UNIVERSIDADE FEDERAL DE PELOTAS

Instituto Física e Matemática

Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática

Dissertação

O Cálculo no livro Matemática para o Ensino Secundário de Thales de Faria Mello Carvalho (1915-1961)

Ana Paula Rodrigues Brum

Pelotas, 2024

Ana Paula Rodrigues Brum

O Cálculo no livro Matemática para o Ensino Secundário de Thales de Faria Mello Carvalho (1915-1961)

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática do Instituto de Física e Matemática da Universidade Federal de Pelotas, como requisito à obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Circe Mary Silva da Silva Dynnikov

Pelotas, 2024

Dedicatória

Dedico este trabalho aos meus pais, que, mesmo com poucos recursos e escolarização, sempre acreditaram em mim, incentivando e não medindo esforços para que eu e minha irmã encontrássemos na educação pública um futuro melhor.

A todos que acreditam que a educação sempre será o melhor caminho e legado que podemos deixar a outras pessoas. Especialmente aos educadores que acreditam que entre o ensinar e o aprender, existe o acreditar.

Universidade Federal de Pelotas / Sistema de Bibliotecas
Catalogação da Publicação

B893c Brum, Ana Paula Rodrigues

O Cálculo no livro Matemática para o Ensino Secundário de Thales de Faria Mello Carvalho (1915-1961) [recurso eletrônico] / Ana Paula Rodrigues Brum ; Circe Mary Silva da Silva Dynnikov, orientadora. — Pelotas, 2024.

86 f. : il.

Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Instituto de Física e Matemática, Universidade Federal de Pelotas, 2024.

1. Educação matemática. 2. Currículo. 3. Livro didático. 4. Exercícios de matemática. I. Dynnikov, Circe Mary Silva da Silva, orient. II. Título.

CDD 510.7

Elaborada por Simone Godinho Maisonave CRB: 10/1733

Ana Paula Rodrigues Brum

O Cálculo no livro Matemática para o Ensino Secundário de Thales de Faria Mello Carvalho (1915-1961)

Dissertação aprovada, como requisito parcial, para obtenção do grau de Mestre em Educação Matemática do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Instituto de Física e Matemática, Universidade Federal de Pelotas.

Data de defesa: 25/03/2024

Banca examinadora:

____

Prof.ª Dr.ª Circe Mary Silva da Silva Dynnikov (Orientadora)

Doutora em Educação pela Universität Bielefeld, Alemanha.

____

Prof.° Dr.° Fernando Cezar Ripe da Cruz

Doutor em Educação pela Universidade Federal de Pelotas (UFPel).

____

Prof.° Dr.° Waléria de Jesus Barbosa Soares

Doutora em Ensino de Ciências e Matemática pela Universidade Estadual de Campinas, São Paulo.

Agradecimentos

Concluir o mestrado representa, para mim, não apenas o fim de uma etapa, mas um dos momentos mais importantes de minha formação, que traz consigo aprendizados, experiências e sonhos de uma vida em prol da educação.

As palavras não são suficientes quando comparadas ao tempo que estamos ausentes, aos momentos que não vivemos, às histórias que foram deixadas para depois. Porém, minhas conquistas certamente fazem as pessoas que torcem por mim vitoriosas, felizes e hoje celebram comigo este momento. Neste espaço quero agradecer a todos vocês que tornaram este período possível e um dos mais importantes em minha vida.

Ao meu filho, Pierre, agradeço pela paciência e cumplicidade, que nestes 14 anos de vida teve/tem com todo esse processo. Obrigada, meu filho amado, por todo carinho, abraços e palavras doces que me fortalecem todos os dias. Minha ausência jamais será suprida, mas espero te deixar bons exemplos e a compreensão de que o crescimento profissional requer abdicar de momentos irrecuperáveis.

À minha mãe, Regina, minha maior inspiração de vida, minha fortaleza, agradeço por acreditar em mim e fazer com que eu me sinta forte e segura para alcançar todos os meus objetivos e sonhos.

À professora Circe, que tive o privilégio de ter como orientadora neste período, agradeço pelos ensinamentos diários, pela paciência e empatia; por, em todos os momentos, estar presente e dar suporte para que nosso trabalho fosse possível. Obrigada, Circe, por ser uma professora fonte de inspiração e sensibilidade.

Ao meu pai, Outubrino, e minha, irmã Ana Elise, pelo amor incondicional e o incentivo.

Ao meu companheiro, Jorge, por apoiar e abraçar todos os meus projetos.

À Universidade Federal de Pelotas, sou grata pela oportunidade, pelos servidores atenciosos e compreensivos neste período, em especial a todos os professores e funcionários do PPGEMat, que sempre com nobreza e sensibilidade nos conduziram.

À minha colega Luana Kurz por todo apoio, companheirismo e coleguismo, que certamente foram cruciais nesta fase.

Aos meus amigos que torcem por mim, em especial Liz Mott, Susana Dorneles, e Ondina Melo, carinhosamente chamada de Zeca, que, apesar da correria diária, sempre estiveram comigo, torcendo por mim em manifestos de carinho e atenção.

A Deus por permitir este momento, me presentear com uma família e pessoas importantes que me sustentam até aqui.

Resumo

Neste trabalho apresenta-se uma pesquisa histórica sobre a abordagem de conceitos fundamentais do ensino do Cálculo Diferencial e Integral (CDI) – função, limite, continuidade, derivada e integral, no ensino secundário na década de 1940, tendo como principal suporte analítico o livro didático Matemática para cursos Clássicos e Científicos, do autor brasileiro Thales de Faria Mello Carvalho. Por meio de uma pesquisa qualitativa, adotamos a análise documental como horizonte metodológico, sendo nossa principal fonte de pesquisa o livro, e como procedimento de classificação e organização dos dados de nossa análise escolhemos o método de categorização. Desta forma, procuramos, além de analisar a apresentação dos conceitos fundamentais para o ensino do CDI, identificar e observar os exercícios indicados no livro, e ainda esboçar uma biografia do autor Thales de Faria Mello Carvalho. Para tanto, foi realizado levantamento de pesquisas que abordaram análises em livro didático e o CDI, no qual encontramos subsídios nos estudos de Raad (2012), e autores como Chervel (1990), Ludke e André (2018), Choppin (2004,2012), Bloch (2001) e Duval (2012) serviram como referencial teórico. A questão que direciona nossa investigação é: Como os conceitos fundamentais do Cálculo Diferencial e Integral estão propostos no livro Matemática para cursos Clássicos e Científicos, de autoria de Thales de Faria Mello Carvalho? Concluímos que o autor abordou de forma mista cada conteúdo, sendo observada a presença de exemplos aritméticos, simbologias, diferentes representações semióticas, e feita menção de importantes matemáticos. A abundante quantidade de exercícios e definições acompanhadas de exemplificações em sua maioria, caracterizam a obra como adequada ao ensino secundário da época. A obra está de acordo com os programas oficiais de matemática da época.

Palavras-chave: Educação Matemática. Currículo. Livro didático. Exercícios de Matemática.

Abstract

In this work is it presented a historical research on the approach to fundamental concepts in the teaching of Differential and Integral Calculus (CDI) – function, limit, continuity, derivative and integral, in secondary education in the 1940s, using the textbook Mathematics for Classics and Scientific courses, by Brazilian author Thales de Faria Mello Carvalho, as its main analytical support. Through qualitative research, we adopted documentary analysis as a methodological horizon, with our main source of research being the book, and as a procedure for classifying and organizing the data for our analysis we chose the categorization method. In this way, we seek, in addition to analyzing the presentation of the fundamental concepts for teaching CDI, to identify and observe the exercises indicated in the book, and subsequently to outline a biography of the author Thales de Faria Mello Carvalho. To this end, a survey of research was carried out that addressed analyzes in textbooks and the CDI, we found support in the studies of Raad (2012) and authors such as Chervel (1990), Ludke and André (2018), Choppin (2004,2012), Bloch (2001) and Duval (2012) which served as theoretical references. The question that directs our investigation is: How the fundamental concepts of Differential and Integral Calculus are proposed in the book Mathematics for Classical and Scientific Courses, authored by Thales de Faria Mello Carvalho? We conclude that the author approached each content in a mixed way, observing the presence of arithmetic examples, symbols, different semiotic representations, and the mention of important mathematicians. The abundant number of exercises and definitions, accompanied by exemplifications for the most part, characterize the work as suitable for secondary education at the time. The work is in accordance with the official mathematics programs of the time.

Keywords: Mathematics Education. Curriculum. Textbook. Math Exercises.

Lista de Figuras

Lista de Quadros

Abreviaturas e siglas

BDTD Banco Digital de Dissertações e Teses

BNCC Base Nacional Comum Curricular

CADES Campanha de Aperfeiçoamento e Difusão do Ensino Secundário

CDI Cálculo Diferencial e Integral

ES Ensino Secundário

EBRAPEM Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática

GHEMAT Grupo de Pesquisas de História da Educação Matemática

IFFar Instituto Federal Farroupilha

Pibid Programa Institucional de Iniciação à Docência

PPGEMat Programa de Pós Graduação em Educação Matemática

UFJF Universidade Federal de Juiz de Fora

Sumário

1 Introdução e justificativa

Grande parte do ensino do cálculo diferencial e integral foi desenvolvida inicialmente por Isaac Newton para estudar problemas relacionados à Física e Astronomia. Aproximadamente na mesma época, Gottfried Wilhelm Leibniz, independentemente de Newton, também desenvolveu considerável parte do assunto, Vilches e Corrêa (2001).

No Quadro 1 observamos a ordem cronológica do desenvolvimento e da publicação do CDI.

Quadro 1 - Cronologia do desenvolvimento e publicação do cálculo

1666	Ano milagroso da ciência; Isaac Newton desenvolve o Cálculo Diferencial e Integral.
1676	Gottfried Willhelm Leibniz desenvolve o Cálculo Diferencial e Integral com uma simbologia diferente da utilizada por Newton e sem conhecer seu trabalho.
1684	Leibniz faz sua primeira publicação sobre o assunto no periódico mensal Acta Eroditorum com o título Nova methodus pro maximis ET mínimos, itemque tangentibus, qua Nec irrationales quantitaes moratur (Um novo método para máximos e mínimos e também para tangentes que não é obstruído por quantidades irracionais).
1686	Newton publica Philosophiae naturalis principia mathematica (Princípios matemáticos da f ilosofia natural), obra que contém, além de Cálculo, Fundamentos da Física.

Fonte: Gayo (2010, p. 150).

Com o surgimento do CDI, muitos problemas anteriormente insolúveis se tornaram passíveis de serem resolvidos. Após séculos de sua descoberta, ainda não se sabe tudo sobre ele, e sabe-se muito menos sobre o potencial de aplicabilidade dessa poderosa ferramenta da matemática, pois continuamente estão sendo descobertas novas aplicações (Melchiors; Soares, 2013).

> [...] além dos usos que levaram à sua criação, nas áreas de física e astronomia, o cálculo é fundamental para as engenharias, na formulação de modelos matemáticos que permitem prever a evolução de doenças no corpo humano, efeito de medicamentos na farmacologia, a reprodução de bactérias em biologia, crescimento populacional para planejamentos de políticas sociais, acompanhamento de movimentos migratórios, entre outros tantos (Melchiors; Soares, 2013, p. 78).

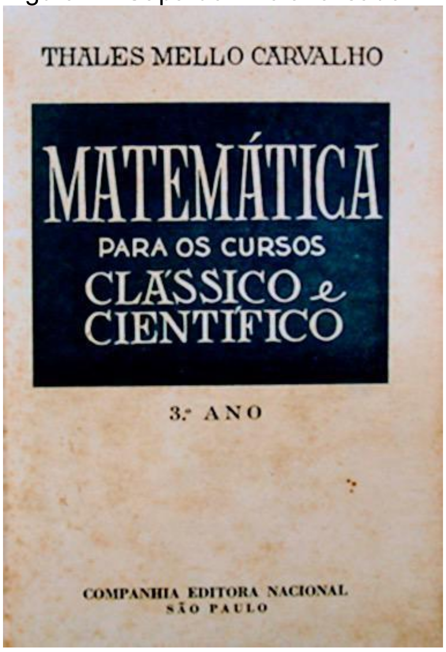
Atualmente, o CDI está presente como disciplina acadêmica básica na formação de professores de matemática, mas a história mostra que houve tentativas de que pudesse ser constituído também como um conteúdo escolar. No entanto, esse saber consolidou-se como uma disciplina de formação de professores, sem que pudesse ser trazido aos dias de hoje como integrante de uma disciplina escolar, da disciplina Matemática (Barbosa; Silva; Rodrigues, 2022).

Segundo os autores Barbosa, Silva e Rodrigues (2022), há mais de cem anos, Félix Klein, juntamente como outros matemáticos e educadores procuraram indicar alternativas para a inclusão desse saber nos currículos escolares.

Este trabalho faz parte de um projeto amplo de pesquisa, intitulado "O Cálculo Diferencial e Integral: uma análise das tentativas de sua escolarização"[1], que tem como objetivo principal analisar debates que intentaram incluir o CDI como conteúdo escolar a partir da Reforma Benjamin Constant até os dias atuais. Nossa pesquisa contempla um dos objetivos deste projeto, o de realizar um inventário de livros didáticos antigos que incluem, conteúdos do CDI em nível escolar secundário. Neste estudo, procuramos analisar o livro "Matemática para cursos Clássicos e Científicos", do autor brasileiro Thales de Faria Mello Carvalho, publicado, inicialmente, no ano de 1943 na cidade de São Paulo. A obra foi organizada em três volumes, que juntos integram 710 páginas, porém iremos analisar apenas o terceiro volume, que contempla os conteúdos de CDI. A capa do livro aparece na Figura1.

[1] Trabalho financiado pelo CNPq[.]

Figura 1 - Capa do livro analisado



Fonte: Carvalho, 1955.

A escolha dessa obra se deve, sobretudo, ao fato de que seu autor teve um importante papel no ensino da matemática no século XX, conforme será explicitado no decorrer desta narrativa. Além disso, Thales de Faria Mello Carvalho foi um dos primeiros autores a escrever livros didáticos para o Ensino Secundário (científico e clássico), assim como incorporar o CDI nos livros de matemática para o ES. Sua produção alcançou várias obras, algumas com diversas edições, conforme demonstramos no Quadro 2.

Quadro 2 - Produção didática de Thales de Faria Mello Carvalho

Obra	**Ano**
Curiosidades mathematicas	1930
Lições de trigonometria retilínea; Lições de Matemática	1938
Elementos de Matemática Comercial e Financeira	1940
Matemática para a 1ª série do 2º ciclo	1940
Matemática para a 2ª série do 2º ciclo	1940
Matemática para a 3ª série do 2º ciclo	1940
Matemática para os cursos clássico e científico	1943
Pequeno Dicionário Brasileiro da Língua Portuguesa	1944

O número de ouro	1945
Admissão ao Curso Normal Matemática	1954
Enciclopédia Delta-Larousse	1955

Fonte: Brum; Silva, 2022.

Uma análise mais delineada do livro de matemática para o terceiro ano do curso científico demonstra se tratar de um professor do século XX que deve ser lembrado na História da Educação Matemática brasileira. Acreditando que o referido livro traga conhecimentos a respeito do ensino do CDI, na década de 1950, nossa pesquisa busca responder a seguinte problemática: Como os conceitos fundamentais do Cálculo Diferencial e Integral foram propostos no livro Matemática para cursos Clássicos e Científicos, de autoria de Thales de Faria Mello Carvalho?

Logo, nossa pesquisa se insere numa perspectiva histórica, em que pretendemos utilizar o referencial da História Cultural, a fim de compreender a partir dos conteúdos apresentados e exercícios propostos em seus capítulos, quais ideias e caminhos o autor utilizou para abordar tais conteúdos. Ao conhecer a história e o desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral, a pesquisa fornecerá subsídios para a compreensão do contexto em que as ideias e conceitos matemáticos foram desenvolvidos, mostrando a importância e relevância desses conceitos na História da Educação Matemática.

Ademais, o CDI está intimamente ligado a outras áreas do conhecimento, como a física e a engenharia, portanto ao estudar a história desses conceitos matemáticos, evidenciam-se conexões com outras disciplinas, enriquecendo sua potencialidade interdisciplinar. Por último, ao conhecermos a trajetória e as contribuições de matemáticos importantes para o desenvolvimento do CDI no Brasil, estamos possibilitando a valorização desses conhecimentos e a sua importância para a sociedade.

Este trabalho está organizado de forma que, no capítulo 2, discorremos sobre fatos importantes que marcaram este segmento da educação, o ES em nosso país. No item 2.1 enfatizamos como aconteceu a passagem do ensino do CDI no Brasil, e no 2.2 narramos fatos importantes da história da educação, destacando acontecimentos que contemplaram o CDI no ES brasileiro. Na sequência, no item 2.3 destacamos a produção e circulação de livros didáticos para o ensino da matemática e do CDI.

No capítulo 3, por meio da discussão sobre o estado do conhecimento, apresentamos os trabalhos realizados sobre o CDI no Brasil, que se aproximam de nossa pesquisa e logo contribuíram com este trabalho. O capítulo 4 é destinado aos teóricos que, de acordo com seus estudos, serviram como base e inspiração para nossa pesquisa. Ainda no capítulo 4 apresentamos a metodologia da pesquisa, de cunho qualitativo, e a coleta de dados em que usamos a análise documental. No capítulo também apresentamos os objetivos deste trabalho e o caminho percorrido até a análise dos resultados.

Nos capítulos 5 e 6, estão os resultados e as discussões de nossa análise, sendo as notas biográficas do autor e a descrição e análise dos conteúdos analisados no livro, respectivamente. Posteriormente, no capítulo 7, apontamos as considerações finais à luz de nossa pesquisa, e concluímos que Thales de Faria Mello Carvalho é um autor de destaque para o Cálculo Diferencial e Integral no Brasil, em decorrência da grande contribuição para o Ensino Secundário, por meio da publicação de obras didáticas e por sua atuação profissional.

2 O Ensino Secundário e o ensino de Cálculo Diferencial e Integral no Brasil

Nesta seção iremos abordar fatos importantes do ensino do CDI no secundário, no Brasil. A começar pela instauração deste segmento de ensino no Brasil, e fatos que marcaram tal feito, adentrando o período desde a consolidação do CDI nos programas oficiais de matemática, até a conjuntura nos dias atuais.

O Colégio Pedro II foi a primeira instituição escolar que passou a utilizar o termo “secundário” como denominação legal. O modelo de ensino foi instaurado no Brasil, na Corte, no ano de 1837. Conforme Moacyr (1936, p. 276), em 2 de dezembro de 1837, o regente interino Araújo Lima, representando o Imperador D. Pedro II, decretou:

> O Seminário de S. Joaquim é convertido em Colégio de Instrução Secundária. Este colégio é denominado "Colégio de Pedro II". Neste colégio serão ensinadas as Línguas latina, grega, francesa e inglesa, retórica e os princípios elementares de geografia, história, filosofia, zoologia, mineralogia, botânica, química, física, aritmética, álgebra, geometria e astronomia.

Conforme Mendonça, Soares e Lopes (2013), a instituição do Colégio Pedro II fez parte do processo de construção do Estado-Nação do Império Brasileiro. A busca do Império em garantir a centralização da gestão ocorreu através da instrução/ educação de seus membros. Desta forma o Império criou o Colégio Pedro II para ser referência curricular e administrativa das instituições semelhantes no país.

O Colégio Pedro II marca o início da ação do governo na organização ordenada desse campo de ensino numa tentativa em estabelecer o ES distante das aulas isoladas ou cursos preparatórios, com uma educação conectada aos interesses da elite, atendendo a um caráter clássico humanista (Zotti, 2005). Além de ser considerada uma instituição padrão ao ES, era a única que validava o ingresso nos cursos superiores[2], as demais deveriam prestar exames das matérias preparatórias.

