um instante de tempo diferente, $\tau = 0,75$.

devido o lançamento do poluente pode definir o comportamento dispersivo do poluente, para que os resultados simulados estejam mais próximos da realidade. Entretanto, neste estudo, a partir da análise do parâmetro L^* percebe-se que a geometria do aterro não interfere nos resultados, ou seja, não sendo necessário investigar a influência da razão dos comprimentos nas dimensões.

4.5 Concentração média adimensional

A concentração média adimensionalizada para o campo de concentração de contaminantes em termos do tempo adimensional é definido por Albuquerque (2018).

$$C_m^* = \frac{\int_0^1 e^{-PeY} \cdot C^*(X,Y,\tau) dY}{\int_0^1 e^{-PeY} dY}, \quad (130)$$

onde para efeito de cálculos foi considerado C_m^* em $X = 0,5$.

Primeiramente, será apresentado a análise da concentração média para valores do parâmetro Pe variando.

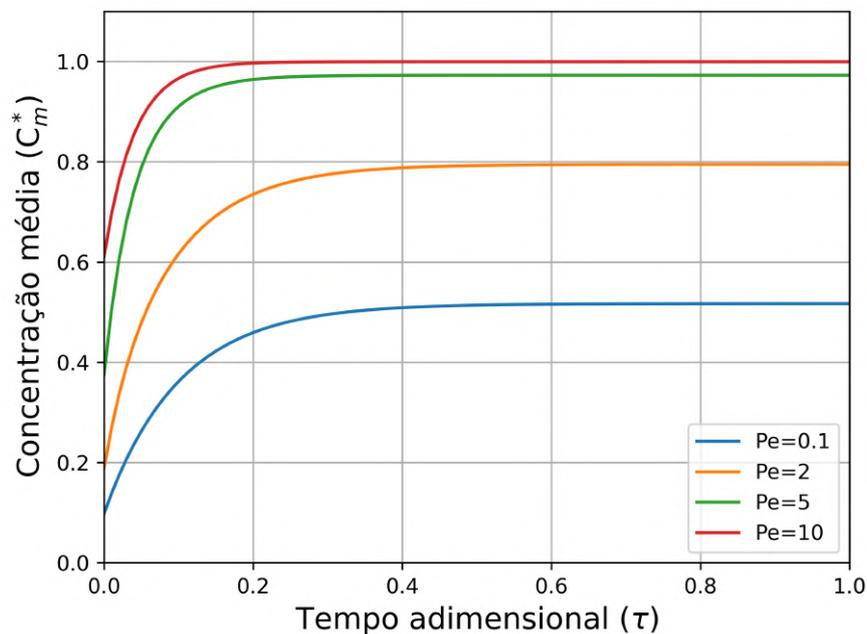


Figura 11 – Concentração média para $L^* = 1$ e $R = 1$.

Fonte: Dos Autores.

Sendo $Pe = 0,1$, observa-se que com o decorrer do tempo o escoamento do poluente pode ser considerado lento, além de que para $\tau > 0,50$ a distribuição da concentração média do poluente não se modifica. Ou seja, para valores considerados baixos para o parâmetro Pe , o escoamento do poluente é lento e a concentração média alcança valores inferiores a 0,6.

Entretanto, aumentando o valor do parâmetro para $Pe = 10$, ocorre o mesmo quando analisado a distribuição da concentração do poluente nas Figuras (6a) a (6h), ou seja, percebe-se que o poluente oriundo da célula de RSU contamina de forma mais significativa o solo em um tempo menor, devido ao fato do contaminante escorrer com uma velocidade maior e contaminar menos o solo, logo, o processo de advecção é predominante. Além disso, nota-se que para $\tau = 0,20$ a concentração média atingiu o valor máximo de 1, ou seja, podendo ser considerado como um índice alto. Assim, o lençol freático apresenta potencial risco de contaminação.

Ainda, considerando a análise da concentração média para diferentes valores do parâmetro R .

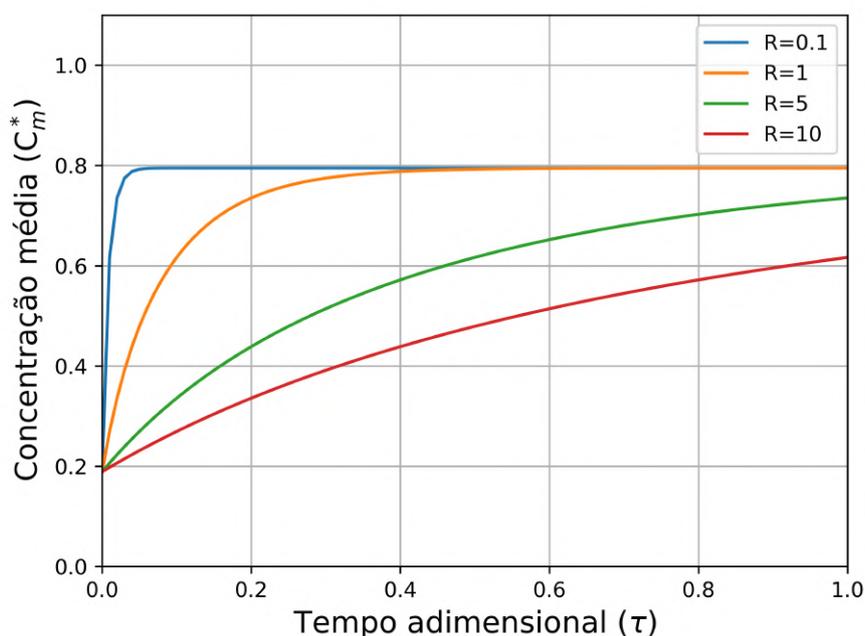


Figura 12 – Concentração média para $L^* = 1$ e $Pe = 2$.

Fonte: Dos Autores.

Ao considerar o parâmetro $R = 0,1$ fica claro que em um $\tau < 0,1$ a concentração média atinge um valor de 0,8. Porém, considerando um valor maior de R , como $R = 10$, a concentração média não atinge estabilidade em $\tau = 1$, necessitando de um tempo maior, mas fica claro que os níveis de concentração dos contaminantes são menor. Portanto, através das simulações é possível observar que à medida que o valor de R aumenta, a concentração média será menor, ou seja, a concentração do contaminante fica retida pela porosidade do solo, necessitando assim de um tempo maior para que a concentração do contaminante atinja o lençol freático. Ou seja, nesta situação de análise de concentração média, ocorre o mesmo que na análise da influência do fator de retardamento.

5 CONCLUSÃO

O presente trabalho, objetivou-se a estudar um modelo matemático bidimensional para a dispersão de poluentes em aterros sanitários, como apresentado no Capítulo 3, considerando a forma adimensional do modelo, bem como, o vazamento contínuo e uniforme de uma célula de armazenamento de RSU. Neste modelo, evidencia-se que todas as equações são resolvidas na forma analítica e exata.

A utilização do modelo proposto no trabalho é essencial para compreender a dinâmica de propagação de contaminantes em aterros sanitários e seus impactos nos lençóis freáticos. Ao aplicar as técnicas de GILTT e Separação de Variáveis, é possível obter soluções analíticas que permitem a análise detalhada da distribuição de contaminantes ao longo do tempo. Isso oferece uma base sólida para avaliar a influência de diferentes parâmetros no comportamento do sistema, fornecendo conhecimentos valiosos para a prevenção da contaminação de fontes de água subterrâneas, garantindo, assim, a preservação da qualidade da água e a segurança hídrica das comunidades dependentes desses recursos.

Ambas as técnicas utilizadas neste estudo, se mostraram bem-sucedidas nas simulações da dispersão de poluentes na atmosfera e nos corpos d'água conforme trabalhos da literatura. Além de que neste trabalho, também se mostrou uma alternativa viável para análise da dispersão de poluente no solo.

Os resultados obtidos com a utilização da técnica GILTT e Separação de Variáveis neste estudo foram consistentes com a dinâmica do problema e com os resultados encontrados na literatura. Entretanto, percebe-se que no método da GILTT existem mais processos envolvidos para obter a solução final, como a construção de matrizes em que os elementos são integrais, sendo utilizado quadratura para calcular, o que pode ocasionar erros, quando comparado com o método de Separação de Variáveis.

Com base nas simulações computacionais apresentadas no Capítulo 4, fica evidente que o fator de retardamento do solo desempenha um papel de suma importância no estudo. Isso ocorre devido aos fatores composicionais e texturais do solo, que permite avaliar a capacidade de um soluto em se movimentar ou ser retido, ou seja, conforme maior o valor do parâmetro, o poluente é contido e o lençol freático acaba

tendo níveis menor de contaminação. Já para o número de Péclet, quando esse parâmetro assume valores mais elevados, a concentração aumenta, resultando em uma contaminação mais rápida do solo pelo poluente e em um impacto significativo no lençol freático.

Além disso, conclui-se, como esperado, que considerando um valor da profundidade do solo, ou seja, de Y mais próximo da superfície e conseqüentemente do aterro sanitário, percebe-se que a concentração adimensional é um valor mais próximo de 1, a qual seria a concentração máxima, principalmente quando comparado com valores mais próximos ao lençol freático, onde a concentração do contaminante é menor.

Através do modelo estudado, devido este ser linear e adimensional, basta ajustar as escalas para usar a solução obtida através das equações (99) e (127), para realizar a análise juntamente com experimentos laboratoriais ou em situações reais. Entretanto, revela-se que os experimentos laboratoriais que simulam a dispersão de contaminantes em aterros sanitários não são amplamente encontrados na literatura, pelo contrário, existe uma vasta falta. Portanto, como sugestões de trabalhos futuros, pode-se destacar:

- Experimentos laboratoriais em escalas reduzidas, para que possam ser comparados os dados obtidos através de simulações com dados reais;
- Elaborar classificações para categorizar o impacto ambiental causado pela concentração de contaminantes que atingem o solo e lençol freático;
- Incluir outros parâmetros no modelo, tais como infiltração no solo;
- Investigação das divergências nas soluções encontradas por ambos os métodos utilizados no estudo.

REFERÊNCIAS

ABNT – Associação Brasileira de Normas Técnicas. **ABNT NBR 10004**: Resíduos sólidos – Classificação. Acesso em: 14 jun. 2023, <https://wp.ufpel.edu.br/residuos/files/2014/04/NBR-10004-2004-Classifica%C3%A7%C3%A3o-de-Res%C3%ADuos-S%C3%B3lidos.pdf>.

ABRELPE – Associação Brasileira de Empresas de Limpeza Pública e Resíduos Especiais. **Panorama dos Resíduos Sólidos no Brasil 2003**. Acesso em: 14 jun. 2023, <https://abrelpe.org.br/download-panorama-2003/>.

ABRELPE – Associação Brasileira de Empresas de Limpeza Pública e Resíduos Especiais. **Panorama dos Resíduos Sólidos no Brasil 2004**. Acesso em: 14 jun. 2023, <https://abrelpe.org.br/download-panorama-2004/>.

ABRELPE – Associação Brasileira de Empresas de Limpeza Pública e Resíduos Especiais. **Panorama dos Resíduos Sólidos no Brasil 2005**. Acesso em: 14 jun. 2023, <https://abrelpe.org.br/download-panorama-2005/>.

ABRELPE – Associação Brasileira de Empresas de Limpeza Pública e Resíduos Especiais. **Panorama dos Resíduos Sólidos no Brasil 2006**. Acesso em: 14 jun. 2023, <https://abrelpe.org.br/download-panorama-2006/>.

ABRELPE – Associação Brasileira de Empresas de Limpeza Pública e Resíduos Especiais. **Panorama dos Resíduos Sólidos no Brasil 2007**. Acesso em: 14 jun. 2023, <https://abrelpe.org.br/download-panorama-2007/>.

ABRELPE – Associação Brasileira de Empresas de Limpeza Pública e Resíduos Especiais. **Panorama dos Resíduos Sólidos no Brasil 2008**. Acesso em: 14 jun. 2023, <https://abrelpe.org.br/download-panorama-2008/>.

ABRELPE – Associação Brasileira de Empresas de Limpeza Pública e Resíduos Especiais. **Panorama dos Resíduos Sólidos no Brasil 2009**. Acesso em: 14 jun. 2023, <https://abrelpe.org.br/download-panorama-2009/>.

ABRELPE – Associação Brasileira de Empresas de Limpeza Pública e Resíduos Especiais. **Panorama dos Resíduos Sólidos no Brasil 2010**. Acesso em: 14 jun. 2023, <https://abrelpe.org.br/download-panorama-2010/>.

ABRELPE – Associação Brasileira de Empresas de Limpeza Pública e Resíduos Especiais. **Panorama dos Resíduos Sólidos no Brasil 2011**. Acesso em: 14 jun. 2023, <https://abrelpe.org.br/download-panorama-2011/>.

ABRELPE – Associação Brasileira de Empresas de Limpeza Pública e Resíduos Especiais. **Panorama dos Resíduos Sólidos no Brasil 2012**. Acesso em: 14 jun. 2023, <https://abrelpe.org.br/download-panorama-2012/>.

ABRELPE – Associação Brasileira de Empresas de Limpeza Pública e Resíduos Especiais. **Panorama dos Resíduos Sólidos no Brasil 2013**. Acesso em: 14 jun. 2023, <https://abrelpe.org.br/download-panorama-2013/>.

ABRELPE – Associação Brasileira de Empresas de Limpeza Pública e Resíduos Especiais. **Panorama dos Resíduos Sólidos no Brasil 2014**. Acesso em: 14 jun. 2023, <https://abrelpe.org.br/download-panorama-2014/>.

ABRELPE – Associação Brasileira de Empresas de Limpeza Pública e Resíduos Especiais. **Panorama dos Resíduos Sólidos no Brasil 2015**. Acesso em: 14 jun. 2023, <https://abrelpe.org.br/download-panorama-2015/>.

ABRELPE – Associação Brasileira de Empresas de Limpeza Pública e Resíduos Especiais. **Panorama dos Resíduos Sólidos no Brasil 2016**. Acesso em: 14 jun. 2023, <https://abrelpe.org.br/download-panorama-2016/>.

ABRELPE – Associação Brasileira de Empresas de Limpeza Pública e Resíduos Especiais. **Panorama dos Resíduos Sólidos no Brasil 2017**. Acesso em: 14 jun. 2023, <https://abrelpe.org.br/download-panorama-2017/>.

ABRELPE – Associação Brasileira de Empresas de Limpeza Pública e Resíduos Especiais. **Panorama dos resíduos sólidos no Brasil 2018/2019**. Acesso em: 14 jun. 2023, <https://abrelpe.org.br/download-panorama-2018-2019/>.

ABRELPE – Associação Brasileira de Empresas de Limpeza Pública e Resíduos Especiais. **Panorama dos Resíduos Sólidos no Brasil 2020**. Acesso em: 14 jun. 2023, <https://abrelpe.org.br/panorama-2021/>.

ABRELPE – Associação Brasileira de Empresas de Limpeza Pública e Resíduos Especiais. **Panorama dos Resíduos Sólidos no Brasil 2021**. Acesso em: 14 jun. 2023, <https://abrelpe.org.br/panorama-2021/>.

ABRELPE – Associação Brasileira de Empresas de Limpeza Pública e Resíduos Especiais. **Panorama dos Resíduos Sólidos no Brasil 2022**. Acesso em: 14 jun. 2023, <https://abrelpe.org.br/panorama-2022/>.

ALBUQUERQUE, F. A. **Estudo da Propagação de Contaminante em Aterros Sanitários via GITT**. 2018. Tese (Doutorado) — Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal da Paraíba, Paraíba.

ALVES, T. A.; RAMOS, R. A. V.; MAIA, C. R. M. Aplicação da transformada integral generalizada e da transformação conforme na solução de um problema de convecção forçada laminar em dutos de setor de anel circular. **Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería**, Barcelona, v.32, n.4, p.261–269, 2016.

