UNIVERSIDADE FEDERAL DE PELOTAS
Instituto de Física e Matemática
Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática
Mestrado Acadêmico em Educação Matemática

Dissertação

Construção do conceito imagem de limite por concluintes de Licenciatura em Matemática da UFPEL

Andreza Cardoso Santos Mevs

Pelotas, 2025

Andreza Cardoso Santos Mevs

Construção do conceito imagem de limite por concluintes de Licenciatura em Matemática da UFPEL

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Pelotas, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

Orientador(a): Prof.ª Dr.ª Circe Mary Silva da Silva Dynnikov

Pelotas, 2025

Universidade Federal de Pelotas / Sistema de Bibliotecas Catalogação da Publicação

M479c Mevs, Andreza Cardoso Santos

Construção do conceito imagem de limite por concluintes de Licenciatura em Matemática da UFPEL [recurso eletrônico] / Andreza Cardoso Santos Mevs ; Circe Mary Silva da Silva Dynnikov, orientadora.
— Pelotas, 2025.
159 f. : il.

Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Instituto de Física e Matemática, Universidade Federal de Pelotas, 2025.

1. Conceito de limite. 2. Ensino de matemática. 3. Aprendizagem de matemática. 4. Educação matemática. I. Dynnikov, Circe Mary Silva da Silva, orient. II. Título.

Elaborada por Maria Inez Figueiredo Figas Machado CRB: 10/1612

Andreza Cardoso Santos Mevs

Construção do conceito imagem de limite por concluintes de Licenciatura em Matemática da UFPEL

Dissertação aprovada como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Educação Matemática, do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, do Instituto de Física e Matemática da Universidade Federal de Pelotas.

Data de defesa: 26 de fevereiro de 2025

Banca examinadora:

....

Prof. Drª. Circe Mary Silva da Silva Dynnikov (Orientadora)

Doutora em Pedagogia pela Universidade de Bielefeld

....

Prof. Drª. Rozane da Silveira Alves

Doutora em Educação pela Universidade Federal de Pelotas

....

Prof. Dr. António Domingos

Doutor em Ciências da Educação, na especialidade de Teoria e Desenvolvimento Curricular pela Universidade Nova de Lisboa

Agradecimentos

Agradeço a Deus, minha fonte de força nos momentos de cansaço, de sabedoria quando as palavras me faltavam e de coragem quando achei que não conseguiria conciliar todas as responsabilidades. Foi Ele quem me conduziu até a conclusão deste trabalho.

Ao meu esposo, William, pelo apoio incondicional, por enxugar minhas lágrimas, celebrar comigo as conquistas e, com paciência e amor, enfrentar todas as minhas explosões de sentimentos que marcaram esta etapa.

Aos meus pais, Benildi e Joilson, que, mesmo à distância, sempre foram meus maiores incentivadores, ensinando-me a nunca desistir dos meus sonhos, por mais difíceis que fossem. Aos meus irmãos, Andréia e Andrey, pela amizade, apoio e por estarem ao meu lado em todos os momentos importantes da minha vida.

Aos meus sogros, Ordalina e Luís, pela paciência e compreensão nos momentos em que o cansaço me tornava silenciosa e mal-humorada. À minha cunhada, Milena, que tantas vezes foi minha professora de inglês e esteve pronta para me socorrer sempre que precisei.

À minha querida orientadora, Circe Mary Silva da Silva Dynnikov, por sua dedicação incansável, atendendo-me até mesmo nos finais de semana e durante as férias. Por acreditar no meu potencial, por lapidar minhas habilidades de escrita e argumentação, por me desafiar e mostrar que sou capaz de muito mais do que imaginava.

Aos meus colegas professores, funcionários e equipe diretiva da Escola Félix da Cunha, pelo incentivo e apoio ao longo desta caminhada.

Aos professores, coordenadores e ao secretário do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Pelotas (UFPel), pelo suporte e compromisso com o ensino e a pesquisa, tornando possível a realização deste estudo.

Aos colegas e professores do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática (PPGEMAT), pela troca de conhecimentos, pelo apoio e pelos momentos de aprendizado compartilhados, que enriqueceram minha formação acadêmica e contribuíram para o desenvolvimento deste trabalho.

Aos alunos do curso de Licenciatura em Matemática que participaram desta pesquisa, pela coragem de compartilhar seus conhecimentos e experiências, contribuindo significativamente para este trabalho. Sem vocês, esta pesquisa não teria sido possível.

À professora Rozane da Silveira Alves, por ter ido além do papel de avaliadora e me ajudado a encontrar os caminhos para a coleta de dados. Sua generosidade e disponibilidade fizeram toda a diferença para este estudo.

Ao professor António Domingos, cuja tese serviu de inspiração para este trabalho. Suas ideias foram um farol ao longo da minha pesquisa, e ter sua leitura e contribuições nesta dissertação é uma grande honra.

A ambos, Rozane Alves e António Domingos, minha profunda gratidão não apenas pela avaliação criteriosa e valiosas sugestões, mas também pelo incentivo e apoio durante este percurso.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pelo apoio financeiro e pela oportunidade de realizar esta pesquisa, permitindo minha dedicação ao estudo e à produção acadêmica.

A todos que, de alguma forma, fizeram parte desta jornada, meu sincero e profundo agradecimento!

Tu te tornas eternamente responsável por aquilo que cativas. (Antoine de Saint-Exupéry)

RESUMO

MEVS, Andreza Cardoso Santos. Construção do conceito imagem de limite por concluintes de Licenciatura em Matemática da UFPEL. Orientadora: Drª. Circe Mary Silva da Silva Dynnikov. 2025. 142 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Física e Matemática, Universidade Federal de Pelotas, Pelotas, 2025.

Este estudo qualitativo teve como objetivo investigar como alunos concluintes do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Pelotas assimilam e expressam sua compreensão do conceito de limite. Motivados pelo interesse em compreender as estratégias de aprendizagem a partir das teorias de Vygotsky e Tall, a pesquisa procurou responder à questão central: "Como, na perspectiva do pesquisador, os alunos concluintes do curso de licenciatura em matemática da UFPEL caracterizam sua compreensão a respeito do conceito de limite?" O referencial teórico baseou-se nas contribuições de Vygotsky (2001), Domingos (2003) e David Tall (2013), que fundamentaram a discussão sobre a construção do conhecimento matemático e o desenvolvimento do pensamento formal. Com o intuito de mapear as estratégias utilizadas pelos alunos para resolver algumas tarefas envolvendo o conceito de limite e classificá-las conforme seu pensamento matemático, foram elaboradas quatro questões sobre limites, construídas da literatura didática e do Projeto Pedagógico do Curso. O intuito era mapear as estratégias utilizadas pelos alunos e classificá-las conforme seu pensamento matemático. A pesquisa contou com a participação de sete alunos dos cursos Integral e Noturno, não alcançando os estudantes da modalidade de Educação a Distancia (EaD). Os resultados indicaram que a compreensão do conceito de limite varia entre corporificado e simbólico, centrada em processos e símbolos, mas sem a internalização abstrata necessária para a formalização completa. Essa lacuna entre o conceito imagem e o conceito definição compromete a capacidade de abstração e generalização dos alunos, evidenciando a importância de metodologias pedagógicas que integrem intuição, simbolismo e formalismo para promover um desenvolvimento matemático mais robusto.

Palavras-chaves: conceito de limite; ensino de matemática; aprendizagem de matemática; educação matemática.

ABSTRACT

MEVS, Andreza Cardoso Santos. Construction of the Image Concept of Limit by Graduating Mathematics Licentiate Students at UFPEL. Advisor: Dr. Circe Mary Silva da Silva Dynnikov. 2025. 142 f. Dissertation (Master's in Mathematics Education) – Institute of Physics and Mathematics, Federal University of Pelotas, Pelotas, 2025.

This qualitative study aimed to investigate how graduating students of the Mathematics Licentiate program at the Federal University of Pelotas assimilate and express their understanding of the concept of limit. Motivated by the interest in understanding learning strategies based on the theories of Vygotsky and Tall, the research sought to answer the central question: “How, from the researcher's perspective, do graduating students of the Mathematics Teaching Degree at UFPEL characterize their understanding of the concept of limit?” The theoretical framework was based on the contributions of Vygotsky (2001), Domingos (2003), and David Tall (2013), which supported the discussion on the construction of mathematical knowledge and the development of formal thinking. In order to map the strategies used by students to solve tasks involving the concept of limit and classify them according to their mathematical thinking, four questions on limits were developed based on didactic literature and the Pedagogical Course Project. The study included the participation of seven students from both full-time and evening courses, excluding students from the Distance Education (EaD) modality. The results indicated that the understanding of the concept of limit varies between embodied and symbolic, focusing on processes and symbols but lacking the necessary abstract internalization for complete formalization. This gap between the image concept and the definition concept compromises students' ability to abstract and generalize, highlighting the importance of pedagogical methodologies that integrate intuition, symbolism, and formalism to foster a more robust mathematical development.

Keywords: concept of limit; mathematics teaching; mathematics learning; mathematics education.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BDTD	Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações
CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
CDI	Cálculo Diferencial e Integral
CNPQ	Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico
EaD	Educação a Distancia
EDO	Equação Diferencial Ordinária
ENADE	Exame Nacional de Desempenho de Estudantes
GAMA	Grupo de Apoio em Matemática
PROUNI	Programa Universidade para Todos
UFPEL	Universidade Federal de Pelotas
ZPD	Zona de Desenvolvimento Proximal

SUMÁRIO

1 NOTA BIOGRÁFICA

Minha jornada na área da educação foi marcada por desafios e aprendizados que moldaram minha visão sobre o poder transformador da educação. Crescendo em uma comunidade com recursos limitados, desde cedo reconheci a importância de buscar conhecimento e contribuir para um futuro melhor.

Uma experiência que marcou minha trajetória foi o convite para auxiliar minha professora no contra turno, onde descobri minha paixão pela docência e o impacto positivo que poderia causar na vida dos alunos. Esse momento definiu minha missão de transformar o ensino da matemática em algo revolucionário e acessível a todos.

Ao enfrentar os desafios de conciliar trabalho e estudos na Universidade Bandeirantes de São Paulo, onde cursei Licenciatura em Matemática com desconto parcial concedido pelo Programa Universidade para todos (PROUNI), aprendi a dedicar-me ainda mais ao meu crescimento acadêmico e profissional. E ao ingressar na docência, percebi que apesar do embasamento teórico e da prática fornecidos pelos estágios, as habilidades necessárias iam além do domínio teórico que possuía. A adaptação da minha abordagem pedagógica para despertar o interesse dos alunos pela matemática foi essencial. Inspirada por educadores renomados, compreendi a importância de buscar constantemente novas estratégias para tornar o ensino mais acessível e relevante. Embora minha visão sobre a educação tenha sido ampliada ao ingressar no curso de pedagogia, ainda enfrento desafios para minimizar as dificuldades dos alunos na transição entre os anos iniciais e finais do ensino fundamental.

Essa jornada me fez crescer não apenas como profissional, mas também como pessoa. Cada desafio superado contribuiu para fortalecer meu compromisso com uma educação significativa e transformadora.

2 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Motivados pelo desejo de compreender as estratégias utilizadas pelos alunos para entender determinados conceitos e inspirados em teóricos como Piaget e Vygotsky, identificamos no conceito de limite uma oportunidade para explorar a aprendizagem dos alunos. Para isso, iniciamos um levantamento dos trabalhos já realizados que abordam o conceito de Limite. Partindo de literaturas sugeridas, tais como de Soares (2017), Silva (2023), Lima (2015), entre outros autores que serão mencionados na revisão de literatura, estes nos levaram a algumas perguntas, das quais escolhemos uma delas como a questão investigativa principal, sendo ela: Como, na perspectiva do pesquisador, os alunos concluintes do curso de licenciatura em matemática da UFPEL caracterizam sua compreensão a respeito do conceito de limite?

Instigados por essa questão e pela baixa quantidade de trabalhos que abordem esse assunto realizamos um mapeamento das percepções e entendimentos iniciais dos estudantes em relação a determinados conceitos matemáticos. Essas percepções serão confrontadas com as definições formais esperadas, buscando promover uma reflexão sobre o processo de construção do conhecimento matemático ao longo de sua formação acadêmica. Ajudando os estudantes a desenvolver uma compreensão mais profunda e precisa dos conceitos, além de fornecer insights importantes para os educadores sobre os pontos que precisam ser reforçados ou esclarecidos durante o ensino desses conceitos.

Este trabalho então foi inserido em um projeto mais abrangente patrocinado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), com aprovação no Edital de Chamada Universal CNPq/MCTI/FNDCT Nº 18/2021 - faixa A, que investiga o processo de disciplinarização do Cálculo Diferencial e Integral (CDI) no contexto educacional brasileiro, que tem como coordenadora a professora Doutora Eliene Barbosa Lima da Universidade Estadual de Feira de Santana - BA e com a participação de minha orientadora professora Circe Mary Silva da Silva Dynnikov, além de outros pesquisadores e mestrandos.

Neste projeto a autora traz a seguinte problemática: Por que o Cálculo Diferencial e Integral não se consolidou como um conteúdo da disciplina escolar

Matemática? A abordagem metodológica que será utilizada visa elucidar a problemática de forma ampla e abrangente, evitando restrições a uma única perspectiva ou contexto histórico. Optando-se por estabelecer diálogos pluralizados, ou seja, envolvendo diversas perspectivas e abordagens em relação ao Cálculo Diferencial e Integral (CDI). Isso inclui não apenas uma visão histórica limitada, mas também análises que abrangem diferentes contextos e momentos, como o ensino do CDI em nível superior, estudos sobre sua aplicação nas disciplinas escolares, práticas pedagógicas em escolas secundárias e aspectos didáticos atuais do CDI. A qual permitirá uma compreensão mais abrangente e profunda da problemática, considerando sua complexidade e as diversas influências que podem afetar o ensino e aprendizagem do CDI. Ao envolver diferentes perspectivas e áreas de estudo, busca-se enriquecer a investigação e fornecer insights mais abrangentes e contextualizados sobre o tema.

Sendo assim, de modo geral, com o trabalho que estamos desenvolvendo pretendemos contribuir investigando como os alunos concluintes do curso de Licenciatura em Matemática da UFPel assimilaram o conceito de limite. Para isso, conforme será descrito no capítulo da metodologia, faremos um questionário com quatro perguntas envolvendo aspectos importantes sobre o conceito de limite, encontrados nos livros didáticos utilizados pelos professores que lecionam a disciplina de CDI.

Para tal serão convidados os alunos que concluirão o curso no 1º e 2º Semestre de 2024, que cursam Licenciatura em Matemática Noturno, Integral e EaD para participar do primeiro questionário, a fim de coletar informações que darão subsídios à entrevista que será realizada posteriormente com alguns alunos, com o propósito de analisar as imagens conceituais apresentadas por esses estudantes.

Lev Vygotsky (1896-1934) apresenta ideias fundamentais que mudaram a forma como entendemos a aprendizagem e influenciaram profundamente a prática educacional em todo o mundo. Entre suas principais contribuições destacamos o conceito de Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP), que aborda a importância das interações sociais no processo de aprendizagem. Esta teoria defende que as crianças aprendem melhor quando são desafiadas a alcançar um nível de desenvolvimento além do que podem atingir sozinhas, mas dentro da ZDP com o suporte adequado de um adulto ou colega mais capaz.

Além disso, Vygotsky enfatizou o papel crucial da linguagem na aprendizagem mediada. Ele viu a linguagem não apenas como uma ferramenta de comunicação, mas como um instrumento fundamental para a construção do pensamento. Portanto, o uso de linguagem rica e significativa é essencial para promover a compreensão e o desenvolvimento cognitivo.

David Tall; Vinner (1981), investigou a interação entre o conceito imagem e o conceito definição na compreensão matemática. Ele argumentou que a imagem mental é uma parte crucial do processo cognitivo e que a definição formal é apenas uma parcela do conceito imagem total que existe na mente do aprendiz.

Uma de suas contribuições mais notáveis foi a formulação da Teoria dos Três Mundos na educação matemática. Nessa teoria, ele delineou três níveis de assimilação de conceitos matemáticos: o mundo corporificado, o mundo simbólico e o mundo formal. Através dessa estrutura, Tall enfatizou a importância de uma progressão gradual e articulada entre esses mundos para o desenvolvimento do entendimento matemático.

Sua pesquisa também se estendeu à aprendizagem e ao ensino de conceitos matemáticos, como o desenvolvimento do pensamento algébrico e a compreensão do limite. Tall dedicou-se a entender as dificuldades enfrentadas pelos estudantes ao aprender conceitos matemáticos abstratos e desenvolveu abordagens e recursos para apoiar o ensino eficaz da disciplina.

Nosso estudo, de abordagem qualitativa, investigou a compreensão do conceito de limite entre concluintes do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Pelotas. Inicialmente, a pesquisa previa duas etapas: a primeira consistia na aplicação de quatro questões sobre limites, classificando os alunos em quatro categorias de pensamento matemático (corporificado, operacional, corporificado e simbolizado, e formalizado). A segunda etapa envolveria entrevistas com representantes de cada grupo, utilizando abordagens distintas para análise das respostas, porém devido a dificuldades operacionais, como a desorganização do calendário acadêmico devido a greves e enchentes, levaram a ajustes no plano, incluindo a ampliação do público-alvo e a adaptação dos métodos de recrutamento e coleta de dados, assim o que era para ser entrevista, mudou para relato dos estudantes sobre sua aprendizagem, a qual foi realizada após a aplicação das tarefas. A pesquisa contou com a participação de sete alunos dos cursos Integral e Noturno, mas não obteve adesão de estudantes do EaD.

Os relatos foram conduzidos logo após a aplicação do questionário, explorando as dificuldades e facilidades encontradas pelos alunos no aprendizado do conceito de limite. A análise teve como objetivo identificar os obstáculos que dificultam a transição para o pensamento formalista e investigar como determinados estudantes conseguem superar essas barreiras. Para tanto, utilizamos os referenciais teóricos de Domingos (2003) e Tall (2013) para estabelecer um diálogo crítico com as respostas apresentadas, permitindo uma compreensão aprofundada dos processos de construção do conceito matemático de limite pelos alunos.

Nos próximos tópicos faremos maiores esclarecimentos de como se dará nossos estudos. Iniciaremos com seu processo histórico de formalização do conceito de limite.

3 INTRODUÇÃO

O cálculo diferencial e integral é um ramo fundamental da matemática que aborda as noções de derivadas e integrais. Sua história, com origens na antiguidade, começa realmente com os matemáticos Isaac Newton (1648-1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) no final do século XVII. Essas duas partes do cálculo estão inter-relacionadas e são essenciais para a compreensão e modelagem de fenômenos variados nas ciências naturais, engenharia, economia e outras disciplinas.

O ensino de Limite desempenha um papel crucial na formação matemática dos estudantes que estão dando os primeiros passos nos estudos de cálculo diferencial e integral. Essa etapa é fundamental para proporcionar a base matemática necessária, permitindo a compreensão de conceitos mais avançados e a aplicação significativa desses conhecimentos em diversos contextos.

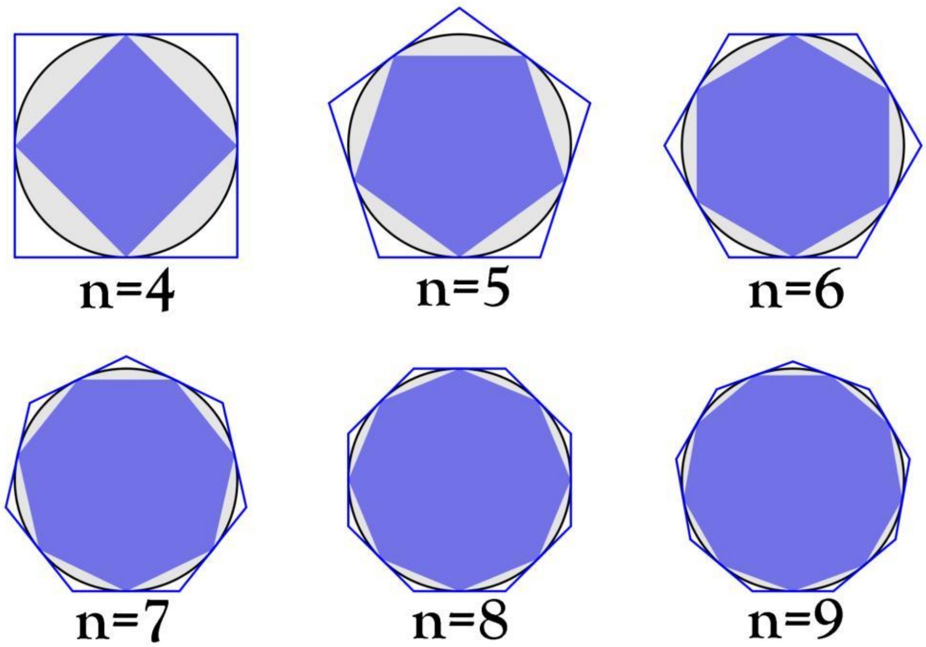
Apesar de sua importância contemporânea, é interessante observar havia incertezas por parte dos matemáticos no tratamento e simbolização do conceito de limite. A abordagem intuitiva era mais simples; as expressões “tão pequeno quanto se queira”, aproximar-se, tender a um valor eram usadas livremente. Na história da matemática, a definição de limite se deu após a estabelecida definição de derivada e integral, como apresentaremos a seguir. No entanto, é digno de nota que mesmo antes dessa formalização, Arquimedes já havia vislumbrado a aplicação de limite ao empregar o Método de Exaustão em suas investigações matemáticas. Isso evidencia que, mesmo sem uma formalização precisa, a intuição sobre a utilidade dos Limite já estava presente.