---

[2] O Colégio Pelotense, posteriormente, foi também autorizado à validação.

Conforme estudos de Pessanha, Eurize e Wanderlice (2017) sobre a história do ES no Brasil, a palavra “secundário” adquiriu significados distintos em cada momento da história da educação no país. As diferentes nomeações, como educação secundária, ensino secundário e ensino médio, que estão presentes em cada momento histórico, são compreendidas como sinônimos. Desde então, muitas foram as denominações do ES no país.

Segundo Pessanha, Eurize e Wanderlice (2017, p. 313):

> No Brasil, a etapa média de escolarização voltada à juventude, que permitia o acesso aos cursos superiores, recebeu várias denominações ao longo de sua história: instrução secundária, ensino secundário, educação secundária, curso ginasial, curso secundário fundamental. As instituições de ensino secundário receberam, em cada período, denominações diferentes: Liceu, Colégio e Ginásio.

No Quadro 3 está elencada a relação entre o período das reformas educacionais e sua designação nominal.

Quadro 3 - Denominações do Ensino Secundário

Período	**Reforma**	**Denominação**
1890	Benjamin Constant	Curso Médio
1901	Epitácio Pessoa	Ensino Secundário
1911	Rivadávia	Curso Fundamental
1915	Maximiliano	Curso Ginasial
1925	Rocha Vaz	Ensino Secundário

Fonte: Pessanha; Eurize; Wanderlice, 2017.

Conforme Silva (2023b), no final do século XIX, motivada por razões sociais e econômicas, em vários países, aconteceu uma demanda por aperfeiçoar o ensino da matemática. Até então, nas escolas do ES, dominava um ensino apoiado na geometria de Euclides, e essa antiga tradição recebia críticas por sua limitação, que não acompanhava o recente progresso nas ciências e tecnologia. Tal ensino começou a ser discutido e novas ideias de modernização começaram a surgir; as noções de variável, função e a inclusão do cálculo diferencial e integral (CDI) pareciam aos matemáticos ser a alternativa para a renovação no ensino (Silva, 2023b).

No Brasil, no início da Primeira República (1889-1930), surgiram várias propostas de reforma na educação. Entre os diversos projetos enviados à Assembleia Legislativa, destaca-se o projeto de reforma proposto pelo chefe do recém-criado, Ministério de Instrução Pública, Benjamin Constant Botelho de Magalhães (1836-1891). Seguidor do positivismo de Auguste Comte, apresentava um traço inovador e a idealização de método de ensino intuitivo, inserido nos programas curriculares (Silva; Machado, 2014).

> Benjamin Constant, militar e educador positivista, propôs uma reforma que visava romper com a tradição humanística clássica, priorizando os conhecimentos científicos, especialmente, a matemática, a astronomia, a física, a química, a biologia, a sociologia e a moral. Ele entendia que o objetivo maior do ensino deveria ser a formação humana, baseada na ciência (Melo, 2012, p. 42).

Conforme Carvalho (1996), por meio do Decreto n° 891 de 08 de novembro de 1890, o ES passou por uma reestruturação, sendo disposto em um curso de sete anos e obrigatório em todo país. O ES ficava estruturado em dois níveis: ginásio, com a duração de quatro anos; seguido do colégio, com a duração de três anos. Foi subdividido em dois ramos, o científico e o clássico. Em termos de conteúdo, clássico e científico são muito parecidos, porém, no científico, dava-se ênfase às Ciências Naturais e, no clássico, às Humanidades (Palma Filho, 2005). Quem ingressava no curso colegial, estaria voltado aos vestibulares; cursando o clássico, “encaminha-se para o curso de Direito ou para um dos cursos da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras; proveniente do científico, dirigia-se ao vestibular para os cursos de Medicina, Odontologia, Farmácia ou Engenharia” (Palma Filho, 2005, p.12).

2.1 O Ensino do Cálculo Diferencial e Integral no Brasil

O plano de estudo indicado no decreto para o curso secundário apontava o ensino do cálculo na terceira, quinta, sexta e sétima séries. No Quadro 4 apresentamos o currículo proposto em 1890 para o Colégio Pedro II.

Quadro 4 - Currículo proposto em 1890 para o Colégio Pedro II

Ano	Disciplinas (cadeiras)
1°	1ª cadeira: aritmética e álgebra; 2ª cadeira: português; 3ª cadeira: francês; 4ª cadeira: latim; 5ª cadeira: geografia física, desenho, ginástica e música.
2°	1ª cadeira: geometria e trigonometria; 2ª cadeira: português; 3ª cadeira: francês; 4ª cadeira: latim; 5ª cadeira: geografia política e econômica, desenho, ginástica e música.
3°	1ª cadeira: geometria geral e seu componente algébrico, álgebra, cálculo diferencial e integral; 2ª cadeira: geometria descritiva; 3ª cadeira: francês; 4ª cadeira: latim; 5ª cadeira: inglês ou alemão, desenho, ginástica e música, revisão de português e geografia.
4°	1ª cadeira: astronomia e mecânica; 2ª cadeira: inglês ou alemão; 3ª cadeira: grego, Revisão: Cálculo e geometria, português, francês, latim e geografia, desenho, ginástica e música.
5°	1ª cadeira: física geral e química geral; 2ª cadeira: inglês ou alemão; 3ª cadeira: grego, desenho, ginástica e música, revisão: cálculo, geometria, mecânica, astronomia, geografia, português, latim e francês.
6°	1ª cadeira: biologia, zoologia, botânica; 2ª cadeira: meteorologia, mineralogia, geologia; 3ª cadeira: história universal, desenho e ginástica, revisão: cálculo, geometria, mecânica, astronomia, física, química, geografia, francês, inglês ou latim, grego.
7°	1ª cadeira: sociologia e moral, economia política e noções de direito pátrio; 2ª cadeira: história do brasil; 3ª cadeira: história da literatura nacional, ginástica e revisão geral.

Fonte: Silva, 2023b, p. 9.

Segundo o Quadro 3, Silva (2023b, p. 10) observa que nas “primeiras cadeiras elencadas a cada ano, percebe-se a ordem enciclopédica das ciências positivas: matemática (subdividida em aritmética, álgebra, cálculo diferencial e integral e mecânica), astronomia, física, química, biologia e sociologia”.

A inclusão do CDI buscou introduzir fundamentos necessários a um nível mais elevado de ensino, como afirma Silva (2023b, p. 10):

> A geometria analítica que à época aparece com o nome de geometria geral, e seu complemento algébrico é uma novidade no ensino secundário, assim como o CDI e a geometria descritiva. Entretanto, para o CDI há claramente uma restrição de conteúdos: ele deve ser limitado, a fim de fornecer os pré-requisitos para o ensino da mecânica. Ele é propedêutico.

Logo, a Reforma de Benjamin Constant adentrou a geometria analítica, o CDI e a geometria descritiva no ES como uma tentativa de modernizar o ensino da matemática, com os conceitos de função, e conceitos mais atualizados como os do CDI, rompendo assim com a distância entre o ES e o superior (Silva, 2023b). Assim, no ano de 1891, vivenciamos a primeira inclusão do ensino do CDI no ES, por meio da Reforma de Benjamin Constant. Além desta proposta, tal período marcou o início de várias iniciativas que buscaram inovação e organização da educação pública.

Após a reforma, o estudo do CDI foi incluído no currículo de matemática do Colégio Pedro II, a instituição modelo de ES no Brasil. Eugênio Raja Gabaglia, diretor de matemática do Colégio Pedro II, escreveu, em 1914, que os resultados do ensino do CDI foram satisfatórios, sendo ensinado em conjunto com a geometria analítica, de 1891 a 1901 (Carvalho, 1996). Porém, em 1900, o ensino do CDI não figurava mais nos programas, permanecendo inalterado até 1929. Em decorrência das extensas reformas educacionais implementadas nas décadas de 1930 e 1940, o CDI foi reintroduzido como conteúdo obrigatório no ensino da matemática no ES, embora de forma menos ambiciosa do que na década de 1890 (Carvalho, 1996).

Até 1951, essa parte do programa sofreu sucessivas alterações, diminuindo as exigências teóricas e até mesmo partes do conteúdo programado para o seu ensino. Após 1961, os currículos nacionais não eram mais obrigatórios e o ensino do CDI cessou em quase todas as escolas secundárias, entretanto, permaneceu em algumas escolas públicas (como colégios militares) e particulares; atualmente, não está previsto no programa do ensino médio, apenas a definição da derivada aparece em programas de algumas escolas (Carvalho, 1996).

Conforme Barbosa, Silva e Rodrigues (2022), mais recentemente, observa-se o respaldo da inclusão do CDI nas escolas, por professores e matemáticos, como é o caso emblemático do texto de Ávila "O ensino de Cálculo no 2º Grau" (1991) e, também, seu estudo intitulado "Limites e Derivadas no

Ensino Médio?” (2006), reverberado como um capítulo no livro “Várias faces da matemática: tópicos para licenciatura e leitura geral”, publicado numa edição revista e ampliada (2011).

Além de Ávila, Duclos (1992), Carvalho (1996), Santos (2006), André (2008), Silva (2016), Machado (2008) e Rezende (2020) são alguns matemáticos brasileiros que defendem a inclusão do CDI no Ensino Médio. De um modo geral, tais estudos enfrentam o desafio teórico de justificar a importância da presença do CDI na escola básica, como afirmam Barbosa, Silva e Rodrigues (2022).

Conforme Silva (2023a), atualmente, na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) os conceitos fundamentais do CDI, como limite, derivada, continuidade e integral, não fazem parte dos assuntos abordados no ensino médio. Na unidade “Número e Álgebra” da BNCC, há menção à interpretação de problemas, que envolvem taxa de variação, contudo não aparece explicitamente o conceito de função derivada ou de variabilidade de uma função.

Conforme o trabalho de Cordeiro Neto (2019), o ensino do CDI relaciona-se corretamente com algumas competências e habilidades específicas da matemática na BNCC. Vejamos a seguinte habilidade:

> Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais (como o remanejamento e a distribuição de plantações, entre outros), com ou sem apoio de tecnologias digitais (Brasil, 2019, p. 536).

Segundo Cordeiro Neto (2019 apud Brasil, 2019, p. 534), a habilidade citada pode compreender a resolução de problemas de cálculos de áreas de figuras, por exemplo, e ainda contemplar a habilidade de “propor ou participar de ações adequadas às demandas da região, preferencialmente para sua comunidade, envolvendo medições e cálculos de perímetro, de área, de volume, de capacidade ou de massa”.

Cordeiro Neto (2019 apud Brasil, 2018, p. 530) destaca que, mediante as aplicações do CDI, o aluno vai sendo estimulado a desenvolver estratégias para a resolução de problemas em diferentes contextos, aproximando-se do desenvolvimento de uma das competências específicas de matemática:

> Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

Assim, constatamos que os conteúdos fundamentais do CDI não estão indicados na BNCC, porém há relação entre o ensino do CDI com as habilidades e competências específicas de matemática da BNCC.

2.2 História da Educação Matemática: práticas e discursos referentes ao CDI no Ensino Secundário brasileiro

O início do século XX, no Brasil, foi marcado por intensas transformações sociais e desenvolvimento industrial. A transição do regime imperial para o republicano ocasionou uma das mais marcantes mudanças políticas que o país vivenciou. As indicações de princípios como a democracia, o amplo direito, e a laicidade do estado, assim como ideias cientificistas advindas do pensamento positivista europeu, demonstraram a influência estrangeira sobre as elites nacionais. Esses fatos ocasionaram mudanças acerca da educação que desejavam, conforme Carneiro (2017).

No âmbito educacional, durante os primeiros anos republicanos, ocorreram movimentos como o “entusiasmo pela educação” e o “otimismo pedagógico”. Segundo Guiraldelli Jr. (2001), o primeiro movimento era de sentido quantitativo, solicitando aberturas de escolas, e o segundo, de sentido qualitativo, de interesse pelos métodos e conteúdo do ensino. Tais movimentos se alternaram e em alguns momentos se somaram.

No ano de 1930, iniciou o governo de Getúlio Vargas, e Francisco Campos foi o primeiro a assumir o recém-criado Ministério da Educação e Saúde. Campos implementou reformas universitárias, tais como a inclusão e organização de cursos e reorganização do ensino básico em um ciclo fundamental de cinco anos e um ciclo médio de dois anos, de caráter preparatório para o ingresso no ensino superior (Carneiro, 2017). Segundo Dallabrida (2009, p. 185):

> A chamada “Reforma Francisco Campos” (1931) estabeleceu oficialmente, em nível nacional, a modernização do ensino secundário brasileiro, conferindo organicidade à cultura escolar do ensino secundário por meio da fixação de uma série de medidas, como o aumento do número de anos do curso secundário e sua divisão em dois ciclos, a seriação do currículo, a frequência obrigatória dos alunos às aulas, a imposição de um detalhado e regular sistema de avaliação discente e a reestruturação do sistema de inspeção federal. Essas medidas procuravam produzir estudantes secundaristas autorregulados e produtivos, em sintonia com a sociedade disciplinar e capitalista que se consolidava, no Brasil, nos anos de 1930.

O sucessor de Campos foi o político mineiro Gustavo Capanema, que assumiu a cadeira de Saúde e Educação, em 1934, e manteve o controle desta até 1947. Ele realizou uma ampla reforma do ensino brasileiro das primeiras letras ao ensino superior (Carneiro, 2017). Conforme Melo (2012), em 1942, o Ministro Gustavo Capanema criou vários decretos-lei, com objetivo de uma organização no campo da educação, denominados de Leis Orgânicas do Ensino. As propostas concentraram-se na reestruturação do currículo do ensino industrial (Decreto n° 4.073/1942), secundário (Decreto n° 4.244/1942), comercial (Decreto n° 6.141/1943), normal (Decreto n° 8.530/1946) e agrícola (Decreto n° 9.613/1946). Houve modificação também nos ciclos de estudo (Decreto n° 4.244/1942) e a criação do Serviço Nacional de Aprendizagem Industrial – SENAI (Decreto n° 4.048/1942).

A Lei Orgânica do ES (1942) foi desenvolvida como modernização desse segmento do ensino, colocando fim aos exames parcelados e universalizando o sistema seriado de frequência obrigatória em dois ciclos: fundamental (de cinco anos) e complementar (de dois anos). O ES, nas reformas Campos e Capanema, era a única modalidade de ensino que permitia acesso aos exames para o ensino superior (Montalvão, 2021). Cabe ressaltar que o ES não tinha como propósito apenas a passagem para o ensino superior, mas também era uma contribuição na formação geral do estudante.

Conforme estabelece o Decreto no 4.244/1942:

> Dentre as vantagens que dele provieram para a educação do país é de notar antes do mais a concepção que lhe serviu de base, isto é, a afirmação do caráter educativo do ensino secundário. Dessa concepção decorreu um corolário de importância fundamental: a metodização do ensino secundário, isto é, a seriação obrigatória de seus estudos e a introdução nesses estudos de uma disciplina pedagógica. Está hoje no hábito dos estudantes e na consciência de todos que o ensino secundário não é um conjunto de preparatórios, que se devam fazer apressadamente e de qualquer maneira, mas constitui uma fase importante da vida estudiosa, que normalmente só pode ser vencida com a execução de trabalhos escolares metódicos, num lapso de sete anos (Brasil, 1942, p. 1).

A organização do ES se estabeleceu em dois ciclos com o curso ginasial de quatro anos seguido do curso colegial de três anos: o primeiro ciclo compreendia um só curso, o curso ginasial, de quatro anos; o segundo, dois cursos paralelos, o clássico e o científico, cada qual com a duração de três anos, sendo qualquer deles acessível aos candidatos que tivessem concluído o curso ginasial (Brasil, 1942). A diferença entre os referidos cursos do segundo ciclo é que, no primeiro, a formação intelectual dos alunos é marcada por um acentuado estudo das letras antigas e modernas ao passo que, no segundo, a maior acentuação cultural é proveniente do estudo das ciências. Entretanto, a conclusão tanto de um como de outro dava direito ao ingresso em qualquer modalidade de curso do ensino superior (Brasil, 1942).

Os cursos clássicos e científicos, do segundo ciclo, tinham suas disciplinas de acordo com a finalidade do curso, porém as matérias de Português, Matemática, Francês, Inglês, Latim, Espanhol, História Geral, História do Brasil, Geografia Geral e Geografia do Brasil eram ministradas em ambos os cursos. Observamos a disciplina de Matemática presente em ambos os cursos.

Em relação à disciplina escolar matemática, as alterações no ES na década de 1920, realizadas na seriação do Colégio Pedro II, trouxeram transformações mais profundas como a centralização empreendida nas disciplinas com a denominação “matemáticas”. Como afirmam Dassie e Rocha (2003), até a promulgação do Decreto nº 18.564, de 15 de janeiro de 1929, constituíam o currículo do ES a álgebra, a aritmética e a geometria (na qual era incluída a trigonometria). Ou seja, não existia uma disciplina denominada Matemática, seu ensino era realizado de maneira fragmentada, por meio de seus diferentes ramos.

Tal organização em uma disciplina única no ensino da matemática elementar advém de um movimento de âmbito mundial, que objetivava a reestruturação da educação matemática nos cursos secundários. No Brasil, o movimento foi liderado pelo professor Euclides Roxo (1890-1950), então Diretor do Externato do Colégio Pedro II, cargo que ocupou de 1925 a 1930, afirmam Dassie e Rocha (2003).

Conforme Dassie e Rocha (2003), desapareceram a aritmética, a álgebra e a geometria; foi extinguido o estudo da aritmética teórica, incluído um conjunto de noções geométricas, que os estudantes precisariam adquirir de maneira intuitiva, e reintroduzido o estudo da função ("reintroduzido" porque esse assunto já havia feito parte do programa de matemática do Colégio Pedro II, quando da Reforma Benjamin Constant, ocorrida em 1890) (Dassie; Rocha, 2003, p. 2).

2.3 A produção e circulação de livros didáticos para o ensino da Matemática e do CDI

Conforme o trabalho realizado por Dassie (2001), em 1937, o professor Euclides Roxo organizou a obra "A matemática na escola secundária", sobre o ensino da matemática na escola secundária, indicando e caracterizando as principais tendências do movimento da reforma internacional iniciada por Felix Klein. Seu livro está organizado em 12 capítulos abrangendo os seguintes temas, conforme o Quadro 5:

Quadro 5 - Temas contemplados na obra "A matemática na escola secundária" de Euclides Roxo

Capítulo	Temas
1	Esboço evolutivo do pensamento matemático.
2	Esboço evolutivo do ensino matemático.
3	Intuição e lógica na educação matemática.
4	O valor da transferência em educação matemática.
5	Os objetivos da educação matemática.
6	Escolha e organização da matéria.
7	Conexão entre as várias partes da matemática e entre está e as outras disciplinas do curso.

8	A noção de função como ideia axial do ensino.
9	Curso propedêutico de geometria intuitiva.
10	Introdução do cálculo infinitesimal no curso secundário.
11	Importância das aplicações na educação matemática.
12	A humanização no ensino da matemática.

Fonte: Dassie, 2001.

Podemos observar na obra de Euclides Roxo, nos capítulos 8 e 10, a sua intenção de introduzir o conceito de função como básico para todo o ensino da matemática, assim como o ensino introdutório do CDI, à época chamado de cálculo infinitesimal. Segundo a análise de Dassie (2001) sobre a referida obra, a escola secundária deveria abordar assuntos que pudessem oferecer uma base geral à compreensão da cultura moderna.

Segundo Valente (2011), com a Reforma Capanema, novos livros didáticos de Matemática foram publicados, para uso nos anos finais do curso secundário. Nomes já consagrados na produção didática para o ginásio, na década de 1940, passaram a escrever livros para o colégio. Euclides Roxo e Algacyr Munhoz Maeder foram exemplos disso. Também surgiram autores como Ary Quintella, e permaneceram autores de obras dos antigos cursos complementares como Roberto Peixoto, Thales Mello Carvalho, entre outros.