AUGUSTO, L. G. S. et al. O contexto global e nacional frente aos desafios do acesso adequado à água para consumo humano. **Ciência & saúde coletiva**, New York, v.17, n.6, p.1511–1522, 2012.

BEAR, J. **Dynamics of Fluids in Porous Media**. New York: Courier Corporation, 1972.

BERTICELLI, R. et al. Fatores envolvidos no fluxo de contaminantes em meios porosos através da modelagem ambiental: Um estudo de caso com vazamento de gasolina. **VIII Congresso Brasileiro de Engenharia de Produção**, Ponta Grossa, Paraná, 2018.

BUSKE, D. **Solução analítica da equação de difusão-advenção pelo método GILTT aplicada à dispersão de poluentes atmosféricos**. 2004. Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

BUSKE, D. **Solução GILTT bidimensional em geometria cartesiana**: Simulação da dispersão de poluentes na atmosfera. 2008. Tese (Doutorado) — Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

CENEDESE, E. **Solução das Equações de Burgers e de Navier-Stokes Bidimensionais Utilizando a Técnica da Transformada Integral Generalizada**. 2005. Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira.

CHAPRA, S. C. **Surface Water Quality Modeling**. New York: McGraw-Hill, 1997.

CONDER - Companhia de Desenvolvimento Urbano do Estado da Bahia. **Manual de Operação de Aterros Sanitários**. Acesso em: 02 fev. 2023, https://cooperativadereciclagem.files.wordpress.com/2010/06/manual_aterro_sanitario.pdf.

DEGRAZIA, F. C. **Evolução de camada limite planetária para dispersão de poluentes pelo método da GILTT**. 2005. Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

DOMENICO, P. A.; SCHWARTZ, F. W. **Physical and Chemical Hydrogeology**. New York: John Wiley & Sons Inc, 1991.

FAVERO, J. L.; MUNIZ, A. R.; SANTOS, R. P. B. Análise teórico-experimental da dispersão de poluentes líquidos em solos. **Engenharia Sanitária e Ambiental**, Rio de Janeiro - RJ, v.12, n.4, p.410–416, 2007.

FERREIRA, J. L. **A técnica da transformada integral aplicada em modelos de transporte de massa em meios porosos**. 2015. Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós-Graduação em Engenharia Química, Universidade Federal do Pará, Belém.

FETTER, C. W.; BOVING, T.; KREAMER, D. **Contaminant Hydrogeology**. Springer: Waveland Press, 2018.

FREEZE, R. A.; CHERRY, J. A. **Groundwater**. Nova Jersey: Prentice Hall, 1979.

FURTADO, I. C. **Construção de método de solução funcional para problemas de fluxo em meios porosos não saturados**. 2017. Tese (Doutorado) — Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

GARCIA, S. B. C. **Modelagem matemática de dispersão de contaminantes em corpos d'água**: estudo de caso com dados do rio Paraibuna-MG. 2021. Dissertação (Mestrado) — Ciências Ambientais, Universidade Federal de Pelotas, Pelotas.

GILHAM, R. W. Processes of Contaminant Migration in Groundwater. **CSCE Centennial Symposium on Management of Waste Contamination of Groundwater**, Amsterdam, v.28, n.7, p.239–269, 1987.

GONÇALVES, A. D. M. A. **Efeito da temperatura no transporte dos íons potássio e nitrato no solo**. 2007. Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós-Graduação em Agronomia, Universidade de São Paulo, Piracicaba.

HAHN, D. W.; ÖZISIK, M. N. **Heat conduction**. Nova Jersey: John Wiley & Sons, 1993.

HEBER, F.; SILVA, E. M. D. Institucionalização da Política Nacional de Resíduos Sólidos: dilemas e constrangimentos na Região Metropolitana de Aracaju (SE). **Revista de Administração Pública**, Rio de Janeiro, v.48, n.4, p.913–937, 2014.

HIRATA, R. et al. **A revolução silenciosa das águas subterrâneas no Brasil: uma análise da importância do recurso e os riscos pela falta de saneamento**. Acesso: 10 out. 2023, http://www.tratabrasil.org.br/images/estudos/itb/aguas-subterraneas-e-saneamento-basico/Estudo_aguas_subterraneas_FINAL.pdf.

INFORZATO, N. F. **Dispersão de Poluentes num sistema ar-água: Modelagem matemática, aproximação numérica e simulação computacional**. 2008. Tese (Doutorado) — Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

KONRADT, J. **Método GILTT aplicado em um modelo de dispersão de poluentes em aterros sanitários**. 2022. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) — Licenciatura em Matemática, Universidade Federal de Pelotas, Pelotas.

KORF, E. P. et al. Montagem de equipamento de coluna para estudo de transporte de contaminantes em solos. **VI Simpósio de Engenharia Ambiental**, Serra Negra, São Paulo, 2008.

LANGE, L. C.; SIMÕES, G. F.; A., F. C. F.; G., C. H. M. Estudo do transporte de contaminantes em meios porosos aplicado a aterros de disposição de resíduos sólidos urbanos. **Alternativas para disposição de resíduos sólidos urbanos para pequenas comunidades: coletânea de trabalhos técnicos**, Rio de Janeiro, p.85–92, 2002.

LEGNER, C. **Tratamento de águas subterrâneas**. Acesso: 07 nov. 2023, <https://www.revistatae.com.br/Noticia/68476/tratamento-de-aguas-subterraneas>.

LIMA, F. A. L. V. **Transporte de contaminantes oriundos da água de produção da indústria petrolífera em solos areno-argilosos compactados**. 2018. Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal da Bahia, Salvador.

LOPES, D. F. **Transporte de contaminantes em meios porosos: Aplicação da Técnica da Transformada Integral**. 2005. Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós Graduação em Engenharia Química, Universidade Federal do Pará, Belém.

MACHADO, B. R. **Modelagem da dispersão de poluentes em rios e canais sob a perspectiva das abordagens GILTT e separação de variáveis**. 2019. Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós Graduação em Ciências Ambientais, Universidade Federal de Pelotas, Pelotas.

MACHADO, V. **Estudo numérico da dispersão de poluente veicular em uma microrregião urbana**. 2019. Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Ponta Grossa.

MACKAY, D. M.; ROBERTS, P. V.; CHERRY, J. A. Transport of Organic Contaminants in Groundwater. **Environmental Science and Technology**, New York, v.19, n.5, p.384–392, 1985.

MELLO, K. B. **Solução da equação de difusão-advecção para uma CLP não-homogênea e não-estacionária pelo método GILTT**. 2006. Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

MMA – Ministério do Meio Ambiente e Mudança do Clima. **Águas Subterrâneas: um recurso a ser conhecido e protegido**. Acesso em: 19 jul. 2023, <https://www.agrolink.com.br/downloads/%C3%81GUAS%20SUBTERR%C3%82NEAS.pdf>.

MONCADA, M. **Estudo em laboratório de características de colapso e transporte de soluto associadas à infiltração de licor cáustico em um solo laterítico**. 2004. Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.

MOREIRA, D. M.; TIRABASSI, T. Modelo Matemático de Dispersão de Poluentes na Atmosfera: Um Instrumento Técnico para a Gestão Ambiental. **Ambiente & Sociedade**, Santa Maria, v.7, p.159–172, 2004.

MOREIRA, D.; VILHENA, M.; BUSKE, D.; TIRABASSI, T. The GILTT solution of the advection–diffusion equation for an inhomogeneous and nonstationary PBL. **Atmospheric Environment**, [S.l.], v.40, n.17, p.3186–3194, 2006.

MOREIRA, D.; VILHENA, M.; BUSKE, D.; TIRABASSI, T. The state-of-art of the GILTT method to simulate pollutant dispersion in the atmosphere. **Atmospheric Research**, [S.l.], v.92, n.1, p.1–17, 2009.

MURCIA, F. J. S. **Modelagem da Dispersão de Poluentes em Meios Porosos: Caso do Aterro de Resíduos Sólidos Urbanos de Jacarezinho (PR)**. 2020. Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós-Graduação em Ciência e Tecnologia Ambiental, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba.

NAKAMURA, C. Y. et al. Avaliação da qualidade da água subterrânea no entorno de um aterro sanitário. **Águas subterrâneas**, Rio de Janeiro - RJ, v.28, n.2, p.28–40, 2014.

NEVES, C. S. **Um problema de dispersão de poluentes em rios e canais por meio do método de separação de variáveis**. 2012. Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional, Universidade Federal do Rio Grande, Rio Grande.

NOBRE, M. M. M. **Estudo Experimental do Transporte de Poluentes em Solos Argilosos Compactados**. 1987. Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.

OLIVEIRA, J. B. **Estudo Paramétrico da Contaminação no Entorno de um Aterro Sanitário**. 2009. Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós-Graduação em Engenharia Ambiental Urbana, Universidade Federal da Bahia, Salvador.

PEREIRA, E. M.; CHANG, H. K.; SOTO, M. A. A. Estimativa de alguns parâmetros de transporte de contaminantes para solos brasileiros. **Geociências**, São Paulo, UNESP, v.30, n.3, p.383–398, 2011.

PETERSEN, C. Z. **Solução Analítica das equações da Cinética Pontual e Espacial da Teoria de Difusão de Nêutrons pelas técnicas da GITT e Decomposição**. 2011. Tese (Doutorado) — Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

PLANARES – Plano Nacional de Resíduos Sólidos. **Plano Nacional de Resíduos Sólidos**. Acesso em: 14 abr. 2023, https://portal-api.sinir.gov.br/wp-content/uploads/2022/04/Plano_Nacional_de_Residuos_Solidos.pdf.

ROSA, A. S.; DALMOLIN, R. S. D.; COPETTI, A. C. C. A poluição causada por aterros de resíduos sólidos urbanos sobre os recursos hídricos. **Ciência e Natura**, Santa Maria, UFSM, v.34, n.1, p.107–118, 2012.

SANTOS, A. L. M. **Modelagem matemática da dispersão de plumas poluentes em aquíferos**. 2015. Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, Minas Gerais.

SANTOS, J. S. S. **Simulação numérica da dispersão de poluentes em solos. Estudo de caso: lagoas de estabilização**. 2015. Tese (Doutorado) — Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Processos, Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande.

SILVA, A. L. **Modelagem e simulação numérica do transporte de poluentes em meios porosos com reação química**. 2016. Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós-Graduação em Ciência e Tecnologia Ambiental, Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande.

SILVA, E. J. G. **Solução do modelo puff de dispersão de poluentes na camada limite atmosférica pelo método GILTT**. 2012. Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

SOUSA, R. G. U. et al. Estudo em colunas da migração de água de produção e efluente tratado de petróleo em solos naturais do Ceará. **XIX Congresso Brasileiro de Mecânica dos Solos e Engenharia Geotécnica Geotecnia e Desenvolvimento Urbano**, Bahia, 2018.

SPIEGEL, M. R. **Laplace Transforms**. New York: McGraw-Hill, 1965.

THOME, A. T.; KNOP, A. Movimento de contaminantes no solo. **II Simpósio Nacional de uso da água na agricultura**, Passo Fundo, 2006. Acesso em: 03 jun. 2023.

TUCCI, C. E. M. **Existe crise da água no Brasil?** Porto Alegre: URGRS, 2009.

U.S. Geological Survey. **How Much Water is There on Earth?** Acesso em: 25 jun. 2024, <https://www.usgs.gov/special-topics/water-science-school/science/how-much-water-there-earth>.

VASCONCELOS, A. **Transporte de contaminantes em meios porosos saturados e não saturados. Estudo de caso: vazamento de gasolina**. 2008. Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós-Graduação em Engenharia Geotécnica, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto.

WEYMAR, G. J. **Simulação analítica da dispersão de substâncias radioativas liberadas na atmosfera por usinas nucleares pelo método GILTT**. 2012. Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

WEYMAR, G. J. **Uma solução da equação multidimensional de advecção-difusão para a simulação da dispersão de contaminantes reativos na camada limite atmosférica**. 2016. Tese (Doutorado) — Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

World Population Review. **Population by Continent 2024**. Acesso em: 25 jun. 2024, <https://worldpopulationreview.com/continents>.

ÇENGEL, Y. A.; CIMBALA, J. M. **Mecânica dos fluidos: Fundamentos e aplicações**. São Paulo: McGraw Hill, 2007.

ANEXO A TRABALHOS PRODUZIDOS DURANTE O MESTRADO

Durante o desenvolvimento desta pesquisa, diversos trabalhos foram submetidos a eventos acadêmicos. Em anexo, encontram-se os artigos publicados ao longo do mestrado.

ESTUDO DO COMPRIMENTO ADIMENSIONAL ATRAVÉS DO CAMPO DE CONCENTRAÇÃO DE CONTAMINANTES

JOSIANE KONRADT¹; IGOR DA CUNHA FURTADO²; DANIELA BUSKE³; RÉGIS SPEROTTO DE QUADROS⁴; GUILHERME JAHNECKE WEYMAR⁵

¹Universidade Federal de Pelotas – josianekonradt@gmail.com

²Instituto Federal Sul-rio-grandense – igorjara@gmail.com

³Universidade Federal de Pelotas – danielabuske@gmail.com

⁴Universidade Federal de Pelotas – quadros99@gmail.com

⁵Universidade Federal de Pelotas – guilhermejahnecke@gmail.com

1. INTRODUÇÃO

O aterro sanitário é o local correto para o recebimento de resíduo sólido urbano (RSU) por ser um ambiente planejado, operado e monitorado de acordo com normas e regulamentações ambientais rigorosas, a fim de avaliar a qualidade do ar, da água e do solo ao redor do local.

No Brasil, a maior parte dos RSU coletados (61%) continua sendo encaminhada para aterros sanitários, com 46,4 milhões de toneladas enviadas para destinação ambientalmente adequada em 2022 (ABRELPE, 2022).

O presente trabalho possui como propósito apresentar a solução de um modelo bidimensional do transporte de contaminantes num aterro sanitário e através de simulações observar a importância e a influência do parâmetro físico comprimento adimensional no estudo considerado. Para isso será utilizada a forma adimensional do modelo de dispersão de efluentes no meio poroso, considerando o vazamento contínuo e uniforme de poluente de uma célula de armazenamento de RSU.

Para a resolução do modelo será utilizada a técnica *Generalized Integral Laplace Transform Technique* (GILTT) que combina a expansão do contaminante em uma série em termos das autofunções determinadas com o apoio de um problema auxiliar de Sturm-Liouville e a obtenção de uma equação diferencial ordinária (EDO) na forma matricial, que é resolvida pela transformada de Laplace (BUSKE, 2008), obtendo assim a solução da forma analítica do modelo transiente de transporte de massa num meio poroso saturado.