Brolezzi (1996, *apud*, Amorim, 2011, p.32) afirma que

> A diferença entre o método de exaustão e o limite do Cálculo Diferencial e Integral reside apenas no fato de os gregos não realizarem essa passagem ao infinito, pois não tinham noção de um continuum aritmético. Mas o tipo de argumentação é o mesmo, tanto no caso do atual limite quanto no método de exaustão geométrico. Pode-se talvez dizer que a noção de limite tivesse sido vislumbrada pelos gregos. (Brolezzi,1996, *apud*, Amorim, 2011, p.32)

O método de Exaustão[1], originalmente proposto por Eudoxo, era uma técnica para calcular a área de um círculo. Ele envolvia a inscrição de polígonos dentro do círculo, onde quanto maior o número de lados do polígono, mais o formato dele se aproximava do círculo. Isso significa que a área desse polígono também se aproximava mais da área do círculo desejado. Posteriormente, Arquimedes refinou esse método ao introduzir a ideia de incluir um polígono circunscrito ao círculo, como ilustrado na figura 1.

Figura 1 - Polígonos com n lados



Fonte: Martins (2016, https://atitudereflexiva.wordpress.com/2016/12/01/o-metodo-da-exaustao-e-o-surgimento-da-constante-pi-%CF%80/.)

Vale ressaltar que a figura 1 é apenas uma representação do comportamento dos polígonos no círculo e que o símbolo *n* utilizado para representar o número de lados serve apenas para ilustrar que na medida em que *n* torna-se grande, a área da figura inscrita se aproxima da área do círculo. A ideia de infinitos também não era

[1] O método utilizado por Arquimedes se assemelha ao teorema do confronto, pois possibilita a determinação do valor da figura ao estabelecer seus limite máximo e mínimo. Em outras palavras, ao "relacionar" a área do polígono interno e externo, seria possível encontrar a área do círculo.

usada, segundo Boyer (1974, p. 95) Arquimedes não falou em soma de séries infinitas, pois, processos infinitos eram mal vistos em seu tempo.

De acordo com Boyer (1974) foi a partir dos estudos de Newton e Leibniz em meados do século XVII que o Cálculo Diferencial e Integral começou a ganhar forma. A ideia de infinito deixou de ser uma barreira; até então o conceito de Limite era aplicado no processo de compreensão e formalização da derivada e integral, porém sem ser de fato formalizado, o mais próximo dessa formalização foi feito, de acordo com o autor, por Newton no

> Livro I, intitulado ‘O método da primeira e última razões de quantidade pelo uso do qual demonstramos as proposições que seguem’, incluindo o Lema I: Quantidades, e as razões de quantidades que em qualquer tempo finito convergem continuamente à igualdade, e antes do fim desse tempo se aproximam mais uma da outra que por qualquer diferença dada se tornam finalmente iguais. (Boyer, 1974, p. 292)

A partir da metade do século XVII a ideia de função tornou-se fundamental nos estudos de análise, segundo Boyer (1974, p. 331) “enquanto Euler se concentrava em funções bem comportadas, evitando dificuldades sutis que mais tarde tornariam sua abordagem insustentável, Jean le Rond d'Alembert (1717-1783) via a "verdadeira metafísica" do Cálculo na ideia de limite.” Embora ainda não houvesse uma definição formalmente estabelecida, Leonard Euler (1707-1783) fez avanços significativos no entendimento de séries infinitas e funções.

O século XIX ficou conhecido como o século da formalização o cálculo diferencial e integral, iniciado por Newton e Leibniz nos séculos anteriores, continuou a se desenvolver e se expandir no século XIX. Matemáticos como Augustin-Louis Cauchy (1789-1857), Karl Weierstrass (1815-1897) e Bernhard Riemann (1826-1866) contribuíram com teoremas e conceitos fundamentais no campo do cálculo e a análise matemática experimentou progressos significativos neste século.

Augustin-Louis Cauchy e Karl Weierstrass foram pioneiros na rigorosa fundamentação da análise matemática, introduzindo conceitos como Limite, continuidade e séries infinitas de maneira formal e precisa. Segundo Boyer (1974, p. 409)

> deve se lembrar que Bolzano e Cauchy tinham tentado provar que uma sequência que ‘converge em si’ - isto é, uma sequência para a qual Sn,p

> difere de Sn (para n suficientemente grande) por menos que um número prefixado - também converge no sentido de relações externas a um número real S, o limite da sequência. (...) Num sentido mais amplo ele considerava que uma sequência convergente determina ou um número racional como limite ou um 'número fictício' como um 'limite fictício'. Mostrou que esses 'números fictícios' podem ser ordenados e em essência eles são o que chamamos números irracionais.

Cauchy definiu o conceito de limite de uma função de maneira precisa e formal. Sua definição baseava-se na ideia de que os valores da função podem se aproximar indefinidamente de um valor específico à medida que a variável independente se aproxima de um determinado ponto. Ele introduziu os conceitos de "valores sucessivos" e "aproximação indefinida", os quais, embora sugestivos, careciam da precisão matemática esperada. Essa abordagem de Cauchy foi um passo importante na formalização do cálculo e permitiu que os matemáticos entendessem e manipulassem o conceito de limite de maneira mais rigorosa.

Segundo Reis (2001), a necessidade de maior rigor foi atendida no final do século XIX com os trabalhos de Richard Dedekind (1831-1916) e Giuseppe Peano (1858-1932). Dedekind introduziu os "Cortes de Dedekind", uma abordagem para construir os números reais a partir dos números racionais de maneira rigorosa e lógica. Ele demonstrou que os números reais podem ser definidos como conjuntos de números racionais que dividem o conjunto dos números racionais em duas partes, sem lacunas. Por outro lado, Giuseppe Peano formulou os "Axiomas de Peano", que são um conjunto de axiomas para os números naturais. Esses axiomas fornecem a base para a construção dos números naturais e, posteriormente, dos números inteiros, racionais e reais.

Esses desenvolvimentos permitiram a demonstração rigorosa dos teoremas fundamentais sobre Limite sem depender de recursos geométricos ou intuição. Em vez disso, a lógica matemática tornou-se a base para a compreensão e a demonstração desses conceitos matemáticos. Isso representou um avanço significativo na formalização e na fundamentação da matemática, criando uma base sólida para o desenvolvimento futuro da disciplina. Weierstrass enfatizou a importância da precisão matemática na definição de Limite, em contraste com a abordagem mais descritiva de Cauchy. Suas aulas influenciaram Heinrich Eduard Heine (1821-1881) a definir o limite de uma função de maneira mais precisa em seu trabalho "Elemente" de 1872, de acordo com Boyer (1974, p. 411).

Heine, aluno de Weierstrass na Universidade de Berlim, definiu formalmente limite, em "$f(x)$ tem limite L com x tendendo a x_0 significa que dado qualquer ε > 0, existe δ > 0 tal que se $0 < |x - x_0| < \delta \rightarrow f(x) - L < \varepsilon$" (Amorim, 2011, p. 35).

3.1. Justificativa

Lima (2015) salienta a preocupação com a falta de continuidade e conexão entre os conteúdos de matemática ministrados nos níveis secundário (ensino médio) e universitário, especialmente no que diz respeito à disciplina de Cálculo Diferencial. A ausência de uma transição clara entre esses níveis educacionais resulta em desafios significativos no processo de ensino e aprendizagem para os estudantes que enfrentam essa transição, em muitos currículos de licenciatura em matemática já aparecem disciplinas para estabelecer esse elo, algumas denominam-se Pré-Cálculo ou Matemática Básica.

Diante dessa problemática, a Universidade Federal de Pelotas (UFPEL) oferece uma estratégia pedagógica para auxiliar aos alunos ingressantes, que além das disciplinas regulares do curso, existe um grupo de apoio em matemática conhecido como GAMA[2]. Este projeto é uma iniciativa da Universidade Federal de Pelotas (UFPel) que visa apoiar os estudantes em disciplinas de Matemática, com o objetivo de reduzir a evasão e reprovação nessas disciplinas. O qual oferece aulas de nivelamento, plantões de dúvidas, simulados, materiais de estudo e acompanhamento pedagógico, procura fortalecer as bases necessárias para o acompanhamento das disciplinas. O projeto promove a integração entre estudantes e professores, estimulando a participação ativa dos alunos em seu processo de aprendizagem e fornecendo suporte técnico e pedagógico quando necessário. É uma iniciativa importante para promover a qualidade do ensino de Matemática e contribuir para o sucesso acadêmico dos estudantes na UFPel. Ainda mais que estudos mostram, de acordo com Domingos (2003) e Lima (2015), esta disciplina tende a ter um elevado índice de reprovação.

[2] https://wp.ufpel.edu.br/projetogama/justificativa/

Um estudo inicial conduzido por Mevs et al. (2023) na Universidade Federal de Pelotas, visou analisar o desempenho dos alunos nas edições mais recentes do Exame Nacional da Desempenho dos Estudantes[3] (Enade). Os autores destacaram que, ao finalizarem o curso de licenciatura em matemática, os estudantes ainda enfrentam desafios em CDI, segundo eles

> Refletindo apenas os resultados apresentados pelas escolhas das alternativas de maneira coletiva, o Enade nos leva a pensar de maneira geral que o aluno, ainda não assimilou adequadamente o conceito definição, para construir um conceito imagem próxima do ideal. Mesmo destacando o resultado dos concluintes da modalidade integral na questão 12, onde mais da metade dos seus alunos respondendo corretamente à questão, essa que explorava o conceito de limite, tivemos nossa curiosidade aguçada sobre como os futuros profissionais da educação da UFPel conseguem definir o conceito de Limite. (Mevs et al, 2023, p. 53)

De acordo com Mevs et al. (2023) embora os estudantes tenham demonstrado um desempenho relativamente melhor no conceito de limite, especialmente os alunos que realizam o curso de Licenciatura em Matemática Integral da UFPEL, esse resultado ainda não foi satisfatório. É importante salientar que a dificuldade manifestada pelos alunos no entendimento de Limite pode influenciar negativamente seu desempenho em outros conceitos relacionados ao cálculo diferencial e integral que envolve o tema de limite.

3.2. Questão Investigativa

Como, na perspectiva do pesquisador, os alunos concluintes do curso de licenciatura em matemática da UFPEL caracterizam sua compreensão a respeito do conceito de limite?

3.3. Objetivo geral

Mapear as percepções sobre o conceito de limite, confrontando-os com as definições formais almejadas, a fim de promover uma reflexão sobre o processo de construção do conhecimento matemático ao longo da formação acadêmica.

---

[3] Enade - É uma das ferramentas de avaliação dos cursos superiores no sistema federal de educação superior.

3.3.1. Objetivos Específicos

- Analisar os “conceitos imagens” que os alunos dos cursos Integrais e Noturnos de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Pelotas possuem.
- Estabelecer uma relação do conceito imagem possuído pelo estudante com a definição formal de limite que se espera ter sido compreendida ao final do curso à luz da teoria dos três mundos de David Tall.

4 REVISÃO DE LITERATURA

É fundamental conhecer as pesquisas já realizadas, e isso nos permitiu entender o contexto atual do conhecimento de CDI, quais questões já foram abordadas e quais abordagens foram utilizadas. Além disso, conhecer essas pesquisas nos ajudou a identificar lacunas no conhecimento, áreas pouco exploradas ou questões que ainda não foram respondidas satisfatoriamente. Essas lacunas representam oportunidades para novas investigações e descobertas.

A fim de encontrar artigos que inspirasse o rumo que daríamos a pesquisa utilizamos o site ResearchGate e o Portal de Periódicos da Capes, e posteriormente a Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD) como fontes de pesquisa. Tínhamos como ponto de partida a aprendizagem de Limite, porém ainda estávamos explorando o campo e identificando quais abordagens proporcionariam maiores êxitos.

Como ponto de partida foi sugerido o artigo de Silva (2023) que traz como referenciais teóricos Borel, Poincaré, Klein e Tall, o artigo é resultado de pesquisas sobre o ensino de limite, no período de 1940 à 1970 e que identifica coleções de livro que neste período eram utilizados para o ensino de cálculo no ensino secundário, já que no dado intervalo de tempo fazia parte da Base Nacional Comum Curricular. O trabalho instiga a curiosidade de entender o motivo pelo qual não consta mais na BNCC, mas tem como foco principal analisar como era aplicado cálculo diferencial e integral para esses estudantes brasileiros.

Tendo como base a teoria dos três mundos de Tall (2013) que consiste no pensamento matemático dividido em três estágios: corporificado, simbólico e formal (esta teoria será esclarecida no capitulo cinco). Este foi usado para compreender a concepção de CDI com que cada autor aborda o assunto, possivelmente influenciado pela sua experiência didática.

A autora explica que, tendo em vista as abordagens contidas nos livros, é possível notar que apenas um autor utilizou a abordagem formal, os demais mesclaram entre os três mundos. Suas abordagens não são tão discrepantes das que se aplicam hoje em dia, porém fica a cargo do professor fazer com que esse conteúdo se torne familiar, já que ele não surgiu do mero acaso, mas foi instrumento para resolver problemas reais.

Por meio deste artigo a teoria dos três mundos tornou-se de grande interesse para a pesquisa, então buscar uma relação entre elas foi crucial para a construção da questão que viemos apresentar neste trabalho. No site ResearchGate, encontramos um artigo intitulado "O conteúdo de Limite em cursos de Licenciatura em Matemática: Uma pesquisa à Luz da Teoria dos Três Mundos da Matemática" (Soares; Cury, 2017), que indicava uma proximidade com a relação entre Limite e a teoria dos três mundos de Tall.

Soares e Cury (2017) procuram analisar como é aplicado o conceito de limite de uma função, bem como as estratégias de resolução adotadas pelos profissionais de ensino, já que tudo começa com uma boa base de função.

Os autores realizaram uma pesquisa de caráter qualitativo, com 14 alunos de curso de licenciatura que já haviam concluída a disciplina de Calculo I. Para estes, foram feitas 12 perguntas dissertativas, cujos resultados foram gravados e escritos. Inicialmente foram analisados os Projetos Políticos Pedagógicos de cada um dos cursos de Licenciatura em Matemática. Após seguiram-se duas análises: Primeiro sobre quais características de aprendizado se relacionam com a teoria dos três mundos e segundo foi aplicado um teste para identificar como o estudante caracterizava a fim de comparar com a teoria referida. O teste aplicado consistia em questões voltadas a como o aluno compreendia o conceito de limite, sua representação e aplicabilidade. Foi também realizada uma entrevista com os docentes que ministram essas aulas com o propósito de investigar como ocorria o trabalho em sala de aula com os livros usados e a aprendizagem dos estudantes.

Mediante o estudo realizado, os autores verificaram que os estudantes ainda não conseguiam completar seu estudo de modo a dominar a teoria dos três mundos, ou seja, corporificar, simbolizar e formalizar o conhecimento de limite.

Ambos os artigos (Silva, 2023) e (Soares; Curry, 2017) forneceram uma clareza de qual referencial teórico faria parte desta pesquisa e a relevância da resposta de nossa questão que, inicialmente, era “Será que os futuros profissionais da educação conseguem definir o conhecimento de limite, considerados por Tall um conceito teórico avançado?”.

Para refinar nossa pergunta, que ainda era muito abrangente, e explorar trabalhos já concluídos, realizamos uma busca de artigos no Portal de Periódicos.

Os resultados dessa busca estão expressos na Tabela 1. No Quadro 1, descrevemos os artigos selecionados com base nas palavras-chave utilizadas.

Tabela 1 - Portal de Periódicos CAPES

Palavra Chave	Artigos encontrados	Artigos Selecionados
Aprendizagem de cálculo diferencial	21	2
Ensino de cálculo Diferencial e Integral	30	1
Conceito de cálculo diferencial e integral	67	2
Concepts of continuity and limits	96	1

Fonte: Dados da Pesquisa, 2024

Quadro 1 - Portal de Periódicos CAPES

Título dos Artigo	Autor (es)	Revista	Ano / Volume / Nº
Desempenho acadêmico em cálculo diferencial e integral: um estudo de caso.	Chaiane de Medeiros Rosa; Karly Barbosa Alvarenga; Fabiano Fortunato Teixeira dos Santos.	Revista Internacional de Educação Superior	2019 / Volume 5 /
Ensino e aprendizagem de cálculo: explorando os três mundos da Matemática	Rafael Winícius da Silva Bueno; Lori Viali.	Olhar de Professor	2021 / Volume 21 /
Análise da produção escrita de estudantes do ensino superior: uma abordagem semiótica	Victor Hugo dos Santos Gois; Karina Alessandra Pessoa da Silva; Jader Otavio Dalto	Alexandria	2019 / Volume 12 / n. 1
O ensino de cálculo diferencial e integral sob a óptica da teoria dos campos conceituais	Tailon Thiele; Eliane Miotto Kamphorst; Carmo Henrique Kamphorst.	Revista Brasileira de Ensino de Ciências e Matemática	2018 / Volume 1 / n. 2
Ensino e aprendizagem de cálculo i em cursos de	Elcimar Simão Martins; Damião	Boletim Cearense de Educação e	2018 / Volume 3

licenciatura	Júnio Gonçalves Araújo; Rodolfo Ferreira de Oliveira.	História da Matemática	/ n. 9
A cognitive analysis of Cauchy's conceptions of function, continuity, limit and infinitesimal, with implications for teaching the calculus	David Tall; Mikhail Katz	Educational studies in mathematics	2014 / Volume 86 / n. 1

Fonte: Dados da Pesquisa, 2024

Os artigos revisados exploram diferentes abordagens teóricas e práticas relacionadas ao ensino e aprendizagem de CDI. Esses estudos oferecem uma visão abrangente sobre os desafios e possibilidades no ensino de Cálculo Diferencial e Integral, enfatizando a necessidade de abordagens pedagógicas inovadoras e contextualizadas para melhorar a compreensão e o desempenho dos estudantes.

Realizamos também uma pesquisa no site da Biblioteca Brasileira de Tese e Dissertações (BDTD), entre os meses Março à Junho, em busca de teses e dissertações que pudessem dar maior sustentação ao que iremos pesquisar, na qual os resultados na Tabela 1 exprimem as pesquisas já realizadas e as selecionadas para leitura, a fim de servir como ponto de partida do trabalho que pretendemos realizar.

Tabela 2 - Pesquisa na BDTD

Palavras chave	Dissertações encontradas	Dissertações selecionadas	Teses encontradas	Teses selecionadas
Aprendizagem de cálculo diferencial	27	3	20	2
Conceitos de matemática avançada	4	0	7	1

Ensino de cálculo I no ensino superior	12	1	4	0

Fonte: Dados da Pesquisa, 2024

O quadro a seguir fornece maiores informações referente às dissertações e teses selecionadas.

Quadro 2 - Dados da BDTD

Título	Autor	PPG	IES	D/T	Ano	Orientador
Discutindo algumas relações possíveis entre intuição e rigor e entre imagem conceitual e definição conceitual no ensino de limite e continuidade em Cálculo I.	Osvaldo Honório de Abreu	Educação Matemática	UFOP	D	2011	Frederico da Silva Reis.
A (re) construção do conceito de limite do cálculo para a análise: um estudo com alunos do curso de licenciatura em matemática	Lílian Isabel Ferreira Amorim	Educação Matemática	UFOP	D	2011	Frederico da Silva Reis.
Um panorama de artigos sobre a aprendizagem do cálculo diferencial e integral na perspectiva de David Tall	Márcio Vieira de Almeida	Educação Matemática	PUC/SP	D	2013	Sonia Barbosa Camargo Igliori

Título	Autor	PPG	IES	D/T	Ano	Orientador
Concepções sobre limite: imbricações entre obstáculos manifestos por alunos do Ensino Superior	Marcos Roberto Celestino	Educação Matemática	PUC/ SP	T	2008	Benedito Antonio Da Silva
O conceito de Limites em cálculo: obstáculos e dificuldades de aprendizagem no contexto do ensino superior de matemática	Jorge Costa do Nascimento	Psicologia Cognitiva	UFPE	T	2003	Jorge Tarcísio da Rocha Falcão
Contribuições das representações semióticas para compreensão de conceitos fundamentais para o cálculo diferencial e integral por alunos de um curso de licenciatura em matemática	Vânia Bolzan Denardi	Ensino de Ciências e Matemática	UFN	T	2019	Eleni Bisognin
Um estudo sobre as implicações dos obstáculos epistemológicos de limite de função em seu ensino e aprendizagem	Mônica Suelen Ferreira de Moraes	Educação em Ciências e Matemáticas	UFP	D	2013	Maria José de Freitas Mendes

Fonte: Dados da Pesquisa, 2024

Esclarecemos que ao utilizar a palavra chave “pensamento da matemática avançada”, nos baseamos em Tall (1991 e 1995) que discorre sobre o pensamento da matemática avançada na perspectiva da aprendizagem do cálculo, especificamente pensando no conceito de limite. Tall (1991) descreve diferentes percepções e desafios no ensino e aprendizado de matemática, especialmente em relação aos conceitos de limite e ao uso do computador no desenvolvimento do pensamento matemático avançado.