Entre os livros didáticos que tiveram sucesso pelas suas várias edições, é possível destacar a coleção “Matemática 2º Ciclo – cursos clássico e científico”, conhecida por muitos como “a coleção dos quatro autores”. Reuniu para sua escrita os professores Euclides Roxo e Haroldo Lisboa da Cunha, do Colégio Pedro II, Roberto Peixoto e César Dacorso Netto, do Instituto de Educação (Valente, 2011).

Destacamos outra coleção que teve vida longa, e que também atravessou os anos 1940, chegando ao início da década de 1960. Foi escrita por um professor de colégios particulares, a coleção “Matemática para os cursos Clássico e Científico”. Ela deu notoriedade a Thales Mello Carvalho, que já em tempos dos cursos complementares iniciava a sua produção didática (Valente, 2011).

Durante a trajetória do ensino do CDI no Brasil, foram adotados alguns livros didáticos como referência para o estudo deste conteúdo. Conforme o levantamento de obras utilizadas no ensino do Cálculo em algumas instituições de ensino do Brasil, Lima (2008, p. 2) destaca o livro *Traité Élémentaire de Calcul Différentiel et du Calcul Intégral*, do francês Sylvestre François Lacroix (1765-1843), obra que ficou popularmente conhecida, tendo sido traduzida para várias línguas ao longo do século XIX. No ano de 1812 foi traduzida para o português, conservando-se durante décadas como a principal referência teórica para o ensino desta disciplina no país.

Outra obra utilizada como referência no período de 1893 e 1934 foi o livro *Premiers Élements du Calcul Infinitesimal* de Hyppolite Sonnet, que trata o Cálculo na concepção de Leibniz (1646-1716) e Newton (1642-1727). Nesta mesma época, no Colégio Pedro II, durante boa parte do período investigado, foi indicado o livro *Tratado Elementar de* Arithmetica de José Adelino Serrasqueiro para o estudo dessa disciplina (Silva et al., 2021).

Como apresentamos neste capítulo, com a instauração do ES em nosso país no ano de 1837, este passou por importantes reformas educacionais, visando à melhoria na qualidade de seu ensino. Dentre as reformas destacamos a de Benjamim Constant, que compreendeu o ensino do CDI nos programas oficiais de matemática, tornando obrigatório seu ensino neste segmento. Diante desta reestruturação no ES, ao estabelecer o CDI como elemento obrigatório, não ocorreu a produção de livros didáticos que contemplassem esses novos esquemas curriculares, o que dificultou sua consolidação.

3 As pesquisas realizadas sobre o CDI no Brasil

Na busca de documentos conexos à nossa pesquisa, organizou-se o Estado do Conhecimento por meio de investigações eletrônicas na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações – BDTD. Selecionamos autores referenciados em leituras realizadas e que viessem ao encontro de nossa pesquisa.

Conforme Morosini e Fernandes (2014), o Estado do Conhecimento é caracterizado por identificação, registro e categorização que levem à reflexão e síntese sobre a produção científica de uma área, em um determinado espaço de tempo, congregando periódicos, teses, dissertações e livros sobre uma temática específica. Destacamos o importante papel que o Estado do Conhecimento atribui no âmbito da pesquisa, possibilitando acesso a trabalhos existentes que estão relacionados ao nosso objeto do estudo.

Nosso trabalho se fundamenta na análise de um livro didático utilizado no ensino da matemática no antigo ES, atual ensino médio. Adotamos alguns caminhos em nossa análise, excluindo os trabalhos que abordassem a temática no ensino superior, ou que tiveram sua pesquisa focalizada em anos atuais. A escolha se deu inicialmente utilizando palavras-chaves, que compartilham com ideias de nossa pesquisa; após a busca digital, diante dos títulos, elencamos os de nosso interesse – quando o título não trazia o tema da pesquisa explícito, realizamos a leitura do resumo.

Após esta primeira seleção, realizamos a leitura dos resumos e, a partir de então, selecionamos os trabalhos para leitura e estudo detalhado. Encontramos trabalhos na BDTD, nas revistas Educação Matemática em Revista e Zetetiké, e nos trabalhos apresentados no XXV Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática (EBRAPEM). No Quadro 6, apresentamos as palavras-chaves utilizadas nas buscas digitais, o local e a quantidade de trabalhos entre artigos, dissertações e teses encontradas e selecionados.

Quadro 6 - Dados da busca digital

Palavras-chaves	Local	Trabalhos encontrados	Trabalhos selecionados
Cálculo diferencial e integral	XXV EBRAPEM	02	0
Cálculo Diferencial, Livros Didáticos	BDTD	40	01
Análise de livros, Cálculo diferencial e integral	BDTD	36	01
Cálculo integral	Educação Matemática em Revista	07	0
Cálculo Diferencial	Revista Zetetiké	06	0

Fonte: Autora, 2022.

Diante da organização do Estado do Conhecimento, reconhecemos particularidades do ensino desta disciplina escolar, presente nos programas do ES em nosso país durante muitos anos, e que atualmente se encontra na grade curricular de vários cursos de nível superior. Nesta perspectiva, selecionamos o trabalho desenvolvido por Marcos Ribeiro Raad, no ano de 2012, na Universidade Federal de Juiz de Fora – UFJF. No trabalho, intitulado História do ensino de Cálculo Diferencial e Integral: a existência de uma cultura, é abordada a história do ensino de Cálculo trazendo informações para a história da referida disciplina. Este trabalho contempla importantes elementos na tradição do ensino do cálculo na UFJF, nos anos 70 e 80 do século passado.

Dentre algumas fontes de pesquisas utilizadas pelo autor, como análise de documentos departamentais, entrevista com um professor, caderno de Cálculo de um aluno deste mesmo professor, e livros-texto de Cálculo do período, destacamos as apresentadas no Capítulo 4 de sua dissertação. Nele o autor apresenta uma análise realizada em quatro livros de Cálculo Diferencial e Integral na busca de vestígios da cultura do ensino da disciplina no Brasil, que são: *Cálculo: Funções de uma variável*, de Serge Lang; *Cálculo*, de George Thomas; *Cálculo*, de Mustafa Munem e David Foulis; *O Cálculo com Geometria Analítica*, de Louis Leithold.

Conforme Raad (2012), a escolha pelo livro de Serge Lang, *Cálculo: Funções de uma variável 2*, se dá pelo fato de ser um livro de referência e consulta para os professores da época, com muitas demonstrações. Segundo a análise de Raad (2012), inicialmente o livro aborda números inteiros, números racionais, números reais, desigualdades, funções e potências. Após, apresenta gráficos e curvas, passando por coordenadas, reta, distância entre dois pontos, equações de curvas, círculo, dilatações e elipse, parábola e hipérbole. As noções de supremo, limites, pontos de acumulação e funções contínuas de um modo mais formal constituem o apêndice do primeiro volume deste livro.

Raad (2012) conclui que, no livro de Serge Lang, é notável um importante elemento da cultura de ensino de cálculo que são os problemas de pré-requisitos, advindos, segundo o autor, da escola secundária. Outro elemento observado é a ênfase no “treinamento”, na repetição dos exercícios. Na trajetória da Análise para o CDI, essas repetições de exercício destacam-se, configurando novas funções para a disciplina ao enfocar as manipulações algébricas e a operacionalização de limites, derivadas e integrais.

Na análise dos demais livros, Raad descreve da mesma forma, concluindo que, na contracapa dos livros analisados, ficavam as fórmulas de álgebra, de geometria e de trigonometria. Todas as obras analisadas por Raad tinham como objetivo principal a preparação dos estudantes de áreas exatas e a resolução de problemas por meio de modelos matemáticos. Tal finalidade está em consenso com o papel histórico do Cálculo, fundado no século XVII e consolidado no século XIX, na resolução de problemas de movimento.

Encontramos, também, em nossa busca, o trabalho de Francisco de Oliveira Filho, intitulado "A Matemática do colégio: livros didáticos e história de uma disciplina escolar”, do ano de 2013. A pesquisa objetivou traçar a trajetória de constituição da disciplina Matemática do Colégio, entre os anos de 1930 a 1970, diante da análise da produção didática do período. Tal período vivenciou quatro grandes reformas educacionais: Francisco Campos, Capanema, Simões Filho e Matemática Moderna.

Dentre o estudo sobre diversos livros destacamos os que se referem a obras no período de 1936 a 1951. Os livros analisados no período compreendido entre 1936 (publicação dos programas dos Cursos Complementares) e 1942 foram: *Lições de matemática*, de Thales e Mello Carvalho –1938; *Pontos de matemática*, de Gumercindo Lima – 1938; *Lições de matemática para médicos e químicos*, de Alberto Serrão –1941.

Foram observadas a estrutura externa (capa, índice, prefácio, bibliografia e tamanho) e a estrutura interna de cada livro (introdução, exercícios, notas de rodapé e terminologia adotada). O autor concluiu que a estrutura externa dos três livros mostra diferenças nos itens analisados. No tocante à metodologia de apresentação dos conteúdos e tipos de exercícios, bem como quanto à terminologia adotada na exposição dos conteúdos, os três livros apresentam diferenças (Oliveira Filho, 2013).

O autor analisou os livros: *Pontos de álgebra complementar (Teoria das equações)*, de Haroldo Lisboa da Cunha – 1939; *Elementos de cálculo vetorial*, de Roberto Peixoto – 1943; *Elementos de geometria analítica*, de Roberto Peixoto – 1938; *Curso de trigonometria*, de Miron Resnik – 1936; *Lições de trigonometria retilínea e de cálculo vectorial* de Alberto Nunes Serrão – 1942.

Foram analisados os mesmos itens dos livros anteriores, concluindo que as estruturas externas e internas dos livros mostram que não há um consenso em torno de destas estruturas dos livros. Na análise da estrutura externa, só o item “índice” mostrou um consenso. Da análise da estrutura interna, só o item “Introdução” mostrou uniformidade, e todos os livros introduzem o assunto, sem a preocupação com a interligação histórica dessa introdução (Oliveira Filho, 2013).

Ao considerar o período 1942-1951, o autor analisou as seguintes coleções de livros: *Coleção Matemática 2º Ciclo – 1ª Série – 2ª Série – 3ª Série*, de Euclides Roxo, Roberto Peixoto, Haroldo Cunha, Dacorso Netto (Coleção dos 4 autores); Coleção *Matemática para os Cursos Clássico e Científico* – 1ª Série

– 2ª Série – 3ª Série, de Thales Mello Carvalho; *Coleção Curso de Matemática – 1º Livro Ciclo Colegial – 2º Livro Ciclo Colegial – 3º Livro Ciclo Colegial*, de Algacyr Munhoz Maeder.

Segundo Oliveira Filho (2013), na análise interna dos livros, os conteúdos são apresentados em uma linguagem simples e direta (sem a utilização de símbolos matemáticos em excesso, de modo menos complexo, sem rigor matemático), com introdução, desenvolvimento dos conteúdos com o uso de notas de rodapé, uso de exercícios resolvidos de exemplo e exercícios propostos.

As alterações provocadas pela Reforma Capanema tornaram a organização dos programas mais estáveis, fazendo com que o processo de constituição da disciplina Matemática do Colégio contasse, nessa fase, com um rol de conteúdos mais estáveis, tornando possível o surgimento da disciplina.

> Fomos aos livros didáticos para neles, enxergarmos a disciplina, a maneira como os conteúdos eram neles apresentados e oferecidos aos leitores, alunos, o que chamamos de metodologia de apresentação dos conteúdos. As categorias de análise dos livros didáticos nos foram dadas por Chervel (1990), uma vez que buscávamos a disciplina nos livros didáticos, e não a história dos livros didáticos, por eles mesmos, como um fim específico (Oliveira Filho, 2013, p. 168).

O trabalho de Raad se conecta com a nossa pesquisa quando apresenta vestígios do ensino do CDI em um determinado período de uma instituição escolar; entre as diversas fontes utilizadas pelo autor, encontra nos livros didáticos suporte para suas conclusões. Já o trabalho de Oliveira Filho se aproxima de nossa pesquisa, pois além de evidenciar a análise de livros didáticos no período em que se consolida nossa pesquisa, também apresenta a forma como a disciplina e a cultura escolar podem estar expressas/apresentadas nos livros didáticos. Ambas as obras contribuem para a história da educação matemática em nosso país, assim como idealizamos com nosso trabalho.

Os dois trabalhos retratam importantes propriedades sobre o ensino do cálculo em nosso país, ao utilizarem o livro didático como fontes de suas pesquisas. Observamos que nenhum destes analisa exclusivamente um livro didático em específico, e especialmente de um matemático brasileiro que dedicou parte significativa de sua vida ao ensino da matemática, como veremos nesta pesquisa.

Nosso trabalho de pesquisa se faz inédito, contemplando objetivos ainda não realizados em outras análises. Nesta investigação, exibimos a análise meticulosa de capítulos dedicados aos conteúdos do CDI em um livro de matemática do ensino secundarista produzido pelo matemático brasileiro Thales de Faria Mello Carvalho, indicado na Figura 2.

Figura 2 - Thales de Faria Mello Carvalho (1915-1961)

Fonte: Silva; Brum, 2022.

Ainda apresentaremos notas biográficas deste autor, trabalho este também efetivado, ineditamente, através da escrita e publicação do artigo "Contribuições de Thales de Faria Mello Carvalho para a educação matemática no século XX", escrito em parceria com minha orientadora. As informações que apresentamos nesta dissertação foram extraídas do referido artigo.

4 Estudos teóricos e metodologia

A escola traz uma importante representação do meio social ao qual pertencemos. Chervel (1990) aponta que o sistema escolar desempenha um duplo papel na sociedade, além de formar indivíduos, forma uma cultura, a qual adentra, molda e modifica a sociedade global. Por meio de pesquisas realizadas no ambiente escolar, passamos a compreender episódios de uma determinada época, e que muitas vezes deixam marcas históricas por muitos anos. Segundo Ludke e André (2018), a pesquisa se estabelece inicialmente pelo interesse do pesquisador por um determinado assunto.

É uma ocasião privilegiada, reunindo o pensamento e a ação de uma pessoa, ou de um grupo, no esforço de elaborar conhecimentos sobre aspectos da realidade que deverão servir para a composição de soluções propostas aos seus problemas. Tais conhecimentos são oriundos da curiosidade, da inquietação, da inteligência e da atividade investigativa dos indivíduos, a partir do que já foi elaborado pelos que trabalharam no assunto anteriormente. Logo, “pode ser confirmado como negado pela pesquisa aquilo que se acumulou a respeito desse assunto; mas o que não pode é ser ignorado” (Ludke; André, 2018, p. 2).

Em conformidade com Bloch (2001), configuramos nosso estudo como uma pesquisa histórica, e consideramos o contexto em que a história acontece. A pesquisa histórica se constitui no estudo do passado, e os mais diversos tipos de fontes podem ser nosso objeto de estudo, objetivando a produção de um registro fiel aos fatos do passado, assim como respostas aos problemas atuais. Para Bloch (2001, p. 54) “a verdadeira história interessa-se pelo homem integral, com seu corpo, sua sensibilidade, sua mentalidade, e não apenas suas ideias e atos, assim como o bom historiador fareja, compreende que ali está sua caça”.

Conforme Chervel (1990, p. 192) uma disciplina escolar comporta não apenas as práticas docentes em sala de aula, mas as finalidades que a constituem, desempenhando um papel importante não somente na história da educação, mas na história cultural. Neste sentido, observamos as disciplinas escolares como prática e discurso de um determinado tempo, que carrega consigo elementos culturais específicos de uma sociedade. Logo, sua definição não se limita a uma mera apresentação de conteúdos, mas a uma descrição das transformações da didática, as mudanças, a coerência interna, ligação entre o ensino e a finalidade que presidem seu exercício (Chervel, 1990).

Chervel (1990, p. 207) define disciplina escolar como sendo:

> [...] constituída por uma combinação, em proporções variáveis, conforme o caso, de vários constituintes: um ensino de exposição, os exercícios, as práticas de incitação e motivação e um aparelho docimológico, os quais, em cada estado da disciplina, funcionam, evidentemente em estreita colaboração, de mesmo modo que cada um deles está, à sua maneira, em ligação direta com as finalidades.

Assim como as disciplinas escolares, entendemos que o livro didático possa trazer vestígios históricos para compreender particularidades de um determinado assunto em uma determinada época. Conforme Choppin (2012), o livro, além de depositário de um conteúdo educativo, tem o papel de transmitir às gerações os saberes e as habilidades que, em dado lugar e a um dado momento, são julgados indispensáveis à sociedade para perpetuar-se. Ainda, segundo Choppin (2012), os livros representam para os historiadores uma fonte privilegiada, independente do interesse por questões relativas à educação, à cultura, à linguagem e às ciências. O livro é um objeto complexo dotado de múltiplas funções:

> Cada um de nós tem um olhar parcial e individualizado sobre o livro, depende da disposição que nós ocupamos, em um dado momento de nossa vida, no contexto educativo definitivamente, nós só percebemos do livro de classe o que nosso próprio papel na sociedade (aluno, professor, pais do aluno, editor), nos instiga a nele pesquisar (Choppin, 2012, p. 14).

Percebemos aqui sua valiosa contribuição na análise histórica. Cabe destacar a afirmação de Silva (2015) que discorre sobre a importância do livro didático por apresentar várias possibilidades de leituras, dependendo das finalidades do leitor, podendo ser uma fonte de conhecimento da História da Educação Matemática.

> É relevante extrair de cada pesquisa que envolva o livro didático, os resultados que nos ajudem a compreender melhor as várias faces da história da educação matemática, sem pré-conceitos ou preconceitos, ampliando desta maneira o debate historiográfico. Enfim, entender que os livros produzidos em determinado local e época podem ser uma fonte de informações sobre as condições de produção e apropriação de conhecimentos, servindo de alimento à historiografia da educação (Silva, 2015, p. 393).

Ao adotarmos o livro didático como nossa fonte principal de pesquisa, exploramos sua função documental, assim caracterizada por Choppin (2004, p. 553):

> [...] acredita-se que o livro didático pode fornecer, sem que sua leitura seja dirigida, um conjunto de documentos, textuais ou icônicos, cuja observação ou confrontação podem vir a desenvolver o espírito crítico do aluno. Essa função surgiu muito recentemente na literatura escolar e não é universal: só é encontrada afirmação que pode ser feita com muitas reservas — em ambientes pedagógicos que privilegiam a iniciativa pessoal da criança e visam a favorecer sua autonomia; supõe, também, um nível de formação elevado dos professores.

Em tal análise necessita-se estar atento aos detalhes, sinais e vestígios, que o trabalho de pesquisa requer do investigador. Em uma perspectiva indiciária (Ginzburg,1989) de pesquisa, somos conduzidos por uma investigação compreensiva dos indícios. Conforme Rodrigues (2006, p. 6), a pesquisa indiciária deve considerar as especificidades de cada objeto, o aspecto subjetivo da pesquisa e o caráter indireto do conhecimento, caracterizando-se como uma prática interpretativa interdisciplinar, situada no âmbito da microanálise e da análise compreensiva.

Valente (2008) afirma, em seu trabalho, que o livro didático de matemática de outros tempos se revela como sendo um importante meio para a pesquisa da história da educação matemática. “O historiador da educação matemática buscará enredá-lo numa teia de significados, de modo a que ele possa ser visto e analisado em toda a complexidade que apresenta qualquer objeto cultural” (Valente, 2008, p. 159). Na presente investigação, procuramos compreender por meio do livro didático de Thales como se deu a descrição de um conteúdo específico, de uma disciplina escolar, nos programas de ES em nosso país.

4.1 Metodologia

Nesta sessão serão apresentados os procedimentos metodológicos da pesquisa, os objetivos de nosso trabalho, a fonte utilizada para nossa pesquisa, o método de análise, os meios de coleta de dados, as categorias estabelecidas e a análise dos conteúdos.