2. METODOLOGIA

A Eq. (1), escrita na forma adimensional, encontrada no trabalho de ALBUQUERQUE (2018), descreve o transporte de poluentes no meio poroso saturado, sendo que este processo ocorre sob um aterro sanitário, onde são descartados RSU:

$$R \frac{\partial C}{\partial \tau} = L^* \frac{\partial^2 C}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial Y^2} - Pe \frac{\partial C}{\partial Y}, \quad (1)$$

onde R representa o fator de retardamento do solo, C é a concentração do contaminante na fase líquida, τ representa ao tempo e Pe é o número de Péclet. Neste trabalho, destaca-se a importância do parâmetro L^* , sendo a relação entre as dimensões em X e Y do problema, ou seja:

$$L^* = \left(\frac{L_1}{L_2} \right)^2, \quad (2)$$

que pode ser melhor compreendido através da Figura 1:

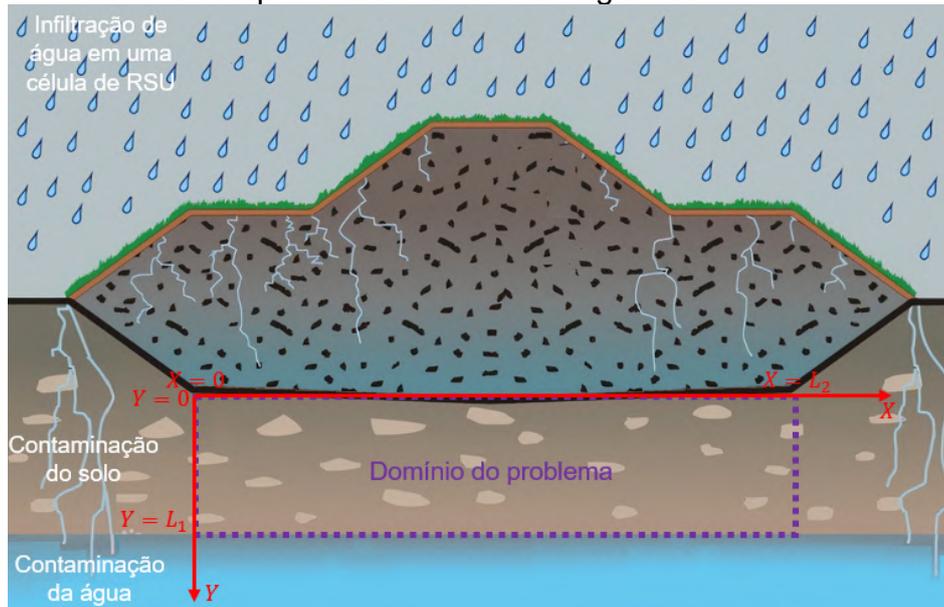


Figura 1. Corte da seção de um aterro sanitário.

Fonte: adaptado de CONDER (2017).

A condição inicial do problema é dada por:

$$C(X, Y, 0) = C_0, \quad (3)$$

onde C_0 é a concentração inicial do contaminante na célula de armazenamento de RSU.

As condições de contorno na forma adimensional e na direção X são dadas por:

$$\frac{\partial C}{\partial X}(0, Y, \tau) = 0, \quad \frac{\partial C}{\partial X}(1, Y, \tau) = 0, \quad (4)$$

onde são utilizadas condições de fluxo nulo nas fronteiras do domínio em X .

As condições de contorno na direção Y são dadas por:

$$C(X, 0, \tau) = 1, \quad (5)$$

sendo esta condição de interface que corresponde ao vazamento contínuo e uniforme de chorume em uma célula de RSU, além de:

$$\frac{\partial C}{\partial Y}(X, 1, \tau) + BiC(X, 1, \tau) = 0, \quad (6)$$

onde Bi é o número de Biot e esta condição representa o fluxo convectivo situada na parte de contato entre o solo e o lençol freático.

Utilizando a técnica GILTT para obter a solução da forma analítica do modelo bidimensional de transporte de massa num meio poroso saturado, obtém-se:

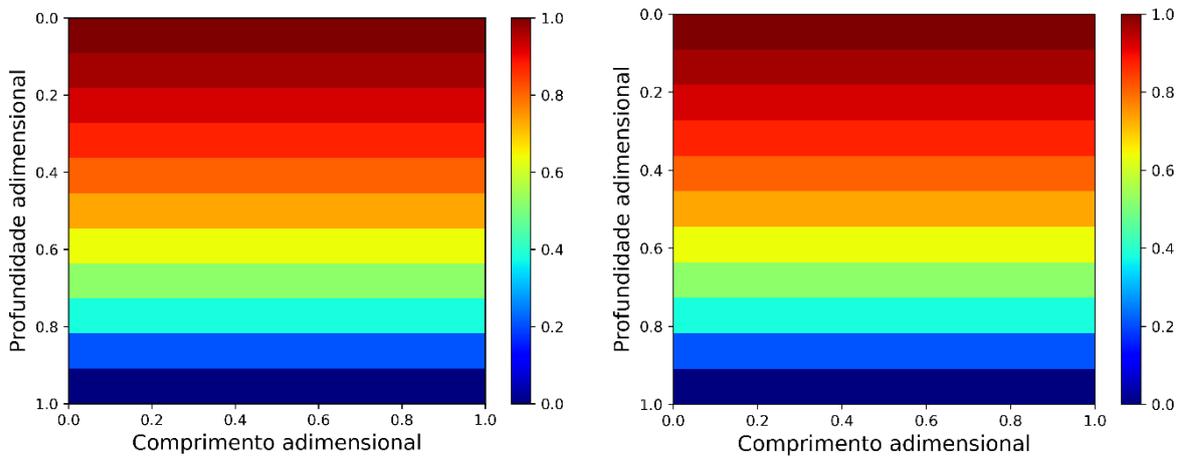
$$C(X, Y, \tau) = \sum_{n=0}^N \varphi_n(X) \left[\sum_{k=0}^K \psi_k(Y) \tilde{C}_k(\tau) \right] + C_E(Y), \quad (7)$$

onde $\varphi_n(X) = \cos\left(\frac{\lambda_n}{\sqrt{L^*}} X\right)$, $\psi_k(Y) = \text{sen}(\beta_k Y)$, $\tilde{C}_k(\tau)$ é definida por $Z(\tau) = X \cdot G(\tau) \cdot X^{-1} \cdot Z(0)$, a qual faz parte de uma série em termo das autofunções e $C_E(Y)$ é a solução para o problema no estado estacionário, dada por $C_E(Y) = \frac{e^{Pe(Pe+Bi)} - Bi e^{PeY}}{e^{Pe(Pe+Bi)} - Bi}$.

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

A partir da solução encontrada, foram realizadas simulações para verificar a influência do comprimento adimensional no campo de concentração de

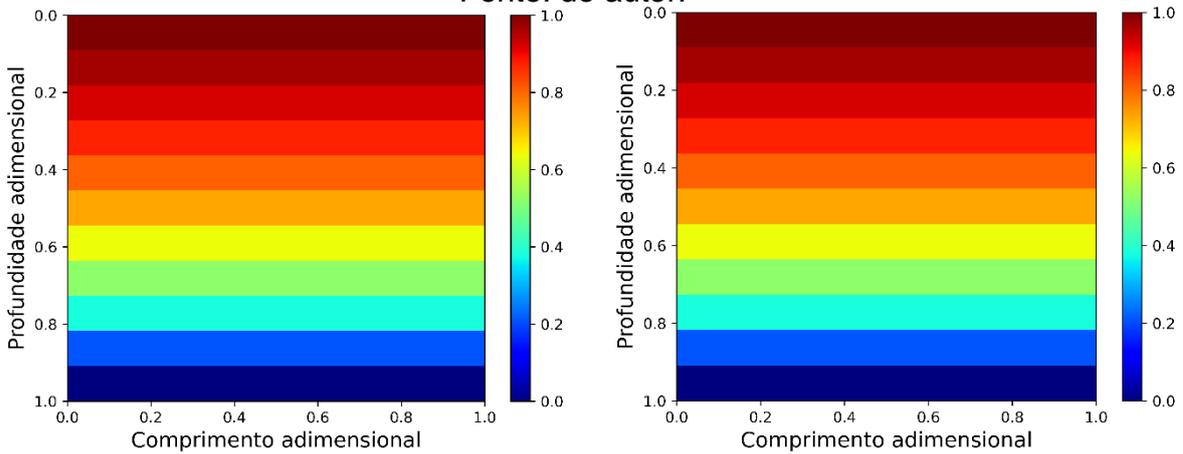
contaminantes em um meio poroso saturado. Os resultados foram obtidos através do software *Google Colaboratory* em linguagem Python, sendo utilizado $Bi = 2000$.



a) $L^* = 0,25, Pe = 2, R = 1$ e $\tau = 0,25$ b) $L^* = 1, Pe = 2, R = 1$ e $\tau = 0,25$

Figura 2. Distribuição da concentração adimensional do poluente.

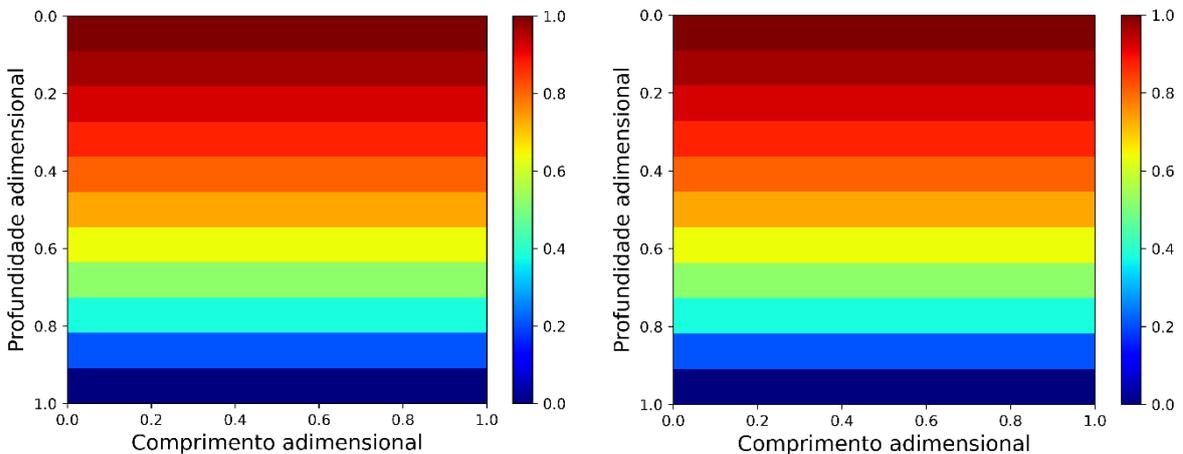
Fonte: do autor.



a) $L^* = 10, Pe = 2, R = 1$ e $\tau = 0,25$ b) $L^* = 100, Pe = 2, R = 1$ e $\tau = 0,25$

Figura 3. Distribuição da concentração adimensional do poluente.

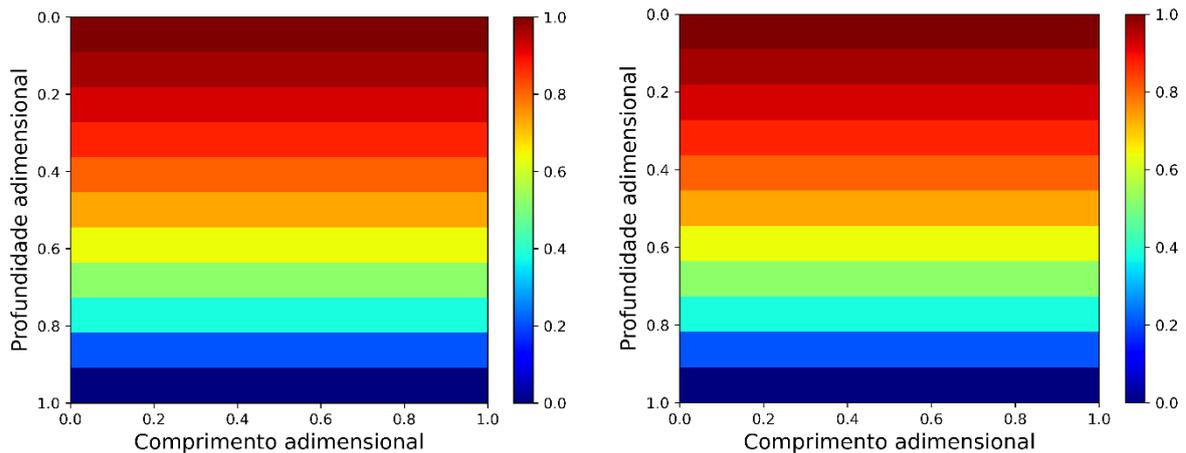
Fonte: do autor.



a) $L^* = 0,25, Pe = 2, R = 1$ e $\tau = 0,75$ b) $L^* = 1, Pe = 2, R = 1$ e $\tau = 0,75$

Figura 4. Distribuição da concentração adimensional do poluente.

Fonte: do autor.



a) $L^* = 10$, $Pe = 2$, $R = 1$ e $\tau = 0,75$

b) $L^* = 100$, $Pe = 2$, $R = 1$ e $\tau = 0,75$

Figura 5. Distribuição da concentração adimensional do poluente.

Fonte: do autor.

Através das simulações realizadas, pode-se perceber que considerando comprimentos e tempos adimensionais distintos é possível observar que as Figuras não se modificam, o que demonstra que para os comprimentos adimensionais analisados, o campo de concentração não apresenta influência. Além disso, pode-se destacar que independente dos comprimentos adimensionais considerado os resultados dos campos de concentração também não se alteraram, o que realmente apresentam-se consistentes com a dinâmica do problema, pois em todos os casos foram utilizadas as mesmas condições, seja inicial ou de contorno, logo o perfil deve se manter, inclusive pelo fato de ter sido considerado o problema na forma adimensionalizada.

4. CONCLUSÕES

O estudo apresentado concluiu que para diferentes comprimentos adimensionais, estes não possuem influência nos campos de concentração dos contaminantes. Como próximas etapas da pesquisa pretende-se estudar a influência de outros parâmetros na propagação de contaminantes e se apresenta influência no campo de concentração.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ALBUQUERQUE, F. A. **Estudo da propagação de contaminantes em aterros sanitários via GITT**. 2018. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal da Paraíba.
- Associação Brasileira de Empresas de Limpeza Pública e Resíduos Especiais – ABRELPE. **Panorama dos resíduos sólidos no Brasil 2022**. 2023. São Paulo. Acessado em 03 set. 2023. Disponível em: <https://encurtador.com.br/cvwJN>
- Companhia de Desenvolvimento Urbano do Estado da Bahia – CONDER. **Manual de Operação de Aterros Sanitários**. 2017. Bahia. Acessado em 07 set. 2023. Disponível em: <https://encurtador.com.br/iotIU>
- BUSKE, D. **Solução GILTT bidimensional em geometria cartesiana: Simulação da dispersão de poluentes na atmosfera**. 2008. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

MODELO MATEMÁTICO APLICADO À DISPERSÃO DE CONTAMINANTES EM ATERROS SANITÁRIOS DE RESÍDUOS SÓLIDOS URBANOS

Josiane Konradt¹, Igor da Cunha Furtado², Guilherme Jahnecke Weymar³,
Daniela Buske⁴, Régis Sperotto de Quadros⁵

¹Universidade Federal de Pelotas, josianekonradt@gmail.com;

²Instituto Federal Sul-Riograndense, igorjara@gmail.com;

³Universidade Federal de Pelotas, guilhermegahnecke@gmail.com;

⁴Universidade Federal de Pelotas, danielabuske@gmail.com;

⁵Universidade Federal de Pelotas, quadros99@gmail.com.

RESUMO: O consumo de itens descartáveis, embalagens excessivas e produtos com obsolescência programada tem levado a uma produção cada vez maior de resíduos sólidos urbanos (RSU). Quando os resíduos não são tratados adequadamente podem causar diversos impactos negativos no meio ambiente, como a contaminação do solo e da água. Desta forma, o presente trabalho apresenta um estudo de um modelo bidimensional da dispersão de poluentes em aterros sanitários, considerando a equação governante na forma adimensional. O problema em estudo tem como hipótese o vazamento contínuo e uniforme de uma célula de armazenamento de RSU. O modelo adotado é resolvido pelo método da *Generalized Integral Laplace Transform Technique* (GILTT), cuja solução obtida é analítica, exceto pelo erro de truncamento na série infinita. Os resultados obtidos mostram que o método proposto é eficaz para reproduzir as características físicas do problema e quando comparado com outros resultados disponíveis na literatura, destacando a influência do parâmetro número de Péclet no estudo.

Palavras-chave: Aterros sanitários; Dispersão de poluentes; GILTT; Resíduos Sólidos Urbanos.