A primeira impressão sugere que muitos alunos veem a matemática simplesmente como um meio de encontrar respostas. Isso pode levar a uma abordagem superficial, onde o foco está em resolver problemas e obter resultados, sem uma compreensão mais profunda dos conceitos por trás deles. A segunda aponta para uma abordagem onde a matemática é vista como a manipulação de símbolos. Nesse caso, os alunos podem se concentrar apenas em realizar cálculos e seguir procedimentos sem realmente entender o significado ou a lógica por trás deles. E a terceira destaca os desafios associados ao conceito de limite na matemática. Nesta muitos alunos têm dificuldade em compreender o limite como um conceito abstrato, e em vez disso, tendem a vê-los como processos incompletos ou intermináveis de cálculo. Isso pode dificultar a compreensão e a aplicação eficaz de conceitos relacionados a limite. Sendo assim Tall (1991) afirma a necessidade de repensar os símbolos matemáticos como conceitos ao longo do ensino da matemática elementar. À medida que os alunos avançam, a compreensão desses símbolos se torna mais complexa, e muitos alunos podem enfrentar dificuldades em conectar ideias de maneira conceitual, recorrendo à aprendizagem mecânica de procedimentos para obter respostas. Sugere-se que o computador pode ser uma ferramenta útil nesse processo, mas é importante considerar que ele deve ser utilizado de forma eficaz para promover o desenvolvimento cognitivo dos alunos, especialmente dada a diversidade de seus níveis de desenvolvimento cognitivo ao ingressarem na universidade.

Tall (1995) descreve então a natureza do pensamento matemático avançado e o processo de desenvolvimento cognitivo associado a ele de forma que o pensamento matemático avançado não surge isoladamente, mas é construído sobre as estruturas cognitivas desenvolvidas através de várias atividades matemáticas ao longo do tempo. Isso inclui resolver problemas, compreender conceitos, fazer conexões entre diferentes áreas da matemática, entre outros. Além disso ele envolve a criação de novas ideias que não apenas se baseiam nos teoremas e resultados matemáticos já estabelecidos, mas também os estendem. Isso pode incluir a generalização de resultados existentes, a aplicação de conceitos conhecidos em novos contextos, ou o desenvolvimento de teoremas completamente novos. Ocorre um processo pelo qual o pensamento matemático evolui de uma forma mais básica e concreta para uma forma mais avançada e abstrata. Este processo desenvolve-se ao longo do tempo à medida que os indivíduos ganham experiência e conhecimento em matemática, isto é, quando os indivíduos começam a entender e interagir com conceitos matemáticos por meio de experiências concretas e manipulações físicas de objetos reais.

Para o autor, o crescimento cognitivo no pensamento matemático envolve dois caminhos de desenvolvimento paralelos. Um envolve a capacidade de visualizar e manipular imagens mentais, enquanto o outro envolve a capacidade de raciocínio lógico e dedutivo, muitas vezes expresso verbalmente.

Para Tall, no estágio avançado do pensamento matemático, os indivíduos são capazes de usar todas as habilidades e conhecimentos adquiridos para criar novas ideias e abordagens criativas para resolver problemas matemáticos. Isso envolve a aplicação de conceitos matemáticos formalmente definidos e a utilização de métodos sistemáticos de prova para justificar essas ideias é conseguir interpretar de maneira reflexiva os conceitos na sua formalidade. Em suma, o pensamento da matemática elementar envolve tudo o que é construído cognitivamente no mundo corporificado e simbólico, no pensamento da matemática avançado, ele está associado ao mundo do formalismo e a relação que é possível estabelecer com os outros mundos.

Sendo considerada parte do pensamento da matemática avançada, o Ensino do Cálculo Diferencial e Integral tem começado a ser objeto de estudos por alguns autores. Essas pesquisas indicam a dificuldade dos alunos em expressar de maneira adequada os conceitos relacionados ao CDI, Abreu (2011) relata “resultados desanimadores, quando o foco das atividades exige rigor nas definições”. Este fato tem sido muito explorado pelos autores, devido a complexidade que esse tópico apresenta. Os alunos que não conseguem assimilar adequadamente as notações utilizadas para descrever o conceito de Cálculo acabam criando imagens conceituais incompletas, que podem ser úteis por um determinado momento, mas que quando confrontadas por conceitos que exigem maior rigor, acabam não conseguindo responder de maneira segura a tal problemática.

Nos trabalhos de Domingos (2003) e Amorim (2011), que discutem as imagens conceituais dos estudantes em relação ao conceito de limite em matemática, destacam que, mesmo os alunos que são considerados mais bem-sucedidos em suas representações conceituais, ainda encontram dificuldades em incluir todos os quantificadores necessários para definir adequadamente o conceito de limite.

Essa observação sugere que, apesar de alguns alunos demonstrarem um entendimento aparentemente sólido do conceito de limite em suas imagens mentais, ainda há lacunas ou falhas na compreensão detalhada do conceito, especialmente no que diz respeito à inclusão de todos os quantificadores relevantes. Isso pode indicar desafios persistentes no ensino e na aprendizagem desse conceito matemático específico, que podem exigir abordagens pedagógicas mais refinadas e estratégias de ensino mais eficazes para superar.

Dubinsky et al. (1988, p.44) destacam a importância da compreensão da quantificação na aprendizagem de conceitos matemáticos, particularmente em limite e continuidades, na perspectiva de Cornu e Ralston. Os autores afirmam que Cornu sugere que a falta de compreensão da quantificação é uma barreira significativa para os estudantes desenvolverem uma compreensão avançada de limite e continuidade. Isso significa que, se os alunos não conseguem entender e manipular quantificadores, como "para todo" e "existe", eles podem enfrentar dificuldades em compreender os conceitos de limite e continuidade de maneira completa e sofisticada.

Por outro lado, o autor explica que Ralston expressa uma opinião de que a quantificação é uma habilidade difícil para os estudantes dominarem nos primeiros anos da universidade. Isso sugere que a compreensão e o uso efetivo de quantificadores requer um nível mais avançado de desenvolvimento cognitivo e domínio de habilidades matemáticas, o que pode não ser atingido pelos estudantes nos estágios iniciais de sua educação universitária.

Se ambas as perspectivas de Cornu e Ralston estiverem corretas, explicam os autores, isso poderia ajudar a explicar a razão dos alunos muitas vezes enfrentarem dificuldades em entender o CDI e uma variedade de outros tópicos matemáticos. A falta de compreensão da quantificação pode ser uma barreira fundamental que impede o progresso dos alunos em conceitos mais avançados de matemática, como os encontrados no CDI e em outros tópicos relacionados.

Os artigos, dissertações e teses revisados são unânimes ao declarar a importância da assimilação das definições apresentadas para o conceito de limite. Domingo (2003) explica que a aprendizagem do conceito de limite não é uma tarefa fácil devido à complexidade intrínseca do conceito e às ideias pré-existentes que os alunos trazem para a sala de aula. Antes mesmo de ser ensinado formalmente, os alunos já possuem uma série de ideias, intuições e imagens sobre como os números e as funções se comportam, baseadas em suas experiências cotidianas.

Essas ideias prévias podem ser influenciadas por situações comuns, como contagens, medições e observações do mundo ao seu redor. No entanto, essas intuições nem sempre correspondem aos conceitos matemáticos formais. Por exemplo, os alunos podem ter dificuldade em compreender como uma função pode se aproximar de um valor sem nunca realmente atingi-lo, ou como uma sequência de números pode tender a um valor específico sem nunca alcançá-lo.

Além disso, o conceito de limite muitas vezes envolve noções abstratas e técnicas matemáticas que podem ser desafiadoras para os alunos entenderem e aplicarem corretamente. Requer uma mudança de perspectiva e a capacidade de pensar de forma mais formal e precisa sobre o comportamento das funções e das sequências.

Portanto, a aprendizagem do conceito de limite é uma jornada cognitivamente exigente para os alunos, que requer não apenas instrução cuidadosa por parte dos professores, mas também um processo ativo de reconstrução e reestruturação das ideias prévias dos alunos para se alinharem com os conceitos matemáticos formais.

5 REFERENCIAL TEÓRICO

Segundo Santos et al (2021), Lev Vygotsky foi um psicólogo judeu russo, que faleceu aos 37 anos de tuberculose e autor de muitos trabalhos científicos, sendo um dos mais conhecidos no Brasil o livro "Pensamento e Linguagem". Ainda muito jovem, inicia seus estudos e observações, buscando compreender como se desenvolve o pensamento humano e quais os caminhos que se percorre para uma aprendizagem significativa.

Suas teorias, até hoje, inspiram pesquisadores que buscam compreender o desenvolvimento da aprendizagem de um indivíduo. Vygotsky entendia que o aprendizado não acontecia isoladamente e independente do contexto social, mas pelo contrário, seus estudos apontavam que a construção do conhecimento se dava por meio das interações sociais.

Para ele, ainda que uma pessoa biologicamente tenha um potencial a desenvolver, este só poderá ser alcançado mediante sua relação com o outro, com o meio e sua cultura, essa é uma das maiores diferenças entre Piaget e Vygotsky, pois para o primeiro se uma criança é colocada sozinha com um objeto, ela aprenderá sozinha sobre seu funcionamento, no entanto para o segundo ela necessitará de alguém, algo ou de questões culturais que a ajude descobrir como o objeto funciona. Suas ideias possuem quatro conceitos elementares: interação, mediação, internalização e zona de desenvolvimento proximal.

Vygotsky (2001) explica que a interação é o processo fundamental pelo qual o aprendizado e o desenvolvimento cognitivo ocorrem, sendo mediado pelo ambiente social e pela linguagem. Para ele, o conhecimento não é construído de forma isolada, mas sim por meio da interação do indivíduo com outras pessoas mais experientes, como professores, colegas e familiares.

A mediação "estabelece uma ligação, o signo, a atividade e a consciência interagem socialmente" (Zanolla, 2012, p. 5). O indivíduo ou meio facilitará o estabelecimento das relações necessárias para que a aprendizagem ocorra.

A internalização "compreende o momento em que o aprendizado se completa, ao refletir sobre o nome e o significado do objeto" (Santos, 2021, p.8). Este acontece quando o indivíduo conseguiu fazer as assimilações necessárias e compreendeu o que lhe foi proposto.

As zonas de desenvolvimentos de acordo com Vygotsky (2007, *apud* Santos (2021, p. 8-9)

> estão divididas em três categorias: nível de desenvolvimento real, que se refere às etapas já alcançadas pelo indivíduo e que permitem que ele solucione problemas de forma independente; nível de desenvolvimento potencial, ou seja, a capacidade que o indivíduo tem de desempenhar tarefas desde que seja mediado; e zona de desenvolvimento proximal, que é a distância entre os níveis de desenvolvimento real e potencial, ou seja, o caminho a ser percorrido até o amadurecimento e a consolidação de funções superiores.

Como referência na compreensão do pensamento e desenvolvimento cognitivo buscamos dialogar com David Orme Tall[4], pois este iniciou pesquisas em CDI e estudou sobre limite e continuidade, caminho que o levou a teoria dos três mundos.

Tall (1976), baseia-se no modelo matemático de René Thom e descreve a Teoria da Catástrofe como mudanças bruscas que podem ocorrer em processos contínuos. Ele aplica essa teoria ao aprendizado matemático, argumentando que a transição entre diferentes níveis de compreensão pode envolver momentos de ruptura conceitual, nos quais um estudante pode experimentar dificuldades abruptas ao tentar avançar para um pensamento mais abstrato. Essas "catástrofes cognitivas" ocorrem quando há conflito entre estruturas mentais anteriores e novas abordagens conceituais.

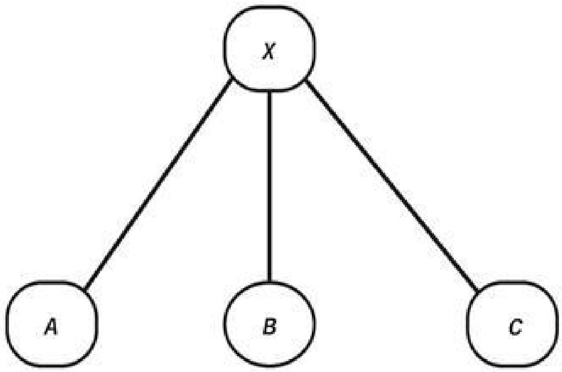
Partindo da teoria da catástrofe[5] e tomando o devido cuidado ao aplicá-la na matemática, especificamente ao CDI, Tall (1976) construiu o esquema da figura 2, onde “se o conceito X estiver acima dos conceitos A, B, C, pode-se interpretar que antes que se possa compreender X é essencial compreender A, B, C” (Tall, 1976, p. 14, tradução).

---

[4] Professor Emérito que estudou o pensamento matemático avançado na Universidade de Warwick, Inglaterra

[5] Fenômenos com variações suaves e em algum momento quebra súbita de comportamento (René Thom)

Figura 2 - Primeiro Esquema de Conhecimento Matemático



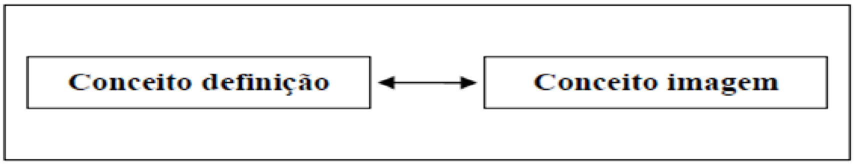
Fonte: Tall (1976, p.14)

Essa primeira estrutura foi sendo aperfeiçoada, por meio de trabalhos conjuntos com Michael Thomas e Eddie Gray visando conceitos aritméticos, algébricos e de cálculo, e também por meio de um software de computador projetado para visualizar a ideia de cálculo. Compartilhando suas pesquisas com Shlomo Vinner, ele incorporou as ideais de conceito imagem e conceito definição daquele autor.

O conceito imagem “descreve a estrutura cognitiva total que é associada ao conceito” (Domingos, 2003, p. 34), enquanto “Tall considera que o conceito definição não é mais do que uma parcela do conceito imagem total que existe na nossa mente” (Domingos, 2003, p.34). Podemos dizer então que o conceito imagem engloba as representações mentais, intuições, experiências pessoais, exemplos e até mesmo concepções incorretas que um indivíduo associa ao conceito.

A Figura 3 exemplifica a visão de Tall e Vinner sobre a relação entre conceito imagem e conceito definição, mostrando a reciprocidade entre os dois conceitos. Eles afirmam que se a construção do conceito imagem for precisa e formalizada, a aprendizagem tende a ser facilitada, caso contrário o aluno não conseguirá fazer as relações apropriadas para questões mais complexas.

Figura 3 - Ação recíproca entre conceito imagem e conceito definição.



Fonte: Domingos (2003, p. 29)

Tall e Vinner (1981) diferem em alguns aspectos em sua ideia de conceito imagem, sobre isso autor escreveu posteriormente

> A definição de Shlomo foi baseada filosoficamente e foi um experimento mental para analisar o que acontece quando os alunos se concentram de maneiras diferentes em imagens e definições. Minha percepção era mais humanamente baseada, de modo que onde Shlomo falava sobre “a mente” e pensava nela como separada do “cérebro” num sentido cartesiano, Sempre pensei nisso como um fenômeno físico no cérebro. (Tall, 2003, tradução nossa)

Em suas analises Domingos (2003) sentiu a necessidade de criar para o conceito imagem subcategorias para melhor identificar como os sujeitos de sua pesquisa compreendiam conceitos fundamentais do ensino superior em matemática, entre esses conceitos estava o conceito de limite de uma função, objeto do nosso estudo.

O objetivo de estabelecer esses níveis foi compreender as diferenças no modo como os alunos internalizam conceitos matemáticos e destacar que esses níveis podem coexistir na mente de um único aluno: no ensino de um conceito, diferentes alunos podem apresentar níveis variados de conceitos imagem, desde aqueles mais próximos da matemática elementar até os que demonstram um entendimento mais abstrato e avançado, o termo abstrato e avançado aqui está no sentido de mais próximo do conceito definição.

Explicaremos a seguir cada uma dessas subcategorias exploradas por Domingos (2003):

O conceito imagem incipiente reflete um entendimento inicial e rudimentar dos conceitos matemáticos, esse nível é mais característico de quem ainda está vinculado à matemática elementar. Apresenta uma compreensão limitada e, muitas vezes, dependente de intuições simplistas, um aluno com um conceito imagem incipiente pode depender de exemplos concretos e cálculos específicos.

Além disso, os alunos frequentemente recorrem à “memorização e ao ventriloquismo matemático” (Domingos 2003, p. 133) – ou seja, repetem propriedades e definições sem compreender plenamente seus significados, o que torna-se um obstáculo para aprofundar seu conhecimento e manipular conceitos de maneira flexível e autônoma.

O conceito imagem instrumental envolve um nível intermediário de compreensão matemática, no qual os alunos utilizam alguns objetos matemáticos, mas sem coordená-los de forma eficiente para formar novos conceitos. Embora avancem em relação ao nível mais básico, eles ainda não conseguem tratá-los como objetos autônomos, mas apenas como um conjunto de processos ou procedimentos operacionais que precisam seguir mecanicamente.

O pensamento matemático deles é predominantemente operacional, baseado em procedimentos, sem uma visão estrutural mais profunda. Algumas propriedades elementares são compreendidas, mas conceitos mais complexos são tratados apenas como processos a serem seguidos. Assim, mesmo quando conseguem representar partes de um conceito matemático simbolicamente, não atribuem a ele o significado esperado.

Esse nível de compreensão permite certo sucesso acadêmico, mas sem uma consolidação completa dos conceitos. A principal dificuldade está na falta de coordenação entre processos já aprendidos, impedindo que os alunos os transformem em unidades matemáticas completas e interligadas.

Neste nível relacional o conceito é visto pelos alunos como objetos estruturais, independentes dos processos que os originaram. Eles conseguem conectar representações algébricas e gráficas, em vez de ver um conceito apenas como um conjunto de operações a serem realizadas passo a passo, o aluno passa a enxergá-lo como uma entidade independente, sobre a qual pode raciocinar e operar sem precisar recorrer sempre aos detalhes do processo que a originou, embora a compreensão total deste conceito nem sempre ocorra espontaneamente.

A tradução entre representações melhora, mas conceitos avançados, como quantificadores, ainda podem gerar dificuldades. O pensamento proceptual [6] se fortalece, permitindo alternância entre processos e objetos matemáticos, embora a interpretação completa de símbolos formais ainda seja um desafio.

---

[6] O pensamento proceptual é um conceito introduzido por Gray e Tall (1994) para descrever a habilidade de alternar entre processos matemáticos (cálculos, manipulações) e objetos matemáticos (conceitos, representações simbólicas) de forma fluida.

Neste os alunos demonstram maior autonomia e profundidade na compreensão matemática, mas alguns conceitos abstratos ainda exigem mediação externa para total assimilação.

Esses diferentes níveis de compreensão refletem a complexidade do pensamento matemático em formação e a distinção entre conceitos imagem incipiente, instrumental e relacional permite uma análise mais aprofundada das formas como os alunos constroem o conceito de limite; Domingos (2003. p.129) explica que “estes níveis foram estabelecidos com base na criação de metacategorias retiradas das categorias formadas a partir dos dados”.

Em resumo, o conceito imagem incipiente reflete um entendimento inicial e rudimentar dos conceitos matemáticos, esse nível é mais característico de quem ainda está vinculado à matemática elementar e apresenta uma compreensão limitada e, muitas vezes, dependente de intuições simplistas.

O conceito imagem instrumental Indica um progresso no aprendizado, com os alunos sendo capazes de utilizar procedimentos e técnicas para resolver problemas, porém, sua compreensão pode ser limitada a um uso prático ou mecanicista, sem uma visão ampla ou conectada do conceito.