Nosso estudo se constrói a partir da análise do livro didático de Matemática para Cursos Clássicos e Científicos, sendo esta nossa fonte principal de estudo. O referido livro foi organizado na década de 1940, pelo autor brasileiro Thales de Faria Mello Carvalho, direcionado especialmente a estudantes do então ES, em que aborda, entre outros, os conceitos fundamentais do CDI, como funções, limites, continuidade, derivada e integral.

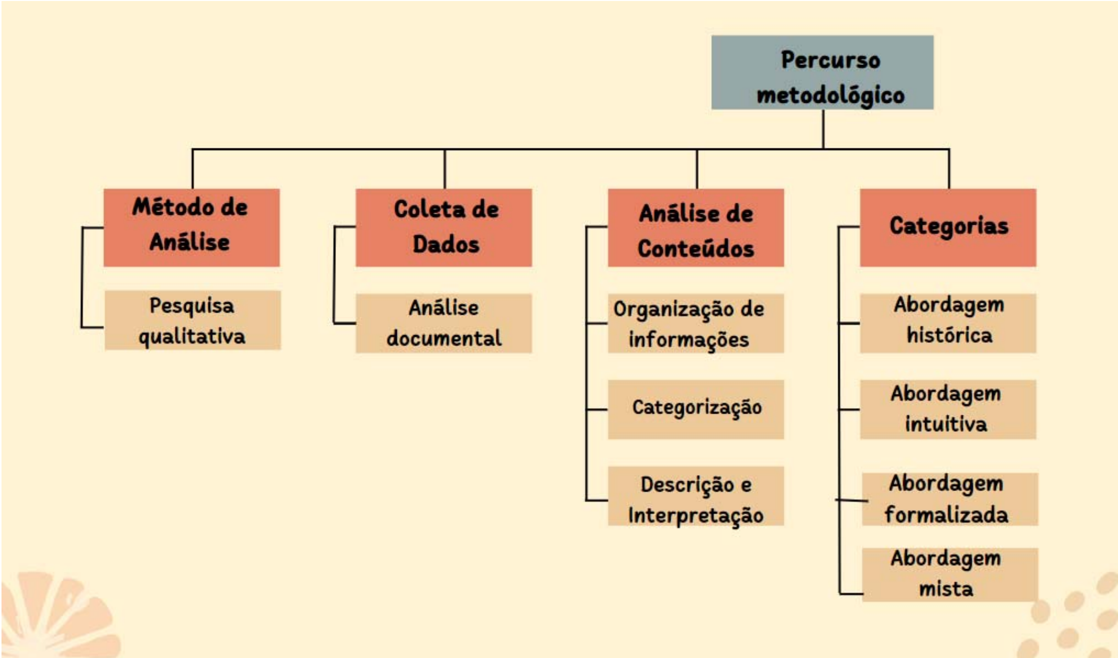
Nesta análise definimos como principal objetivo compreender como o Cálculo Diferencial e Integral está proposto no livro Matemática para cursos Clássicos e Científicos, de Thales de Faria Mello Carvalho. Dentro deste objetivo maior, analisamos a apresentação dos conceitos fundamentais do ensino do CDI, ou seja, como os conteúdos de funções, limites, derivadas e integrais estão propostos no referido livro. Da mesma forma, analisamos como estão sugeridos os exercícios para cada conteúdo em cada capítulo, de acordo com as categorias estabelecidas. E também esboçamos notas biográficas sobre o autor Thales de Faria Mello Carvalho, dando ênfase a fatos importantes em sua vida, que destacam sua dedicação ao ensino da matemática.

4.2 Método de análise

Adotamos a pesquisa qualitativa como método de análise. Conforme Triviños (1987), tal método se configura em um trabalho descritivo, em que as descrições dos acontecimentos trazem seus significados baseados no ambiente de estudo. Logo a interpretação dos resultados se dá de forma coerente, lógica e consistente, pois surge de uma especulação de um fenômeno em um contexto.

Conforme Demo (2015), a pesquisa qualitativa possui dimensões intensas, ou seja, um fenômeno que requer maior observação, mais cuidado para se concluir algo, ou seja, você observa um fenômeno detalhadamente, na busca por fenômenos específicos. Na Figura 3, podemos observar de maneira sintetizada o percurso metodológico adotado em nosso estudo, seguido posteriormente pela explicação detalhada do mesmo.

Figura 3 - Caminho metodológico utilizado na pesquisa



Fonte: Autora, 2023.

4.3 Coleta de Dados: Análise Documental

Em nosso trabalho, tomamos a análise documental como metodologia para coleta de dados. A análise documental pode constituir uma valiosa abordagem de dados qualitativos, objetivando identificar informações factuais nos documentos a partir de questões ou hipóteses de interesse (Ludke; André, 2018).

Conforme Ludke e André (2018), os documentos constituem uma fonte estável, podendo ser consultados diversas vezes, servindo de base a diferentes estudos, o que dá mais estabilidade aos resultados obtidos; representam também uma fonte "natural" de informação, surgindo num determinado contexto e fornecendo informações sobre esse mesmo contexto. Definimos documentos como sendo os diversos materiais escritos que possam ser usados como fonte de informação sobre o comportamento humano, entre os quais destacamos os livros. Em nosso trabalho, nossa principal fonte de pesquisa é o livro didático, que, em nosso caso, será uma fonte primária.

Assim, a coleta de dados para nossa pesquisa se dará através da leitura e análise do livro de Matemática para o ES de Carvalho (1955), o qual está organizado em dez capítulos, em que são abordados os conceitos de Conjuntos e Sucessões, Funções, Limites, Estudo Analítico da Linha Reta, Estudo Analítico da Circunferência, Teoria Elementar das Derivadas, Máximos e Mínimos, Estudo da Variação de uma Função, Função Primitiva, Integrais Definidas. Sua produção ocorreu devido à reforma Capanema, pela qual foi preciso que livros didáticos fossem produzidos para incluir os conteúdos dos programas. O livro encontra-se à venda em sebos, na biblioteca da Fundação Getúlio Vargas e no Grupo de Pesquisas de História da Educação Matemática – GHEMAT. A versão utilizada para este trabalho faz parte do acervo digital particular da professora Circe Mary Silva da Silva.

4.4 Análise de Conteúdo

Para análise de conteúdo adotamos os caminhos metodológicos conforme Moraes (1999, p. 2), que assim define este método:

> Como método de investigação, a análise de conteúdo compreende procedimentos especiais para o processamento de dados científicos. É uma ferramenta, um guia prático para a ação, sempre renovada em função dos problemas cada vez mais diversificados que se propõe a investigar. Pode-se considerá-la como um único instrumento, mas marcado por uma grande variedade de formas e adaptável a um campo de aplicação muito vasto, qual seja a comunicação.

Desta forma, fica possibilitada a reinterpretação das mensagens atingindo uma compreensão de seus significados. Em um trabalho qualitativo, a análise de conteúdo poderá ser organizada em cinco etapas: a preparação das informações; a unitarização ou transformação do conteúdo em unidades; a categorização ou classificação das unidades em categorias; a descrição; e a interpretação (Moraes, 1999). Durante a preparação das informações de nossa pesquisa, realizamos uma leitura detalhada do livro didático, e logo foram definidas quais informações contidas no mesmo estão efetivamente de acordo com os objetivos de nossa pesquisa.

4.5 Categorização

Adotamos a categorização como procedimento de classificação e organização dos dados de nossa análise, com o objetivo de analisar os dados da pesquisa. Assim, as categorias estabelecidas para a abordagem de cada conceito (função, limite, derivada e integral) foram:

- Abordagem histórica;
- Abordagem intuitiva;
- Abordagem formalizada;
- Abordagem mista (Alia uma ou mais das abordagens anteriores);

Definimos como abordagem histórica a relacionada à passagem no tempo, ou seja, quando a história é utilizada, evidenciando problemas que motivaram a utilização do cálculo. A abordagem intuitiva entendemos como aquela em que apelamos para exemplos aritméticos e geométricos para explicar os conceitos, ao utilizamos os termos “próximo de”, “tão próximo quanto quisermos” (Silva, 2023a). Por fim, uma abordagem formalizada está pautada na utilização da simbologia, de resultados mais dedutivos, em demonstrações dos teoremas apresentados por exemplo.

No caso de o autor ter utilizado mais de um tipo das abordagens metodológicas mencionadas, classificaremos esta como uma abordagem mista, em que um mesmo conteúdo esteja sendo abordado intuitivamente e historicamente, por exemplo. Buscaremos analisar como estas categorias podem ser identificadas no livro didático, os conceitos fundamentais do CDI – função, limite, continuidade, derivada e integral –, assim como os exercícios propostos, serão analisados segundo estas categorias.

5 Notas biográficas de Thales de Faria Mello Carvalho

Nesta seção apresentamos importantes elementos sobre a vida deste autor, extraídos do trabalho “Contribuições de Thales de Faria Mello Carvalho para a educação matemática no século XX” realizado por Silva e Brum (2022), o qual apresenta notas biográficas inéditas do autor Thales de Faria Mello Carvalho. Cabe ressaltar que o trabalho ambicionava abrir portas para conhecermos um professor de matemática que, com sua produção de livros didáticos, oportunizou a gerações de estudantes o aprendizado de uma matemática atualizada e que, com seus cursos e palestras, atuou na formação de professores para o ensino primário e secundário.

Thales nasceu na cidade do Rio de Janeiro, em 22 de abril de 1915. Era filho de Antônio Araújo Mello Carvalho e Maria Clotilde de Faria Mello Carvalho. Foi casado com Irene Mello Carvalho, com quem teve sua única filha Dóris de Mello Carvalho. Sua filha seguiu a carreira médica e teve um único filho, Marco Antônio Meggiolaro, que muito admirava o avô materno e, em sua homenagem, deu o nome de Thales ao seu filho. Como o avô, optou pela matemática, sendo atualmente professor de matemática da PUC-RJ.

Seu apreço pela matemática e pelo ensino da disciplina iniciou ainda muito jovem, quando ainda estava na escola primária e acentuou-se na escola secundária, o que o direcionou para o estudo da engenharia. Entre as profissões de engenheiro e professor de matemática, também foi escritor de livros didáticos destinados ao ensino da disciplina. Tal feito oportunizou a gerações de estudantes o aprendizado de uma matemática atualizada. Além disso, através de cursos e palestras, atuou na formação de professores para o ensino primário e secundário.

Sua experiência no magistério foi extensa, lecionou, no Rio de Janeiro, na escola secundária do Instituto de Educação, no curso complementar de Engenharia do Colégio Andrews, no curso complementar de Medicina do Instituto Lafayette, no curso complementar de Engenharia do Colégio Werneck-Castilho e na Faculdade de Ciências Econômicas da Universidade do Brasil. No Instituto de Educação do Rio de Janeiro, lecionou a disciplina de Metodologia do Cálculo.

A produção didática não se restringiu a livros didáticos de matemática. No final da década de 1930 começou a publicar livros, estreando com um livro intitulado *Curiosidades mathematicas*, que foi editado em 1938, sendo que, após dois anos, saiu a segunda edição desse livro. Em 1944, elaborou os verbetes de matemática no *Pequeno Dicionário Brasileiro da Língua Portuguesa*, da Companhia Editora Nacional, contando com a participação de especialistas em diferentes áreas: Antenor Nascentes, na Filologia e Gramática; Aurélio Buarque de Holanda Ferreira, em Brasileirismos e Redação; Fernando de Azevedo, em Sociologia, Antropologia e Educação; entre outros. Em 1945, publicou o livro *O número de ouro,* pela Imprensa Nacional, a partir da palestra que proferiu no Instituto de Resseguros do Brasil. Por sua competência, foi autor de verbetes para dicionários e enciclopédias, e participou da versão brasileira da *Enciclopédia Delta-Larousse*, em 1955.

Os primeiros livros didáticos de matemática que escreveu foram publicados na forma de fascículos e editados pelo próprio autor. São eles: *Lições de trigonometria retilínea*; *Lições de Matemática de acordo com o programa do curso complementar de engenharia*, em 1938. Na década de 1940, já havia publicado, pela Companhia Editora Nacional, os seguintes livros: *Elementos de Matemática Comercial e Financeira*, *Matemática* para a 1ª série do 2º ciclo; *Matemática* para a 2ª série do 2º ciclo; e *Matemática* para a 3ª série do 2º ciclo. Em 1943, foi publicada a primeira edição do livro *Matemática para os cursos clássico e científico*, para a primeira série; em 1945, a segunda edição deste livro; e, dez anos depois, a 10ª edição; o livro para a 2ª série, em 1948, estava em sua 4ª edição e, em 1956, na 8ª edição; o da 3ª série teve sua 2ª edição em 1948 e, em 1956, estava na 6ª edição (Oliveira Filho, 2013). Ainda, escreveu um livro dedicado aos exames de seleção de futuras normalistas intitulado *Admissão ao Curso Normal Matemática* (Carvalho, 1954).

Além das obras que escrevia, Carvalho tinha uma participação ativa em associações, como a A.B.E. (Associação Brasileira de Educação). Em 20 de setembro de 1954, foi nomeado diretor do Departamento de Educação Primária da Secretaria Geral de Educação, vindo a substituir o professor Costa Sena, que ocupava aquele cargo. Em novembro de 1955, Carvalho proferiu as palestras Média Aritmética e Conceitos de função, representação cartesiana para esse público-alvo. Além de palestras, Carvalho ministrou, no Instituto de Educação, em 1954, juntamente com os professores de matemática, curso de aperfeiçoamento para professores intitulado "*Os conceitos e diretrizes na matemática moderna em caráter elementar e sua aplicação à escola primária*".

Em novembro de 1955, ele proferiu as palestras Média Aritmética (Palestras..., 1955) e Conceitos de função, representação cartesiana (Ciclo... 1955). Além de palestras, Carvalho ministrou, em 1954, curso de aperfeiçoamento para os professores, no Instituto de Educação, juntamente com alguns professores de matemática, intitulado "*Os conceitos e diretrizes na matemática moderna em caráter elementar e sua aplicação à escola primária*" (No Instituto..., 1958). A partir de 1958, iniciou sua participação nos cursos e comissões da Campanha de Aperfeiçoamento e Difusão do Ensino Secundário (CADES), que foi criada no governo de Getúlio Vargas, pelo Decreto nº 34.638, de 14 de novembro de 1953. À CADES competiria promover medidas para a elevação da qualidade do ES no país.

Thales de Faria Mello Carvalho faleceu no Rio de Janeiro, aos 45 anos de idade, no dia 10 de fevereiro de 1961. Em abril daquele ano, Malba Tahan (1961, p. 1) escreveu sobre ele dizendo: "Thales Mello Carvalho é um dos poucos matemáticos brasileiros citados com merecido destaque no Lexicon Kapelusz Matemática de Francisco Vera".

Das obras de Carvalho, a que atingiu um grande público no Brasil foi *Matemática para os cursos clássicos e científicos*, editada em três volumes pela Companhia Editora Nacional. Essa publicação surgiu após a reforma do ensino secundário promovida pelo ministro Gustavo Capanema, em 1942, procurando atender à portaria ministerial de março de 1943, que exibia os programas oficiais do 2º ciclo do ensino secundário.

Diante das notas biográficas constatamos que, em sua trajetória profissional, teve experiências com o ensino secundário, a escola normal e o ensino superior, mas, também, atuou como administrador no cargo de Diretor do Departamento de Ensino Primário no Distrito Federal, cargo importante na área educacional. Como autor de livros didáticos, sua produção alcançou dezenas de obras, inclusive algumas com várias edições.

Thales de Faria Mello Carvalho se constituiu como um importante educador matemático focado na escolarização secundarista e na publicação de obras que despertassem a atenção dos leitores por apresentar conhecimentos matemáticos de modo curioso e acessível. Por meio dos rastros encontrados e conduzidos pelo fio da História Cultural foi permitido que nós escrevêssemos essa narrativa biográfica de Thales de Faria Mello Carvalho. Ela é uma possibilidade biográfica, e certamente outras narrativas são possíveis e estão abertas aos pesquisadores que investigam a História da Educação Matemática no Brasil.

6 Descrição e análise do Cálculo Diferencial no livro "Matemática para cursos Clássicos e Científicos" do brasileiro Thales de Faria Mello Carvalho

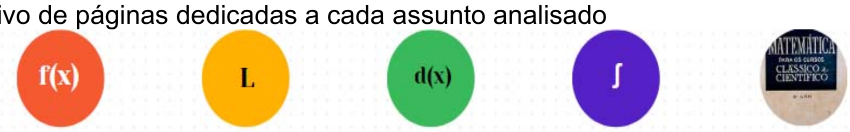
O CDI objetiva fornecer uma compreensão mais profunda sobre os conceitos e as técnicas fundamentais da matemática que envolvem a análise de funções e sua variação ao longo do tempo ou do espaço. O desenvolvimento dessas habilidades é essencial para diversas áreas do conhecimento, como física, engenharia, economia e ciências computacionais, pois permite a modelagem e resolução de problemas complexos que envolvem taxas de mudança, áreas sob curvas e otimização de funções.

A compreensão histórica do ensino do CDI permite perceber como os currículos pretendiam que os alunos dominassem esses conceitos, a fim de que os estudantes secundaristas estivessem aptos a resolver problemas mais avançados em suas respectivas áreas de estudo e a desenvolver uma base sólida para a compreensão de disciplinas futuras no Ensino Superior. O ensino do CDI, em perspectiva histórica, permite identificar uma preocupação política com o desenvolvimento no Brasil de uma educação mais técnica e científica à semelhança de outros países mais avançados que já vinham adotando o conteúdo.

O livro didático "Matemática para cursos Clássicos e Científicos", 3° ano, teve sua 1ª edição no ano de 1943, sendo que para este estudo foi analisada a 5ª edição do ano de 1955, com 207 páginas. O livro analisado foi no formato digital, já que o livro físico foi doado para o Centro de Documentação do GHEMAT.

Estão contemplados os seguintes assuntos em seus capítulos: Noções sobre conjuntos e sucessões; funções reais de uma variável real; limites e continuidade; estudo analítico da linha reta; estudo analítico da circunferência; teoria elementar das derivadas; máximos e mínimos; estudo da variação de uma função; funções primitivas; e integrais definidas. Para este estudo foram analisados os capítulos referentes às funções, limites e continuidade, derivadas e integrais, conteúdos compreendidos como essenciais para o ensino do cálculo. Na Figura 4 é possível observar o quantitativo de páginas que o autor destinou a cada assunto analisado nesta obra.

Figura 4 - Quantitativo de páginas dedicadas a cada assunto analisado



Conteúdo	Função	Limites e Continuidade	Derivada	Integrais	Total
N° total de páginas	12 páginas 31-42	28 páginas 43-70	33 páginas 123-155	29 páginas 179 -207	102 páginas

Tabela: Autora, 2024.

Observamos que Carvalho (1955) acompanhou a recomendação de Euclides Roxo e, conforme a Figura 4, iniciou com o conteúdo de funções, colocando-o em uma posição de destaque em sua obra. Ainda, conferimos que aproximadamente cinquenta por cento de sua obra foi destinada aos conteúdos fundamentais ao ensino do cálculo.

6.1 Funções

A análise realizada apresenta as abordagens utilizadas por Carvalho (1955) para o estudo de funções no referido livro didático. As unidades significantes que foram identificadas no capítulo referente às funções, foram as seguintes: definição de função; classificação de funções; representação geométrica; exercícios.

Ao introduzir o conceito de função, Carvalho (1955, p. 31) inicia por uma abordagem intuitiva, assim proposto pelo autor, no início do capítulo II:

> Pela observação dos fenômenos físicos temos uma noção intuitiva de grandeza variável, isto é, aquela que pode assumir diferentes valores, cada um dos quais define, um estado dessa grandeza. Por exemplo, a temperatura de uma certa porção de água, em estado líquido, pode assumir um valor qualquer, compreendidos entre 0º e 100º centígrados.