1. INTRODUÇÃO

O aumento expressivo de geração de resíduo sólido urbano (RSU) devido ao crescimento populacional e aliado ao consumismo é um tópico que tem ganhado destaque devido aos problemas ambientais que são gerados a partir da disposição final dos resíduos.

O RSU quando disposto de forma irregular representa uma séria ameaça ao meio ambiente, à biodiversidade e à saúde pública, contaminando o solo e o lençol freático, tornando imprópria para consumo fontes de água doce. Diante deste problema, a modelagem matemática torna-se uma importante ferramenta que auxilia no estudo de métodos que preveem o comportamento da dispersão de poluentes no meio poroso.

Segundo o relatório *What a Waste 2.0* (2018) do Banco Mundial, como perspectiva para o futuro, o desperdício global deve alcançar a marca de 3,40 bilhões de toneladas até 2050, sendo que os aterros sanitários apresentam-se como a melhor alternativa para a destinação destes RSU, visto que ocorre a adequada disposição no solo, sob controles técnico e operacional permanentes, de modo a que nem os

resíduos, nem seus efluentes líquidos e gasosos, venham a causar danos significativos.

O presente trabalho possui como propósito encontrar a solução de um modelo bidimensional do transporte de contaminantes num aterro sanitário e através de simulações observar a importância e a influência do parâmetro físico (número de Péclet) no estudo considerado. Para isso será utilizada a forma adimensional do modelo de dispersão de efluentes no meio poroso, considerando o vazamento contínuo e uniforme de poluente de uma célula de armazenamento de RSU. Para a resolução do modelo será utilizada a técnica *Generalized Integral Laplace Transform Technique* (GILTT) que combina a expansão do contaminante em uma série em termos das autofunções determinadas com o apoio de um problema auxiliar de Sturm-Liouville e a obtenção de uma equação diferencial ordinária (EDO) na forma matricial, que é resolvida pela transformada de Laplace (BUSKE, 2008), obtendo assim a solução da forma analítica do modelo transiente de transporte de massa num meio poroso saturado.

2. METODOLOGIA

A Figura 1 representa o modelo bidimensional utilizado no presente trabalho, representando o esquema simplificado de uma célula de armazenamento de RSU, sendo este o local onde ocorre o transporte da concentração de contaminantes através do meio poroso até chegar no lençol freático, onde $Y = 0$ representa a fronteira entre o aterro sanitário e o solo e $Y = L_1$ representa o limite entre o solo e o lençol freático.

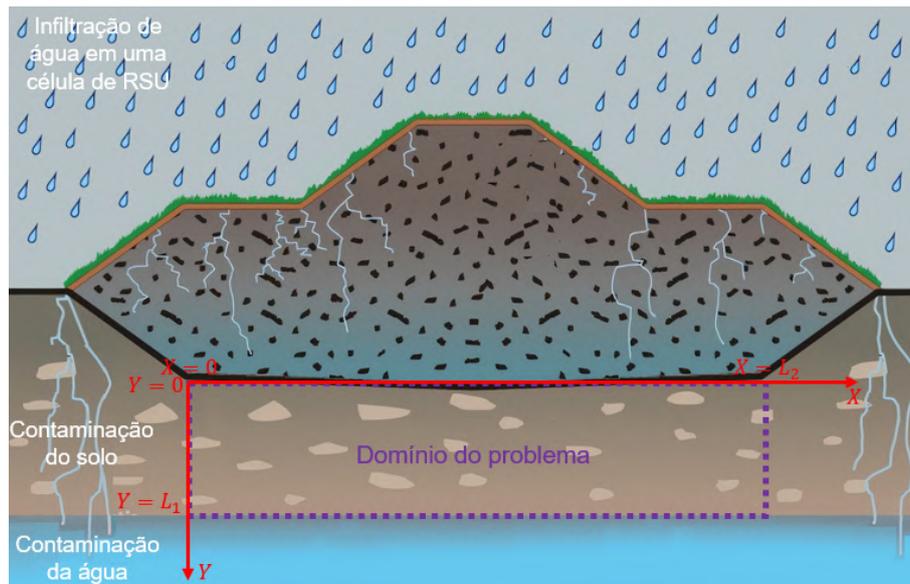


Figura 1. Corte da seção de um aterro sanitário.
Fonte: Adaptado de (CONDER, 2022).

A Eq. (1), escrita na forma adimensional, descreve o transporte de poluentes no

meio poroso saturado, podendo ser encontrada no trabalho de Albuquerque (2018):

$$R \frac{\partial C}{\partial \tau} = L^* \frac{\partial^2 C}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial Y^2} - Pe \frac{\partial C}{\partial Y}, \quad (1)$$

onde R representa o fator de retardamento do solo, C é a concentração do contaminante na fase líquida, τ representa ao tempo, L^* é a relação entre as dimensões em X e Y do problema ($L^* = (\frac{L_1}{L_2})^2$) e Pe é o número de Péclet.

A condição inicial do problema é dada por:

$$C(X, Y, 0) = C_0, \quad (2)$$

onde C_0 é a concentração inicial do contaminante na célula de armazenamento de RSU.

As condições de contorno na forma adimensional e na direção X são dadas por:

$$\frac{\partial C}{\partial X}(0, Y, \tau) = 0, \quad \frac{\partial C}{\partial X}(1, Y, \tau) = 0, \quad (3)$$

onde são utilizadas condições de fluxo nulo nas fronteiras do domínio em X .

As condições de contorno na direção Y são dadas por:

$$C(X, 0, \tau) = 1, \quad (4)$$

a Eq. (1) está sujeita à condição de interface (4) que corresponde ao vazamento contínuo e uniforme de choroume em uma célula de RSU, além de:

$$\frac{\partial C}{\partial Y}(X, 1, \tau) + BiC(X, 1, \tau) = 0, \quad (5)$$

onde Bi é o número de Biot e esta condição representa o fluxo convectivo situada na parte de contato entre o solo e o lençol freático.

Com as equações adimensionalizadas, representadas pela Eqs. (1) - (5) inicia-se a resolução do problema aplicando o Método de Superposição (HAHN; ÖZISIK, 1993):

$$C(X, Y, \tau) = C^*(X, Y, \tau) + C_E(Y), \quad (6)$$

onde C^* é uma função auxiliar que leva consigo a condição de fronteira homogênea e C_E é a solução para o problema no estado estacionário. Assim, substituindo Eq. (6) na expressão que governa o transporte de poluentes no meio poroso Eq. (1):

$$R \frac{\partial C^*}{\partial \tau} = L^* \frac{\partial^2 C^*}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 C^*}{\partial Y^2} + \frac{d^2 C_E}{dY^2} - Pe \left(\frac{\partial C^*}{\partial Y} + \frac{dC_E}{dY} \right). \quad (7)$$

A partir da Eq. (7), obtém-se duas equações diferenciais, uma EDO e outra equação diferencial parcial (EDP).

A EDO extraída da Eq. (7) é representada pela seguinte expressão:

$$\frac{d^2 C_E}{dY^2} - Pe \frac{dC_E}{dY} = 0, \quad (8)$$

e as condições de contorno são dadas pelas seguintes equações:

$$C_E(0) = 1, \quad \frac{dC_E(1)}{dY} + BiC_E(1) = 0. \quad (9)$$

Usando as condições de contorno dadas por (9), obtém-se a solução analítica da Eq. (8):

$$C_E(Y) = \frac{e^{Pe}(Pe + Bi) - Bie^{PeY}}{e^{Pe}(Pe + Bi) - Bi}. \quad (10)$$

A EDP obtida da Eq. (7) é dada por:

$$R \frac{\partial C^*}{\partial \tau} = L^* \frac{\partial^2 C^*}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 C^*}{\partial Y^2} - Pe \frac{\partial C^*}{\partial Y}, \quad (11)$$

e as condições de contorno na direção X são fornecidas pelas seguintes equações:

$$\frac{\partial C^*}{\partial X}(0, Y, \tau) = 0, \quad \frac{\partial C^*}{\partial X}(1, Y, \tau) = 0, \quad (12)$$

além das condições de contorno na direção Y :

$$C^*(X, 0, \tau) = 0, \quad \frac{\partial C^*}{\partial Y}(X, 1, \tau) + BiC^*(X, 1, \tau) = 0, \quad (13)$$

e a condição inicial é dada por:

$$C^*(X, Y, 0) = C_0 - C_E(Y). \quad (14)$$

Para obter a solução $C^*(X, Y, \tau)$ da Eq. (11), utilizou-se o método GILTT. Para isso, primeiramente, é tomado o problema auxiliar de Sturm-Liouville considerando a direção X :

$$\frac{d^2 \varphi}{dX^2} + \frac{\lambda^2}{L^*} \varphi = 0, \quad \frac{d\varphi(0)}{dX} = 0, \quad \frac{d\varphi(1)}{dX} = 0, \quad (15)$$

sendo que a equação diferencial possui como solução as autofunções (HAHN; ÖZISIK, 1993):

$$\varphi_n(X) = \cos\left(\frac{\lambda_n}{\sqrt{L^*}}X\right), \quad (16)$$

aplicando as condições de contorno, chega-se aos autovalores associados a cada autofunção:

$$\lambda_n = n\pi\sqrt{L^*} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (17)$$

Além disso, a concentração é expandida como uma série em termos das autofunções e posteriormente é substituída na Eq. (11), onde é aplicando o operador integral $\int_0^1(\cdot)\varphi_m(X)dX$ em ambos lados da equação, notando que, pela Eq. (15), $\varphi_n''(X) = -\lambda_n^2\varphi_n(X)$, obtendo uma equação onde todos os somatório possuem os termos nulos, exceto quando $m = n$. Portanto, obtém-se a seguinte expressão:

$$R \frac{\partial \bar{C}_n(Y, \tau)}{\partial \tau} = -\lambda_n^2 \bar{C}_n(Y, \tau) + \frac{\partial^2 \bar{C}_n(Y, \tau)}{\partial Y^2} - Pe \frac{\partial \bar{C}_n(Y, \tau)}{\partial Y}. \quad (18)$$

Para a resolução da EDP (18), resolve-se primeiramente o problema auxiliar de Sturm-Liouville em Y :

$$\frac{d^2\psi}{dY^2} + \beta^2\psi = 0, \quad \psi(0) = 0, \quad \frac{d\psi(1)}{dY} + Bi\psi(1) = 0, \quad (19)$$

sendo que a equação diferencial possui como solução as autofunções (HAHN; ÖZISI-K, 1993):

$$\psi_k(Y) = \text{sen}(\beta_k Y), \quad (20)$$

aplicando as condições de contorno, obtém-se os autovalores associados a cada autofunção, os quais devem satisfazer uma equação transcendental, onde as raízes são calculadas pelo método de Newton-Raphson.

A seguir, a solução da EDP (18) é expandida como uma série em termo das autofunções e posteriormente realizando a substituição na expansão na Eq. (18), onde também é aplicando o operador integral $\int_0^1(\cdot)\psi_l(Y)dY$ em ambos lados da equação, notando que, pela Eq. (19) tem-se que $\psi_k''(Y) = -\beta_k^2\psi_k(Y)$ e reagrupando os termos, pode-se reescrever a equação obtida na forma matricial:

$$A \cdot Z'(\tau) + B \cdot Z(\tau) = 0, \quad (21)$$

onde $Z(\tau) = \{\tilde{C}_k\}$, com $k = 0, 1, 2, \dots$; $A = \{a_{k,l}\}$, onde $a_{k,l} = R \int_0^1 \psi_k(Y)\psi_l(Y)dY$ e $B = \{b_{k,l}\}$, onde $b_{k,l} = (\lambda_n^2 + \beta_k^2) \int_0^1 \psi_k(Y)\psi_l(Y)dY + Pe \int_0^1 \psi_k'(Y)\psi_l(Y)dY$. Ainda, considerando $F = A^{-1} \cdot B$, reescreve-se a Eq. (21) da forma:

$$Z'(\tau) + F \cdot Z(\tau) = 0. \quad (22)$$

A condição inicial da equação diferencial matricial, Eq. (22) é obtida aplicando os mesmos procedimentos, realizados na EDP, na Eq. (14), e desta forma, a condição inicial está bem definida.

Para resolver a EDO matricial (22), aplica-se a transformada de Laplace em ambos os lados. Neste problema, assume-se que a matriz F seja diagonalizável, e escreve-se $F = X \cdot D \cdot X^{-1}$, onde D é a matriz diagonal cujos elementos são os autovalores de F , X é a matriz cujas colunas constituem os autovetores linearmente independentes de F e X^{-1} é sua inversa. Portanto, conclui-se que a solução da EDO matricial (22) é:

$$Z(\tau) = X \cdot G(\tau) \cdot X^{-1} \cdot Z(0). \quad (23)$$

Logo, a solução do modelo bidimensional da dispersão de poluentes em meios porosos, representadas pelas equações Eqs. (1) - (5) é dada por:

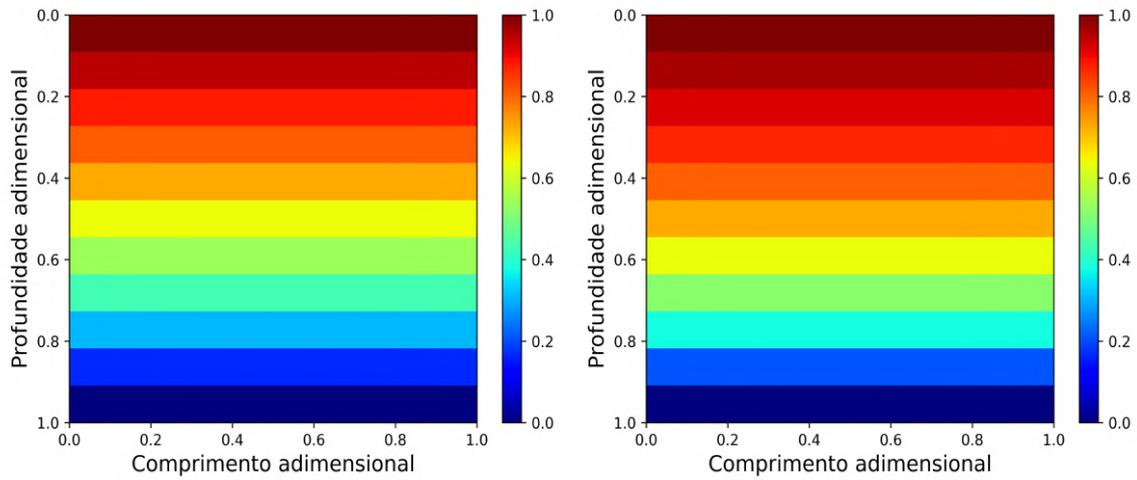
$$C(X, Y, \tau) = \sum_{n=0}^N \varphi_n(X) \left[\sum_{k=0}^K \psi_k(Y) \tilde{C}_k(\tau) \right] + C_E(Y), \quad (24)$$

onde $\varphi_n(X)$ é definida pela Eq. (16), $\psi_k(Y)$ é definida na Eq. (20) e $\tilde{C}_k(\tau)$ é definida por (23).

3. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Obtida a solução do modelo bidimensional de transporte de poluentes no meio poroso, serão apresentados e analisados os resultados obtidos através do software online *Google Colaboratory* em linguagem Python, onde foi observada a influência do parâmetro Pe no campo de concentração.