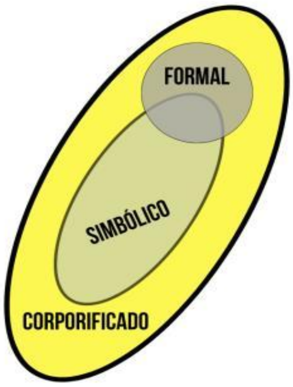
E o conceito imagem relacional representa o nível mais avançado de compreensão, onde os alunos nesse nível conseguem integrar e relacionar diferentes aspectos dos conceitos matemáticos, alcançando uma visão global e profunda, próxima ao conceito definição.

Posteriormente, Tall formulou a Teoria dos Três Mundos, onde ele estruturou o pensamento matemático do nível inicial até o avançado, em que cada fase relaciona-se entre si. Tall destaca três maneiras diferentes pelas quais o pensamento matemático se desenvolve, sendo elas: corporificação conceitual, simbolismo operacional e formalismo axiomático.

- O corporificado envolve o estudo de objetos e suas propriedades, levando a imagens mentais descritas em linguagem cada vez mais sutil.
- O operacional ou simbólico surge de ações que são simbolizadas e se desenvolvem em operações em aritméticas e algébricas comprimidas em objetos mentais como números e expressões algébricas, que podem ser usadas para formular e resolver problemas usando simbolismo operacional.

- O formalismo axiomático é a forma de conhecimento matemático que floresce na abordagem formal da matemática pura encontrada na universidade.

Figura 4 - Matemática formal baseada no pensamento corporificado e simbólico.



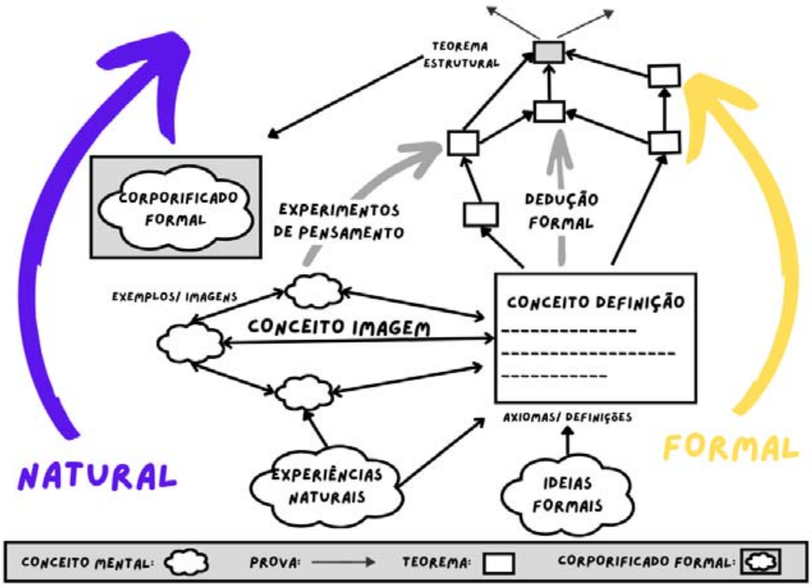
Fonte: Tall (2007, p.1) - Traduzida pela autora

O autor explica que

> cada mundo tem seu próprio desenvolvimento de argumento dedutivo. Por exemplo, no mundo corporificado, podemos ver que a adição é comutativa ao reorganizar 5 objetos como 3+2 ou 2+3. No mundo simbólico, uma criança pode calcular que as duas somas dão a mesma resposta. No mundo formal, x + y = y + x é verdadeiro porque é um axioma. (Tall, 2007, p. 2, tradução nossa).

Tendo em vista essa representação e os estudos analisados por Tall, ele percebe então que esses três mundos se relacionam entre si, conforme pode ser observado na Figura 5.

Figura 5 - Do corporificado ao formalismo e vice-versa



Fonte: Tall (2007, p.9, tradução nossa)

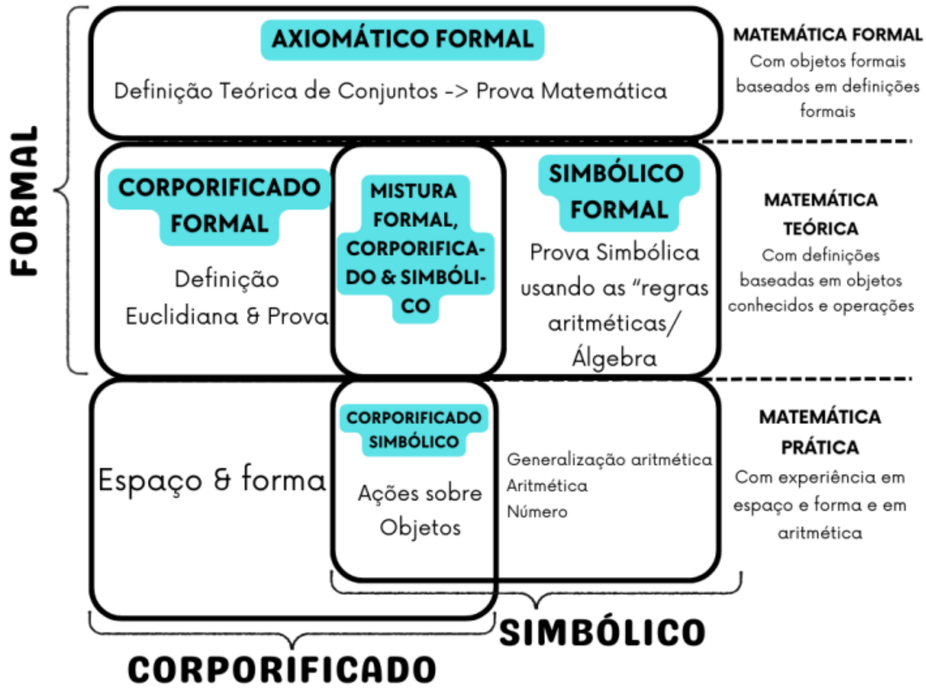
Tall (2007, p.15, tradução nossa) destaca que

> Os matemáticos profissionais dependem da corporificação e do simbolismo para inspirar a sua escolha de teoremas para provar e usar manipulações simbólicas nas suas provas. Por outro lado, os teoremas da estrutura podem levar de volta à corporificação e ao simbolismo. No entanto, os alunos que estão aprendendo sobre a prova formal utilizam sua experiência anterior de maneiras diferentes. Alguns baseiam-se na sua experiência corporificada de uma forma natural para dar significado à teoria formal e alguns deles são bem sucedidos.

Deste modo em seu livro “How Humans Learn to Think Mathematically” David Tall (2013) explora ainda mais a teoria dos três mundos e as relações que estas estruturas podem fornecer ao aplicá-la ao pensamento matemático.

O autor destaca na figura 6 as nomenclaturas que considerou apropriadas para relacionar os mundos corporificado, operacional e axiomático.

Figura 6 - Matemática prática, teórica e formal



Fonte: Tall (2013, p. 403, tradução nossa)

Observamos, na figura 6, os pares de palavras que o autor utilizou para expressar a relação que foi observado entre os três mundos, o mesmo ressalta a importância de esclarecer que o termo formal não está sendo empregado com o sentido de rigor, mas com uma certa flexibilização. Sendo assim ele considera que "a transição pode ser realizada de maneira 'natural', com base em experiências de corporificação e simbolismo, ou de maneira 'formal', com foco na lógica das definições da teoria dos conjuntos" (Tall 2013, p.17, tradução nossa).

Para elucidar essa proposta, Tall (2013) apresenta um estudo realizado por Márcia Pinto (1998) com onze alunos do curso de Análise do Instituto de Educação e do Departamento de Matemática na Universidade de Warwick. Pinto (1998) descreve

> The main study is designed to follow students within a spectrum of performance during their first two terms at university, as they progressed in studying mathematical analysis. It involved students from the Institute of Education and from the Mathematics Department, contrasting the development of students of different mathematical abilities. The emphasis is on commonalities versus striking individual differences which may occur in students' strategies when building knowledge which may or may not lead to success. (Pinto, 1998, p. 49)

A autora enfatiza que o objetivo principal do estudo é destacar as semelhanças e diferenças individuais marcantes que podem ocorrer nas estratégias dos estudantes ao construir conhecimento. Essas estratégias podem variar significativamente entre os alunos e podem ou não levar ao sucesso acadêmico. Ao examinar essas dinâmicas, o estudo visa fornecer *insights* sobre como os estudantes abordam e desenvolvem seu entendimento em análise matemática, com foco nas variações individuais de estratégias e resultados.

No presente estudo Tall (2013) entende que "conceito definição", engloba todas as imagens mentais associadas a um conceito, incluindo suas propriedades e processos relacionados. O destaque está na necessidade de incluir não apenas representações visuais ("imagens"), mas também o simbolismo presente tanto na prática quanto na teoria da matemática. O que nos leva a entender que o conceito definição é alcançado quando o estudante constrói o conhecimento manipulando os três mundos, ou seja, sabendo no caso de limite fazer sua representação por meio de imagens e símbolos, suas aplicações, e descrevê-lo na linguagem formal.

De acordo com Tall (2013, p. 404), "a matemática escolar combina corporificação e simbolismo, revelando aspectos complementares das ideias matemáticas". Essa visão enfatiza que o aprendizado da matemática segue uma progressão contínua, que se inicia com experiências sensoriais durante a infância e avança, gradualmente, até o raciocínio abstrato dos matemáticos profissionais. Tall (2013) ressalta que o aprendizado matemático é um processo cumulativo e progressivo, no qual o conhecimento adquirido em etapas anteriores serve como base para a construção de novos conceitos. Assim, os conceitos matemáticos não são assimilados de forma isolada, mas integram um desenvolvimento contínuo, moldado por experiências prévias que influenciam diretamente a aprendizagem futura.

O autor ainda utiliza a abordagem natural para classificar os estudantes que constroem seu conhecimento por meio do mundo corporificado e simbólico e da abordagem formal, os que utilizam da definição formal para construir sua aprendizagem. Em suma, a compreensão matemática não se limita apenas a imagens visuais, mas também incorpora elementos simbólicos. Isso, por sua vez, influencia a categorização do desenvolvimento da prova, indicando a necessidade de considerar tanto abordagens naturais, baseadas em intuição e imagens mentais, quanto, abordagens formais que fazem uso da linguagem simbólica e dedução lógica.

Com essas teorias em mente, analisaremos os resultados obtidos buscando identificar quais os conceitos evocados pelos alunos, e como eles se relacionam com a teoria dos três mundos de David Tall.

6 METODOLOGIA

No estudo proposto realizamos uma pesquisa de cunho qualitativo, que tem como público alvo os alunos concluintes do curso de Licenciatura em Matemática no primeiro e segundo semestre de 2024 e primeiro semestre de 2025 da Universidade Federal de Pelotas nas modalidades Integral, Noturno e Ensino à Distância (EaD).

Considerando as revisões de leitura efetuadas, incluindo a análise do Projeto Pedagógico do Curso de Licenciatura em Matemática e os objetivos de nossa pesquisa, à principio planejamos nossos estudos dividindo-o em duas etapas.

Na primeira etapa à luz da teoria dos três mundos Tall (2013) e levando em conta o estudo conduzido por Pinto (1998), nosso objetivo é descrever o processo utilizado pelos estudantes para resolver quatro situações que exploram os conceitos de limite, a escolha dessas questões se deu na união da revisão de literatura, para saber quais questões já haviam sido utilizadas, estudo do projeto pedagógico do curso para saber as propostas do curso e buscamos nos livros utilizados pelo professor, segundo o projeto pedagógico, quais tipos questões eram abordadas, para que deste modo as questões pudessem gerar no aluno uma certa familiaridade. Isso foi feito com o intuito de responder às seguintes questões:

1. Calcule, caso exista o $\lim_{x \to 1} f(x)$ em que $f(x) \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & se\ x \neq 1 \\ 3 & se\ x = 1 \end{cases}$. Explique como você resolveu.
2. Calcule, caso exista o $\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$. Por que?
3. Prove que $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$.
4. Questão do Enade

Figura 7 - Questão 4 do Enade

Para calcular o limite $L = \lim_{x \to +\infty} \frac{-\operatorname{sen} x}{x}$, os argumentos podem ser desenvolvidos usando as desigualdades $0 \leqslant \left| \frac{\operatorname{sen} x}{x} \right| \leqslant \frac{1}{x}$, válidas para todo real $x > 0$.

A partir desses argumentos, conclui-se que L é igual a

(A) -1.
(B) 0.
(C) 1.
(D) ∞.
(E) $-\infty$.

Fonte: Avaliação Enade 2017

Com base nas respostas dos alunos, classificaríamos o desenvolvimento do pensamento matemático representado por cada um deles em grupos de 1 a 4. Os critérios de classificação para análise de cada grupo são os seguintes:

1. Corporificado: Utilizado por aqueles que conseguiram responder às questões por meio de representações visuais, sem a necessidade de símbolos matemáticos ou pouco uso deles.
2. Operacional: Empregado por aqueles que conseguiram responder à questão realizando cálculos matemáticos.
3. Corporificado e Simbolizado: Empregado por aqueles que conseguiram responder à questão utilizando gráficos ou representações visuais, ao mesmo tempo que usaram notações matemáticas.
4. Formalizado: Utilizado por aqueles que recorreram à definição formal para expressar a solução da questão.

De modo geral, nesta etapa, era esperado que o aluno demonstrasse sua compreensão formal do conceito de limite tanto em termos matemáticos quanto em sua interpretação intuitiva. Isso significa que ele seja capaz de expressar de maneira precisa como as funções se comportam em torno de pontos específicos e como o limite descreve esse comportamento.

Além disso, esperamos que os alunos expressem suas habilidades para calcular limite utilizando diferentes técnicas, como substituição direta, fatoração e racionalização, entre outras. Eles também devem demonstrar familiaridade com teoremas importantes relacionados a limite, como o Teorema do Confronto.

Além de dominar esses conceitos e técnicas, esperamos que os alunos sejam capazes de aplicá-los em uma variedade de contextos matemáticos. Isso inclui a capacidade de resolver problemas complexos que envolvam o conceito de limite e suas aplicações.

Por fim, esperamos que os alunos desenvolvam habilidades de raciocínio crítico e resolução de problemas ao lidar com questões relacionadas a limite. Isso envolve a capacidade de analisar e interpretar informações, identificar padrões e aplicar estratégias eficazes para resolver problemas matemáticos relacionados a limite.

Na segunda etapa, procederíamos à seleção dos alunos que participariam da pesquisa, optando por escolher apenas um ou dois representantes de cada grupo que melhor refletirem os dados coletados. Para a seleção das questões incluídas na entrevista, adotamos duas abordagens distintas.

> A primeira é uma abordagem natural, fundamentada na matemática teórica e que envolve a incorporação de simbolismo ou uma combinação dos dois. A segunda é uma abordagem formal utilizando a matemática formal da definição e dedução teórica de conjuntos (Tall 2013, p. 274, tradução nossa).

O plano inicial previa que, nesta segunda etapa haveria uma seleção de um ou dois alunos de cada grupo para serem entrevistados, utilizando abordagens distintas na formulação das questões, sendo uma: a abordagem natural, baseada na intuição e na matemática teórica, seria aplicada aos alunos dos grupos 1 a 3, enquanto a outra era a formal, fundamentada na definição e dedução teórica, seria utilizada para os alunos do grupo 4.

A entrevista, com duração estimada de 30 minutos, teria como foco a questão: “Demonstre que $\lim_{x \to 4} x^2 = 16$”, escolhida por permitir diferentes abordagens. Se o aluno estivesse familiarizado com a definição formal de limite, utilizaria a abordagem formal, característica do mundo formalista de Tall (2013). Caso contrário, recorreria à intuição e representações simbólicas, condizentes com os mundos corporificado e simbólico.

No entanto, o plano inicial foi ajustado mantendo o objetivo final que era identificar desafios na construção do conceito de limite e compreender como alguns estudantes superam essas dificuldades ao transitar para o pensamento formalista

Para dar os primeiros encaminhamentos para a realização da pesquisa, buscou-se os secretários do Colegiado do curso de Licenciatura em Matemática dos turnos Noturno, Integral/Diurno e EAD para obter informações sobre a quantidade de alunos para a amostra e as disciplinas que esses alunos estariam cursando. Informaram que, devido à greve dos servidores ocorrida em abril, aderida por alguns docentes, e às enchentes em maio, o calendário acadêmico sofreu desorganização. Como resultado, alguns alunos já haviam concluído determinadas disciplinas, enquanto outras ainda estavam sendo cursadas. Além disso, foi comunicado que alguns alunos com previsão de conclusão no semestre 1/2024 entrariam em recesso entre o início e o final de outubro.

Diante da dificuldade prevista em estabelecer contato com o público-alvo inicial, optou-se por ampliar o escopo da pesquisa para incluir os alunos com conclusão prevista para o primeiro semestre de 2025, visando assegurar uma amostragem adequada para os objetivos da investigação.

Primeiramente, foram identificadas as disciplinas que os alunos em questão estavam cursando, com o objetivo de divulgar a pesquisa e, posteriormente, aplicá-la. No entanto, a diversidade de turmas dos estudantes demandou uma alteração na estratégia inicial. Optou-se, então, pela divulgação por meio da plataforma Cobalto (e-mail institucional dos alunos) e também nos grupos de WhatsApp, destacando a importância da participação na pesquisa e convidando-os a comparecer à universidade em data previamente agendada para participar das entrevistas.

Diante da inviabilidade de realizar as entrevistas em outro momento, decidiu-se que estas seriam realizadas logo após o preenchimento das questões. E que as respostas dos participantes serviriam como base para discussões sobre o conceito de limite assimilado pelos estudantes.

No primeiro contato, a adesão foi baixa (apenas 1 aluno), o que nos levou a solicitar apoio dos professores e coordenadores do curso, com o intuito de facilitar o contato com os alunos. Essa colaboração resultou em uma adesão mais significativa, pois o maior receio dos estudantes era não saber responder as questões e no pensamento deles "passar vergonha". E, apesar dos esforços, não foi possível obter a participação dos alunos do curso EAD, pois, no dia designado para a pesquisa, esses alunos não acessaram a sala virtual, e não foi possível um convite pessoal, em função disso, os sujeitos da pesquisa foram os concluintes do integral e noturno.

Ao final, obteve-se a participação de 7 alunos de um total aproximado de 21 (cursos Integral e Noturno). Desses, 1 aluno do curso Noturno respondeu via WebConf (plataforma online que permite realizar e gravar aulas), enquanto os outros 6 participaram presencialmente nos turnos Noturno e Diurno.

A aplicação da pesquisa foi conduzida da seguinte maneira: primeiramente, explicou-se ao estudante o objetivo do estudo e apresentou-se o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido para que ele pudesse assinar, confirmando sua participação voluntária. Em seguida, o questionário, detalhado no anexo 1, foi entregue para resolução. Após o término das respostas, foi realizada a gravação de um breve relato, na qual se investigou as dificuldades e facilidades encontradas pelo estudante tanto durante a realização das tarefas assim como no contexto das disciplinas de Cálculo I (especificamente no aprendizado do conceito de limite) e Análise, onde o conceito era revisitado. Aproveitou-se, também, para compreender como o estudante se sentiu ao resolver a questão utilizando a definição formal de limite. Com um determinado grupo de alunos, não houve a viabilidade de fazer a gravação de nossas conversas, porém fiz anotações durante e depois dela, observando inclusive expressões faciais e tons na fala, a fim ser o mais fiel possível a este momento.

Ao longo das análises, observamos características relativamente iniciais nas respostas dos alunos. Para dar maior consistência às nossas observações, buscamos integrar as ideias fundadoras de Tall e Vinner (1981) sobre conceito imagem e conceito definição, as quais foram posteriormente aprofundadas por Domingos (2003). Em particular, Domingos propôs a divisão do conceito de imagem em três categorias: imagem incipiente, imagem instrumental e imagem relacional, conforme detalhado no capítulo 5 do referencial teórico. Essas categorias nos ajudaram a classificar as respostas dos alunos, permitindo uma interpretação mais clara dos estágios de desenvolvimento conceitual e dos desafios enfrentados na transição para um entendimento mais profundo e formal dos conceitos matemáticos.

6.1. Estudo Piloto

A fim de testarmos as atividades propostas, realizamos um estudo piloto com dois ex-alunos do curso de Licenciatura em Matemática da UFPEL Noturno nos anos de 2022 e 2023, respectivamente. Eles foram submetidos às questões propostas e responderam todas elas com o conceito imagem que construíram ao longo do curso. A fim de manter a confidencialidade, os nomes dos ex-alunos foram omitidos, sendo identificados como Licenciado 1, o aluno concluinte em 2022, e Licenciado 2, o aluno concluinte em 2023.