O autor considera a variável como aquela que pode assumir vários valores e ser representada por um símbolo, em que poderiam ser associados os elementos de um conjunto numérico, sendo denominados por domínio ou campo de variabilidade. Logo, no exemplo apresentado, os valores definidos para a temperatura da água de 0º e 100º centígrados representam o domínio da variável.

> Variável é um símbolo que representa os elementos de um conjunto numérico, denominado seu domínio ou seu campo de variabilidade… denomina-se variável inteira e variável racional as variáveis reais, cujos domínios são, respectivamente os conjuntos dos inteiros e dos racionais. Por exemplo, o número de habitantes de uma cidade é uma variável inteira (Carvalho, 1955, p. 31).

A partir de então, o autor define função:

> *Sejam x e y duas variáveis reais, se a cada valor do domínio de X se pode fazer corresponder por um processo qualquer, um e apenas um valor de domínio de y, diz-se que y é função real unívoca ou uniforme de x. Representa-se por um símbolo do tipo* $y = f(x)$ *(Carvalho, 1955, p. 32 "grifo nosso").*

O autor faz uma correspondência funcional entre x e y denominando-os de variável independente e variável subordinada. Se a cada valor do domínio de x corresponde mais de um valor do domínio de y, diz-se que y é função multiunívoca ou multiforme de x.

Para exemplificar estes conceitos, Carvalho (1955) utilizou a relação que a cada número natural associa um número par, assim se x é um número natural, y será igual a $2x$. Ainda nos exemplos indicados, o autor menciona exemplos clássicos utilizados pelo matemático Lejeune Dirichlet (1805-1859) para ilustrar o conceito geral de função.

Ao exemplificar os conceitos de função, podemos observar a presença de uma abordagem formalista, quando o autor usa exemplos aritméticos para exemplificar tal conceito, do mesmo modo ao utilizar o termo *suponhamos que…* evidenciando uma abordagem formal. Ainda no exemplo II, podemos observar a referência que o autor faz ao matemático Dirichlet. Observamos uma referência à história da matemática, a qual ele parece atribuir um papel importante no texto.

Segue-se a representação analítica de função:

$$y = 2x + 1$$

$$y = \frac{2x^2}{x^2}$$

$$y = \sqrt{4 - x^2}$$

$$y = x \log x$$

Acompanhada da justificativa:

> Se a correspondência funcional, indicada por $y = f(x)$, pode ser obtida, de modo que cada valor de y seja o resultado de um conjunto definido de operações efetuadas com o valor correspondente de x e constantes, diz-se que a função é representável analiticamente (Carvalho, 1955, p. 33).

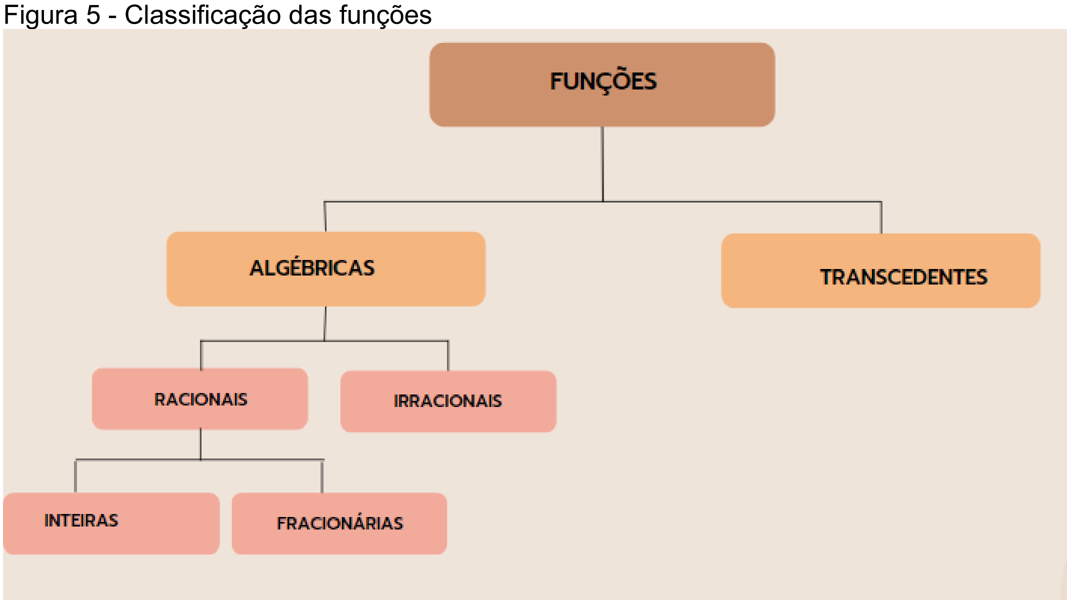
Ele menciona o conceito geral de função, conforme proposto por Dirichlet, e relaciona a função com a temperatura registrada em um ambiente, ou com a natalidade de um país em função de sua prosperidade econômica, com aplicações de funções em diferentes contextos. O autor, então, faz referência ao desenvolvimento do conceito de função que era entendido como uma representação analítica:

> No século XVIII, o conceito de função estava limitado ao de função representável analiticamente. Sua primeira definição geral devida a Johann Bernoulli (1718): "quantidades compostas, de um modo qualquer, de uma grandeza variável e de constantes", aparece mais tarde, em 1748, repetida por Euler em termos mais claros: "função de uma quantidade variável é toda a expressão analítica composta, de um modo qualquer, com essa quantidade variável e com números e quantidades constantes" (Carvalho, 1955, p. 34).

Notamos que Carvalho (1955) faz referência ao contexto histórico da definição do conceito de função, apontando diferentes formas de representação ao longo do tempo, e logo fazendo referência aos matemáticos Johann Bernoulli e Euler. Neste sentido, observamos o que conceituamos como abordagem histórica dos conteúdos, onde o autor faz referência ao tempo, à história.

Ao classificar os tipos de funções, o autor seguiu a organização que pode ser conferida na Figura 5.

Figura 5 - Classificação das funções



Fonte: Autora (2023).

Ao representar uma função algébrica, o autor utiliza a forma $F(x,y) = 0$, onde $F(x,y)$ é um polinômio racional e inteiro das variáveis x e y, seguindo da representação:

$$y^4 - 2xy^2 + 4y = 0$$

As funções não algébricas são denominadas transcendentes e são representadas pelo exemplo:

$$y = x + e^x + sen\ x$$

Uma função algébrica racional é aquela em que o polinômio $F\ (x,y)$ é de primeiro grau em *y*, podendo ser representada por:

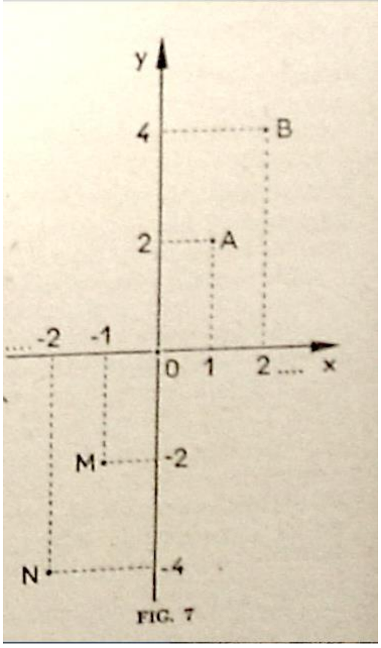
$$y = \frac{f(x)}{\varrho(x)}$$

Se o polinômio $\varrho(x)$ reduz-se a uma constante, a função racional denomina-se inteira, pois assume a forma $y = f\ (x)$, onde $f(x)$ é um polinômio inteiro em x. Caso contrário, a função racional diz-se fracionária.

Ao demonstrar os tipos de funções, observamos a utilização da simbologia matemática, o que associamos a uma maneira formal de abordagem. Carvalho (1955) traz a representação geométrica de uma função, por meio de gráficos constituídos por formas simples, linhas ou curvas, em que determina a correspondência de $y = f(x)$, que estabelece um conjunto de pares ordenados de números reais ao conjunto de eixos coordenados, assim cada um destes pares corresponde a um ponto M do plano. Logo o gráfico que representa uma função é formado pelo conjunto destes pontos.

Na Figura 6 temos a representação gráfica de uma função de variável inteira $y = 2x$, onde o domínio de x é o conjunto dos inteiros e o domínio de y é o conjunto dos números pares. Os pares ordenados são (-2,-4), (-1,-2), (0,0), (1,2), (2,4), correspondendo respectivamente aos pontos N, M, O, A, B.

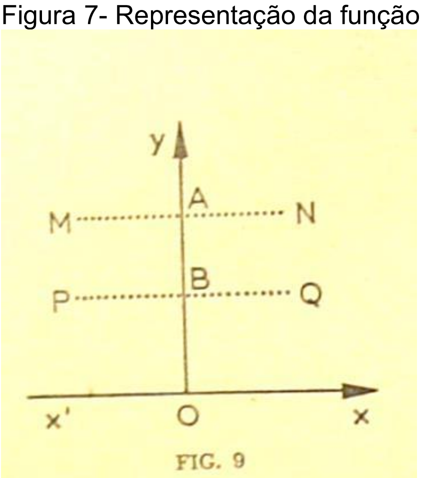
Figura 6 - Gráfico de uma função de variável inteira



Fonte: Carvalho, 1955.

O autor representou não apenas funções contínuas, lineares ou quadráticas, mas, também, "tentou" uma representação para a função de Dirichlet, observada na Figura 7.

Figura 7- Representação da função de Dirichlet.



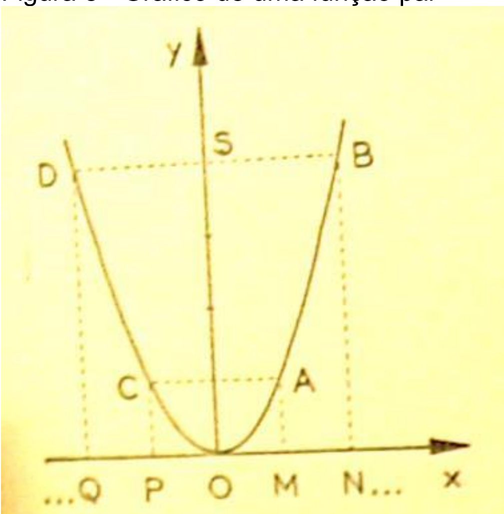
Fonte: Carvalho, 1955.

Em 1829, Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859) apresentou um exemplo de função distinta das utilizados até então: $f(x) = \begin{cases} c, se\ x\ é\ um\ número\ racional \\ d, se\ x\ é\ um\ número\ irracional \end{cases}$, com $c \neq d$. Essa função é descontínua em todos os seus pontos. Carvalho (1955, p. 38) apresenta corretamente a definição desta função, inclusive em nota de rodapé, afirmando que "[...] o objetivo da figura é apenas sugerir a representação gráfica da função de Dirichlet, que é impossível realizar com rigor”.

Embora tenha tentado justificar a razão de ter feito tal representação, assim mesmo a sua inclusão não se justifica, uma vez que não é possível construí-la devido ao fato do conjunto dos racionais e o conjunto dos irracionais terem diferente cardinalidade, ou seja, existem muito mais irracionais do que racionais. Não seria possível fazer uma representação da função de Dirichlet que é descontínua em todo o seu domínio, ou seja, em todos os seus pontos. Nem sempre a visualidade auxilia na compreensão de um conceito, neste caso parece ter apenas confundido.

Nas funções pares e ímpares, Carvalho define uma função par como aquela que qualquer que seja o número real x_1, se tem $f(-x_1) = f(x_1)$, sua demonstração gráfica pode ser observada na Figura 8. Enquanto uma função é tida como ímpar quando $f(-x_1) = -f(x_1)$.

Figura 8 - Gráfico de uma função par



Fonte: Carvalho, 1955.

Ao demonstrar os teoremas apresentados, observamos a predominância de uma abordagem mais formalizada nas representações geométricas de funções. Carvalho (1955) inclui também o importante conceito de função periódica, para o qual traz o exemplo da função cosseno.

Exercícios Propostos

No Quadro 7, está elencada uma síntese dos tipos e exercícios propostos por Carvalho (1955):

Quadro 7 - Exercícios sobre funções propostos no livro didático

Exercícios
1. Determinar o campo de definição de cada uma das funções: a) $y = x^2 + \frac{x}{2}$
2. Dada a função $y = ax + b$, sendo a e b números reais mostrar que a um conjunto de valores de x em progressão aritmética de razão r corresponde um conjunto de valores de y em progressão aritmética de razão ar. Considerar a hipótese $a = 0$
3. Dados os valores: $0,1^3 = 0,001$ $0,4^3 = 0,064$ ... Traçar em papel milimetrado, o gráfico da função $y = x^2$ no intervalo $\left[-\frac{3}{2}, +\frac{3}{2}\right]$
4. Mostrar que o gráfico de uma função ímpar é simétrico em relação à origem.
5. Calcular as expressões dos acréscimos das funções seguintes quando x passa do valor a para o valor $a + h$ de seus campos de definição: a) $y = x^3$
6. Dar sob a forma explicita as funções: a) $x^2 + y^2 = a^2$
7. Representar graficamente no intervalo $[-2 + 2]$ a função $f(x) = I(x)$, onde $I(x)$ significa maior inteiro não superior a x.

Fonte: Carvalho, 1955.

Em um dos exercícios, o autor apresenta uma tabela (Figura 9) para que, a partir dela, como modelo, o aluno construa as representações geométricas de duas funções exponenciais.

Figura 9 - Tabela de valores da função e^x

6. Dados os seguintes valores da função e^x:

x	e^x	x	e^x
0,1	1,11	— 0,1	0,90
0,2	1,22	— 0,2	0,82
0,3	1,35	— 0,3	0,74
0,4	1,49	— 0,4	0,67
0,5	1,65	— 0,5	0,61
0,6	1,82	— 0,6	0,55
0,7	2,01	— 0,7	0,50
0,8	2,23	— 0,8	0,45
0,9	2,46	— 0,9	0,41
1,0	2,72	— 1,0	0,37

traçar, em papel milimetrado, os gráficos das seguintes funções no intervalo $[-1, +1]$:

a) $y = e^x$

b) $y = e^{-x}$

Fonte: Carvalho, 1955.

Nos exercícios propostos por Carvalho (1955), apontados no Quadro 7, observamos, em sua maioria, a exigência de construções gráficas em sua resolução, o que se aproxima de uma abordagem intuitiva, em que o educando ao traçar gráficos, amplia a visualidade. O exercício 2 é uma questão teórica que precisa de demonstração. A abordagem formal também é observada predominantemente na aplicação de exercícios, uma vez que o autor faz uso de simbologias, como exemplo $I[x]$, ou seja, a função maior inteiro, e ainda solicita que faça pequenas demonstrações.

Dessa forma, concluímos que o autor abordou o conceito de função por meio de abordagem mista, não limitando-se a um único tipo de abordagem. E ainda, o autor seguiu o que o matemático Euclides Roxo sugeriu como importante.

6.2 Limites e Continuidade

No capítulo III, Carvalho (1955) aborda os conceitos de limites e continuidade, os quais são apresentados de maneira progressiva. Para isso, ele adentra, entre outros, os seguintes conceitos, necessários para a definição do limite de uma função: conjuntos, conjunto infinito, intervalo, ponto de acumulação, sucessões, limite de uma sucessão, variável real, função, representação analítica de uma função, campo de existência de uma função, limite de uma variável, limite de uma função (Silva, 2023a).

Carvalho (1955) apresenta algumas definições para limites, de acordo com sua finalidade, as quais se encontram elencadas no Quadro 8.

Quadro 8 - Definições de limites

Limite de Sucessão (p.43)	**Limite de Variável (p.44)**	**Limite de Função (p.45)**	**Limite laterais (p.49)**
“Diz-se que uma sucessão $a1$, $a2$, ...an, ... é convergente e tem para limite L, se escolhido arbitrariamente um número positivo ε, existe um número natural N, tal que, para $n \geq N$, se tenha $\|L-an\|<\varepsilon$”.	“Uma variável x tem um limite finito a, se o valor absoluto da diferença $a-x$ pode tornar-se inferior a qualquer número positivo ε, arbitrariamente escolhido ou $\|a-x\|<\varepsilon$”.	“Diz-se que uma $f(x)$ tem um limite finito L quando x tem um limite finito a e escreve-se $f(x)=L$, se escolhido arbitrariamente um número positivo ε, existe um número positivo δ tal que, para todo o valor x do	“O limite de $f(x)$ quando x tende para a pela esquerda, denominado limite à esquerda da função no ponto a e representado por $\lim\limits_{x \to a-} f(x)$ e o limite de $f(x)$ quando x tende para a pela direita, denominado limite á direita da função no ponto a e representado por $\lim\limits_{x \to a+} f(x)$.”

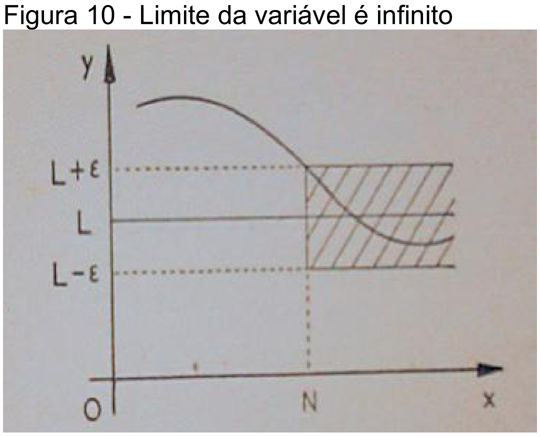
		intervalo (a-δ, a+δ) excluído no máximo o ponto $x = a$, se tenha $\|L-f(x)\|$<ε".	

Fonte: Carvalho, 1955.

Todas as definições são bastantes formalizadas, entretanto o limite é apresentado de maneira intuitiva. O autor utiliza exemplos antes de entrar com rigor matemático. Thales Carvalho (1915-1966) escreveu livros de recreação matemática, talvez por isso tenha sugerido que, ao introduzir definições, o professor fosse o menos formal possível, trazendo antes exemplos (Silva, 2023a, p. 12).

Carvalho (1955) ainda apresentou definição para função e variável com limites infinitos, e utilizou uma linguagem semiótica para sua representação, conforme Figura 10.

Figura 10 - Limite da variável é infinito



Fonte: Carvalho, 1955.

Em seguida, o autor abordou o conceito de continuidade. Conforme Carvalho (1955), quando $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$, diz-se que a função é contínua em um ponto a deste intervalo. A definição de continuidade deve satisfazer três características: a existência de valor $f(a)$ real e finito, a existência do limite ordinário $\lim_{x \to a} f(x)$, e o limite é igual a $f(a)$, acompanhado de exemplos.

O interessante é que ele dá destaque à descontinuidade, dando ênfase ao que é a descontinuidade e não a continuidade, trazendo exemplos acompanhados de representação gráfica para descontinuidade, conforme observamos nas Figuras 11 e 12.