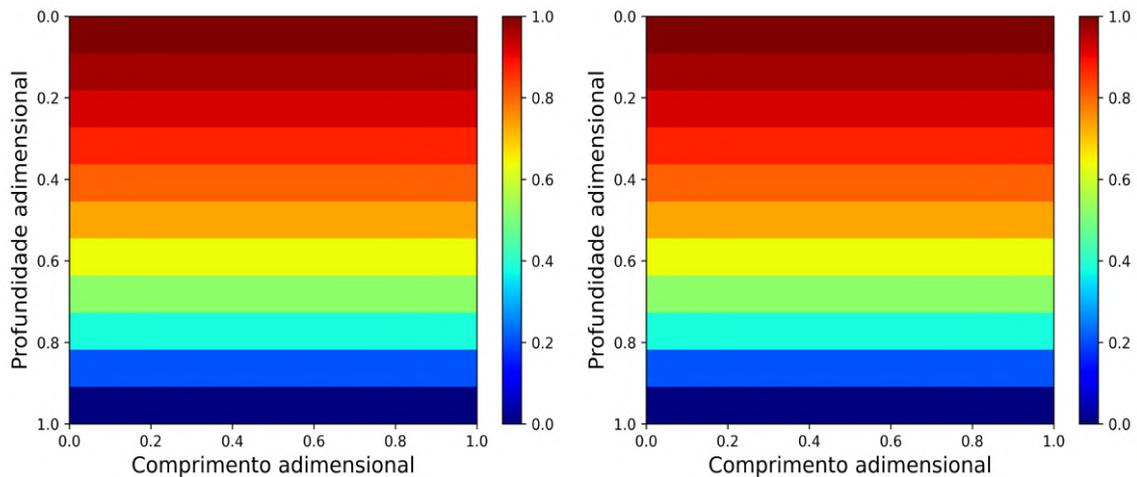
As Figuras (2a), (2b), (3a) e (3b) apresentam a distribuição da concentração adimensional do poluente considerando fixos $Pe = 2$ e $R = 1$, sendo que o valor de τ altera.



(a) Considerando $Pe = 2$, $R = 1$ e $\tau = 0,20$ (b) Considerando $Pe = 2$, $R = 1$ e $\tau = 0,50$

Figura 2. Distribuição da concentração adimensional do poluente.

Fonte: do autor.



(a) Considerando $Pe = 2$, $R = 1$ e $\tau = 0,75$ (b) Considerando $Pe = 2$, $R = 1$ e $\tau = 0,90$

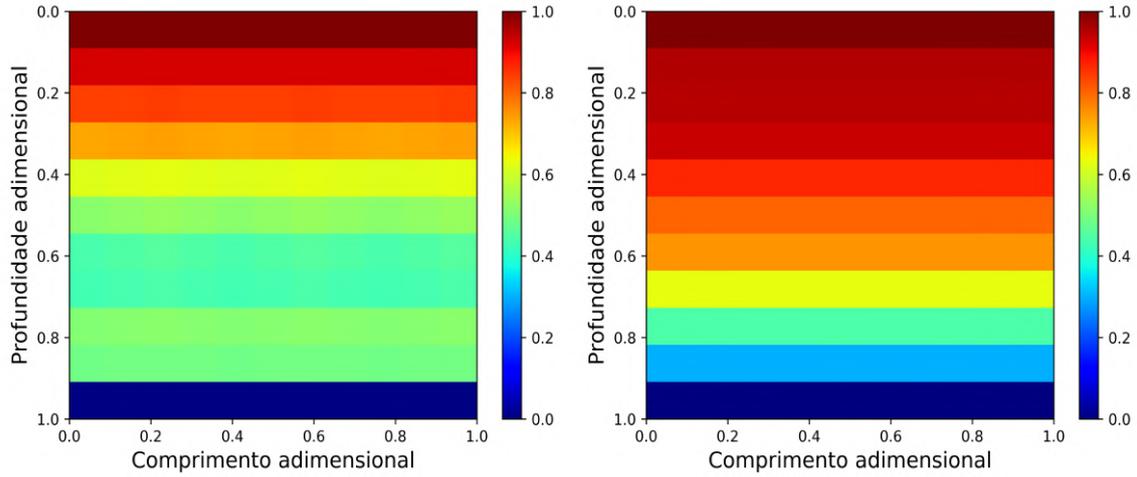
Figura 3. Distribuição da concentração adimensional do poluente.

Fonte: do autor.

Sendo $Pe = 2$, observa-se que com o decorrer do tempo o escoamento do poluente é lento, além de que para $\tau > 0,50$ a distribuição da concentração do

poluente praticamente não se modifica. Ou seja, para valores considerados baixos para o parâmetro Pe , o escoamento do poluente é lento e portanto, o lençol freático acaba sendo atingido com valores de concentração adimensional inferiores a 0,1.

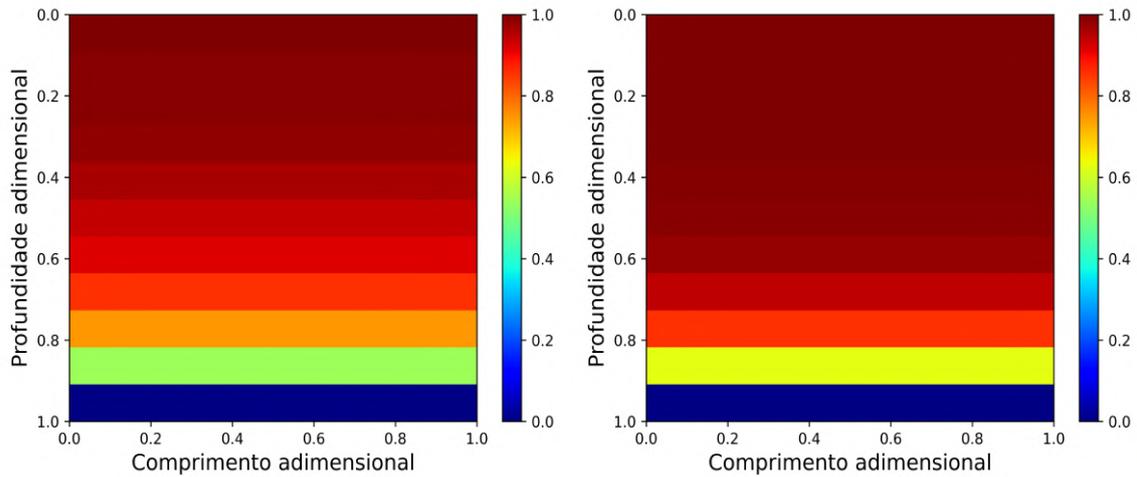
De maneira análoga, as Figuras (4a), (4b), (5a) e (5b) apresentam a distribuição da concentração adimensional do poluente considerando fixos $Pe = 10$, $R = 1$ e o valor de τ variando.



(a) Considerando $Pe = 10$, $R = 1$ e $\tau = 0,02$ (b) Considerando $Pe = 10$, $R = 1$ e $\tau = 0,05$

Figura 4. Distribuição da concentração adimensional do poluente.

Fonte: do autor.



(a) Considerando $Pe = 10$, $R = 1$ e $\tau = 0,10$ (b) Considerando $Pe = 10$, $R = 1$ e $\tau = 0,20$

Figura 5. Distribuição da concentração adimensional do poluente.

Fonte: do autor.

Considerando $Pe = 10$, ou seja, uma significativa diferença para $Pe = 2$, percebe-se que o poluente oriundo da célula de RSU contamina de forma mais significativa o solo em um tempo menor, devido ao fato do contaminante escorrer com uma velocidade maior e contaminar menos o solo, ou seja, o processo de advecção é maior que o de difusão. Desta forma, as possíveis causas ao lençol freático podem

ser significativas, devido a concentração de poluente que pode atingi-lo. Além disso, nota-se que para $\tau = 0,20$ o contaminante atingiu 90% do solo, sendo que os índices são considerados altos.

Além disso, em ambos os casos observa-se que considerando um valor de Y mais próximo da superfície e conseqüentemente do aterro sanitário, percebe-se que a concentração adimensional é um valor próximo de 1, ou seja, da concentração máxima. Entretanto, quando considerado um valor de Y próximo ao lençol freático, percebe-se que a concentração do contaminante é praticamente nulo.

4. CONCLUSÕES

A poluição da água subterrânea afeta diferentes ecossistemas que dependem deste meio, tornando extremamente necessário o estudo de métodos que prevejam como pode ser atingindo através de poluentes.

Percebe-se que dependendo do valor do parâmetro Pe considerado nas simulações, altera a forma como o lençol freático pode ser atingido. Sendo o Pe um número progressivo, faz com que o contaminante escoe de uma forma mais rápida pelo solo, contaminando menos este meio, mas atingindo de forma mais significativa os recursos de água. Desta forma, percebendo que o efeito advectivo é maior que o difusivo.

Como próximas etapas da pesquisa pretende-se estudar a influência de outros parâmetros na propagação de contaminantes e se estes atingem de forma mais significativa o lençol freático.

AGRADECIMENTOS

Agradecemos a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo financiamento da pesquisa.

REFERÊNCIAS

- Albuquerque, F. A. “Estudo da propagação de contaminante em aterros sanitários via GITT”. Tese de doutorado. Universidade Federal da Paraíba, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, 2018.
- Bahia. Companhia de Desenvolvimento Urbano do Estado da Bahia – CONDER. Manual de Operação de Aterros Sanitários. Online. Acessado em 07/03/2023, <https://shre.ink/koDv>.
- Buske, D. “Solução GILTT bidimensional em geometria cartesiana: Simulação da dispersão de poluentes na atmosfera”. Tese de doutorado. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, 2008.

Hahn, D. W., Özisik, M. N. **Heat conduction**, 3rd ed. Nova Jersey: John Wiley & Sons, 1993. ISBN: 978-1-118-41128-5.

Kaza, S., Yao, L., Bhada-Tata, P., Woerden, F. V. **What a waste 2.0**: a global snapshot of solid waste management to 2050. Online. Acessado em 07/03/2023, <https://openknowledge.worldbank.org/handle/10986/30317>.



ESTUDO DO PARÂMETRO FATOR DE RETARDAMENTO DO SOLO NA DISTRIBUIÇÃO DE CONTAMINANTES EM ATERROS SANITÁRIOS

Josiane Konradt¹ - josianekonradt@gmail.com

Igor da Cunha Furtado² - igorjara@gmail.com

Régis Sperotto de Quadros¹ - quadros99@gmail.com

Daniela Buske¹ - danielabuske@gmail.com

Guilherme Jahnecke Weymar¹ - guilhermejahnecke@gmail.com

¹Universidade Federal de Pelotas, PPGMat - Pelotas, RS, Brasil

²Instituto Federal Sul-Riograndense, Departamento de Matemática - Pelotas, RS, Brasil

Resumo. *O aumento no consumo de produtos descartáveis, a utilização excessiva de embalagens e a presença de bens programados para rápida obsolescência são fatores que têm diretamente impulsionado o crescimento da produção de resíduos sólidos urbanos (RSU). Quando esses resíduos não são tratados de forma adequada, seus impactos negativos no meio ambiente se tornam evidentes, incluindo a contaminação do solo e dos recursos hídricos. Desta forma, o presente trabalho apresenta um estudo de um modelo bidimensional da dispersão de poluentes em aterros sanitários, considerando a equação governante na forma adimensional. O problema em estudo tem como hipótese o vazamento contínuo e uniforme de uma célula de armazenamento de RSU. O modelo adotado é resolvido pelo método da Generalized Integral Laplace Transform Technique (GILTT), cuja solução obtida é analítica, exceto pelo erro de truncamento na série infinita. Os resultados obtidos mostram que o método proposto é eficaz para reproduzir as características físicas do problema e quando comparado com outros resultados disponíveis na literatura, destacando a influência do parâmetro fator de retardamento no estudo.*

Palavras-chave: *Aterros sanitários, Dispersão de poluentes, Fator de retardamento, GILTT, Modelagem matemática*

1. INTRODUÇÃO

A geração significativa de resíduos sólidos urbanos (RSU) é resultado de vários fatores intrinsecamente ligados ao crescimento populacional, ao estilo de vida contemporâneo e aos padrões de consumo. Esses fenômenos refletem na demanda crescente por materiais e embalagens, bem como o desafio de lidar com produtos que acabam sendo projetados para se tornarem obsoletos rapidamente, incentivando a substituição constante e gerando mais resíduos.

Segundo o relatório publicado pela ABRELPE (2022) foi observado um avanço na destinação adequada de RSU, sendo que no ano de 2022, a disposição final em aterros sanitários alcançou a taxa de 61%, destacando que os demais 39% ainda são destinados a lixões e aterros controlados, os quais permanecem ativos em todo o país, visto que nestes locais não existe uma camada de material impermeável para proteger o solo, além de tratamento adequado para os gases liberados e o chumbo, como no aterro sanitário. Desta forma, quando RSU são encaminhados para esses meios inadequados, configuram-se como uma fonte permanente de poluição e degradação ambiental, com consideráveis impactos na saúde da população.

O presente trabalho possui como propósito apresentar a solução de um modelo bidimensional do transporte de contaminantes num aterro sanitário e através de simulações observar a importância e influência do fator de retardamento do solo. Para isso será utilizada a forma adimensional do modelo de dispersão de efluentes no meio poroso, considerando o vazamento contínuo e uniforme de poluente de uma célula de armazenamento de RSU.

Para a resolução do modelo será utilizada a técnica *Generalized Integral Laplace Transform Technique* (GILTT) que combina a expansão do contaminante em uma série em termos das autofunções determinadas com o apoio de um problema auxiliar de Sturm-Liouville e a obtenção de uma equação diferencial ordinária (EDO) na forma matricial, que é resolvida pela transformada de Laplace (Buske, 2008), obtendo assim a solução da forma analítica do modelo transiente de transporte de massa num meio poroso saturado.

2. METODOLOGIA

A Figura 1 representa o modelo bidimensional utilizado no presente trabalho, representando o esquema simplificado de uma célula de armazenamento de RSU, sendo este o local onde ocorre o transporte da concentração de contaminantes através do meio poroso até chegar ao lençol freático, onde $Y = 0$ representa a fronteira entre o aterro sanitário e o solo e $Y = L_1$ representa o limite entre o solo e o lençol freático.

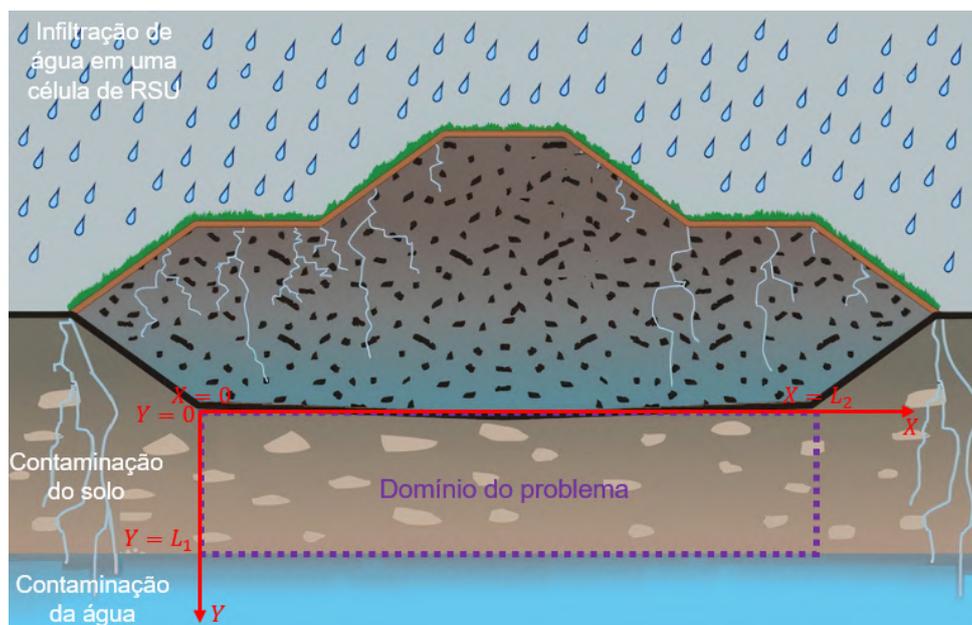


Figure 1: Corte da seção de um aterro sanitário.