Ambos os estudantes demonstraram domínio sobre os conceitos apresentados, contudo, cada um utilizou uma abordagem conceitual distinta para a resolução, conforme estudo realizado por Mevs et al. (2024). A seguir, serão detalhadas exclusivamente as formas de resolução evidenciadas por cada estudante, uma vez que o objetivo principal deste estudo inicial é verificar se as questões propostas proporcionam informações suficientes para a investigação.

Figura 8 - QR Code para acesso ao trabalho

Acesse no QR Code ao lado a fim de acessar o artigo que explora o tema **"Aprendizagem de limite por ex-alunos do curso de Licenciatura em Matemática da UFPEL"** de Mevs, Dynnikov e Pires (2024) apresentado no **XV Encontro Gaúcho de Educação Matemática (EGEM Bagé).**

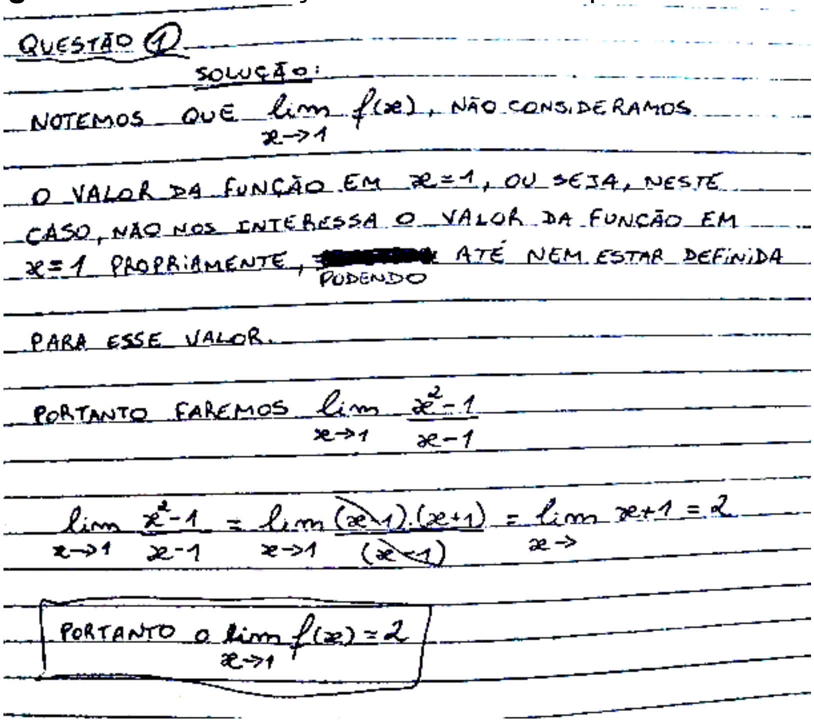
Fonte: Da autora

Resolução da questão 1

Calcule, caso exista o $\lim_{x \to 1} f(x)$ em que $f(x) \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & se\ x \neq 1 \\ 3 & se\ x = 1 \end{cases}$. Explique como você resolveu.

Mediante a questão apresentada, podemos ver, na Figura 9, o método de resolução utilizado pelo Licenciado 1. Sua resposta evidencia um bom domínio teórico e prático de tópicos relacionados à continuidade e limites em funções. Ele sabe identificar descontinuidades, calcular limites laterais para verificar a existência do limite, e manipular expressões algébricas, aplicando propriedades como produtos notáveis para resolver problemas matemáticos de forma eficiente.

Figura 9 - Caracterização do Licenciado 1 para a Questão 1



QUESTÃO 1
SOLUÇÃO:
NOTEMOS QUE $\lim_{x \to 1} f(x)$, NÃO CONSIDERAMOS
O VALOR DA FUNÇÃO EM $x=1$, OU SEJA, NESTE
CASO, NÃO NOS INTERESSA O VALOR DA FUNÇÃO EM
$x=1$ PROPRIAMENTE, [redacted] PODENDO ATÉ NEM ESTAR DEFINIDA
PARA ESSE VALOR.
PORTANTO FAREMOS $\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$

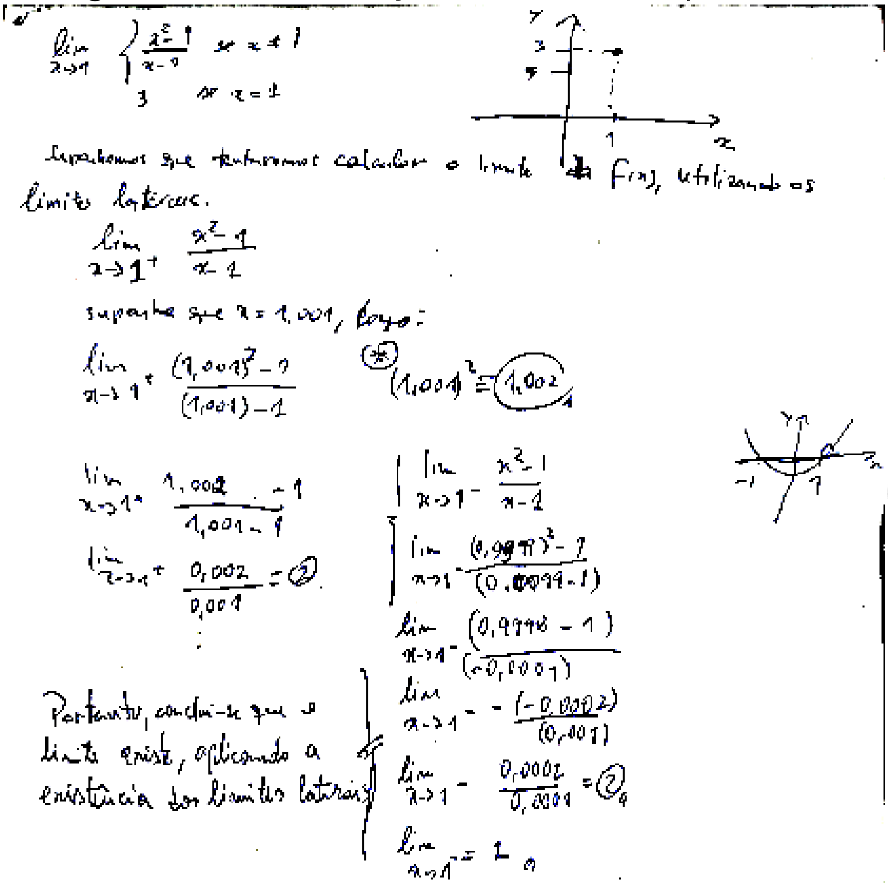
$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{\cancel{(x-1)}.(x+1)}{\cancel{(x-1)}} = \lim_{x \to} x+1 = 2$$

$$\boxed{\text{PORTANTO o } \lim_{x \to 1} f(x) = 2}$$

Fonte: Da autora

O Licenciado 2 não fez uso da simplificação algébrica para chegar na solução, ao invés disso ele utilizou representações gráficas e aproximação numérica para chegar a uma conclusão, conforme pode ser observado na Figura 10. Em sua solução, ele usa a função que corresponde ao limite de $x \neq 1$, para calcular o comportamento do gráfico nas proximidades da função, já que o conceito de limite requer que o estudante saiba analisar o comportamento da função em suas proximidades e não em um ponto especifico.

Figura 10 - Caracterização do Licenciado 2 para a Questão 1



Fonte: Da autora

Ambos chegaram ao mesmo resultado, o que indica que as diferentes abordagens podem ser igualmente eficazes. No entanto, as estratégias escolhidas refletem diferentes estágios de desenvolvimento conceitual e estilos de raciocínio. O Licenciado 1, ao operar algebricamente, utilizou técnicas que envolvem manipulação direta de expressões matemáticas para determinar o limite da função, mostrando um nível avançado de abstração e internalização dos conceitos características do mundo simbólico. O domínio do simbólico é caracterizado pela habilidade de operar diretamente com símbolos para resolver problemas sem necessariamente recorrer a representações visuais ou contextos concretos, já que segundo Tall (2013, p. 138 - tradução nossa), ao mencionar a aprendizagem com o uso de material concreto, explica que

> (...) não era necessário continuar com a representação física; uma vez que ele conseguia visualizar os símbolos se movendo para a esquerda e para a

> direita, ele foi capaz de prosseguir mentalmente, deslocando os símbolos em sua mente.

Isso significa que depois de compreender o conceito por meio da representação, o aprendiz não precisou mais dela e conseguiu operar algebricamente. Aspecto esse evidenciado pesquisado, já que quando questionado sobre as representações gráficas disse:

Licenciado 1: Os gráficos solicitados na atividade são simples e fáceis de serem construídos mentalmente sem a necessidade de esboçá-los para solução.

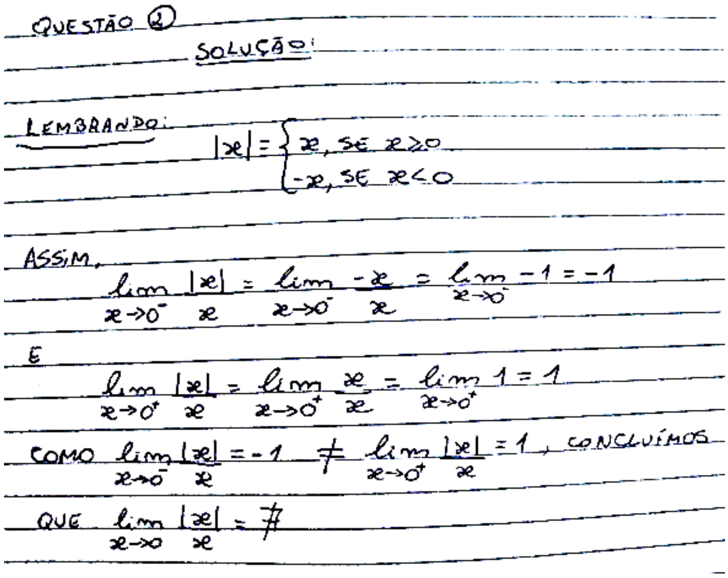
O Licenciado 2, por outro lado, utilizou representações gráficas e aproximações para determinar o limite da função. Isso sugere que sua abordagem é mais visual e experimental, baseando-se em aspectos concretos e perceptíveis (gráficos e aproximações numéricas). Isso significa que ele ainda se apoia em representações que têm conexão direta com experiências sensoriais ou contextos concretos (corporificado), mas está avançando para uma compreensão mais abstrata e simbólica. Esse processo de transição reflete uma etapa importante no desenvolvimento do raciocínio matemático, Tall (2013, p. 159, tradução nossa) diz que "para ser totalmente funcional, a compressão operacional requer que os símbolos operem de forma dual como processo ou conceito". Assim o problema surge quando o aprendiz só consegue ver os símbolos como objetos fixos, sem compreender sua natureza operacional, o que pode dificultar a resolução de problemas mais abstratos.

Resolução da questão 2

Calcule, caso exista o $\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$. Por que?

Para esta questão o Licenciado 1 usa a definição de módulo de uma função para justificar as operações que realiza a seguir, calculando os limites laterais e concluindo adequadamente a não existência do limite da função, já que os limites laterais são divergentes, conforme pode ser observado na Figura 11. O que demonstra clareza na realização das operações, Tall (2013, p. 139, tradução nossa) descreve a palavra operação como sendo "uma ação realizada com um propósito específico", e neste caso o aluno consegue justificar tais operações características do mundo simbólico.

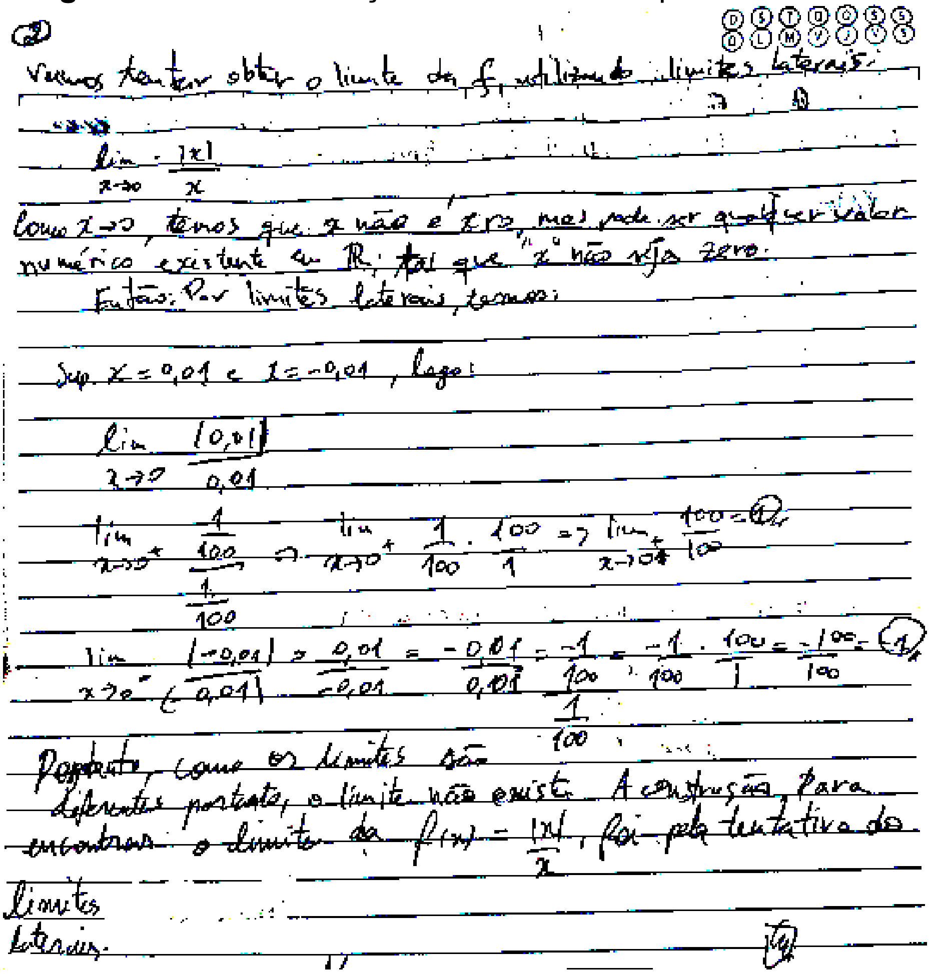
Figura 11 - Caracterização do Licenciado 1 para a Questão 2



Fonte: Da autora

O Licenciado 2 demonstra maior familiaridade do conceito de Limite no mundo corporificado com transição para o simbólico, apesar de não fazer uso da representação gráfica nesta atividade, ele utiliza da ideia de aproximação proposta para este recurso, não fazendo uso do simbolismo genérico para resolução da questão, chegando então a solução usando valores próximos do ponto determinado pelo exercício, como podemos ver na Figura 12. Compreender a definição de Limite como sendo o comportamento da função quando nos aproximamos de um determinado ponto, tem sido para este licenciado um instrumento crucial em sua compreensão, porém para Tall (1981, p. 163, tradução nossa) “muitos desses usaram as palavras ‘aproximar-se’, ‘chegar perto de’, ‘tende a’, o que leva à possibilidade de que a suposição de que $f(x) \neq c$ seja um fator potencial de conflito”, no entanto, no cálculo de limite, o conceito formal indica que pode se aproximar de c indefinidamente sem jamais atingi-lo, dependendo do domínio ou da definição da função.

Figura 12 - Caracterização do Licenciado 2 para a Questão 2



Vamos tentar obter o limite da f, utilizando limites laterais:

$\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$

Como $x \to 0$, temos que x não é zero, mas pode ser qualquer valor numérico existente em $\mathbb{R}$, tal que "x" não seja zero.

Então: Por limites laterais, temos:

Sup. $x = 0{,}01$ e $x = -0{,}01$, logo:

$\lim_{x \to 0} \frac{|0{,}01|}{0{,}01}$

$\lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{100}}{\frac{1}{100}} \Rightarrow \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{100} \cdot \frac{100}{1} \Rightarrow \lim_{x \to 0^+} \frac{100}{100} = 1$

$\lim_{x \to 0^-} \frac{|-0{,}01|}{(-0{,}01)} \Rightarrow \frac{0{,}01}{-0{,}01} = \frac{-0{,}01}{0{,}01} = \frac{-\frac{1}{100}}{\frac{1}{100}} = \frac{-1}{100} \cdot \frac{100}{1} = \frac{-100}{100} = -1$

Portanto, como os limites são diferentes portanto, o limite não existe. A construção para encontrar o limite da $f(x) = \frac{|x|}{x}$, foi pela tentativa dos limites laterais.

Fonte: Da autora

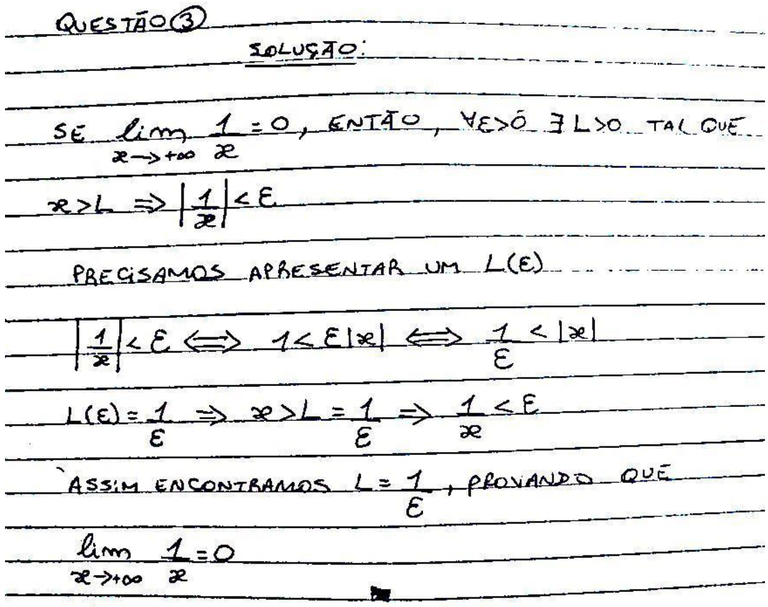
Ilustramos acima dois perfis distintos de compreensão matemática, ambos válidos, mas em estágios diferentes de desenvolvimento cognitivo e conceitual. Enquanto o Licenciado 1 já opera confortavelmente no mundo simbólico, com clareza na manipulação de símbolos e consegue justificar suas operações, o Licenciado 2, por outro lado, demonstra uma compreensão baseada em aproximações e ideias intuitivas, características do mundo corporificado, e progride para o mundo simbólico por meio das operações inerentes as aproximações, não fazendo uso das operações algébricas, domínio esse essencial no mundo simbólico a fim de proporcionar uma base solida para compreender o mundo formal.

Questão 3

Prove que $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0.$

O Licenciado 1 utilizou a definição formal para demonstrar a questão 3 e evidenciou habilidades em utilizar, adequadamente, os quantificadores inerentes ao conceito de Limite a fim de realizar a prova formal desta questão, ele justifica adequadamente cada passo da demonstração, utilizando propriedades matemáticas válidas. De acordo com Tall (2013), isso demonstra o domínio de operações simbólicas que permitem a manipulação lógica de conceitos para alcançar uma conclusão rigorosa.

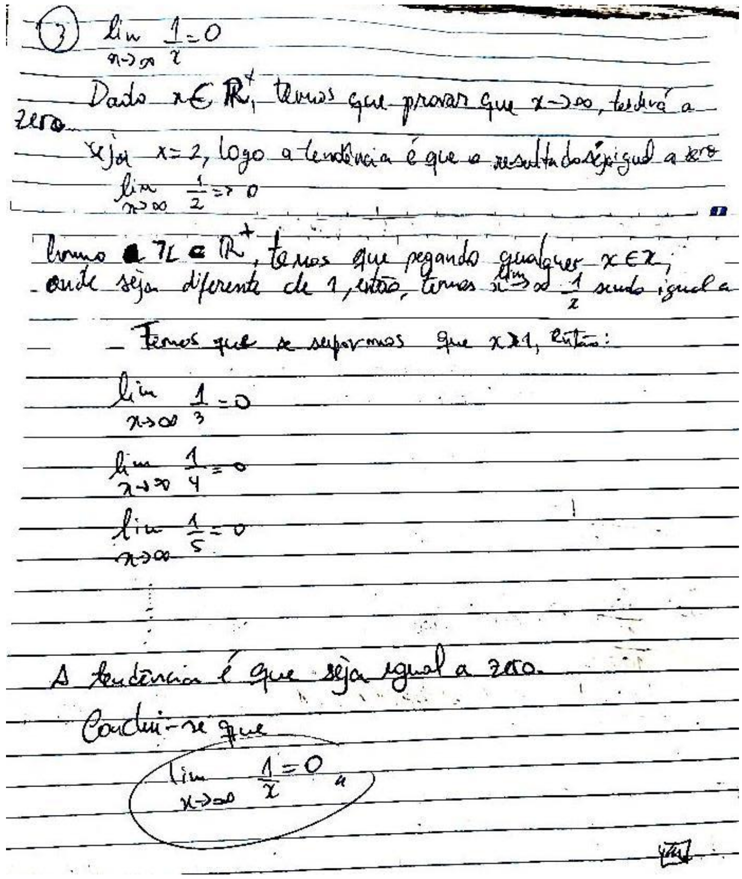
Figura 13 - Caracterização do Licenciado 1 para a Questão 3



Fonte: Da autora

Na mesma questão, o Licenciado 2 não utilizou a definição formal e chegou ao resultado por meio de aproximação, substituindo na função valores para x maiores que 1, conforme descrito pelo próprio estudante na Figura 14. A explicação apresentada mostra um raciocínio baseado na ideia de que, ao aumentar o valor de x, os resultados da divisão se tornam cada vez menores, tendendo a zero. Essa abordagem é típica do mundo corporificado (Tall, 2013), onde o raciocínio é ancorado em exemplos concretos e aproximações, a solução carece do uso da definição formal o que mostra que o Licenciado 2 ainda não domina completamente o mundo simbólico, permanecendo mais próximo de uma abordagem intuitiva.