Figura 11 - Gráfico da função contínua à direita

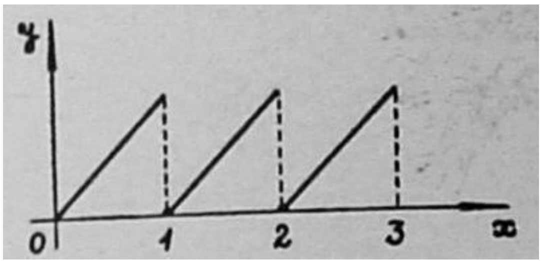
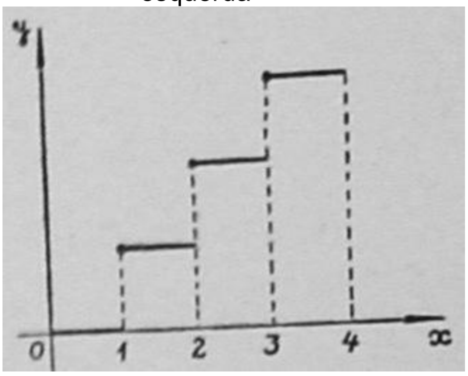


Figura 12 - Gráfico da função contínua à esquerda



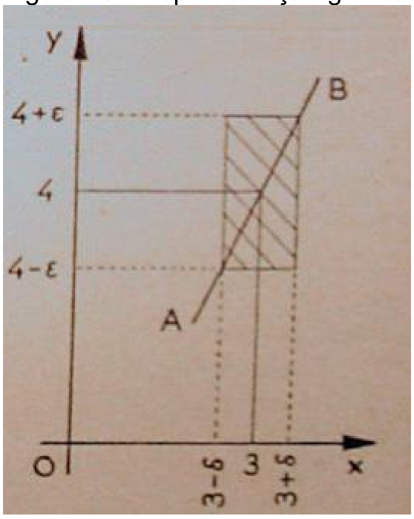
Fonte: Carvalho, 1955, p. 52.

Carvalho (1955, p. 67) apresenta o enunciado do teorema de Weierstrass: “toda função contínua num intervalo fechado $[a, b]$ admite nele um mínimo e um máximo”. O autor não demonstra o teorema de Weierstrass, justificando que tais demonstrações estão acima do nível do curso colegial, e por estas razões não são demonstradas no capítulo. Entretanto, ele explica o significado dos termos máximos e mínimos no teorema, acompanhado do exemplo “a função $y = x - I\,(x)$, num qualquer dos intervalos $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right], \left[\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right]$ etc, tem para extremo superior 1, mas não atinge esse extremo, pois, para $x = 1$, $x = 2$, ... se tem $y = 0$” (Carvalho, 1955, p. 68).

Consideremos uma função $f(x)$ definida num intervalo $[a, b]$ e representemos por F e f, respectivamente, o extremo superior e o extremo inferior de todos os valores $f(x)$ neste intervalo. Se $f(x)$ não é contínua a função dele pode não assumir nesse intervalo um dos valores F ou f ou ambos.

Nas definições de limites e continuidade, Carvalho (1955) fez uso de grande quantidade de exemplificações, acompanhadas em sua totalidade de demonstrações gráficas, como complementação de suas conclusões. Ainda, apresenta simbologia, e, caracterizando com mais rigor, ele introduz o ε e δ, fazendo uso de um gráfico (Figura 13) para representação, além de detalhar a ideia de limite usando a linguagem usual (Silva, 2023a).

Figura 13 - Representação gráfica da função linear



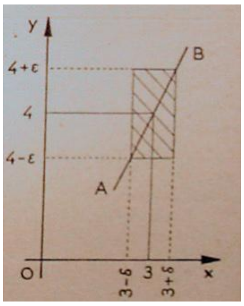
Fonte: Carvalho, 1955.

Conforme Duval (2012), as representações semióticas desempenham um papel primordial, além de serem empregadas como meios de comunicação, ao mesmo tempo são essenciais à atividade cognitiva do pensamento. O autor define:

> As representações semióticas são produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representações que tem inconvenientes próprios de significação e de funcionamento. Uma figura geométrica, um enunciado em língua natural, uma fórmula algébrica, um gráfico são representações semióticas que exibem sistemas semióticos diferentes (Duval, 2012, p. 269).

Duval (2012) destaca sua importância em três aspectos: no desenvolvimento das representações mentais, pois estas dependem de uma interiorização de representações semióticas; na realização de diferentes funções cognitivas, como a função de objetivação que é independente daquela de comunicação (expressão para outrem), e a função de tratamento que não pode ser preenchida pelas representações mentais, apontando o cálculo como uma atividade de tratamento absolutamente ligada à utilização de sistemas semióticos; e por fim na produção de conhecimentos, pois permite representações diferentes de um mesmo elemento. Neste sentido, observamos que Carvalho (1955) faz uso de diferentes representações semióticas nas definições de limites e continuidade, como, por exemplo, ao enunciar o teorema de Weierstrass e ao definir unicidade do limite. No Quadro 9, exemplificamos as formas de linguagens natural, simbólica e gráfica que o autor utilizou.

Quadro 9 - Linguagens utilizadas para limites

Linguagem natural	Se uma função (unívoca) tem um limite no ponto a, esse limite é único, ou em outras palavras, uma função unívoca, não pode ter dois limites distintos num mesmo ponto a.
Símbolo	Diz-se que uma função $f(x)$ tem um limite finito L quando x tem um limite finito a e escreve-se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, se escolhido arbitrariamente um número positivo Ɛ, existe um número positivo ε, existe um número positivo δ tal que, para todo o valor x do intervalo $(a - \delta, a + \delta)$ excluído no máximo o ponto $x = a$, se tenha $\lvert L - f(x) \rvert < \varepsilon$".
Gráfico	

Fonte: Carvalho, 1955.

Ao conceituar unicidade do limite, observamos uma linguagem natural, não utilizando símbolos ou representações gráficas. Para representar o conceito de limite para função, notamos a utilização de símbolos como a, δ e ε. Ainda, para representar o exemplo do limite para função, o autor utiliza um gráfico acompanhado de símbolos. Logo, consideramos que Carvalho (1955) utilizou uma abordagem formal para introduzir o conceito de limite. Ao considerar o teorema de Weierstrass, o autor aproxima-se de uma abordagem histórica, e assim concluímos por uma abordagem mista na significação de limites e continuidade.

Exercícios Propostos

O Quadro 10 apresenta alguns exercícios indicados pelo autor para limites e continuidade.

Quadro 10 - Exercicios propostos sobre limites

Exercícios
1. Mostrar que a função $f(x) = I(x) + I(-x)$, onde $I(x)$ significa maior inteiro não superior a x, é descontínua nos pontos que correspondem a valores inteiros de x e caracterizar essa descontinuidade. Sugestão: Mostrar que $f(x) = 0$ para qualquer valor inteiro de x e $f(x) = -1$ para qualquer valor não inteiro de x.
2. Estudar, na origem, a função: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{sen\,(x)}{x} \\ f(o) = 0 \end{cases}$
3. Calcular os limites: a) $\lim_{x\to 0} \frac{tgx}{x}$ a) $\lim_{x\to 0} \frac{x+sen\,x}{x}$ b) $\lim_{x\to +\infty} [+\sqrt{x2+3x} \; - x]$ Sugestão: Multiplicar e dividir por $+\sqrt{x2+3x}\; + x$; dividir ambos os membros da fração resultante por x e passar ao limite.

Fonte: Carvalho, 1955.

Notamos que, em grande parte dos exercícios, o autor traz sugestões para seu desenvolvimento. A abordagem formalizada é observada na aplicação dos mesmos, uma vez que o autor faz uso de simbologias.

6.3 Teoria Elementar das Derivadas

O estudo das derivadas é abordado no capítulo VI, na seguinte ordem: definição de derivada, razão incremental, derivada num ponto, função derivada, função derivada de ordem n, interpretação geométrica e cinemática da derivada, derivadas unilaterais, continuidade e derivabilidade, regras de derivação (apresenta mais de dez regras), máximos e mínimos.

Inicialmente, Carvalho (1955) introduz a função $y = f(x)$, a qual é definida e contínua em um intervalo $[a, b]$. Sejam x_0+ $\triangle x_0$ dois pontos de $[a, b]$ não infinitamente próximos, e $f(x_0)$ e $f(x_0 + \triangle x_0)$ os valores correspondentes da função nesses pontos. Representemos a diferença por $\triangle y_0$ = $f(x_0 + \triangle x_0) - f x_0$, isto é, o acréscimo da função quando x passa de x_0 para x_0 + $\triangle x_0$. Forma-se então o coeficiente entre acréscimo da função e o acréscimo correspondente da variável, onde se denominou o quociente de razão incremental da função:

$$\frac{\Delta y_0}{\Delta x_0} = \frac{f(x_0 + \triangle x_0) - f(x_0)}{\triangle x_0}$$

Se supusermos x_0 constante e fizermos $\triangle x_0$ tender para zero, em virtude da continuidade da função, $\triangle y_0$ também tenderá para zero. Pode acontecer que quando $\triangle x_0$ tenda para zero, a razão incremental tenha um limite finito que representaremos por $\frac{dy0}{dx0}$ ou por $f'(x_0)$, isto é, $\lim_{\triangle x_0 \to 0} \frac{\Delta y_0}{\Delta x_0}$ = $\frac{dy0}{dx0}$ = $f'(x_0)$. Logo, a função é derivável neste ponto, chamando-se de derivada neste limite.

Há um exemplo: "A fim de dar ao principiante uma ideia bem clara da noção de derivada, apresentamos o seguinte exemplo bastante elucidativo" (Carvalho, 1955, p. 124). O exemplo é a função quadrática y=x^2, contínua para todos os seus pontos de existência. Para $x_0 = 4$, ele atribui pequenos acréscimos Δx_0 e analisa o que acontece quando se atribui esse incremento a x e a y. Conclui que, mesmo que os acréscimos tendam para zero, respectivamente, a razão incremental tende para 8, que é derivada no ponto $x_0 = 4$ (Silva, 2023a). O autor exemplifica através de uma tabela representada na Figura 14.

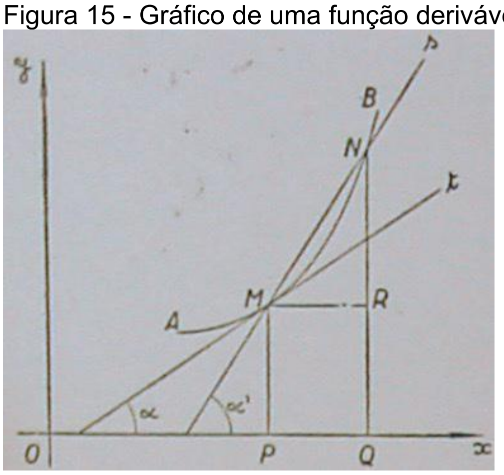
Figura 14- Tabela exemplificadora.

x_0	y_0	Δx_0	$x_0 + \Delta x_0$	$y_0 + \Delta y_0$	Δy_0	$\frac{\Delta y_0}{\Delta x_0}$
4	16	0,1 0,01 0,001 ↓ 0	4,1 4,01 4,001	16,81 16,0801 16,008001	0,81 0,0801 0,008001 ↓ 0	8,1 8,01 8,001 ↓ 8

Fonte: Carvalho, 1955.

Ao representar a derivada de uma função, Carvalho (1955) faz referência às notações $f'(x)$ ou y' (Lagrange), $D\,f(x)$ ou $Dxf(x)$ (Arbogast e Cauchy), y (Newton) e $\frac{df}{dx}$ (Leibniz), e posteriormente utiliza os símbolos para representar a função derivada de ordem n. A interpretação geométrica da derivada é feita através de um gráfico, conforme Figura 15, "considerando os pontos M e N da curva da abscissa $OP = XO$ e $OQ = Xo + \triangle xo$ respectivamente, sendo $MP = yo$ e $NQ = yo + \triangle\ yo$ as ordenadas correspondentes desses pontos" (Carvalho, 1955, p. 125).

Figura 15 - Gráfico de uma função derivável



Fonte: Carvalho, 1955.

Ao exibir a interpretação cinemática da derivada, Carvalho (1955) aponta o movimento do ponto em uma reta r, considerando que a distância percorrida é função do tempo t. O movimento do ponto sendo *uniforme*, qualquer que seja o intervalo, o quociente $\frac{\Delta xo}{\Delta to}$ é constante, e será denominado *velocidade* do ponto. O movimento do ponto sendo variado, em cada instante a velocidade receberá um valor desigual, logo o quociente será denominado velocidade média do ponto no intervalo de estudo.

Quando o intervalo de tempo tender a zero, o autor define o limite através da equação: $v_{\circ} = \lim_{\triangle t \to 0} \frac{\Delta xo}{\Delta to} = \frac{dx_{\circ}}{dt_{\circ}}$, onde a velocidade será derivada da função $\frac{\Delta xo}{\Delta to}$ no instante to.

Em derivadas unilaterais, Carvalho (1955) utiliza a notação de Dirichlet para representar a derivada à esquerda e a derivada à direita da função $f(x)$ no ponto x_0.

A importante relação entre continuidade e diferenciabilidade não foi negligenciada pelo autor. Ele chama a atenção para o fato de que a continuidade não é condição suficiente para a derivabilidade. Uma função pode ser contínua em um ponto sem mesmo ser derivável neste mesmo ponto, e, para sustentar tal informação, Carvalho (1955, p. 129) justifica:

> Entretanto, até os meados do século XIX, suponha-se que a continuidade implicava na derivabilidade, pois a intuição levava a crer que uma curva contínua num ponto admitisse uma tangente nele e, portanto, a função tivesse derivada nesse ponto. Foi Weierstrass quem, em 1861, deu pela primeira vez um exemplo de função contínua num intervalo, não admitindo derivada em nenhum de seus pontos. De, então, para cá, os estudos de análise definiram perfeitamente esta questão (Carvalho, 1955, p. 129).

Conforme Stewart (2021), atualmente, o conceito de derivada é definido como:

A derivada de uma função f em um número a, denotada por $f'(a)$, é

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Se o limite existir, ou seja, havendo um limite específico, haverá derivada. Ao escrevermos $x = a + h$, então $h = x - a$ e h tende a 0 se, e somente se, x tende a a. Consequentemente, uma maneira equivalente de enunciar a definição de derivada é:

$$f'(a) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

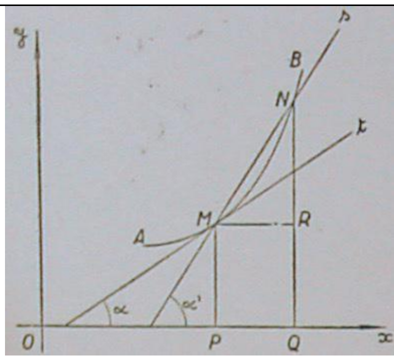
No decorrer do capítulo, conforme Silva (2023b), o autor procura seguir aquilo que Klein recomendava começar com exemplos simples. Mas tal abordagem não prevalece, em seguida o texto retoma o estilo formalizado, com muitas definições e alguns teoremas demonstrados.

Ainda, ao mencionar as simbologias adotadas, faz breve menção aos matemáticos Lagrange, Arbogast e Cauchy, Newton e Leibniz. Observamos que o autor se vale em várias partes de sua escrita de referências à história tanto de conceitos como das notações. Qualificamos a abordagem destes conceitos como uma abordagem histórica.

Podemos verificar uma abordagem mista no capítulo de teoria elementar das derivadas, considerando que o autor faz uso de simbologia, prevalecendo uma formalidade nos conceitos apresentados, assim como em suas exemplificações. A interpretação cinemática da derivada é exemplificada por um fenômeno físico, em torno do movimento, trazendo elementos como o tempo, a velocidade e a distância. Além disso, o autor fez uso de diferentes representações semióticas no capítulo de derivadas, sendo que, no Quadro 11, ressaltamos aquelas empregadas na intepretação geométrica de derivada.

Quadro 11 - Representações semióticas para derivadas

Linguagem natural	Seja $y = f(x)$ uma função derivável em um intervalo $[a, b]$ e seja o arco AB sua representação gráfica [...] a derivada de uma função $y = f(x)$ num ponto de seu campo de definição é o coeficiente angular da tangente á curva nesse ponto.
Símbolos	Como a função é, por hipótese, derivável no ponto M, quando $\triangle X_0$ tender para zero, a razão incremental terá para limite a derivada $\frac{dy_0}{dx_0}$. Por outro lado, $\triangle X_0$ tendendo para zero, o ponto N aproximar-se-á indefinidamente de M de modo que a secante s tenderá para uma posição limite t, que como sabemos da Geometria, é a tangente á curva no ponto M. O ângulo $\propto$' tenderá, então para o ângulo $\propto$ do eixo das abcissas cm a tangente t. Podemos, portanto, escrever: $$tg \propto' = \lim_{\Delta x_0 \to 0} \frac{\Delta y_0}{\Delta x_0} = \frac{y_0}{dx_0}$$
Gráfico	

Fonte: Carvalho, 1955.

Cabe notar que, ao exemplificarmos o uso da linguagem natural, no Quadro 11, isso não significa que alguns símbolos matemáticos não se façam presentes, mas sim que eles não são dominantes. O mesmo pode-se dizer do exemplo do uso dos símbolos, que predominam em relação à linguagem natural (Duval, 2012).

Exercícios Propostos

No Quadro 12 estão expostos alguns dos exercícios indicados no capítulo de derivadas.

Quadro 12 - Exercícios propostos para derivadas

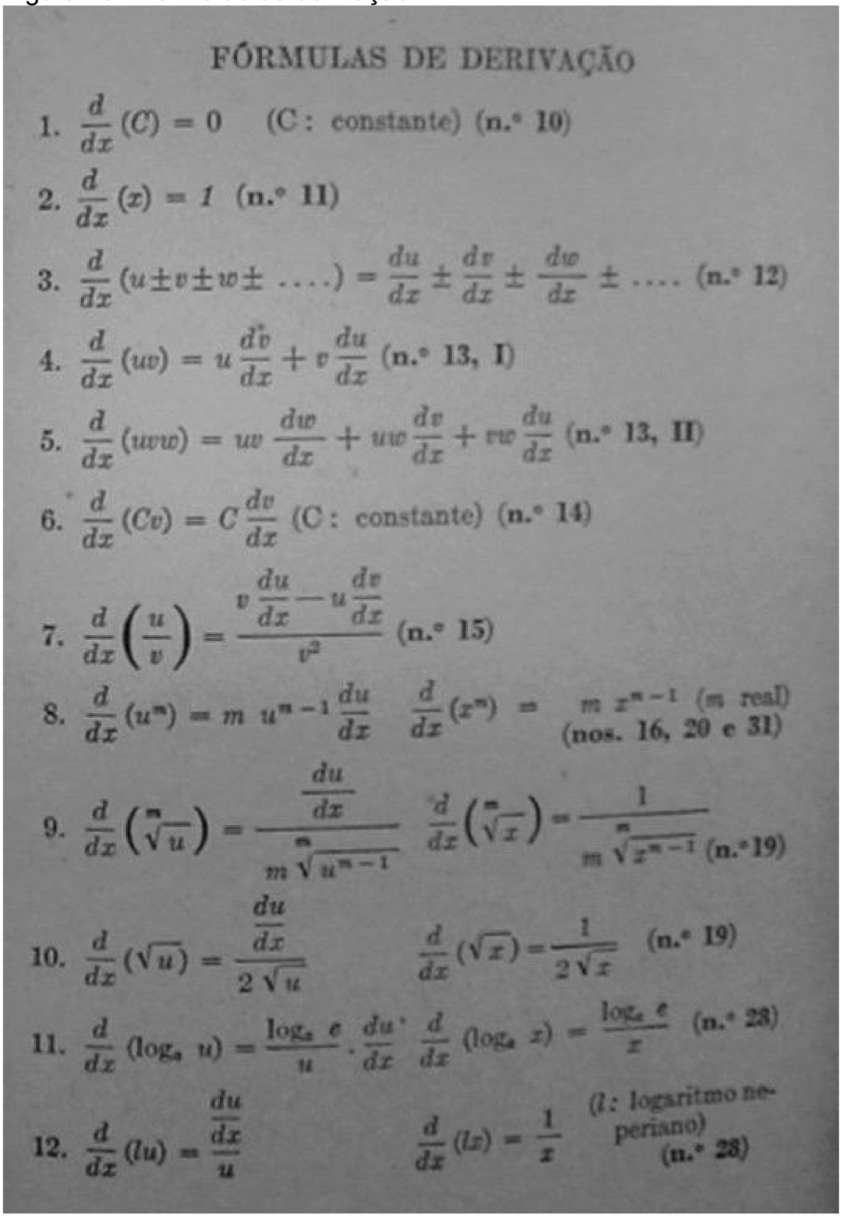
Exercícios
1) Achar a derivada da função: $$y = \frac{1}{3}\, tg3x - tgx + x$$ Resolução: observemos que $tg3x$ é a terceira potência de $tg\ x$; logo obtemos sua derivada aplicando a regra do n° 16.   Temos então: $$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3} * 3\, tg^2x.sec^2x - sec^2x + 1$$ ou simplificando e utilizando relações trigonométricas conhecidas $$\frac{dy}{dx} = tg^2x.sec^2x - (sec^2x - 1) =$$ $$= tg^2x.sec^2x - tg^2x =$$

$= tg^2x\ (sec^2x - 1\ ) = tg^4\ x$
2) Achar a equação da tangente à curva $y = \ x^4 - 4x$ no ponto da abcissa $x = 3$. Resolução: Para $x = 3$ temos $y = -3$. Logo o ponto de tangencia é (3,-3). Seja o coeficiente angular da tangente. Como ele é o valor da derivada da função no ponto $x = 3$, temos $$a = \left[\frac{dy}{dx}\right] x_{-3} = [2x - 4]\ x_{-3} = 2$$ Logo, a equação da tangente é $y + 3 = 2\ (x - 3)$ ou $y = 2x - 9$

Fonte: Carvalho, 1955.