Fonte: Adaptado de CONDER (2022).

A Eq. (1), escrita na forma adimensional, descreve o transporte de poluentes no meio poroso saturado, podendo ser encontrada no trabalho de Albuquerque (2018):

$$R \frac{\partial C}{\partial \tau} = L^* \frac{\partial^2 C}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial Y^2} - Pe \frac{\partial C}{\partial Y}, \quad (1)$$

onde R representa o fator de retardamento do solo, C é a concentração do contaminante na fase líquida, τ representa ao tempo, L^* é a relação entre as dimensões em X e Y do problema ($L^* = (\frac{L_1}{L_2})^2$) e Pe é o número de Péclet.

A condição inicial do problema é dada por:

$$C(X, Y, 0) = C_0, \quad (2)$$

onde C_0 é a concentração inicial do contaminante na célula de armazenamento de RSU.

As condições de contorno na forma adimensional e na direção X são dadas por:

$$\frac{\partial C}{\partial X}(0, Y, \tau) = 0, \quad \frac{\partial C}{\partial X}(1, Y, \tau) = 0, \quad (3)$$

onde são utilizadas condições de fluxo nulo nas fronteiras do domínio em X .

As condições de contorno na direção Y são dadas por:

$$C(X, 0, \tau) = 1, \quad (4)$$

a Eq. (1) está sujeita à condição de interface (4) que corresponde ao vazamento contínuo e uniforme de chorume em uma célula de RSU, além de:

$$\frac{\partial C}{\partial Y}(X, 1, \tau) + BiC(X, 1, \tau) = 0, \quad (5)$$

onde Bi é o número de Biot e esta condição representa o fluxo convectivo situada na parte de contato entre o solo e o lençol freático.

Com as equações adimensionalizadas, representadas pela Eqs. (1) - (5) inicia-se a resolução do problema aplicando o Método de Superposição (Hahn & Özisik, 1993):

$$C(X, Y, \tau) = C^*(X, Y, \tau) + C_E(Y), \quad (6)$$

onde C^* é uma função auxiliar que leva consigo a condição de fronteira homogênea e C_E é a solução para o problema no estado estacionário. Assim, substituindo Eq. (6) na expressão que governa o transporte de poluentes no meio poroso Eq. (1):

$$R \frac{\partial C^*}{\partial \tau} = L^* \frac{\partial^2 C^*}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 C^*}{\partial Y^2} + \frac{d^2 C_E}{dY^2} - Pe \left(\frac{\partial C^*}{\partial Y} + \frac{dC_E}{dY} \right). \quad (7)$$

A partir da Eq. (7), obtém-se duas equações diferenciais, uma EDO e outra equação diferencial parcial (EDP).

A EDO extraída da Eq. (7) é representada pela seguinte expressão:

$$\frac{d^2 C_E}{dY^2} - Pe \frac{dC_E}{dY} = 0, \quad (8)$$

e as condições de contorno são dadas pelas seguintes equações:

$$C_E(0) = 1, \quad \frac{dC_E(1)}{dY} + BiC_E(1) = 0. \quad (9)$$

Usando as condições de contorno dadas por (9), obtém-se a solução analítica da Eq. (8):

$$C_E(Y) = \frac{e^{Pe}(Pe + Bi) - Bi e^{PeY}}{e^{Pe}(Pe + Bi) - Bi}. \quad (10)$$

A EDP obtida da Eq. (7) é dada por:

$$R \frac{\partial C^*}{\partial \tau} = L^* \frac{\partial^2 C^*}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 C^*}{\partial Y^2} - Pe \frac{\partial C^*}{\partial Y}, \quad (11)$$

e as condições de contorno na direção X são fornecidas pelas seguintes equações:

$$\frac{\partial C^*}{\partial X}(0, Y, \tau) = 0, \quad \frac{\partial C^*}{\partial X}(1, Y, \tau) = 0, \quad (12)$$

além das condições de contorno na direção Y :

$$C^*(X, 0, \tau) = 0, \quad \frac{\partial C^*}{\partial Y}(X, 1, \tau) + Bi C^*(X, 1, \tau) = 0, \quad (13)$$

e a condição inicial é dada por:

$$C^*(X, Y, 0) = C_0 - C_E(Y). \quad (14)$$

Para obter a solução $C^*(X, Y, \tau)$ da Eq. (11), utilizou-se o método GILTT. Para isso, primeiramente, é tomado o problema auxiliar de Sturm-Liouville considerando a direção X :

$$\frac{d^2 \varphi}{dX^2} + \frac{\lambda^2}{L^*} \varphi = 0, \quad \frac{d\varphi(0)}{dX} = 0, \quad \frac{d\varphi(1)}{dX} = 0, \quad (15)$$

sendo que a equação diferencial possui como solução as autofunções (Hahn & Özisik, 1993):

$$\varphi_n(X) = \cos\left(\frac{\lambda_n}{\sqrt{L^*}} X\right), \quad (16)$$

aplicando as condições de contorno, chega-se aos autovalores associados a cada autofunção:

$$\lambda_n = n\pi\sqrt{L^*} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (17)$$

Além disso, a concentração é expandida como uma série em termos das autofunções e posteriormente é substituída na Eq. (11), onde é aplicado o operador integral $\int_0^1 (\cdot) \varphi_m(X) dX$ em ambos lados da equação, notando que, pela Eq. (15), $\varphi_n''(X) = -\lambda_n^2 \varphi_n(X)$, obtendo uma equação onde todos os somatório possuem os termos nulos, exceto quando $m = n$. Portanto, obtém-se a seguinte expressão:

$$R \frac{\partial \bar{C}_n(Y, \tau)}{\partial \tau} = -\lambda_n^2 \bar{C}_n(Y, \tau) + \frac{\partial^2 \bar{C}_n(Y, \tau)}{\partial Y^2} - Pe \frac{\partial \bar{C}_n(Y, \tau)}{\partial Y}. \quad (18)$$

Para a resolução da EDP (18), resolve-se primeiramente o problema auxiliar de Sturm-Liouville em Y :

$$\frac{d^2 \psi}{dY^2} + \beta^2 \psi = 0, \quad \psi(0) = 0, \quad \frac{d\psi(1)}{dY} + Bi\psi(1) = 0, \quad (19)$$

sendo que a equação diferencial possui como solução as autofunções (Hahn & Özisik, 1993):

$$\psi_k(Y) = \text{sen}(\beta_k Y), \quad (20)$$

aplicando as condições de contorno, obtém-se os autovalores associados a cada autofunção, os quais devem satisfazer uma equação transcendental, onde as raízes são calculadas pelo método de Newton-Raphson.

A seguir, a solução da EDP (18) é expandida como uma série em termo das autofunções e posteriormente realizando a substituição na expansão na Eq. (18), onde também é aplicando o operador integral $\int_0^1 (\cdot) \psi_l(Y) dY$ em ambos lados da equação, notando que, pela Eq. (19) tem-se que $\psi_k''(Y) = -\beta_k^2 \psi_k(Y)$ e reagrupando os termos, pode-se reescrever a equação obtida na forma matricial:

$$A \cdot Z'(\tau) + B \cdot Z(\tau) = 0, \quad (21)$$

onde $Z(\tau) = \{\tilde{C}_k\}$, com $k = 0, 1, 2, \dots$; $A = \{a_{k,l}\}$, onde $a_{k,l} = R \int_0^1 \psi_k(Y) \psi_l(Y) dY$ e $B = \{b_{k,l}\}$, onde $b_{k,l} = (\lambda_n^2 + \beta_k^2) \int_0^1 \psi_k(Y) \psi_l(Y) dY + Pe \int_0^1 \psi_k'(Y) \psi_l(Y) dY$. Ainda, considerando $F = A^{-1} \cdot B$, reescreve-se a Eq. (21) da forma:

$$Z'(\tau) + F \cdot Z(\tau) = 0. \quad (22)$$

A condição inicial da equação diferencial matricial, Eq. (22) é obtida aplicando os mesmos procedimentos, realizados na EDP, na Eq. (14), e desta forma, a condição inicial está bem definida.

Para resolver a EDO matricial (22), aplica-se a transformada de Laplace em ambos os lados. Neste problema, assume-se que a matriz F seja diagonalizável, e escreve-se $F = X \cdot D \cdot X^{-1}$, onde D é a matriz diagonal cujos elementos são os autovalores de F , X é a matriz cujas colunas constituem os autovetores linearmente independentes de F e X^{-1} é sua inversa. Portanto, conclui-se que a solução da EDO matricial (22) é:

$$Z(\tau) = X \cdot G(\tau) \cdot X^{-1} \cdot Z(0). \quad (23)$$

Logo, a solução do modelo bidimensional da dispersão de poluentes em meios porosos, representadas pelas equações Eqs. (1) - (5) é dada por:

$$C(X, Y, \tau) = \sum_{n=0}^N \varphi_n(X) \left[\sum_{k=0}^K \psi_k(Y) \tilde{C}_k(\tau) \right] + C_E(Y), \quad (24)$$

onde $\varphi_n(X)$ é definida pela Eq. (16), $\psi_k(Y)$ é definida na Eq. (20) e $\tilde{C}_k(\tau)$ é definida por (23).

3. RESULTADOS E DISCUSSÕES

A partir da solução do modelo de transporte de poluentes em meio poroso bidimensional, será apresentado e analisado os resultados obtidos utilizando o ambiente online *Google Colaboratory*, em linguagem Python. Para a análise, destaca-se a influência do parâmetro R no campo de concentração. Ainda, salienta-se que nas simulações, utilizou-se o valor $Bi = 2000$.

O parâmetro R é usado para avaliar a capacidade de retenção do solo, sendo uma característica do solo, que depende da substância considerada, da atividade do meio poroso,

da concentração inicial da substância na solução contaminada e entre outros fatores (Lange *et al.*, 2002).

As Figuras 2a, 2b, 3a e 3b apresentam a distribuição da concentração adimensional do poluente considerando fixo $Pe = 2$, para dois valores distintos do fator de retardado, $R = 1$ e $R = 5$, além de $\tau = 0, 10$ e $\tau = 0, 50$.

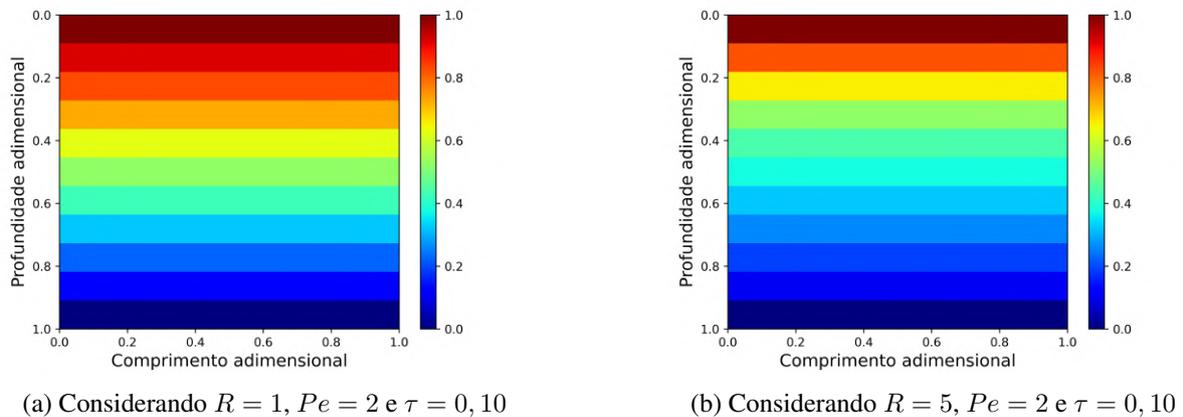


Figure 2: Distribuição da concentração adimensional do poluente.

Fonte: Do autor.

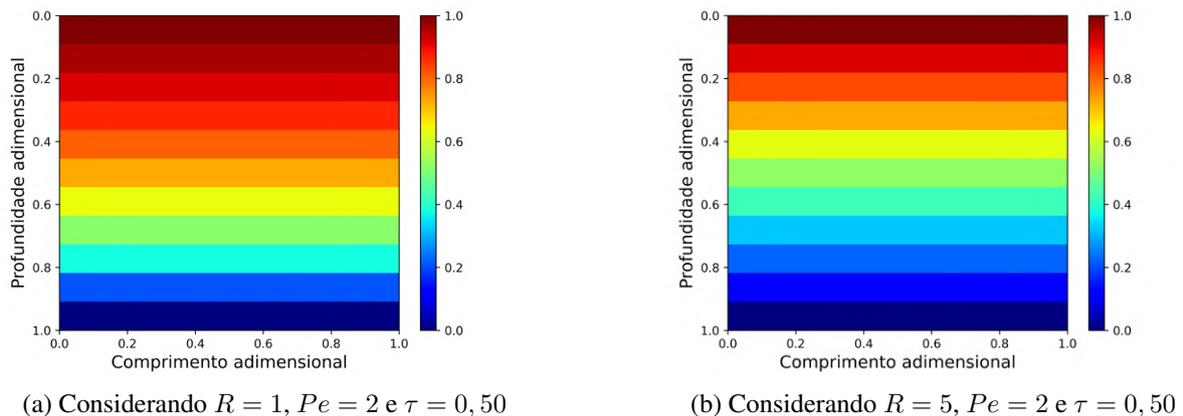
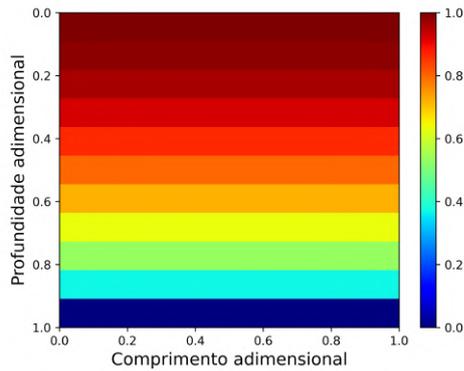


Figure 3: Distribuição da concentração adimensional do poluente.

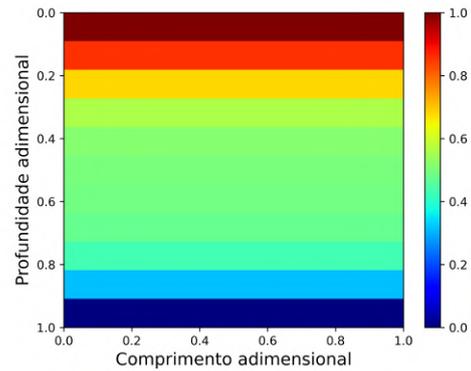
Fonte: Do autor.

Percebe-se que para o tempo de $\tau = 0, 10$ ou de $\tau = 0, 50$, em ambos os casos considerados, $R = 1$ e $R = 5$, ocorre que o fator de retardado do solo diminui em 20% a concentração do contaminante. Ou seja, no caso da Figura 2a, pode-se observar que o poluente atinge cerca de 40% do solo com níveis de contaminantes considerados elevados, cerca de 0.7. Ao elevar o parâmetro para $R = 5$, percebe-se que o níveis de concentração são diferentes, neste caso o poluente atinge cerca de 20% do solo com o mesmo nível de concentração de contaminante.

Ainda, foram analisados os casos da distribuição da concentração, sendo fixo $Pe = 10$, para dois valores distintos do fator de retardado, $R = 1$ e $R = 5$, além de $\tau = 0, 05$ e $\tau = 0, 20$.