Figura 14 - Caracterização do Licenciado 2 para a Questão 3


(3) $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$

Dado $x \in \mathbb{R}^+$, temos que provar que $x \to \infty$, tenderá a zero.

Seja $x = 2$, logo a tendência é que o resultado seja igual a zero

$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{2} \Rightarrow 0$

Como $x \in \mathbb{R}^+$, temos que pegando qualquer $x \in x$, onde seja diferente de 1, então, temos $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x}$ sendo igual a

Temos que se supormos que $x \geq 1$, então:

$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{3} = 0$

$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{4} = 0$

$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{5} = 0$

⋮

A tendência é que seja igual a zero.

Conclui-se que

$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$

Fonte: Da autora

Com base na teoria de Tall (2013), o Licenciado 1 demonstrou um forte domínio do mundo simbólico ao utilizar a definição formal de limite e ao manipular adequadamente os quantificadores envolvidos na prova. A ausência de representações gráficas não prejudica sua abordagem, pois ele é capaz de operar diretamente com símbolos e propriedades matemáticas, o que reflete um pensamento avançado no desenvolvimento matemático. Essa solução é um exemplo de como o pensamento matemático pode evoluir para um nível mais abstrato e formal.

No caso do Licenciado 2 sua abordagem intuitiva e qualitativa está enraizada no mundo corporificado. Ele está em transição para o mundo simbólico, mas ainda não demonstra pleno domínio das ferramentas necessárias, como o uso da definição formal, não há indícios de pensamento no mundo formal, pois a solução não apresenta abstrações ou generalizações baseadas em axiomas ou teoremas.

Resolução da questão 4

Esta questão refere-se à questão 12 do Enade 2017, a qual era proposto que

Figura 15 - Questão 12 do Enade

Para calcular o limite $L = \lim_{x \to +\infty} \frac{-\text{sen}\, x}{x}$, os argumentos podem ser desenvolvidos usando as desigualdades $0 \leqslant \left| \frac{\text{sen}\, x}{x} \right| \leqslant \frac{1}{x}$, válidas para todo real $x > 0$.

A partir desses argumentos, conclui-se que L é igual a

A) -1.

B) 0.

C) 1.

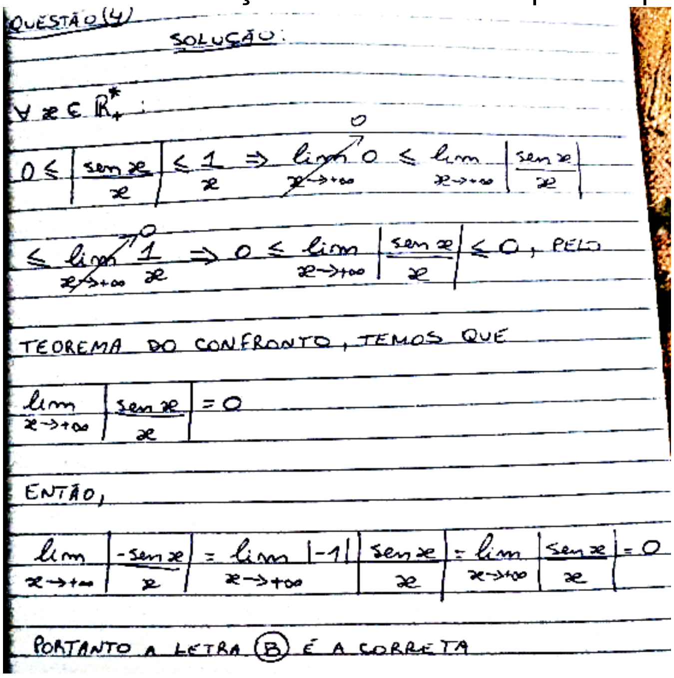
D) ∞.

E) $-\infty$.

Fonte: Avaliação Enade 2017

Observamos também que na questão 4, em que exigia a aplicação apropriada de alguns conceitos estudados sobre limite, o Licenciado 1 conseguiu expressar seus resultados aplicando o teorema do confronto e calculando as desigualdades da função. De acordo com Tall (2013) ele demonstra característica de um domínio no mundo simbólico, ao trabalhar diretamente com desigualdades e limites de funções utilizando ferramentas matemáticas abstratas e regras formais, como o Teorema do Confronto.

Figura 16 - Caracterização do Licenciado 1 para a questão 4



QUESTÃO (4)

SOLUÇÃO:

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$:

$0 \leq \left|\frac{\text{sen}\, x}{x}\right| \leq \frac{1}{x} \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} 0 \leq \lim\limits_{x\to+\infty} \left|\frac{\text{sen}\, x}{x}\right|$

$\leq \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \Rightarrow 0 \leq \lim\limits_{x\to+\infty} \left|\frac{\text{sen}\, x}{x}\right| \leq 0$, PELO

TEOREMA DO CONFRONTO, TEMOS QUE

$\lim\limits_{x\to+\infty} \left|\frac{\text{sen}\, x}{x}\right| = 0$

ENTÃO,

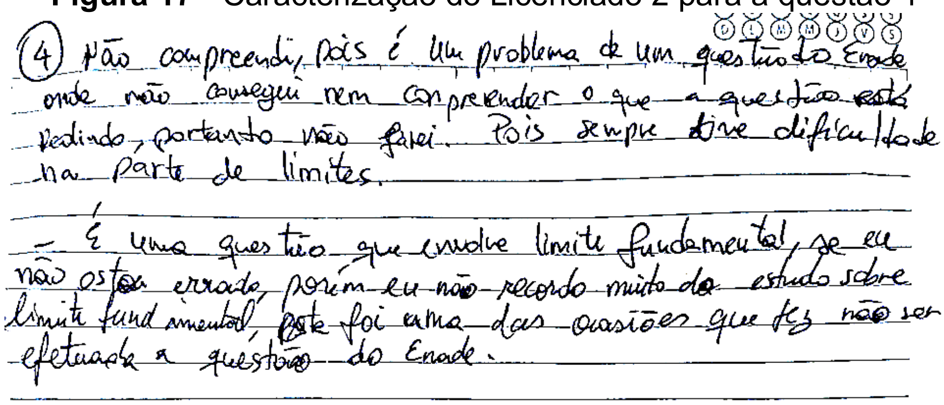
$\lim\limits_{x\to+\infty} \left|\frac{-\text{sen}\, x}{x}\right| = \lim\limits_{x\to+\infty} |-1| \left|\frac{\text{sen}\, x}{x}\right| = \lim\limits_{x\to+\infty} \left|\frac{\text{sen}\, x}{x}\right| = 0$

PORTANTO A LETRA (B) É A CORRETA

Fonte: Da autora

O Licenciado 2 reconhece que a questão envolve conceitos fundamentais sobre limites, porém alega não ter compreendido muito bem a questão, existe uma dificuldade explícita com o conceito de limite, que o impede de acessar o problema no nível simbólico e operar com ele. O que levanta a hipótese de que utilizar apenas os recursos do mundo corporificado e transitando apenas no simbólico não é o suficiente para estabelecer a forma de resolução desta questão.

Figura 17 - Caracterização do Licenciado 2 para a questão 4



(4) Não compreendi, pois é um problema de uma questão do Enade onde não consegui nem compreender o que a questão está pedindo, portanto não farei. Pois sempre tive dificuldade na parte de limites.

— É uma questão que envolve limite fundamental, se eu não estou errado, porém eu não recordo muito do estudo sobre limite fundamental, este foi uma das ocasiões que fez não ser efetuada a questão do Enade.

Fonte: Da autora

O Licenciado 1 apresenta uma solução correta e rigorosa para a questão, demonstrando um sólido domínio do mundo simbólico, conforme descrito por Tall (2013). Sua resolução destaca uma habilidade bem desenvolvida em manipular conceitos abstratos e justificá-los com base em propriedades matemáticas.

A dificuldade relatada pelo Licenciado 2 está relacionada à falta de um entendimento consolidado do conceito de limite, conforme descrito nos níveis de desenvolvimento de Tall (2013). A ausência de estratégias para explorar o problema em outros níveis (como o gráfico ou intuitivo) evidencia a necessidade de uma abordagem pedagógica que conecte os mundos corporificado, simbólico e formal, promovendo uma transição gradual e sólida.

Tall e Vinner (1981) argumentam que a aprendizagem de matemática, frequentemente, apresenta conflitos entre o que o aluno intui e o que a definição formal exige. No caso do Licenciado 2, parece haver uma lacuna entre sua intuição matemática e a formalidade exigida, levando a um bloqueio no entendimento. Para Tall (2013), barreiras de aprendizado surgem quando o aluno não consegue integrar os diferentes mundos do conhecimento matemático. O Licenciado 2 apresenta uma barreira evidente no entendimento de limites, enquanto o Licenciado 1, conseguiu operar no mundo formal, utilizando definições e propriedades para justificar sua resposta.

A diferença nas respostas reflete como a transição entre os mundos corporificado, simbólico e formal não ocorre de maneira uniforme entre os aprendizes. Para Tall (2013), o desenvolvimento de conceitos matemáticos exige conexões entre esses mundos, o que deve ser trabalhado no ensino por meio de atividades que integrem visualizações, manipulações simbólicas e definições formais.

Reflexões gerais

Apesar de ambos chegarem ao mesmo resultado, a maneira como resolveram o problema revela diferenças na maturidade matemática de cada um. O Licenciado 1 já avançou para um pensamento mais abstrato, enquanto o Licenciado 2 ainda depende de recursos visuais para compreender o conceito. Segundo Tall e Vinner (1981), essa diferença é comum, pois muitas vezes há um conflito entre a intuição dos alunos e a definição matemática formal.

Para que alunos como o Licenciado 2 avancem para níveis mais abstratos, o ensino deve integrar representações gráficas, manipulações simbólicas e definições formais, ajudando-os a conectar os diferentes níveis do conhecimento matemático de forma gradual e eficaz.

7 RESULTADOS

A seguir, serão apresentados os resultados da análise, com ênfase nas respostas a cada questão, incluindo as observações e reflexões expressas pelos estudantes nos depoimentos gravados. Posteriormente, descreveremos as percepções dos alunos sobre os desafios e facilidades enfrentados ao longo do processo de aprendizagem do conceito de limite. Conforme detalhado no capítulo 6, para a realização da pesquisa, inicialmente foram consultados os secretários do Colegiado do curso de Licenciatura em Matemática dos turnos Noturno, Integral/Diurno e EAD para obter informações sobre a quantidade de alunos e as disciplinas em andamento. No entanto, devido a fatores como a greve dos servidores e as enchentes que ocorreram no Rio Grande do Sul, o calendário acadêmico sofreu alterações, dificultando o contato com o público-alvo inicial. Para garantir uma amostragem adequada, a pesquisa foi ampliada para incluir alunos com previsão de conclusão no primeiro semestre de 2025. A divulgação ocorreu por meio da plataforma Cobalto (e-mail institucional) e grupos de WhatsApp, convidando os estudantes a participarem das entrevistas na universidade. Dado o limite de tempo, as entrevistas foram realizadas logo após o preenchimento do questionário, servindo como base para discutir a assimilação do conceito de limite pelos alunos.

Para garantir a confidencialidade dos participantes, escolhemos nomes fictícios para identificá-los, assim como para os professores por eles mencionados, o Quadro 3 expressa o nome fictício e o semestre em que concluirão o curso, no Anexo B é possível ver na integra a resposta dos estudantes e no Anexo C seus relatos.

Quadro 3 - Sujeitos da Pesquisa

Nome Fictício	Semestre / Ano de Conclusão do Curso/ Integral ou Noturno
Amanda	1 Semestre /2024/ Integral
Carla	1 Semestre /2025/ Noturno
Cláudia	1 Semestre /2024/ Integral
Gustavo	1 Semestre /2024/ Integral
Juliana	1 Semestre /2024/ Integral
Lucas	1 Semestre /2025/ Noturno

Paulo	2 Semestre /2024/ Noturno

Fonte: Da autora

Além disso, estabelecemos um diálogo com a teoria de Tall (2013) e os conceitos imagem propostos por Domingos (2003), previamente discutidos no capítulo 5, a fim de esclarecer os aspectos abordados por esses autores no contexto da aprendizagem matemática.

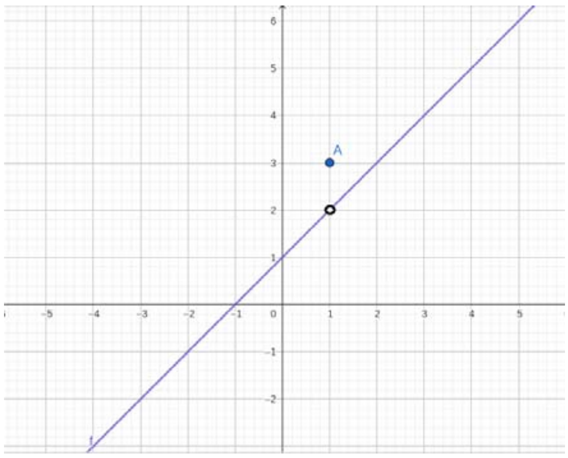
Tall (2013) ressalta como o conceito de limite é central no aprendizado do cálculo, mas também problemático devido às suas implicações intuitivas e históricas. Para superar essas dificuldades, é necessário um ensino que guie os alunos da intuição inicial para o rigor formal do pensamento axiomático, garantindo uma compreensão completa e precisa. Pretendemos, então, apresentar nestas analises os caminhos percorridos pelos alunos a fim de chegar ou não no rigor formal.

7.1. Análise da questão 1

Na primeira questão proposta, os alunos deveriam calcular, caso existisse, o valor do $\lim_{x\to 1} f(x)$ em que $f(x)\begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & se\ x \neq 1 \\ 3 & se\ x = 1 \end{cases}$ e ainda, explicar como resolveu.

Neste exemplo, é apresentada uma função descontínua onde, apesar da descontinuidade, existe um limite, uma vez que os limites laterais convergem para o mesmo número, ou seja 2. Buscava-se verificar se os estudantes seriam capazes de identificar a existência desse limite mesmo diante da descontinuidade da função, assim como resolver a indeterminação aplicando a técnica de fatoração da diferença de quadrados. Além disso, procurava-se verificar, se eles conseguiriam realizar a representação gráfica da função, de acordo com a Figura 18, como um recurso adicional que facilitaria a resolução.

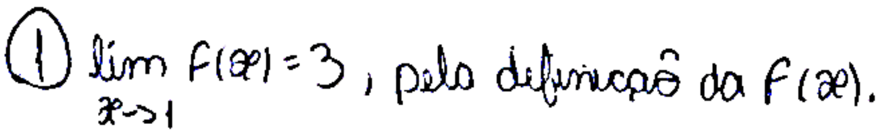
Figura 18 - Representação gráfica da questão 1



Fonte: Da autora

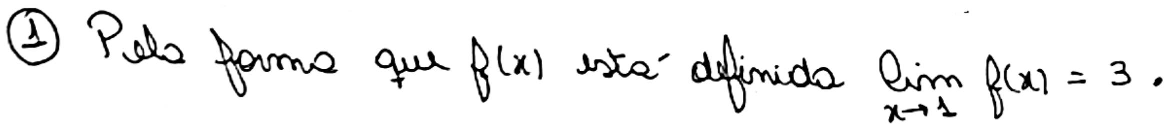
Resolução da questão 1 por Amanda e Cláudia

Figura 19 - Caracterização da questão 1 por Amanda



Fonte: Da autora

Figura 20 - Caracterização da questão 1 por Cláudia



Fonte: Da autora

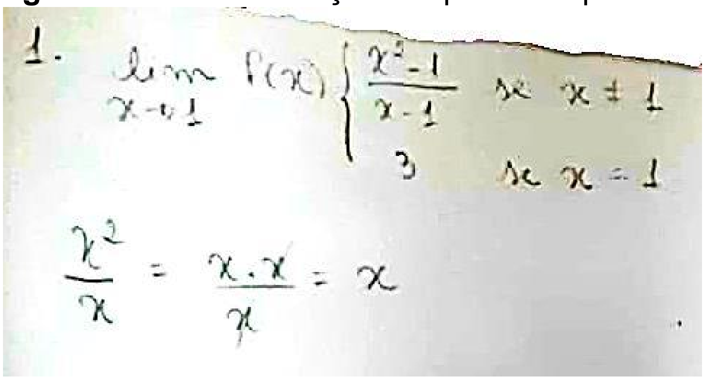
Amanda e Cláudia chegaram a conclusão de que $\lim_{x\to 1} f(x) = 3$; O valor equivocado do limite, mostra o desconhecimento de como calcular o limite da função, conforme pode ser observado na Figura 19 e 20. Por se tratar de uma função descontínua, a simples observação de que a função estava definida nesse ponto não é suficiente para afirmar, de forma conclusiva, a existência ou não de um limite, já que o estudo de limite é usado para verificar o comportamento da função nas proximidades de um determinado ponto, no caso de exercício, qual o comportamento da função quando x tende a 1.

Nesta questão já é possível observar o perigo conceitual apontado por Tall (2013, p. 148 - 149, tradução nossa) no que tange ao que os estudantes “imaginam o processo de uma sequência de números tendendo a zero, dando um limite que é quase zero, mas não exatamente”, pois muitos pensam que uma sequência tendendo a zero implica que o limite é ‘quase zero’, mas na verdade, o limite representa o valor que a sequência se aproxima, independentemente de ser atingido.

As estudantes demonstraram uma compreensão intuitiva e fragmentada do conceito de limite sem conseguir diferenciar entre a continuidade de uma função e a existência do limite em um ponto. O erro cometido — assumir que $\lim_{x \to 1} f(x) = 3$ apenas porque a função está definida nesse ponto — sugere que elas ainda não internalizaram a ideia fundamental de que o limite depende do comportamento da função nas proximidades do ponto e não apenas do seu valor naquele ponto específico. Além disso, a ausência de uma análise dos limites laterais reforça a dependência de intuições simplistas e da observação direta da função, sem recorrer aos processos formais necessários para a determinação correta do limite. Esse comportamento é característico de estudantes que possuem um conceito imagem incipiente (Domingos, 2003); que ainda estão muito próximos da matemática elementar, onde os conceitos são compreendidos de maneira mais concreta, um estágio inicial de compreensão do conceito de limite, operando com intuições equivocadas e sem o domínio das definições e procedimentos formais, intuições essas características também se assemelham ao mundo corporificado de Tall (2013).

Resolução da questão 1 por Carla

Figura 21 - Caracterização da questão 1 por Carla



Fonte: Da autora

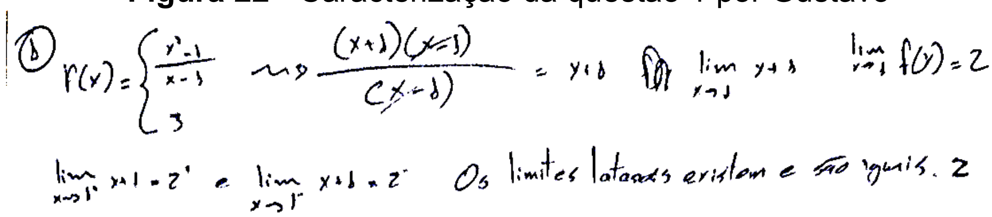
A estudante não recorreu a recursos visuais, como gráficos, para auxiliá-la na resolução dessa questão. Além disso, demonstrou dificuldade em realizar a fatoração da expressão, o que a impediu de avançar na solução, conforme ilustrado na Figura 21.