Carvalho (1955) apresenta ampla quantidade de exercícios, todos seguindo o mesmo padrão. Todos os exercícios propostos apresentam a sua resolução. Observamos que o autor utilizou diferentes representações semióticas, explanando uma matemática mais formal. Com o fim de auxiliar o estudante na resolução das atividades propostas, o autor organizou uma tábua contendo as principais fórmulas de derivação estabelecidas no capítulo, sendo que na Figura 16 podemos observar algumas das vinte e sete fórmulas exibidas.

Figura 16 - Fórmulas de derivação



FÓRMULAS DE DERIVAÇÃO

1. $\frac{d}{dx}(C) = 0$ (C: constante) (n.º 10)

2. $\frac{d}{dx}(x) = 1$ (n.º 11)

3. $\frac{d}{dx}(u \pm v \pm w \pm \ldots) = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx} \pm \frac{dw}{dx} \pm \ldots$ (n.º 12)

4. $\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$ (n.º 13, I)

5. $\frac{d}{dx}(uvw) = uv\frac{dw}{dx} + uw\frac{dv}{dx} + vw\frac{du}{dx}$ (n.º 13, II)

6. $\frac{d}{dx}(Cv) = C\frac{dv}{dx}$ (C: constante) (n.º 14)

7. $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$ (n.º 15)

8. $\frac{d}{dx}(u^m) = m\,u^{m-1}\frac{du}{dx}$ $\quad \frac{d}{dx}(x^m) = m\,x^{m-1}$ (m real) (nos. 16, 20 e 31)

9. $\frac{d}{dx}\left(\sqrt[m]{u}\right) = \frac{\frac{du}{dx}}{m\sqrt[m]{u^{m-1}}}$ $\quad \frac{d}{dx}\left(\sqrt[m]{x}\right) = \frac{1}{m\sqrt[m]{x^{m-1}}}$ (n.º 19)

10. $\frac{d}{dx}(\sqrt{u}) = \frac{\frac{du}{dx}}{2\sqrt{u}}$ $\quad \frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ (n.º 19)

11. $\frac{d}{dx}(\log_a u) = \frac{\log_a e}{u}\cdot\frac{du}{dx}$ $\quad \frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{\log_a e}{x}$ (n.º 28)

12. $\frac{d}{dx}(lu) = \frac{\frac{du}{dx}}{u}$ $\quad \frac{d}{dx}(lx) = \frac{1}{x}$ (l: logaritmo neperiano) (n.º 28)

Fonte: Carvalho, 1955.

Observamos que o autor se atentou em fornecer auxílio ao estudante, movimento que pode favorecer um aluno iniciante. Esses quadros com formulário tornaram-se comuns nos livros didáticos.

6.4 Integrais indefinidas e definidas

O estudo sobre integrais está contemplado nos capítulos finais IX e X, da obra. No capítulo IX, o autor utiliza os termos funções primitivas, para tratar as integrais indefinidas. No capítulo X, o autor trata por integrais definidas, este último capítulo o autor direciona ao programa do curso científico. A ordenação em que os conceitos são apresentados, encontra-se no Quadro 13.

Quadro 13 - Conceitos apresentados para primitivas

Função primitiva, constante de integração, continuidade e integrabilidade, diferencial, primitivas imediatas, integração por decomposição, integração por partes, integração por substituição.

Fonte: Carvalho, 1955.

A primeira ideia que apresenta é relacionar a derivada com a integral: "Suponhamos uma função $F(x)$ admita, num intervalo $[a, b]$ a função derivada. Diz-se, então, que $F(x)$ é uma função primitiva ou a integral indefinida de $f(x)$ e escreve-se $F(x) = \int f(x)dx$" (Carvalho, 1955, p. 179). O exemplo ilustra essa ideia. Se $F(x) = x^3 + sen\, x + 1$ é função primitiva porque $f(x) = 3x^2 + cos\, x$, é a derivada de $F(x)$. Com isso, o autor traz a operação de integração como a inversa da derivação.

A primeira nota de rodapé chama a atenção para o símbolo de integral, que lembra uma soma. Todavia, mesmo sabendo que a definição rigorosa de integral necessita ser apresentada pelas somas (conforme Riemann[3]), o autor a considera uma abordagem elevada, não cabendo, portanto, em um ensino inicial.

Na relação de continuidade e integrabilidade, Carvalho (1955) aponta que toda função contínua num intervalo é nele integrável, ou seja, admite uma função primitiva. Segundo o autor, a caracterização rigorosa do conceito de diferencial requer a compreensão de princípios que estão além das possibilidades do curso ginasial. O autor procura deixar claro que o assunto apresentado tem um caráter introdutório e que apenas num nível de ensino mais avançado as bases do cálculo poderiam ser melhor fundamentadas.

A obra de Carvalho (1955) traz conteúdos além daqueles contemplados no programa de matemática, para o curso científico na Reforma de Capanema, em 1943. Conforme Dassie (2001), na terceira série, em álgebra, eram indicados, entre outros, cálculo aritmético de limites, funções e derivadas.

---

[3]A integral de Riemann é o limite das somas de Riemann quando todas as somas convergem par a o mesmo valor.

A diferencial de uma função $y = f(x)$ é compreendida pelo produto $f'(x)$, dx, sendo que dx é a diferencial da variável independente, e dy a diferencial da função, logo temos $dy = f'(x), dx$. A derivada $f'(x)$ é a razão entre a diferencial da função dy e a diferencial da variável independente dx, o que justifica a notação de Leibniz $\frac{dy}{dx}$ (Carvalho, 1955, p.180).

Das fórmulas clássicas para se alcançar a derivada $f'(x)$ ou a diferencial $f'(x)dx$ de uma função $f(x)$, resultam fórmulas de integração imediata $\int f'(x)dx = f(x) + C$, que podem ser aplicadas a todas as funções do tipo $f'(x)$; as funções obtidas serão denominadas primitivas imediatas, conforme Carvalho (1955).

O autor apresenta diferentes formas de integração, estas elencadas no Quadro 14, acompanhadas de exercícios, a fim de comprovar seu enunciado.

Quadro 14 - Formas de integração

Integral	Conceito	Exercício
Integração por decomposição	Quando se calcula uma integral, e substitui-se a função sob sinal de integral por uma soma algébrica de funções e aplicando-se a propriedade relativa à integral de uma soma de funções.	Calcular $F(x) = \int cos^2x.dx$ Resolução: $cos^2x \equiv \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$ $F(x) = \frac{1}{2}\int (1 + cos2x)dx =$ $\frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{4}\int \cos 2x.2dx =$ $\frac{x}{2} + \frac{sen\ 2x}{4} + C$
Integração por partes	Sejam u e v funções deriváveis de x num mesmo intervalo, da fórmula da derivada do produto uv, procede a fórmula da diferencial deste produto $d(uv) = udv + vdu$, supondo que as parcelas do segundo membro sejam integráveis no	Calcular $\int x.cox\ dx$ Resolução: Sendo $u = x$ e $dv = cos\ x\ dx$ Logo $du = dx$ e $v = senx$ Portanto: $\int x.cox.dx =$ $x.senx - \int senx.dx =$ $xsenx + cosx + C$

	intervalo, temos a fórmula de integração por partes: $uv = \int udv + \int udu$ Ou $uv = \int udv - \int udu$	
Integração por substituição	Seja calcular a integral $\int f(x)dx$ sendo $f(x)$ integrável num intervalo $[a,b]$. Escolhamos uma função de uma nova variável t, tal que $x = \varrho\,(t)$, quando t descreve um intervalo $[c,d]$, x descreva o intervalo $[a,b]$, obtemos a função inversa $t = \varrho_1(x)$, onde $\varrho\,(t)$ seja derivável em relação a t no intervalo $[c,d]\; seja \quad dx = \varrho'\,(t)dt$ a diferencial da função. Substituindo em $\int f(x)dx$ os resultados, obtemos $\int f[\varrho(t)]\varrho'(t)dt$ Integral indefinida uma certa função de t, e que se torna a integral procurada, quando nela se substitui t por sua expressão.	Calcular $F(x) = \int \frac{dx}{e^{x}+e^{-x}}$ Resolução: Façamos a substituição $x = lt$ e, portanto, $dx = \frac{dt}{t}$. Como $e^{x}= e^{lt} = t$ e $e^{-x}= \frac{1}{e^{x}} = \frac{1}{t}$ Substituindo os resultados na integral dada, obtemos: $\int \frac{dx}{e^{x}+e^{-x}} = \int \frac{\frac{dt}{t}}{t+\frac{1}{t}} =$ $\int \frac{dt}{1+t^{2}} arc\ tg\ t + C$ Substituindo t por sua expressão, obtemos: $F(x) = arc\ tg\ e^{x} + C$

Fonte: Carvalho, 1955.

Ao apresentar as possibilidades de integração por decomposição, por partes e por substituição, observamos que o autor utiliza muita simbologia. Destacamos as utilizadas para diferencial e integral, originárias de Leibniz. Cajori

(1928) traz um trecho de uma carta que Leibniz encaminhou a Bernoulli, em fevereiro de 1696, sugerindo tal simbologia.

> Quanto aos sinais, vejo claramente que é do interesse da República das Letras e especialmente de estudantes, que os homens instruídos deveriam chegar a um acordo sobre os sinais. Assim, gostaria de saber a sua opinião sobre se aprova a marcação pelo sinal $\int$ a soma, assim como o sinal d é exibido para diferenças [...] (Cajori,1928, p.182, tradução nossa).

Conforme Cajori (1928), Leibniz se envolveu em uma ampla experimentação, na busca de um simbolismo aperfeiçoado na álgebra e na geometria. Em momentos diferentes, ele usou quatro símbolos diferentes para igualdade, três para proporção, três para coincidência em geometria, dois para similaridade, quatro para congruência, cinco para multiplicação, três para divisão, dois para logaritmos e aproximadamente seis para a agregação de termos. Além disso, ele tinha vários sinais para raízes, dois sinais para maior e dois para menor (Cajori, 1928).

Exercícios propostos

No Quadro 15 estão alguns exercícios propostos por Carvalho (1955) para integrais indefinidas.

Quadro 15 - Exercícios para integrais indefinidas

Exercícios
Calcular as integrais indefinidas seguintes: 1. $\int (3x^2 + 4)\,dx$ Resp.: $x^3 + 4x + C$
Calcular, pelo processo de integração por partes, as integrais indefinidas seguintes: 1. $\int . lx . dx$ Resp.: $\frac{x^2}{2}\, l\|x\| - \frac{x^2}{4} + C$ $(SUGESTÃO: Fazer\ u = lx\ e\ dv = dx.)$
Calcular, pelo processo de substituição, as integrais indefinidas seguintes: 1. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$ Resp. $2\sqrt{x} - l(1+\sqrt{x})^2 + C$ $(SUGESTÃO: Fazer\ x = t^2.)$

Fonte: Carvalho, 1955.

Observamos que algumas atividades propostas aparecem acompanhadas de sugestões para sua resolução. Como se trata de uma introdução à teoria da integração, Carvalho, como professor, considerou as dificuldades que um iniciante apresenta para calcular funções, cujas integrais não sejam imediatas, trazendo sugestões para o cálculo das integrais não imediatas.

Para integrais definidas, abordadas no último capítulo da obra, Carvalho (1955, p.195) traz a seguinte definição “Seja $f(x)$ uma função integrável num intervalo $[a, b]$. Seja $F(x)$ uma primitiva de $f(x)$ nesse intervalo, ou $F(x) = \int f(x)\, dx$. A diferença $F(b) - F(a)$ denomina-se integral definida de $f(x)$ para os extremos a e b”.

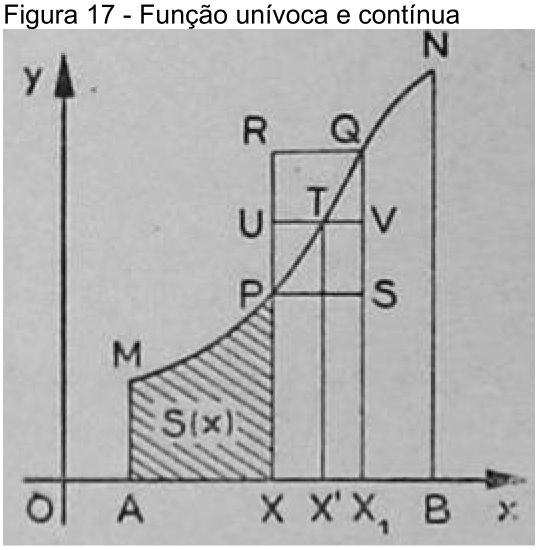
Assim representada:

$$\int_a^b f(x)\, d(x) = [F(x)]\begin{matrix} b \\ a \end{matrix} = F(b) - F(a)$$

Tal definição vem acompanhada do exemplo, sendo $F(x) = x^2 - 2x$ uma primitiva de $f(x) = 3x^2 - 2x$, temos: $\int_2^4 (3x^2 - 2)dx = [x^3 - 2x]_2^4 = (4^3 - 2.4) - (2^3 - 2.2) = 52$.

Ao relacionar integrais definidas com o conceito de área, o autor define que $y = f(x)$ é uma função unívoca e contínua num intervalo $[a, b]$, de acordo com a Figura 17, $a = OA \quad b = OB$ e $f(a) = AM \;\; f(b) = BN$.

Figura 17 - Função unívoca e contínua



Fonte: Carvalho (1955, p.196)

Ele parte de uma função positiva num intervalo AB, e considera $\mathrm{x} = \mathrm{OX}$ a abscissa de um ponto P situado sobre o arco MN. O x é o segmento AB, o ponto P apresentará o arco MN. A área $\mathrm{S(x)}$, definida pelo autor como um trapézio mistilíneo[4] $AMPX$, é uma função de x, que se anula para $\mathrm{x} = \mathrm{a}$ e é igual à área AMNB para $\mathrm{x} = \mathrm{b}$, ou $\mathrm{S(b)} =$ área AMNB.

Em continuidade, ele considera o acréscimo h da variável x, no ponto Q, logo, $OX_1 = OX = XX_1 = x + h$. Esse acréscimo produz nova figura, que ele chama trapézio mistilíneo $XPQX_1$, cuja área está compreendida entre as áreas dos retângulos $XPSX1$ e $XRQX$ de mesma base e altura $XX_1 = h$ e alturas XP e X_1Q, que são respectivamente o mínimo e o máximo da função $f(x)$ no intervalo $[x, x + h]$. A área $XPQX_1$ equivale à área de um retângulo de base h, sua altura XU compreende XP e XR.

Por hipótese, $f(x)$ é contínua, existe um ponto X' "situado no intervalo XX_1, e sua ordenada $f(x') = X'T$ seja igual a XU. Como área $AMQX_1 = s(x + h)$ e área $AMPX = S(x)$, área $XUVX_1 = XX_1.X'T$=$hf(x')$ resulta $S(x = h) - S(x) = hf(x')$", Carvalho (1955, p. 196).

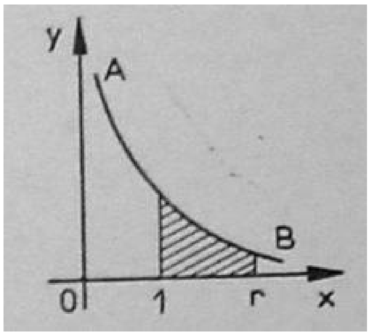
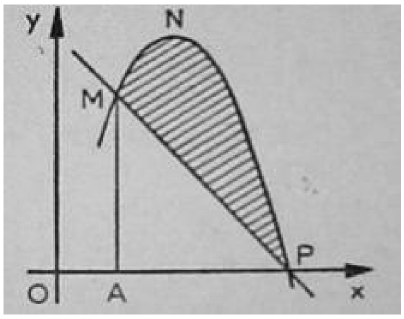
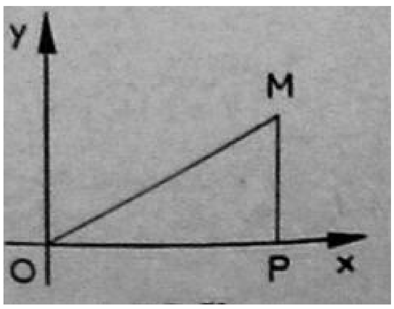
O autor conclui que se

> $S(r)$ é uma das primitivas de $f(x)$, que se anula para $x = a$, considerando $S(x) + C$ a expressão geral das primitivas de $f(x)$, a primitiva que representa a área $AMPX$ é $S(x) - S(a) = \int_a^x f(x)dx$, logo a área do trapézio mistilíneo $AMNB$ é $\int_a^b f(x)dx$ (Carvalho, 1955, p. 197).

Carvalho dá destaque ao que considera a conclusão geral, "a área da superfície limitada pelo eixo ox, pelas ordenadas $x = a$ e $x = b$ e pela linha, definida pela função continua $y = f(x)$, é a integral definida $\int_a^b f(x)dx$, supondo-se que $f(x)$ tenha o mesmo sinal no intervalo $[a, b]$", (Carvalho, 1955, p. 197). O autor então apresenta a relação entre os conceitos de integral definida e de área, através de exercícios resolvidos. No Quadro 16 estão elencados alguns dos exemplos apresentados para integral de área.

[4] Constituído em artes por linhas retas e em partes por linhas curvas (Trecho de Aurélio).

Quadro 16 - Relação de integrais com áreas

Exercício	**Resolução**	**Representação Gráfica**
Calcular a área limitada pela hipérbole $y = \frac{1}{x}$, pelo eixo ox e pelas ordenadas $x = 1$ $x = r(r>1)$.	Seja AB o ramo da hipérbole correspondente a valores positivos de x, a área da superfície é: $S = \int_1^r \frac{dx}{x} = [lx]_1^r = lr - l1$ $= lr$	
Calcular a área do segmento da parábola $y = 4x - x^2$, determinado pela reta $y = 4 - x$.	Traçando os gráficos, vemos que elas se cortam nos pontos M (1,3) e P (4,0). A área da superfície MNP é a diferença das áreas da superfície AMNP e do triângulo AMP. $S_{AMNP} = \int_1^4 (4x - x^2)\ dx = [2x^2 - \frac{x^3}{3}]_1^4 = 9$ $S_{AMNP} = \int_1^4 (4x - x)\ dx = [4x - \frac{x^2}{2}]_1^4 = 4{,}5$ A área procurada é $SMNP = SAMNP - SAMP$ $= 9 - 4{,}5 = 4{,}5$	
Calcular o volume do cone de revolução de raio da base r e altura h.	Sejam $h = OP$ e $r = PM$, respectivamente, a altura e o raio da base do cone, gerado pelo triângulo, retângulo OPM numa rotação de 360° em torno de OP. A geratriz OM está sobre a reta, que passa	

	pelos pontos $O\ (0{,}0)$ e $M\ (h, r)$. O volume do cone é: $V = \pi \int_{o}^{h} \frac{r^2x^2}{h^2}\, dx$ $= \frac{xr^2}{h^2} \int_{o}^{h} x^2 dx$ $= \frac{\pi r^2}{h^2}[\frac{x^3}{3}]_0^h = \frac{\pi r^2}{h^2}\ X\ \frac{h^3}{3} = \frac{1}{3}\ \pi r^2 h$	

Fonte: Carvalho, 1955.