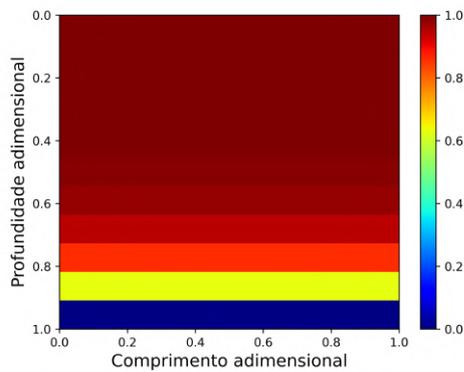
(a) Considerando $R = 1$, $Pe = 10$ e $\tau = 0,05$



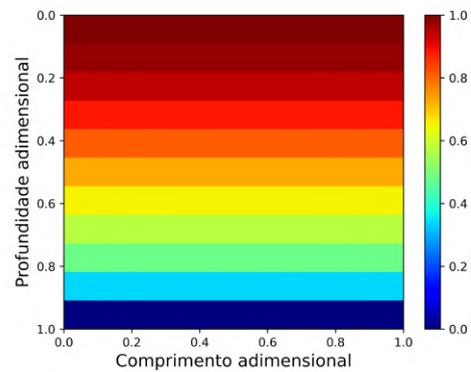
(b) Considerando $R = 5$, $Pe = 10$ e $\tau = 0,05$

Figure 4: Distribuição da concentração adimensional do poluente.

Fonte: Do autor.



(a) Considerando $R = 1$, $Pe = 10$ e $\tau = 0,20$



(b) Considerando $R = 5$, $Pe = 10$ e $\tau = 0,20$

Figure 5: Distribuição da concentração adimensional do poluente.

Fonte: Do autor.

Ao avaliar a Figura 4a e 4b evidencia-se a significativa diferença da distribuição da concentração do contaminante, ao considerar o parâmetro $R = 5$, os níveis elevados de contaminação permanecem em, no máximo, 20% do solo. Enquanto, para $R = 1$, o poluente alcança cerca de 60% do meio poroso.

Nota-se que na Figura 5a, o contaminante atingiu 90% do solo, em um nível de 0.7 na escala de concentração do contaminante. Quando avalia-se o mesmo caso, mas considerando $R = 5$, Figura 5b, observa-se que o poluente atinge 60% do solo. Demonstrando a influência do parâmetro R na distribuição da concentração de poluentes.

Ainda, pode-se destacar que avaliando $Pe = 10$, ou seja, uma significativa diferença para $Pe = 2$, percebe-se que o poluente oriundo da célula de RSU contamina de forma mais significativa o solo em um tempo menor, devido ao fato do contaminante escorrer com uma velocidade maior e contaminar menos o solo, ou seja, o fluxo é predominante advectivo. Desta forma, as possíveis causas ao lençol freático podem ser significativas, devido a concentração de poluente que pode atingi-lo, sendo que o fator de retardado do solo possui um papel importante devido a capacidade de retenção desse contaminante.

4. CONCLUSÕES

O estudo da contaminação da água subterrânea é fundamental para compreender como agentes poluentes, neste caso, o chorume gerado por uma célula de um aterro sanitário, podem se infiltrar no solo e alcançar os lençóis freáticos, comprometendo sua qualidade e disponibilidade.

Com as simulações realizadas, pode-se concluir que conforme o valor de R aumenta, a concentração adimensional será menor, ou seja, a concentração de contaminante é retida pela porosidade do solo. Portanto, o parâmetro fator de retardamento do solo é essencial para entender e gerenciar a contaminação do solo e das águas subterrâneas, visando à proteção da saúde humana e do meio ambiente. Além disso, em ambos os casos, observa-se, como esperado, que considerando um valor de Y mais próximo da superfície e conseqüentemente do aterro sanitário, percebe-se que a concentração adimensional é um valor próximo de 1, ou seja, da concentração máxima. Entretanto, quando considerado um valor de Y próximo ao lençol freático, percebe-se que a concentração do contaminante é praticamente nulo. Desta forma, pode-se concluir que os resultados obtidos estão condizentes com a dinâmica do problema.

Como próximas etapas da pesquisa pretende-se estudar a influência de outros parâmetros na propagação de contaminantes e se estes atingem de forma mais significativa o lençol freático.

Agradecimentos

Agradecemos ao Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo financiamento da nossa pesquisa.

REFERÊNCIAS

- Albuquerque, F. A. (2018), "*Estudo da propagação de contaminante em aterros sanitários via GITT*", Tese de doutorado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal da Paraíba, Paraíba.
- Associação Brasileira de Empresas de Limpeza Pública e Resíduos Especiais – ABRELPE. (2022), *Panorama dos resíduos sólidos no Brasil 2022*. São Paulo. Disponível em: <https://abrelpe.org.br/download-panorama-2022/>. Acesso em: 08 ago. 2023.
- Buske, D. (2008), "*Solução GILTT bidimensional em geometria cartesiana: Simulação da dispersão de poluentes na atmosfera*", Tese de doutorado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Rio Grande do Sul.
- CONDER. Companhia de Desenvolvimento Urbano do Estado da Bahia – CONDER. Manual de Operação de Aterros Sanitários. Online. Disponível em: <https://shre.ink/koDv>. Acesso em: 08 ago. 2023.
- Lange, L. C. Simões, G. F. Ferreira, C. F. A. Coelho, H. M. G. (2002), "Estudo da transporte de contaminantes em meios porosos aplicado a aterros de disposição de resíduos sólidos urbanos", *Alternativas de Disposição de Resíduos Sólidos para Pequenas Comunidades*, Florianópolis, Coletânea de Trabalhos Técnicos, 85-92.
- Hahn, D. W., Özisik, M. N. (1993), "*Heat conduction*", 3º ed., Nova Jersey, John Wiley & Sons.

STUDY OF THE SOIL RETARDATION FACTOR PARAMETER IN THE DISTRIBUTION OF CONTAMINANTS IN LANDFILLS

Abstract. *The increase in the consumption of disposable products, the excessive use of packaging and the presence of goods scheduled for rapid obsolescence are factors that have directly driven the growth of urban solid waste (MSW) production. When these residues are not properly treated, their negative impacts on the environment become evident, including*

the contamination of soil and water resources. Thus, the present work presents a study of a two-dimensional model of the dispersion of pollutants in sanitary landfills, considering the governing equation in dimensionless form. The problem under study is hypothesized to be the continuous and uniform leakage of a MSW storage cell. The adopted model is solved by the Generalized Integral Laplace Transform Technique (GILTT) method, whose solution obtained is analytic, except for the truncation error in the infinite series. The results show that the proposed method is effective in reproducing the physical characteristics of the problem and when compared with other results available in the literature, highlighting the influence of the delay factor parameter in the study.

Keywords: *Sanitary landfills, Dispersion of pollutants, Retardation factor, GILTT, Mathematical modeling*

Avaliação da dispersão de contaminantes em um aterro sanitário através da concentração média

Josiane Konrad¹, Guilherme Jahnecke Weymar¹, Igor da Cunha Furtado², Régis Sperotto de Quadros¹, and Daniela Buske¹

¹Universidade Federal de Pelotas, Programa de Pós Graduação em Modelagem Matemática

²Instituto Federal Sul-Riogrاندense, Departamento de Matemática

Resumo

As águas subterrâneas desempenham um papel essencial na manutenção da vida e do meio ambiente, sendo sua gestão adequada crucial para garantir a disponibilidade contínua de água de qualidade para as gerações futuras, entretanto acidentes que comprometam sua qualidade podem acontecer, como quando o chorume produzido por aterros sanitários penetram no solo, atingindo o lençol freático e contaminando-o. Este estudo apresenta um modelo bidimensional para o transporte de contaminantes em aterros sanitários e investiga a influência do parâmetro físico número de Péclet (Pe) na concentração média de poluentes meio poroso. O modelo usa a técnica *Generalized Integral Laplace Transform Technique* (GILTT) para obter a solução analítica, sendo considerado o vazamento contínuo e uniforme de poluente da célula de armazenamento de resíduos sólidos urbanos (RSU). Os resultados das simulações mostram que, à medida que o valor do Pe aumenta, a concentração média de poluentes cresce, afetando o lençol freático de forma mais grave.

1 Introdução

Os lençóis freáticos são uma parte crucial do sistema hidrológico da Terra, desempenhando um papel vital no abastecimento de água doce para muitas comunidades em todo o mundo. Hirata *et. al* (2019), destaca que 52% dos 5.570 municípios brasileiros dependem total (36%) ou parcialmente (16%) das águas subterrâneas para o abastecimento público.

Essas reservas subterrâneas de água correm o risco de serem severamente poluídas por substâncias químicas nocivas, poluentes industriais, pesticidas e pelo vazamento de resíduos provenientes dos aterros sanitários.

O presente trabalho possui como propósito apresentar a solução de um modelo bidimensional do transporte de contaminantes num aterro sanitário e através de uma simulação verificar a

importância e a influência do parâmetro físico número de Péclet no estudo considerado observando a concentração média de poluente no meio poroso. Para isso será utilizada a forma adimensional do modelo de dispersão de efluentes, considerando o vazamento contínuo e uniforme de poluente de uma célula de armazenamento de resíduos sólidos urbanos (RSU). Para a resolução do modelo será utilizada a técnica *Generalized Integral Laplace Transform Technique* (GILTT), obtendo a solução da forma analítica do modelo transiente de transporte de massa num meio poroso saturado.

2 Metodologia

A Figura 1 mostra o modelo bidimensional utilizado no presente trabalho, representando o esquema simplificado de uma célula de armazenamento de RSU, sendo este o local onde ocorre o transporte da concentração de contaminantes através do meio poroso até chegar ao lençol freático, onde $Y = 0$ representa a fronteira entre o aterro sanitário e o solo e $Y = L_1$ representa o limite entre o solo e o lençol freático.

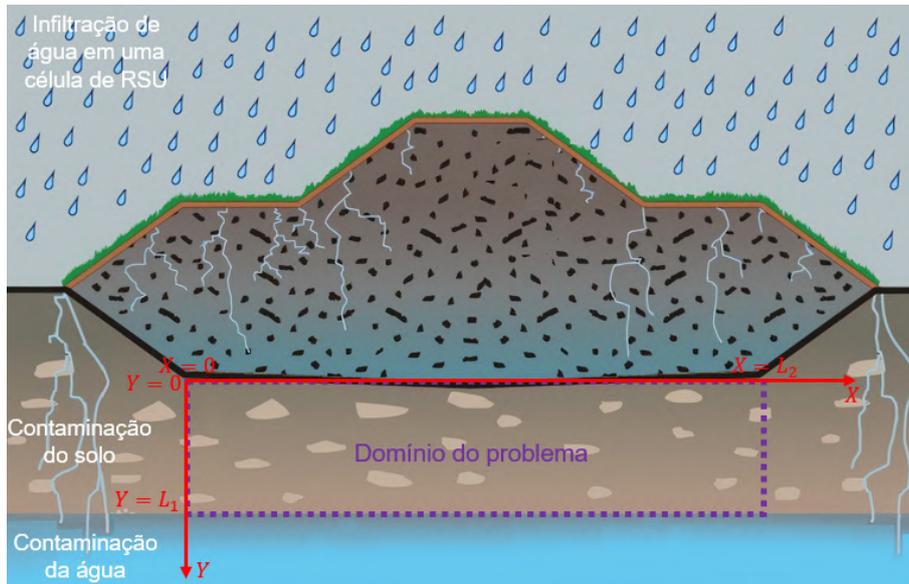


Figura 1: Corte da seção de um aterro sanitário.

Fonte: Adaptado de CONDER (2017).

A Eq. (1), escrita na forma adimensional, descreve o transporte de poluentes no meio poroso saturado, podendo ser encontrada no trabalho de Albuquerque (2018):

$$R \frac{\partial C}{\partial \tau} = L^* \frac{\partial^2 C}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial Y^2} - Pe \frac{\partial C}{\partial Y}, \quad (1)$$

onde R representa o fator de retardamento do solo, C é a concentração do contaminante na fase líquida, τ representa ao tempo, L^* é a relação entre as dimensões em X e Y do problema ($L^* = (\frac{L_1}{L_2})^2$) e Pe é o número de Péclet.

A condição inicial do problema é dada por:

$$C(X, Y, 0) = C_0, \quad (2)$$

onde C_0 é a concentração inicial do contaminante na célula de armazenamento de RSU.

As condições de contorno na forma adimensional e na direção X são dadas por:

$$\frac{\partial C}{\partial X}(0, Y, \tau) = 0, \quad \frac{\partial C}{\partial X}(1, Y, \tau) = 0, \quad (3)$$

onde são utilizadas condições de fluxo nulo nas fronteiras do domínio em X .

As condições de contorno na direção Y são dadas por:

$$C(X, 0, \tau) = 1, \quad (4)$$

sendo que a Eq. (1) está sujeita à condição de interface (4) que corresponde ao vazamento contínuo e uniforme de chorume de uma célula de RSU, além de:

$$\frac{\partial C}{\partial Y}(X, 1, \tau) + BiC(X, 1, \tau) = 0, \quad (5)$$

onde Bi é o número de Biot e esta condição representa o fluxo convectivo situada na parte de contato entre o solo e o lençol freático.

Com as equações adimensionalizadas, representadas pela Eqs. (1) - (5) inicia-se a resolução do problema aplicando o Método de Superposição (Hahn; Özisik, 1993):

$$C(X, Y, \tau) = C^*(X, Y, \tau) + C_E(Y), \quad (6)$$

onde C^* é uma função auxiliar que leva consigo a condição de fronteira homogênea e C_E é a solução para o problema no estado estacionário. Assim, substituindo a Eq. (6) na expressão que governa o transporte de poluentes no meio poroso Eq. (1):

$$R \frac{\partial C^*}{\partial \tau} = L^* \frac{\partial^2 C^*}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 C^*}{\partial Y^2} + \frac{d^2 C_E}{dY^2} - Pe \left(\frac{\partial C^*}{\partial Y} + \frac{dC_E}{dY} \right). \quad (7)$$

A partir da Eq. (7), obtém-se duas equações diferenciais, uma EDO e outra equação diferencial parcial (EDP).

A EDO extraída da Eq. (7) é representada pela seguinte expressão:

$$\frac{d^2 C_E}{dY^2} - Pe \frac{dC_E}{dY} = 0, \quad (8)$$

e as condições de contorno são dadas pelas seguintes equações:

$$C_E(0) = 1, \quad \frac{dC_E(1)}{dY} + BiC_E(1) = 0. \quad (9)$$

Usando as condições de contorno dadas por (9), obtém-se a solução analítica da Eq. (8):

$$C_E(Y) = \frac{e^{Pe}(Pe + Bi) - Bi e^{PeY}}{e^{Pe}(Pe + Bi) - Bi}. \quad (10)$$

A EDP obtida da Eq. (7) é dada por:

$$R \frac{\partial C^*}{\partial \tau} = L^* \frac{\partial^2 C^*}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 C^*}{\partial Y^2} - Pe \frac{\partial C^*}{\partial Y}, \quad (11)$$

e as condições de contorno na direção X são fornecidas pelas seguintes equações:

$$\frac{\partial C^*}{\partial X}(0, Y, \tau) = 0, \quad \frac{\partial C^*}{\partial X}(1, Y, \tau) = 0, \quad (12)$$

além das condições de contorno na direção Y :

$$C^*(X, 0, \tau) = 0, \quad \frac{\partial C^*}{\partial Y}(X, 1, \tau) + BiC^*(X, 1, \tau) = 0, \quad (13)$$

e a condição inicial é dada por:

$$C^*(X, Y, 0) = C_0 - C_E(Y). \quad (14)$$

Para obter a solução $C^*(X, Y, \tau)$ da Eq. (11), utilizou-se o método GILTT. Para isso, primeiramente, é tomado o problema auxiliar de Sturm-Liouville considerando a direção X :

$$\frac{d^2\varphi}{dX^2} + \frac{\lambda^2}{L^*} \varphi = 0, \quad \frac{d\varphi(0)}{dX} = 0, \quad \frac{d\varphi(1)}{dX} = 0, \quad (15)$$

sendo que a equação diferencial possui como solução as autofunções (Hahn; Özisik, 1993):

$$\varphi_n(X) = \cos\left(\frac{\lambda_n}{\sqrt{L^*}}X\right), \quad (16)$$

aplicando as condições de contorno, chega-se aos autovalores associados a cada autofunção:

$$\lambda_n = n\pi\sqrt{L^*} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (17)$$

Além disso, a concentração é expandida como uma série em termos das autofunções e posteriormente é substituída na Eq. (11), onde é aplicando o operador integral $\int_0^1(\cdot)\varphi_m(X)dX$ em ambos lados da equação, notando que, pela Eq. (15), $\varphi_n''(X) = -\lambda_n^2\varphi_n(X)$, obtendo uma equação onde todos os somatório possuem os termos nulos, exceto quando $m = n$. Portanto, obtém-se a seguinte expressão:

$$R\frac{\partial\bar{C}_n(Y, \tau)}{\partial\tau} = -\lambda_n^2\bar{C}_n(Y, \tau) + \frac{\partial^2\bar{C}_n(Y, \tau)}{\partial Y^2} - Pe\frac{\partial\bar{C}_n(Y, \tau)}{\partial Y}. \quad (18)$$

Para a resolução da EDP (18), resolve-se primeiramente o problema auxiliar de Sturm-Liouville em Y :

$$\frac{d^2\psi}{dY^2} + \beta^2\psi = 0, \quad \psi(0) = 0, \quad \frac{d\psi(1)}{dY} + Bi\psi(1) = 0, \quad (19)$$

sendo que a equação diferencial possui como solução as autofunções (Hahn; Özisik, 1993):

$$\psi_k(Y) = \text{sen}(\beta_k Y), \quad (20)$$

aplicando as condições de contorno, obtém-se os autovalores associados a cada autofunção, os quais devem satisfazer uma equação transcendental, onde as raízes são calculadas pelo método de Newton-Raphson.