Tall (2013, p. 302, tradução nossa) descreve o cálculo como o resultado de um processo que "transita pela matemática prática da infância até a matemática teórica, incorporando conceitos gráficos e o simbolismo operacional da álgebra". Nesse sentido, antes de abordar a definição formal de "limite" no cálculo, os estudantes podem desenvolver uma compreensão significativa do conceito por meio de experiências práticas e intuições. No caso de Carla, no entanto, essa base parece ausente, uma vez que suas lacunas conceituais evidenciam que o domínio do mundo simbólico ainda não está plenamente consolidado, e que no mundo corporificado ela possui experiências que sugerem que ela internalizou a ideia fundamental de limite, apesar de não ter apresentado esse domínio graficamente, compreendemos que ela ainda está no mundo corporificado.

A dificuldade que Carla teve ao realizar a fatoração da expressão mostra uma falta de familiaridade com esse conceito específico. A fatoração é uma habilidade fundamental para simplificar expressões algébricas e resolver equações, e essa dificuldade pode ser um reflexo de um entendimento ainda em construção. Isso sugere que possui um conceito imagem incipiente, pois ela ainda está em uma fase inicial de desenvolvimento em relação à compreensão de alguns conceitos matemáticos essenciais, como o uso de recursos visuais e a fatoração, isso impede que ela avance de maneira eficaz na resolução de problemas mais complexos.

Resolução da questão 1 por Gustavo

Figura 22 - Caracterização da questão 1 por Gustavo



Fonte: Da autora

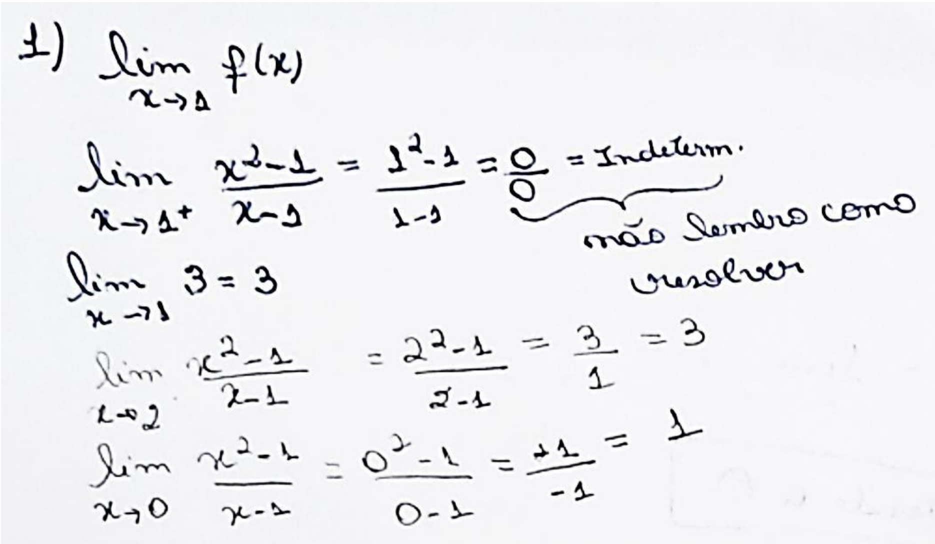
Conforme descrito na Figura 22, o aluno conseguiu estabelecer e resolver corretamente o limite da função. Identificando o comportamento da função em suas laterais, e descrevendo que quando esses valores são iguais existe limite.

Embora não haja evidências do uso do mundo corporificado na resolução desta questão por parte de Gustavo, é possível observar que essa ausência não comprometeu o resultado. Por meio de seu domínio algébrico, característico do mundo simbolizado, ele conseguiu resolver a questão de maneira satisfatória. Tall (2013, p. 336, tradução nossa) afirma que "a abordagem se desenvolve em métodos numéricos suficientemente bons e em um simbolismo preciso, apropriados para uma melhor compreensão do processo de limite". Em resumo, após adquirirem proficiência em métodos numéricos e simbolismo, os estudantes podem explorar aplicações práticas, permitindo-lhes compreender os aspectos fundamentais do processo de limite, mesmo que essa compreensão ainda não seja totalmente formal ou rigorosa.

Gustavo demonstra compreensão das propriedades do limite, especificamente a ideia de que o limite existe quando os valores das laterais são iguais, o que indica uma compreensão das relações estruturais. Ele foi capaz de identificar o comportamento da função nas laterais e usar essa informação para resolver o limite. Isso mostra que ele sabe como aplicar as ferramentas necessárias de maneira organizada. No entanto, ainda não faz uma conexão mais profunda entre os conceitos nem abstrai as ideias, o que sugere que sua compreensão do conceito está no estágio instrumental.

Resolução da questão 1 por Juliana

Figura 23 - Caracterização da questão 1 por Juliana



Fonte: Da autora

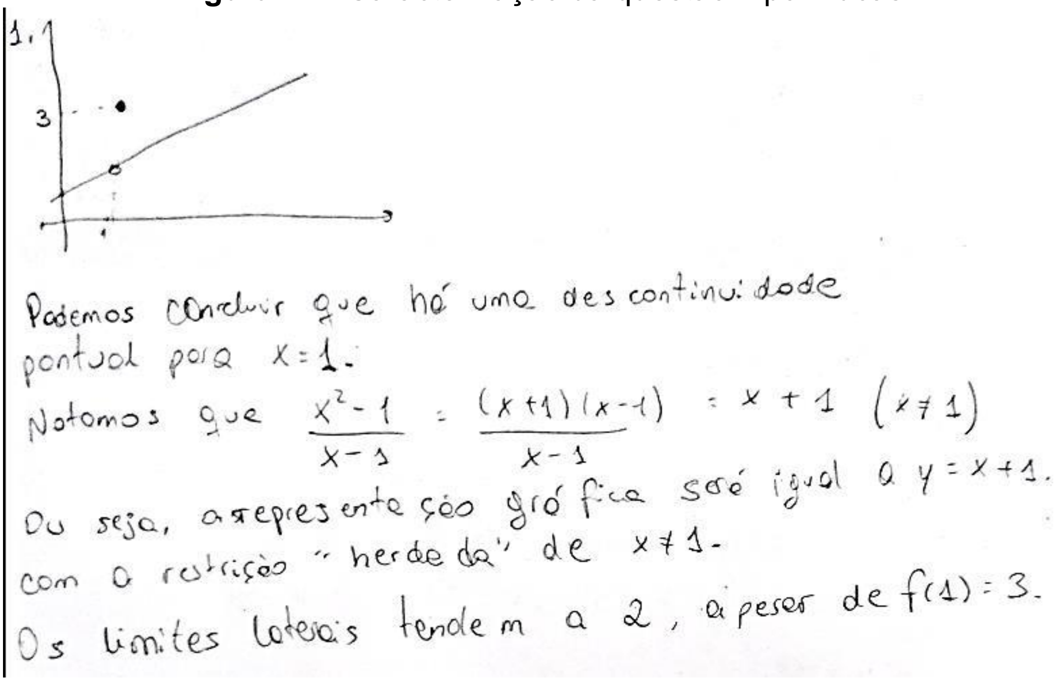
Na Figura 23, observa-se a resposta de Juliana, que identificou corretamente a descontinuidade da função. Contudo, por não se recordar do procedimento necessário para resolver a indeterminação, optou por analisar os limites laterais. No entanto, ela não conseguiu estabelecer a existência do limite com base nessa estratégia, já que ao usar valores próximos do 1, utilizou valores inteiros e não valores realmente próximos como 0,9; 0,99 à esquerda e 1,01; 1,001 à direita.

Juliana buscou fazer uso de uma abordagem mais intuitiva, evidenciando o mundo corporificado de Tall (2013), ao buscar valores próximos do 1, porém sua abordagem carece da ideia conceitual de limite, pois quando pensamos em valores próximos exploramos no conjunto dos números reais os mais apropriados, não apenas números inteiros. Isto mostra lacunas no mundo corporificado e simbólico, pois ao tentar transitar por eles comete erros conceituais que não lhe permite chegar a solução adequadamente. Tall (1981) explica que quando a imagem conceitual de um estudante não está alinhada ou coerentemente conectada à definição conceitual formal, podem surgir problemas e conflitos. Por exemplo, o aluno pode desenvolver entendimentos incorretos ou incompletos, dificultando a aplicação correta do conceito em diferentes situações.

Ela demonstra estar em um nível de compreensão mais próximo do conceito imagem instrumental, pois ela identificou corretamente a descontinuidade da função e tentou resolver a indeterminação analisando os limites laterais. Ela já sabe que essa abordagem pode ser útil, mas sua falta de precisão ao escolher os valores apropriados para a análise revela que ela ainda não tem total domínio sobre como aplicar corretamente a técnica dos limites laterais. Embora ela tenha uma compreensão estrutural do processo, a aplicação dessa estrutura ainda precisa ser refinada.

Resolução da questão 1 por Lucas

Figura 24 - Caracterização da questão 1 por Lucas



Fonte: Da autora

O aluno Lucas demonstrou habilidades em descrever o processo de determinação de limite algebricamente e geometricamente, conforme é possível ser observado na Figura 24.

Lucas demonstra um sólido domínio nos mundos corporificado e simbólico descritos por Tall (2013). Ele é capaz de esboçar o gráfico e realizar as operações algébricas correspondentes a esses domínios. Além disso, consegue estabelecer e explicar a relação entre o gráfico e a função, atendendo às expectativas associadas a esses mundos.

A resposta dele indica que ele está no estágio de conceito imagem instrumental. Ele consegue descrever o processo de determinação de limite de forma algébrica e geométrica, demonstrando uma boa compreensão do conceito e a capacidade de aplicar adequadamente o processo de fatoração. No entanto, para estar no estágio relacional, ele precisaria demonstrar mais flexibilidade e uma compreensão mais profunda, capaz de integrar o conceito de limite com outros conhecimentos e em contextos mais amplos.

Resolução da questão 1 por Paulo

O aluno Paulo demonstrou dificuldade em resolver essa questão, inicialmente afirmando que não havia limite, devido à natureza descontínua da função. No entanto, ao refletir durante a entrevista, afirmou: "Essa daqui existe [limite], porque apesar de ter o salto, o fato de existir o [limite do lado] direito e esquerdo, [faz] então [com que o limite dela] exista." Ele chegou a essa conclusão baseando-se exclusivamente na análise gráfica da função, embora não tenha esboçado o gráfico e não tenha declarado qual seria o valor do limite.

Tall (1981) destaca que, à medida que os conceitos matemáticos se tornam mais sofisticados, representações visuais ou intuitivas podem não ser suficientes para captar a essência dos conceitos formais. No caso de Paulo, observa-se que ele ainda não possui uma imagem conceitual suficientemente desenvolvida para auxiliá-lo na resolução completa dessa questão.

Inicialmente, ele afirmou que não havia limite devido à natureza descontínua da função, o que sugere uma visão superficial do conceito de limite. Ele fez uma conexão entre descontinuidade e a inexistência de limite, mas essa conclusão não é totalmente precisa. Isso é característico do conceito imagem incipiente, em que o aluno ainda não compreende completamente as nuances dos limites em funções descontínuas.

A tentativa de Paulo de reconsiderar sua posição e chegar à conclusão de que o limite existe, com base nas análises das laterais, mostra que ele está começando a desenvolver uma compreensão do conceito de limite. No entanto, ele ainda não é capaz de realizar a análise de forma estruturada ou formal. A falta de esboço gráfico e a ausência de uma conclusão clara sobre o valor do limite indicam que ele não conseguiu ainda integrar todos os elementos necessários para uma compreensão mais completa.

Reflexões da questão 1

Essa questão não demandava dos estudantes uma representação formal em seu desenvolvimento, mas sim a aplicação de conceitos básicos, frequentemente apresentados em livros didáticos de Cálculo diferencial e Integral, para construir a compreensão do conceito de limite. De modo geral, as soluções apresentadas revelaram uma abordagem com características da abordagem natural. Segundo Tall (2013), essa abordagem está fundamentada na matemática teórica, envolvendo a incorporação de conceitos, o simbolismo ou uma combinação de ambos. Isso é observado de maneira mais efetiva nas respostas de Gustavo e Lucas. Por outro lado, nas respostas de Amanda, Carla, Cláudia e Paulo, percebe-se uma tentativa de se apropriar dessa abordagem, embora o conceito imagem que possuem ainda comprometa esse progresso. Analisar as respostas desses alunos significou ir além, e buscar as estruturas conceituais abordadas por Domingos (2003), a fim de dar maior clareza ao conceito imagem adotada por esses estudantes, pois assim como Domingos (2003, p. 130) observou "o conceito imagem dos alunos estudados se distribuem por três níveis ou graus de complexidade, dois dos quais ficam aquém do que seria esperado". Dizer que esses estudantes estariam no mundo corporificado, não era o suficiente para caracterizar o conceito imagem que possuíam, mas quando digo que possuem um conceito imagem incipiente, significa que suas respostas indicam uma compreensão inicial, superficial e intuitiva do conceito de limite. Eles ainda não conseguiram aplicar rigorosamente os conceitos matemáticos necessários para analisar o comportamento da função de forma precisa, recorrendo a observações visuais ou empíricas e cometendo erros conceituais. O estágio incipiente é caracterizado pela tentativa de entender os conceitos a partir de uma perspectiva concreta e intuitiva, sem ainda compreender a abstração necessária para a análise mais formal e rigorosa de limites.

Por outro lado, a respostas de Lucas, Gustavo e Juliana estão associadas ao conceito de imagem instrumental, pois, em geral, os alunos demonstram uma compreensão organizada e técnica do conceito de limite. Eles são capazes de aplicar as ferramentas matemáticas de forma mais sistemática, resolvendo problemas de maneira organizada e com um maior entendimento das relações envolvidas, ainda que Juliana não tenha conseguido chegar ao resultado esperado. No entanto, ainda falta a conexão mais profunda e a abstração necessária para generalizar o conceito em diferentes contextos ou integrar os conceitos de maneira mais ampla. A compreensão deles está mais estruturada do que no estágio incipiente, mas ainda não atinge o nível de abstração e generalização do estágio relacional.

No Quadro 3, destacamos aspectos relacionados à capacidade de identificar padrões e propriedades essenciais nos conceitos matemáticos, ignorando detalhes desnecessários. Tall (2013, p. 153, tradução nossa) categoriza esses aspectos como sendo

> 1- Reconhecimento das propriedades de conceitos concebíveis; 2 - Descrição das propriedades percebidas no contexto dado; 3 - Definição de propriedades que agora são usadas como base para identificação e construção de conceitos concebíveis; 4 - Dedução de propriedades a partir das definições, usando métodos específicos de prova (euclidiano, algébrico e formal) para construir estruturas de conhecimento integradas.

Embora os objetos matemáticos possam ser criados de diversas maneiras, há um processo estruturado de desenvolvimento que orienta a sua compreensão. Essa sequência reflete a transformação gradual de ideias intuitivas em conhecimento matemático rigoroso e aplicando-as para o contexto apresentado nesta questão faremos as seguintes observações

1. Reconhecimento de Propriedades dos Conceitos: Identificar que, mesmo em funções descontínuas, os limites laterais podem existir, reconhecendo os pontos de salto ou descontinuidade.
2. Descrição de Propriedades no Contexto: Descrever como o comportamento da função à direita e à esquerda de um ponto específico afeta a existência do limite.
3. Definição de Propriedades como Base para Conceitos: Definir os critérios necessários para a existência de um limite (igualdade dos limites laterais, mesmo que a função seja descontínua).

4. Dedução de Propriedades e Construção de Estruturas: Utilizar métodos formais, como representações algébricas ou gráficas, para deduzir e comprovar a existência de limites em funções descontínuas.

No Quadro 4, destacaremos os aspectos desse processo que foram identificados nos participantes da pesquisa.

Quadro 4 - Caracterização das Respostas dos Estudantes à Questão 1

Estudante	Reconhecimento de Propriedades dos Conceitos	Descrição de Propriedades no Contexto	Definição de Propriedades como Base para Conceitos	Dedução de Propriedades e Construção de Estruturas
Amanda				
Carla	X			
Cláudia				
Gustavo	X	X	X	X
Juliana	X			
Lucas	X	X	X	X
Paulo				

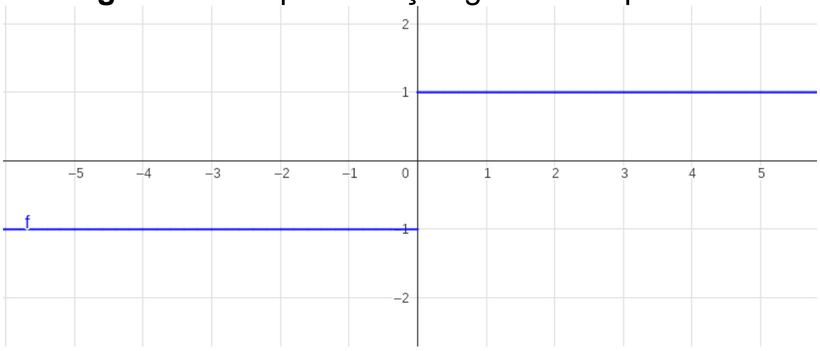
Fonte: Da autora

7.2. Análise da Questão 2

Foi solicitado que o aluno calculasse, caso exista, o $\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$. Além disso, que justificasse o valor encontrado.

O cálculo do limite de uma função modular requer a consideração dos diferentes ramos da função e a análise dos limites laterais nos pontos de interesse. Esse procedimento tem como propósito determinar se o limite existe e, em caso afirmativo, identificar o seu valor. O objetivo dessa análise é compreender o comportamento da função à medida que a variável independente se aproxima de um valor específico, mesmo em situações em que a função exibe mudanças abruptas devido à presença do módulo (valor absoluto). Para isso, espera-se que os estudantes dominem a definição da função modular e sejam capazes de resolver as indeterminações impostas pelos limites, especialmente neste caso em que a variável tende a zero, conforme pode ser observado no gráfico da Figura 24.

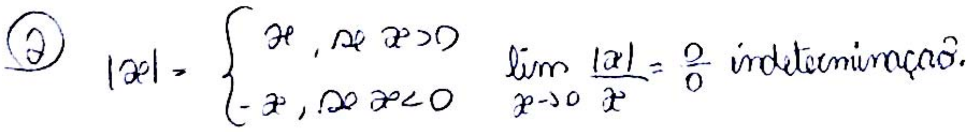
Figura 25 - Representação gráfica da questão 2



Fonte: Da autora

Resolução da questão 2 por Amanda

Figure 26 - Caracterização da questão 2 por Amanda



Fonte: Da autora

Na análise desta questão, a estudante Amanda foi capaz de apresentar um esboço da definição relevante para o cálculo de uma função modular, conforme ilustrado na Figura 26, ela percebeu que o módulo de x e o comportamento da função mudam dependendo do sinal de x, o que é essencial para a análise da questão. Contudo, ela apresentou dificuldades ao aplicar o conceito na resolução da indeterminação proposta, já que não explorou de maneira suficiente o comportamento da função nas vizinhanças do ponto $x = 0$. Também não usou nenhuma representação gráfica, que poderia ter sido um auxílio para entender o comportamento da função quando x se aproxima de zero.

Tall (2013) destaca que definições formais em matemática, fundamentadas em axiomas, dão origem a propriedades inevitáveis que se manifestam em representações corporificadas e simbólicas. Esse processo é crucial tanto para a compreensão dos conceitos matemáticos quanto para o desenvolvimento de teorias com aplicações práticas ou lógicas. No caso de Amanda, observou-se que ela foi capaz de apresentar a definição pertinente à solução da questão, mas não conseguiu atribuir significado a essa definição ao aplicá-la ao cálculo do limite. Esse processo, no entanto, seria essencial para uma compreensão mais profunda do conceito em questão.

Amanda compreende a estrutura da função, mas ainda não consegue analisar completamente seu comportamento nas proximidades de $x = 0$, o que indica que sua compreensão está no nível instrumental, sendo técnica e organizada, mas ainda não totalmente aprofundada. Ela percebe corretamente como o comportamento da função muda dependendo do sinal de x, o que mostra que entende a estrutura da função modular. Contudo, falta-lhe a abstração e profundidade necessárias para alcançar uma compreensão relacional, que envolveria uma análise mais abrangente e rigorosa dos conceitos.

Resolução da questão 2 por Carla

Figura 27 - Caracterização da questão 2 por Carla

Fonte: Da autora

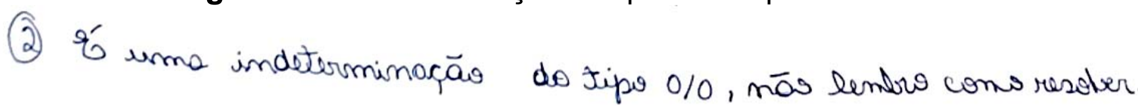
Conforme ilustrado na Figura 27, a resposta reflete que Carla entendeu que o comportamento da função depende do sinal de x, algo fundamental para interpretar o problema. Porém Equivocou-se na consideração dos valores de x, no primeiro caso para $x < 0$ e no segundo para $x > 0$.