A partir do trabalho de Dassie (2001), observamos que a elaboração dos programas de matemática dos cursos clássicos e científicos da Reforma de Gustavo Capanema, passaram por alterações, até sua definição final. No Quadro 17, estão organizados os conteúdos sobre álgebra sugeridos por Euclides Roxo para a terceira série do curso científico e a versão modificada por Capanema, a qual permaneceu de 1943 até o ano de 1961.

Quadro 17 - Programas para o curso científico

Versão proposta por Euclides Roxo em 1942	**Versão aprovada e publicada em 1943 pela portaria 177 (Gustavo Capanema)**
3° Série Álgebra Unidade I. Funções 1: Noção de função de variável real. 2- Representação cartesiana. 3- Noção de limite e continuidade. Unidade II. Derivadas: 1- Definição interpretação geométrica e cinemática. 2- Cálculo das derivadas. 3- Derivação das funções elementares. 4- Aplicação à determinação dos máximos e	3° Série Álgebra Unidade I: Séries: 1- sucessões. 2- Cálculo aritmético dos limites. 3- Séries numéricas. 4- Principais caracteres de convergência. Unidade II. Funções 1- Função de variável real. 2- Representação cartesiana. 3- Continuidade; pontos de descontinuidade; descontinuidades de uma função racional.

mínimos e ao estudo da variação de algumas funções simples. Unidade III- Primitivas: 1- Definição, interpretação geométrica. 2 - Primitivação e integração imediata, noção de integral definida. 3- Aplicação ao cálculo a certas áreas e dos volumes da pirâmide, do cone, da esfera. 4- Problemas sobre o cálculo dos volumes.	Unidade III. Derivadas:1- Definição interpretação geométrica e cinemática. 2- Cálculo das derivadas. 3- Derivação das funções elementares. 4- Aplicação à determinação dos máximos e mínimos e ao estudo da variação de algumas funções simples. Unidade IV. Números complexos: 1- Definição; operações fundamentais. 2- Representações trigonométricas e exponencial. 3- Aplicação à resolução das equações binômias. Unidade V: Equações algébricas: 1- Propriedades gerais dos polinômios. 2- Relações entre os coeficientes e as raízes de uma equação algébrica, aplicação à composição das equações. 3- Noções sobre transformações das equações; equações recíprocas; equações de raízes iguais.

Fonte: Dassie, 2001.

Compreendemos que na reforma de Capanema os programas de matemática para o 3° ano científico referentes à álgebra são contemplados pelo estudo de limites, funções e derivadas, já o estudo de integrais foi retirado dos programas. Ao conferirmos as sugestões indicadas por Euclides Roxo, em sua proposta, além dos conteúdos citados acima, ele indica o estudo de primitivas (integrais indefinidas) e integral definida; ainda menciona a aplicação ao cálculo em áreas e dos volumes da pirâmide, do cone, da esfera e também problemas sobre o cálculo dos volumes. Podemos considerar que Carvalho (1955) contempla tais sugestões em sua obra, ao abordar o estudo de integrais e sua relação com as áreas, conforme mostra o Quadro 13 e nas sugestões de exercícios no Quadro 15.

Concluímos que Carvalho (1955), ao conceituar integrais indefinidas e definidas, se apropria de simbologias como $\int$, definida por Leibniz. Notamos, nas exemplificações destacadas no Quadro 13, a predominância de uma linguagem simbólica, em que os símbolos são utilizados acompanhados de uma ilustração gráfica para cada problemática. Entretanto, a abordagem do autor é predominantemente formalizada.

No Quadro 18, apresentamos alguns exercícios propostos por Carvalho (1955) para integrais definidas:

Quadro 18 - Exercícios de integrais definidas

1. Calcular as integrais definidas: $\int_1^4 x^2 dx$ Resp.: 21
2. Calcular a área limitada pela parábola $y = x^2$, pelo eixo ox e pelas ordenadas $x = 1$ e $x = 2$. Resp.: $\frac{7}{3}$
3. Calcular a área de um qualquer dos segmentos da senoide, determinado pelo eixo ox. Sugestão: essa área é dada por$\int_0^{\pi} sen\ x, dx$, ou $\int_{\pi}^{2\pi} sen\ x, dx, etc.$
4. Calcular, por integração, o volume do cone gerado por uma rotação em torno de ex, do triângulo determinado pelos eixos coordenados e pela reta $x + 2y = 6$. Resp. $18\,\pi$

Fonte: Carvalho, 1955.

De acordo com o Quadro 18, observamos que o autor não apenas propõe o cálculo das integrais, mas aplica as integrais definidas ao cálculo de áreas e volumes. Embora estes assuntos não estivessem contemplados nos programas de matemática da época, tal relação havia sido sugerida por Euclides Roxo em seu programa de matemática para o curso científico, em 1942.

Ao apresentar exemplos que exijam calcular a área de figuras, como o cone, a parábola, o autor expõe o conteúdo de integrais de forma intuitiva, exigindo que o aluno trace formas para se chegar à resolução final. Desta forma, consideramos que o autor utilizou uma abordagem mista, pautada na prevalência de símbolos e gráficos.

7 Considerações finais

A análise da obra de Carvalho (1955) nos permitiu compreender como os conceitos fundamentais do Cálculo Diferencial e Integral estão propostos no livro Matemática para cursos Clássicos e Científicos, de sua autoria. Foi possível identificar as categorias, estabelecidas para nosso estudo, em todos os capítulos analisados. O Quadro 19 traz de uma forma sintetizada os resultados adquiridos após o estudo da obra.

Quadro 19 - Síntese dos resultados encontrados

Síntese da análise

Análise	Abordagem Formal	Abordagem Histórica	Abordagem Intuitiva	Abordagem Mista
Funções	✓	✓	✓	✓
Limites	✓	✓	✓	✓
Derivadas	✓	✓	✗	✓
Integrais	✓	✗	✓	✓

Fonte: Autora, 2024.

O Quadro 18 evidencia o processo do qual Carvalho (1955) se apropriou para apresentar os conteúdos, por meio de conceitos, exemplificações e atividades. A utilização de exemplos aritméticos, a abundante utilização de simbologias, a utilização de diferentes representações semióticas e a formalização conferem aos capítulos uma multiplicidade de abordagens.

Os matemáticos Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859), Johann Bernoulli (1667-1748), Leonard Euler (1707-1783), Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815-1897), Joseph Louis Lagrange (1736-1813), Louis Arbogast (1759-1803), Augustin Louis Cauchy (1789-1857), Isaac Newton (1643-1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), foram referidos e tiveram suas concepções seguidas por Carvalho (1955) ao enunciar funções, limites e derivadas. As referências, mesmo que limitadas aos nomes de matemáticos, permitiu qualificarmos a abordagem como histórica.

Ao requerer que o educando calculasse áreas de figuras geométricas, assim como fizesse a construção de gráficos para a resolução de atividades, e ao se apropriar de exemplos para demonstrar conceitos, Carvalho (1955) abordou os conceitos de funções, limites e integrais também de maneira intuitiva. Logo, Carvalho (1955) organizou sua obra de forma diversificada, não se limitando a um único tipo de abordagem para cada conteúdo. Entretanto, notamos que para função e limites o autor contemplou todas as abordagens.

A valorização dos resultados constituídos pelos matemáticos ao longo da história é percebida quando o autor faz referências a estes matemáticos em sua obra. Conforme mostra de forma resumida o Quadro 20, em cada capítulo analisado, Carvalho (1955) faz menções a importantes matemáticos na história da educação matemática.

Quadro 20 - Matemáticos mencionados na obra

Capítulo analisado	**Matemáticos mencionados**
Funções	-Peter Gustav Lejeune Dirichlet -Johann Bernoulli -Leonard Euler
Limites e Continuidade	-Karl Theodor Wilhelm Weierstrass
Derivadas	-Karl Theodor Wilhelm Weierstrass -Joseph Louis Lagrange -Louis Arbogast -Augustin Louis Cauchy -Isaac Newton -Gottfried Wilhelm Leibniz
Integrais	-Gottfried Wilhelm Leibniz

Fonte: Autora, 2024.

Como a referida obra é direcionada ao ES, percebe-se que estes conteúdos são propedêuticos para o ensino superior. Portanto, sendo algo preparatório, deveria conter uma quantidade significativa de exemplificações e representações de figuras, conforme observamos o quantitativo no Quadro 21.

Quadro 21 - Quantitativo de representações gráficas, exercícios e definições

Fonte: Autora, 2024.

O Quadro 21 apresenta uma análise atenta sobre cada assunto trabalhado na obra, de itens que foram considerados por nós como fundamentais quando destinados à etapa do ES. Observamos que o autor se apropriou de representações gráficas para melhor compreensão dos conteúdos, em todos os capítulos analisados da obra. O amplo número de exercícios sugeridos em cada momento, em sua maior parte, é acompanhado de sua resolução, ou da resposta final do mesmo.

As definições que o autor atribuiu em cada assunto, predominantemente estão acompanhadas de exemplos, o que auxilia na melhor compreensão dos conceitos apresentados. Tais observações são significativas para um aluno iniciante e que posteriormente, em um nível mais elevado de ensino, poderá aprofundar-se em tais conhecimentos. Ainda, verificamos que o autor segue o programa oficial em vigor na década de 40, conforme indicado no prefácio da obra analisada.

As notas biográficas de Thales de Faria Mello Carvalho nos permitiram concluir que o autor foi um importante autor de livros, e atuante na formação de professores. Sua formação em engenharia proporcionou um estilo mais formalizado na abordagem do cálculo, assim como direcionou a escrita de seu livro com vistas ao ensino superior da época. As notas biográficas expressam a quantidade significativa de obras escritas pelo autor, ao analisarmos a obra observamos a diversificação nas abordagens dos conteúdos, assim como propriedades que caracterizam a didática. Desse modo, evidenciamos que as obras do autor em destaque contribuíram e fortaleceram a história da educação matemática em nosso país.

Por fim, não foram analisadas obras de diferentes autores contemporâneos, como Euclides Roxo, Roberto Peixoto, Haroldo Cunha e Cesar Dacorso Neto, Algacyr Munhoz Maeder, Manoel Jairo Bezerra e Ary Quintella. Foram autores que, assim como Carvalho, abordaram os conteúdos do CDI em livros didáticos destinados ao ES, e que seguiam os programas oficiais da época – tal análise poderá ocorrer em um trabalho futuro.

Referências

BARBOSA, L. E.; SILVA DA SILVA, C. M.; RODRIGUES V., W. **O cálculo diferencial e integral: uma análise das tentativas de sua escolarização**. Anais do ENAPHEM – Encontro Nacional de Pesquisa em História da Educação Matemática, n. 6, 3 nov. 2022.

BRASIL. Ministério da educação. **Base Nacional Comum Curricular do Ensino Médio**. 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em 15 abr. 2024.

BLOCH, M. **Apologia da História ou O Ofício de Historiador**. Rio de Janeiro: Zahar, 2001. 160p.

CAJORI, F. **A history of mathematical notations**. New York, 1928.

CARNEIRO, M. **História da educação**. 1. ed. Curitiba, PR: IESDE Brasil, 2017.

CARVALHO, J. B. P. F. **Algumas considerações históricas sobre o ensino de cálculo na escola secundária.** Cadernos Cedes, Campinas, v. 40, 1996, p. 62-81.

CARVALHO, T. M. **Matemática para os Cursos Clássico e Científico**, 3º Ano Colegial. 5. ed. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1955.

CHERVEL, A. (1990). **História das disciplinas escolares: reflexões sobre um campo de pesquisa**. Teoria & Educação, 2, 177-229.

CHOPPIN, A.; BASTOS, T. M. H. C. **O historiador e o livro escolar**. Revista História da Educação, [S. l.], v. 6, n. 11, p. 5–24, 2012. Disponível em: https://seer.ufrgs.br/index.php/asphe/article/view/30596. Acesso em: 9 fev. 2023.

CHOPPIN, A. **História dos livros e das edições didáticas: sobre o estado da arte**. Educação e Pesquisa, São Paulo, v. 30, n. 3, p. 549-566, set./dez. 2004.

CORDEIRO NETO, A, A. **Cálculo integral para o Ensino Médio**. 2019. 59 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Matemática, Programa de Pós Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2019.

DALLABRIDA, N. **A reforma Francisco Campos e a modernização nacionalizada do ensino secundário**. Educação, *32*(2), 2009. Disponível em: https://revistaseletronicas.pucrs.br/ojs/index.php/faced/article/view/5520.

DASSIE, B. A. **A matemática do curso secundário na Reforma Gustavo Capanema**. 177f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2001.

DASSIE, B. A; ROCHA, J, L. **O ensino de matemática no Brasil nas primeiras décadas do século XX**. 2003. Disponível em: https://dalicenca.uff.br/wp-content/uploads/sites/204/2020/05/da_Licena_Bruno.pdf. Acesso em: 04 jan. 2023.

DECRETO-LEI Nº 4.244, DE 9 DE ABRIL DE 1942. **Exposição de Motivos**. Disponível em: http://www2.camara.leg.br/legin/fed/declei/1940-1949/decreto-lei-4244-9- abril-1942-414155-133712-pe.html. Acesso em 3 jan. 2023.

DUVAL, R. **Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática**. In: MACHADO, S. D. A. (Org.). Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica. Campinas: Papirus, 2003, p.11-33.

GAYO, J. **Fundamentos e história da matemática**. Indaial: Uniasselvi, 2010.

GINZBURG, C. **Mitos, emblemas, sinais: morfologia e história**. São Paulo: Cia. das letras, 1989.

GHIRALDELLI JÚNIOR, P. **Introdução à Educação Escolar Brasileira: História, Política e Filosofia da Educação** [versão prévia], 2001.

LIMA, G. L. de. **O Ensino de Cálculo Diferencial e Integral no Brasil entre 1810 e 1934: os cursos das escolas militares do Rio de Janeiro e da Escola Politécnica de São Paulo**, São Paulo, 2008.

LUDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. **Pesquisa em educação: abordagens qualitativas**. 2. ed. Reimpressão – Rio de Janeiro: E.P.U., 2018.

MELCHIORS, A.; SOARES, M. **História do Cálculo Diferencial e Integral**. 2013.

MELO, J. M.S de. **História da Educação no Brasil**. 2. ed. Fortaleza: UAB/IFCE, 2012.

MENDONÇA, A. W. P. C., SOARES, J.C., LOPES, I. G. **A criação do Colégio de Pedro II e seu impacto na constituição do magistério público secundário no Brasil**. Educ. Pesqui**.**, v. 39, n. 4, p. 985-1000, São Paulo, out./dez. 2013.

MOACYR, P. **A instrução e o império: subsídios para a história da educação no Brasil**. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1936.

MONTALVÃO, S. de S. **Gustavo Capanema e o ensino secundário no Brasil: a invenção de um legado.** Revista História da Educação (online), v. 25, e108349, 2021.

MORAES, R. **Análise de conteúdo**. Revista Educação, Porto Alegre, v. 22, n. 37, p. 7-32, 1999.

MOROSINI, M.; FERNANDES, C. (2014). **Estado do Conhecimento: conceitos, finalidades e interlocuções**. Educação Por Escrito, v. 5, n. 154. 10.15448/2179-8435.2014.2.18875.

OLIVEIRA FILHO, F. **A Matemática do Colégio: livros didáticos e história de uma disciplina escolar**. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Anhanguera de São Paulo, 2013.

PALMA FILHO, J. C. (organizador). **A educação brasileira no período de 1930 a 1960: a Era Vargas**. Pedagogia Cidadã. Cadernos de Formação. História da Educação. 3. ed. São Paulo: PROGRAD/UNESP- Santa Clara Editora, 2005 – p.61-74.

PESSANHA, E. & ASSIS, W. & SILVA, S. (2017). **História do ensino secundário no Brasil:** o caminho para as fontes. Roteiro. 42. 311. 10.18593/r.v42i2.12251.

RAAD, R. M. **História do ensino de Cálculo Diferencial e Integral: a existência de uma cultura**. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2012.

RODRIGUES, B. **Metodologia do conhecimento científico** - Com Pedro Demo. You Tube, 22/03/2015. Disponível em: https://youtu.be/7hLqaJLQ5Q4. Acesso em 30 set. 2022.

RODRIGUES, M. B. F. (Org.). **Exercícios de indiciarismo**. Vitória: Universidade Federal do Espírito Santo, Programa de Pós-graduação em História Social das Relações Políticas, 2006, 93 p., Rumos da história; v. 6.

SILVA, C. M. S.; BRUM, A. P. R. **Contribuições de Thales de Faria Mello Carvalho para a educação matemática no século XX**. VIDYA, v. 42, n. 2, p. 217-231, jul./dez., 2022 – Santa Maria, 2022.

SILVA, C. M. S. **Livro Aberto: uma análise histórica**. Perspectivas da Educação Matemática, v. 8, n. 18, 18 dez. 2015.

SILVA, C. M. S. **Limites: Uma breve passagem nos livros brasileiros do ensino secundário**. Boletim do Centro de Documentação do GHEMAT-SP, São Paulo, v. 5, p. 1-25, 2023a.

SILVA, C. M. S. **Positivismo, Ensino Secundário e Cálculo Diferencial e Integral**. Revista História da Educação (Online) 2023b.v. 27, e128201.

SILVA, D. H.; MACHADO, M. C. G. **O Método de Ensino Intuitivo e a política educacional de Benjamin Constant.** Revista Eletrônica de Educação, v. 8, n. 2, p. 198–211, 2014. DOI: 10.14244/19827199836. Disponível em: https://www.reveduc.ufscar.br/index.php/reveduc/article/view/836 . Acesso em: 19 jun. 2022.

STEWART, J. **Cálculo**, v. 1. 6. São Paulo Cengage Learning Brasil 2021 1 recurso online ISBN 9786555584097.

TAHAN, M. **A Matemática na Vida e na Escola**. Diário de Notícias (RJ), 7 abr. 1961, p. 1.

TALL, D. **Using technology to support an embodied approach to learning concepts in Mathematics**. In: CARVALHO, Luiz M.; GUIMARAES, Luiz C. (Org.). História e Tecnologia no Ensino de Matemática. Rio de Janeiro: IME-UERJ, 2002, p. 1-28.

TRIVIÑOS, N. S. **Introdução à pesquisa em ciências sociais: a pesquisa qualitativa em educação**. São Paulo/SP. Atlas S.A, 1987.

VALENTE, W. R. **A Matemática do ensino secundário: duas disciplinas escolares?** Rev. Diálogo Educ., Curitiba, v. 11, n. 34, p. 645-662, set./dez. 2011.

VALENTE, W. R. **Livro didático e educação matemática: uma história inseparável**. Zetetiké, Campinas, SP, v. 16, n. 2, 2009. DOI: 10.20396/zet.v16i30.8646894.Disponível em: https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8646894 . Acesso em: 9 fev. 2023.

VILCHES, M.A. CORRÊA, M. L. **Cálculo: Volume I**. 2001.

ZOTTI, S. A. **O ensino secundário no Império brasileiro: considerações sobre a função social e o currículo do Colégio D. Pedro II**. Revista HISTEDBR On-line, Campinas, n. 18, p. 29 - 44, jun. 2005. Disponível em: https://www.fe.unicamp.br/pf-fe/publicacao/4800/art04_18.pdf. Acesso em: mai. 2022.