A seguir, a solução da EDP (18) é expandida como uma série em termo das autofunções e posteriormente realizando a substituição na expansão na Eq. (18), onde também é aplicando o operador integral $\int_0^1(\cdot)\psi_l(Y)dY$ em ambos lados da equação, notando que, pela Eq. (19) tem-se que $\psi_k''(Y) = -\beta_k^2\psi_k(Y)$ e reagrupando os termos, pode-se reescrever a equação obtida na forma matricial:

$$A \cdot Z'(\tau) + B \cdot Z(\tau) = 0, \quad (21)$$

onde $Z(\tau) = \{\tilde{C}_k\}$, com $k = 0, 1, 2, \dots$; $A = \{a_{k,l}\}$, onde $a_{k,l} = R \int_0^1 \psi_k(Y)\psi_l(Y)dY$ e $B = \{b_{k,l}\}$, onde $b_{k,l} = (\lambda_n^2 + \beta_k^2) \int_0^1 \psi_k(Y)\psi_l(Y)dY + Pe \int_0^1 \psi'_k(Y)\psi_l(Y)dY$. Ainda, considerando $F = A^{-1} \cdot B$, reescreve-se a Eq. (21) da forma:

$$Z'(\tau) + F \cdot Z(\tau) = 0. \quad (22)$$

A condição inicial da equação diferencial matricial, Eq. (22) é obtida aplicando os mesmos procedimentos, realizados na EDP, na Eq. (14), e desta forma, a condição inicial está bem definida.

Para resolver a EDO matricial (22), aplica-se a transformada de Laplace em ambos os lados. Neste problema, assume-se que a matriz F seja diagonalizável, escrevendo $F = X \cdot D \cdot X^{-1}$, onde D é a matriz diagonal cujos elementos são os autovalores de F , X é a matriz cujas colunas constituem os autovetores linearmente independentes de F e X^{-1} é sua inversa. Portanto, conclui-se que a solução da EDO matricial (22) é:

$$Z(\tau) = X \cdot G(\tau) \cdot X^{-1} \cdot Z(0). \quad (23)$$

Logo, a solução do modelo bidimensional da dispersão de poluentes em meios porosos, representadas pelas equações Eqs. (1) - (5) é dada por:

$$C(X, Y, \tau) = \sum_{n=0}^N \varphi_n(X) \left[\sum_{k=0}^K \psi_k(Y) \tilde{C}_k(\tau) \right] + C_E(Y), \quad (24)$$

onde $\varphi_n(X)$ é definida pela Eq. (16), $\psi_k(Y)$ é definida na Eq. (20) e $\tilde{C}_k(\tau)$ é definida por (23).

3 Resultados e Discussões

A partir da solução encontrada, representada pela Eq. (24), realizou-se um estudo sobre a concentração média adimensionalizada para o campo de concentração de contaminantes em termos do tempo adimensional através do ambiente online *Google Colaboratory*, em linguagem Python, a qual é definida por:

$$C_m = \frac{\int_0^1 e^{-PeY} \cdot C(X, Y, \tau) dY}{\int_0^1 e^{-PeY} dY}, \quad (25)$$

onde para efeito de cálculos, considerou-se C_m na posição de $X = 0,5$. Ainda, ressalta-se que nas simulações, utilizou-se o valor $Bi = 2000$.

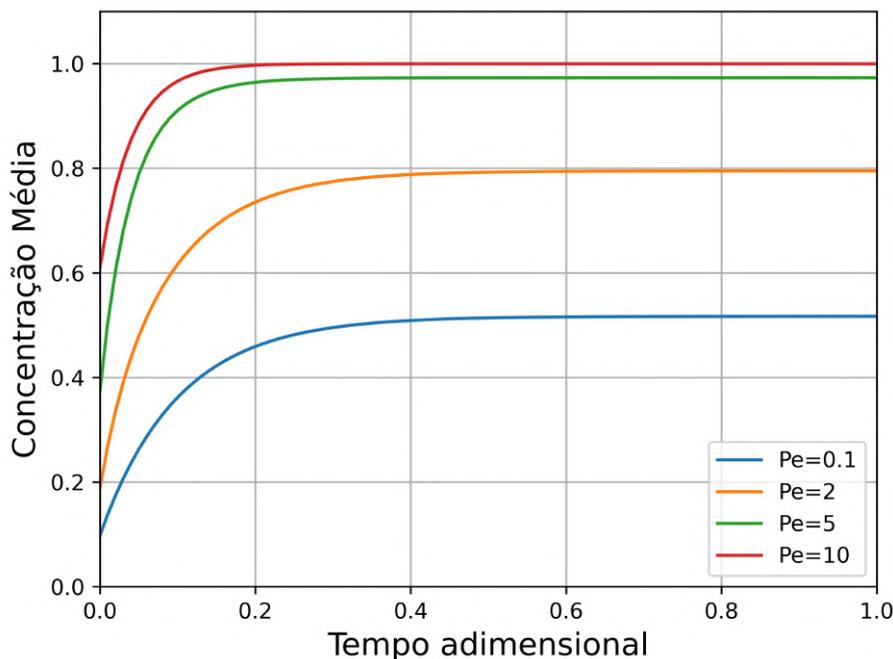


Figura 2: Concentração média para $L^* = 1$ e $R = 1$.

Fonte: Do autor.

Sendo $Pe = 0.1$, observa-se que com o decorrer do tempo o escoamento do poluente pode ser considerado lento, além de que para $\tau > 0,50$ a distribuição da concentração média do poluente não se modifica. Ou seja, para valores considerados baixos para o parâmetro Pe , o escoamento do poluente é lento e a concentração média alcança valores inferiores a 0.6.

Entretanto, aumentando o valor do parâmetro para $Pe = 10$, percebe-se que o poluente oriundo da célula de RSU contamina de forma mais significativa o solo em um tempo menor, devido ao fato do contaminante escorrer com uma velocidade maior e contaminar menos o solo, ou seja, o processo de advecção é maior que o de difusão. Desta forma, as possíveis causas ao lençol freático podem ser significativas, devido a concentração de poluente que pode atingi-lo. Além disso, nota-se que para $\tau = 0,20$ a concentração média atingiu o valor máximo de 1, ou seja, podendo ser considerado como um índice alto.

4 Conclusões

Com o presente trabalho é possível concluir que dependendo do valor do parâmetro Pe considerado nas simulações, altera a concentração média do contaminante, logo difere na forma como o lençol freático pode ser atingido. Assim, ao considerar valores crescentes para o parâmetro Pe , a concentração média aumenta. Isso significa que o contaminante se desloca mais rapidamente pelo solo, resultando em uma menor contaminação deste meio, mas afetando de forma mais substancial os recursos de água.

Como próximos passos da pesquisa, planejamos investigar como outros parâmetros influenciam a propagação de contaminantes e se eles afetam de maneira mais significativa o lençol freático.

Referências Bibliográficas

Albuquerque, F. A. (2018) “Estudo da propagação de contaminante em aterros sanitários via GITT”. Tese de doutorado. Universidade Federal da Paraíba, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica.

Companhia de Desenvolvimento Urbano do Estado da Bahia – CONDER (2017). *Manual de Operação de Aterros Sanitários*. URL <https://shre.ink/koDv>.

Hahn, D. W., Özisik, M. N. (1993). *Heat conduction*, 3^o ed., Nova Jersey, John Wiley & Sons.

Hirata, R., Suhogusoff, A. V., Marcellini, S. S., Villar, P. C., Marcellini, L. (2019). *A revolução silenciosa das águas subterrâneas no Brasil: uma análise da importância do recurso e os riscos pela falta de saneamento*, São Paulo. URL http://www.tratabrasil.org.br/images/estudos/itb/aguas-subterraneas-e-saneamento-basico/Estudo_aguas_subterraneas_FINAL.pdf.

EFFECT OF SOIL RETARDATION FACTOR ON A POLLUTANT TRANSPORT MODEL

DANIELA BUSKE^{1,†}, JOSIANE KONRADT^{1,‡}, GUILHERME J. WEYMAR^{1,§},
 IGOR C. FURTADO^{2,§§} & RÉGIS S. QUADROS^{1,§§§}

Postgraduate Program in Mathematical Modeling, UFPel, RS, Brazil¹,
 Department of Mathematics, IF Sul, RS, Brazil²,

josianekonradt@gmail.com[†] danielabuske@gmail.com[‡] guilhermejahncke@gmail.com[§]
 igorjara@gmail.com^{§§} quadros99@gmail.com^{§§§}

Abstract

The paper presents a study of a two-dimensional model of pollutant dispersion in landfills, considering the governing equation in dimensionless form. The adopted model is solved using the Generalized Integral Laplace Transform Technique (GILTT), and the obtained solution is analytical. The results are presented, highlighting the influence of the soil retardation factor parameter, demonstrating that the proposed method is effective in reproducing the physical characteristics of the problem.

1 Introduction

The Eq. (1), written in dimensionless form, found in the work of Albuquerque [1], describes the transport of pollutants in a saturated porous medium, occurring underneath a landfill site where urban solid waste (USW) is disposed:

$$R \frac{\partial C}{\partial \tau} = L^* \frac{\partial^2 C}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial Y^2} - Pe \frac{\partial C}{\partial Y}, \tag{1}$$

where R represents the soil retardation factor, C is the concentration of the contaminant in the liquid phase, τ denotes time, L^* is the aspect ratio of the problem between X and Y dimensions ($L^* = (\frac{L_1}{L_2})^2$) and Pe is the Peclet number.

The initial condition of the problem is given by:

$$C(X, Y, 0) = C_0, \tag{2}$$

where C_0 is the initial concentration of the contaminant in the USW storage cell.

The boundary conditions in dimensionless form and in the X direction are given by:

$$\frac{\partial C}{\partial X}(0, Y, \tau) = 0, \quad \frac{\partial C}{\partial X}(1, Y, \tau) = 0, \tag{3}$$

where null flux conditions are used at the boundaries of the domain in X .

The boundary conditions in the Y direction are given by:

$$C(X, 0, \tau) = 1, \tag{4}$$

which represents the interface condition corresponding to continuous and uniform leachate leakage in a USW cell, and:

$$\frac{\partial C}{\partial Y}(X, 1, \tau) + BiC(X, 1, \tau) = 0, \tag{5}$$

where Bi is the Biot number and this condition represents the convective flow located at the contact zone between the soil and the groundwater table.

Using the Generalized Integral Laplace Transform Technique (GILTT) to obtain the analytical solution of the two-dimensional mass transport model in a saturated porous medium, we obtain:

$$C(X, Y, \tau) = \sum_{n=0}^N \varphi_n(X) \left[\sum_{k=0}^K \psi_k(Y) \tilde{C}_k(\tau) \right] + C_E(Y), \quad (6)$$

where $\varphi_n(X) = \cos\left(\frac{\lambda_n}{\sqrt{L^*}}X\right)$, $\psi_k(Y) = \text{sen}(\beta_k Y)$, $\tilde{C}_k(\tau)$ is defined by $Z(\tau) = X \cdot G(\tau) \cdot X^{-1} \cdot Z(0)$, which is part of a series in terms of eigenfunctions, and $C_E(Y)$ is the solution for the steady-state problem, given by $C_E(Y) = \frac{e^{Pe(Pe+Bi)} - Bi e^{PeY}}{e^{Pe(Pe+Bi)} - Bi}$.

2 Main Results

After obtaining the solution of the two-dimensional pollutant transport model in the porous medium, the results obtained through the online software Google Colaboratory in the Python language will be presented and analyzed. The influence of the parameter R on the concentration field will be observed, where the retardation factor is a measure of the soil's capacity to retain contaminants and slow down their movement.

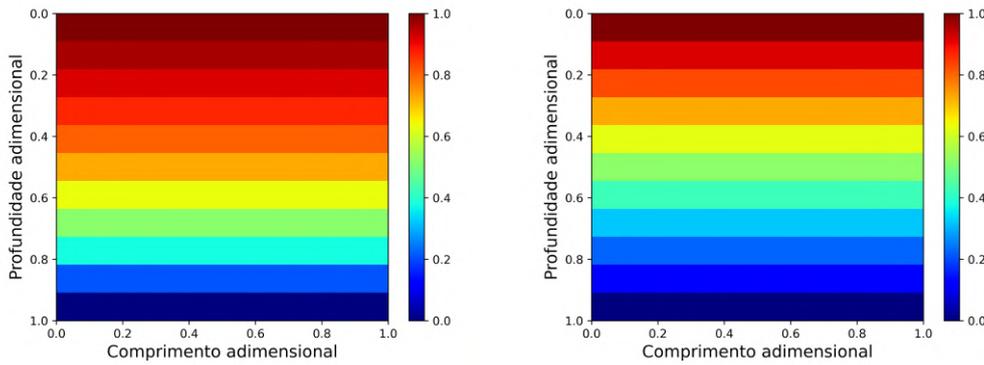


Figure 1: On the left side, $Pe = 2$, $R = 1$, and $\tau = 0.50$ were considered. On the right side, $Pe = 2$, $R = 5$, and $\tau = 0.50$ were considered.

Considering the same values for the parameters Pe and τ in both cases, it can be observed that the parameter R causes a change in the results of the pollutant concentration field. For $R = 1$, it can be seen that the pollutant reaches about 50% of the soil with elevated pollutant levels, approximately 0.7. By increasing the parameter to $R = 5$, it can be observed that the concentration levels are different; in this case, the pollutant reaches about 30% of the soil with a level of 0.7. In other words, from the figure, it is evident that as the value of R increases, the dimensionless concentration will be lower, meaning that the concentration of the contaminant is retained by the porosity of the soil. Therefore, the soil retardation factor parameter is an essential consideration for understanding and managing soil and groundwater contamination, aiming to protect human health and the environment.

References

- [1] ALBUQUERQUE, F. A. - *Estudo da propagação de contaminante em aterros sanitários via GITT*. (2018). Tese (Doutorado) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal da Paraíba, Engenharia Mecânica. Paraíba.