A transição do mundo corporificado para o simbólico, segundo Tall (2013), consiste em traduzir o raciocínio baseado em experiências incorporadas para o simbolismo quantificado, representando um passo essencial no desenvolvimento do pensamento matemático. Essa transição permite que o aprendiz conecte intuição e formalização, possibilitando o estudo de conceitos mais abstratos e avançados. No caso de Carla, ao realizar essa transição, ela deixou de apoiar-se na representação gráfica, que seria crucial nesta questão para identificar o erro na consideração de $x \neq 0$, sendo o mais apropriado analisar $x < 0$ e $x > 0$, respectivamente.

Carla entendeu que o comportamento da função depende dos valores de x, se são maiores do que zero (terão sinal positivo) ou são menores do que zero (sinal negativo), o que é um aspecto fundamental para interpretar corretamente o problema. Essa percepção indica que ela já possui uma compreensão estruturada do conceito, indo além de uma simples memorização e começando a estabelecer relações entre os elementos envolvidos. Seu erro em desconsiderar as desigualdades de x sugere que seu entendimento ainda não está completamente refinado, mas ainda assim podemos indicar que possui um conceito imagem instrumental, já que neste nível o aluno organiza e aplica conceitos matemáticos, mas pode cometer erros operacionais ou não perceber todas as implicações do problema. Carla se encaixa nesse perfil, pois reconhece a estrutura da função modular, mas ainda não executa sua análise de maneira totalmente precisa.

Resolução da questão 2 por Cláudia

Figura 28 - Caracterização da questão 2 por Cláudia


2 É uma indeterminação do tipo 0/0, não lembro como resolver.

Fonte: Da autora

A estudante, ao identificar a presença de uma indeterminação na questão, demonstrou dificuldade em recordar o procedimento adequado para resolvê-la. Mesmo após uma orientação que incluiu a revisão do conceito necessário, que consistia em decompor a função modular em dois ramos distintos para determinar o limite lateral à direita e à esquerda, a abordagem não foi suficiente para que a aluna consolidasse a resposta correta, conforme descrito na Figura 28.

Para Tall (2013, p. 402, tradução nossa) “aprender a pensar matematicamente é uma experiência cumulativa que depende do que já foi vivenciado, e o aprendizado atual afetará o que e como aprenderemos no futuro”. Por exemplo, aprender aritmética é essencial para compreender álgebra, que, por sua vez, fundamenta o cálculo, sendo assim uma imagem conceitual “esquecida” pode comprometer ou causar lacunas na aprendizagem de outros conceitos.

Cláudia identificou a presença de uma indeterminação, o que indica algum nível de reconhecimento do problema, mas não conseguiu recordar o procedimento correto para resolvê-la; a dificuldade de Cláudia em lembrar e aplicar o método adequado sugere que sua compreensão ainda está pouco desenvolvida. Mesmo após receber uma orientação e revisar o conceito necessário, Cláudia não conseguiu consolidar a resposta correta, o que indica que sua dificuldade não se limita apenas à recordação do conteúdo, mas também à sua aplicação prática. Sugerindo que Cláudia ainda não internalizou o conceito de forma significativa.

Sua dificuldade em estruturar o conhecimento e sua dependência de instruções externas sugere que seu entendimento ainda não se consolidou, impedindo-a de realizar conexões mais profundas entre os conceitos matemáticos envolvidos e reflete um nível de conceito imagem incipiente, pois ela reconhece a existência de uma indeterminação, mas não consegue aplicar o procedimento adequado para resolvê-la, mesmo após uma revisão do conceito.

Resolução da questão 2 por Gustavo

Figura 29 - Caracterização da questão 2 por Gustavo

2 $\lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = \frac{|0^-|}{0^-} \cdot \frac{(+)}{(-)} = (-)$ e $\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = \frac{|0^+|}{0^+} \cdot (+)$

Os limites laterais existem mas são diferentes, logo $\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$ não existe.

Fonte: Da autora

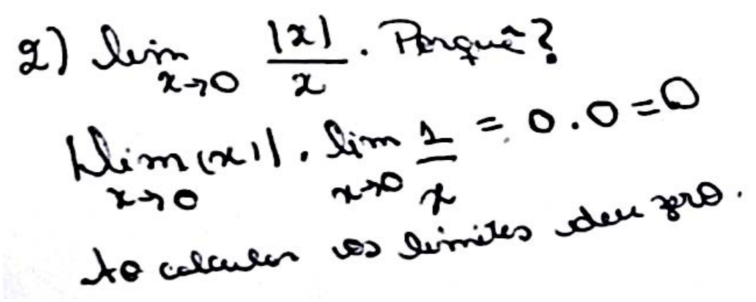
A Figura 29 apresenta a solução elaborada por Gustavo, que, embora não tenha demonstrado pleno domínio da definição do cálculo de limite para uma função modular, conseguiu, de maneira intuitiva, responder à questão. Ele mostrou que a indeterminação analisada tenderia a valores positivos quando considerada à direita e a valores negativos quando analisada à esquerda.

Ainda que Gustavo não tenha usado uma representação gráfica para desenvolver seu raciocínio no mundo corporificado, ele utiliza de sua experiência intuitiva para estabelecer uma relação para solução desta questão, Tall (2013) enfatiza que a compreensão matemática começa de maneira concreta, com representações visuais e físicas, mas progride para o pensamento abstrato e formal. Esse processo de transição é crucial para o desenvolvimento do conhecimento matemático, onde inicialmente os alunos se apoiam em experiências sensoriais e imagens mentais antes de avançarem para a lógica abstrata e formal da matemática. Apesar de Gustavo não ter conseguido expressar algebricamente a solução da questão, isso não o impediu de chegar a uma solução ainda que intuitiva característica do mundo corporificado em transição para o simbólico.

Apesar da falta de domínio formal, Gustavo conseguiu perceber que a indeterminação analisada tenderia a valores positivos à direita e negativos à esquerda, ou seja, em vez de seguir um método matemático formal, ele utilizou uma abordagem intuitiva para responder à questão. Sua resposta contem aspectos de um conceito imagem incipiente no que tange a falta de domínio da definição e procedimentos de resolução de limite de uma função modular, e aspectos de um conceito imagem instrumental, já que essa falta de domínio não o impediu que conseguisse estabelecer uma análise a partir dos limites laterais, relacionando então com diferentes elementos do problema. Isso indica que Gustavo está em transição entre os dois níveis, possuindo uma compreensão estruturada, mas ainda apoiada em intuições e sem o domínio completo do conceito.

Resolução da questão 2 por Juliana

Figura 30 - Caracterização da questão 2 por Juliana



Fonte: Da autora

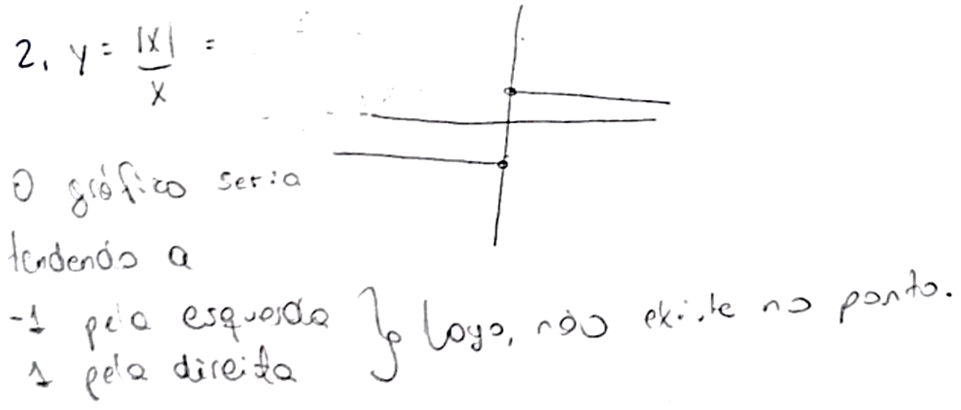
De acordo com a Figura 30, a aluna Juliana utilizou uma abordagem intuitiva como estratégia para resolver a questão. Ela aplicou as propriedades dos limites, separando o limite original em dois limites distintos, correspondentes a funções cujo valor do limite ela já conhecia. Essa abordagem evidenciou sua tentativa de simplificar o problema ao recorrer a conceitos previamente consolidados. Porém, não conseguiu chegar a conclusão correta da questão, pois se equivocou não apenas no cálculo do $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$, o qual ela afirmou ser zero, mas também ao utilizar o teorema que diz que, se o $\lim_{x \to y} f(x) = L$, então $\lim_{x \to y} |f(x)| = |L|$, sem verificar se as condições necessárias eram atendidas, já que sua validade seria atendida se o limite da função no ponto existisse, o que neste caso não procede. Então se ela tivesse feito a verificação perceberia que os limites laterais não convergem, pois quando se aproxima pela direita do zero tende a $+\infty$ e pela esquerda $-\infty$, assim essa propriedade não poderia ser utilizada.

Tall (1981) discute as dificuldades que surgem à medida que os alunos avançam nos estudos de análise matemática. Com o aumento da sofisticação dos conceitos, as representações visuais ou intuitivas podem não ser mais suficientes ou adequadas para capturar a essência dos conceitos formais. No caso em questão, a utilização das propriedades de limite não foi suficiente para estabelecer as relações que resolveriam a questão, pois trata-se de um conceito mais avançado. No entanto, esse conceito poderia ter sido melhor compreendido por meio da utilização de uma representação gráfica.

Juliana reflete um conceito imagem incipiente, pois ela tentou resolver a questão utilizando uma abordagem intuitiva, separando o limite original em dois limites distintos, baseando-se em propriedades dos limites que já conhecia, mas sem avaliar adequadamente sua validade. Neste nível, os alunos tendem a aplicar regras matemáticas de forma mecânica, sem compreender totalmente suas restrições de acordo com Domingos (2003). O erro de Juliana indica que ela reconhece algumas propriedades dos limites, mas ainda não compreende completamente os critérios que determinam sua validade.

Resolução da questão 2 por Lucas

Figura 31 - Caracterização da questão 2 por Lucas



Fonte: Da autora

Para resolver essa questão Lucas reconheceu corretamente que o limite não existe em $x = 0$, para isso utilizou representações visuais (gráfico) para justificar sua resposta, conforme pode ser observado na Figura 31, o que pode ajudar na compreensão inicial do problema.

Lucas demonstrou operar de maneira satisfatória no mundo corporificado e simbólico, ele constrói suas

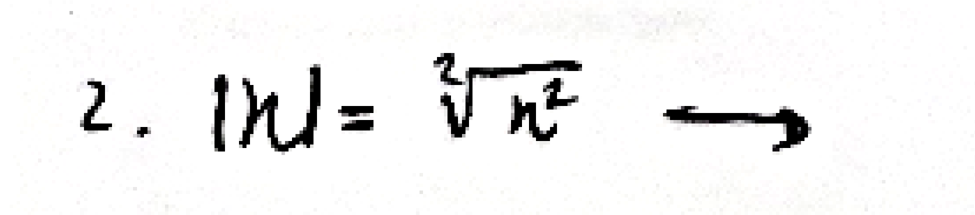
> imagens conceituais baseadas em [suas] experiências anteriores, incluindo tanto imagens mentais quanto processos simbólicos. O pensamento natural se constrói a partir de experiências naturais usando experimentos mentais e operações simbólicas (Tall 2013, p. 284, tradução nossa).

Ele demonstra grande segurança em suas respostas, o que lhe permite conectar o aprendizado inicial, fundamentado na experiência, ao pensamento avançado, baseado na abstração. Esse processo o auxilia na preparação para lidar com conceitos mais complexos, como a formalização do limite.

O conceito imagem de Lucas reflete um nível instrumental por demonstrar organização e aplicação técnica dos conceitos, mas também apresenta indícios de um nível relacional, pois ele utiliza representações gráficas para justificar sua resposta e estabelecer conexões entre diferentes formas de representação. Isso sugere que sua compreensão do conceito de limite está bem desenvolvida e caminha para um estágio mais avançado de abstração e generalização.

Resolução da questão 2 por Paulo

Figura 32 - Caracterização da questão 2 por Paulo



Fonte: Da autora

O aluno Paulo apresentou em sua solução a propriedade do módulo como ponto de partida, mas não conseguiu avançar significativamente na resolução da questão, como pode ser observado na Figura 32. Durante a explicação, relatou que "sentia que sabia um pedaço, só que tinha, sei lá, 70% das coisas que eu não lembrava." Ao concluir sua análise, afirmou acreditar que "essa questão tem limite", sem, contudo, justificar de forma clara sua percepção. Sua argumentação baseou-se na comparação com a primeira questão, que era descontínua, mas possuía limites laterais; a partir disso, presumiu que a questão em análise também teria um limite, embora essa suposição não tenha sido fundamentada de maneira precisa.

Segundo Tall e Vinner (1981), à medida que os conceitos se tornam mais sofisticados, as representações visuais ou intuitivas (como a comparação com limites laterais) podem não ser suficientes para capturar a essência dos conceitos formais. Paulo ainda depende de uma análise superficial baseada em intuições, sem a aplicação plena do raciocínio formal que é necessário para compreender e justificar o conceito de limite de maneira precisa e rigorosa.

A situação de Paulo seria descrita por Tall (2013) como um exemplo de dificuldades que surgem quando o aluno ainda não consegue integrar adequadamente o raciocínio intuitivo e corporificado com a abstração necessária para resolver problemas formais.

Durante sua explicação, ele afirmou acreditar que "essa questão tem limite", mas não conseguiu justificar de forma clara essa percepção. Sua argumentação baseou-se em uma comparação com outra questão similar, sem verificar formalmente as condições para a existência do limite, isto sugere que ele ainda está em um estágio inicial de construção do conceito de limite, ou seja, seu conceito imagem é incipiente. Os alunos nesse nível, na visão de Domingos (2003), costumam confiar em percepções intuitivas ou comparações superficiais em vez de aplicar definições formais e procedimentos estruturados. O fato de Paulo não apresentar uma justificativa rigorosa e embasar sua resposta apenas em uma analogia reforça que sua compreensão ainda é incipiente.

Reflexões da questão 2

As respostas dos alunos mostram que a aprendizagem do conceito de limite está profundamente vinculada à transição entre o raciocínio intuitivo e o formal, conforme descrito por Tall (2013). Enquanto alguns alunos como Lucas conseguem integrar esses dois mundos de maneira eficaz, outros ainda enfrentam dificuldades por não conseguirem aplicar a formalização necessária ou por dependerem excessivamente de intuições sem rigor. A utilização de representações gráficas, a compreensão das definições formais e o desenvolvimento de uma imagem conceitual coerente são aspectos chave para a compreensão plena e a resolução de problemas complexos no estudo de limites. A teoria de Tall (2013) ajuda a contextualizar essas dificuldades e mostra que o aprendizado matemático é um processo cumulativo que depende da construção e da integração de experiências anteriores.

O conceito imagem instrumental apresentado por Amanda, Carla, Gustavo e Lucas sobre o módulo de uma função mostra que eles possuem uma compreensão organizada e técnica do conceito. Eles reconhecem a estrutura da função modular, sabem que seu comportamento depende do sinal de x e conseguem aplicar definições matemáticas corretamente. No entanto, ainda apresentam dificuldades em analisar completamente o comportamento da função em pontos críticos e em conectar diferentes representações de maneira mais abstrata e generalizada.

Para avançarem para um nível relacional, como Lucas já o faz, os demais alunos precisariam desenvolver uma maior flexibilidade na interpretação dos conceitos, integrando representações algébricas e gráficas de forma mais fluida e aprofundada, além de aprimorar a análise crítica das condições de aplicação das definições matemáticas.

O conceito imagem incipiente apresentado por Cláudia, Juliana e Paulo sobre o módulo de uma função reflete um conhecimento inicial e não estruturado. Eles reconhecem que o módulo afeta o comportamento da função, mas não conseguem aplicá-lo corretamente devido a uma compreensão fragmentada e a dificuldades na formalização matemática. A transição para um nível mais avançado depende, da construção de um conhecimento mais organizado e da prática na aplicação rigorosa das definições e propriedades da função modular.

O Quadro 5 representa a mesma ideia do anterior com as quatro estruturas que orienta o processo de compreensão de um conceito, neste caso o conceito de limite de uma função modular. Ao aplicar esse conceito ao contexto apresentado nesta questão, podemos fazer as seguintes observações:

1. Reconhecimento de Propriedades dos Conceitos: Identificação de propriedades básicas da função modular, como a continuidade em determinados intervalos e os pontos de não-diferenciabilidade;
2. Descrição de Propriedades no Contexto: Análise das características específicas no contexto dos limites, como o comportamento da função modular à direita e à esquerda de um ponto em casos de descontinuidade ou continuidade;
3. Definição de Propriedades como Base para Conceitos: Uso das propriedades identificadas para definir formalmente o limite da função modular, considerando abordagens e sua relação com a definição de limite;
4. Dedução de Propriedades e Construção de Estruturas: Aplicação de métodos formais para provar limites de funções modulares, como demonstrações algébricas e gráficos, integrando o conhecimento em uma estrutura mais ampla de análise matemática.

O Quadro 5 integrará nossas observações dessas estruturas nas respostas apresentadas pelos alunos

Quadro 5 - Caracterização das Respostas dos Estudantes à Questão 2

Estudante	Reconhecimento de Propriedades dos Conceitos	Descrição de Propriedades no Contexto	Definição de Propriedades como Base para Conceitos	Dedução de Propriedades e Construção de Estruturas
Amanda	X	X		
Carla	X	X	X	
Cláudia				

Gustavo	X	X		
Juliana				
Lucas	X	X	X	
Paulo				

Fonte: Da autora

7.3. Análise da questão 3

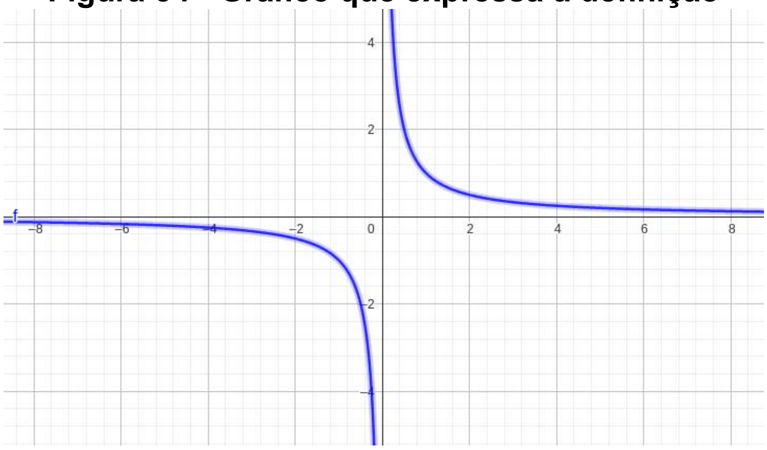
Após as questões anteriores, que podiam ser resolvidas de forma intuitiva e evidenciavam características de dois dos mundos de David Tall (2013) — o simbólico e o corporificado —, foi proposta uma questão que exigia uma formalização. Para isso, utilizou-se uma questão parecida ao que geralmente é encontrada nos livros de Cálculo I e Análise, e que são adotados nas aulas. A proposta da atividade era que os estudantes provassem por meio da definição formal que o $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$.

Figura 33 - Definição formal do Livro Análise

4. Temos $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$. Com efeito, dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, podemos obter $\delta \in \mathbb{N}$ tal que $\delta > \frac{1}{\varepsilon}$. Então $x > \delta \Rightarrow \frac{1}{x} < \frac{1}{\delta} < \varepsilon$, ou seja, $x > \delta \Rightarrow$ $\Rightarrow \left| \frac{1}{x} - 0 \right| < \varepsilon$.

Fonte: Lima, 1992 p. 87

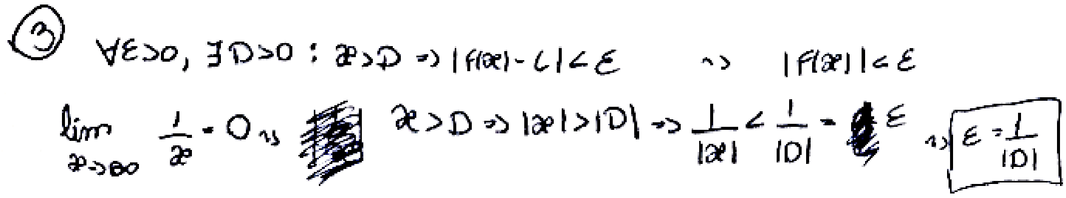
Figura 34 - Gráfico que expressa à definição



Fonte: Da autora

Resolução da questão 3 por Amanda

Figura 35 - Caracterização da questão 3 por Amanda



Fonte: Da autora

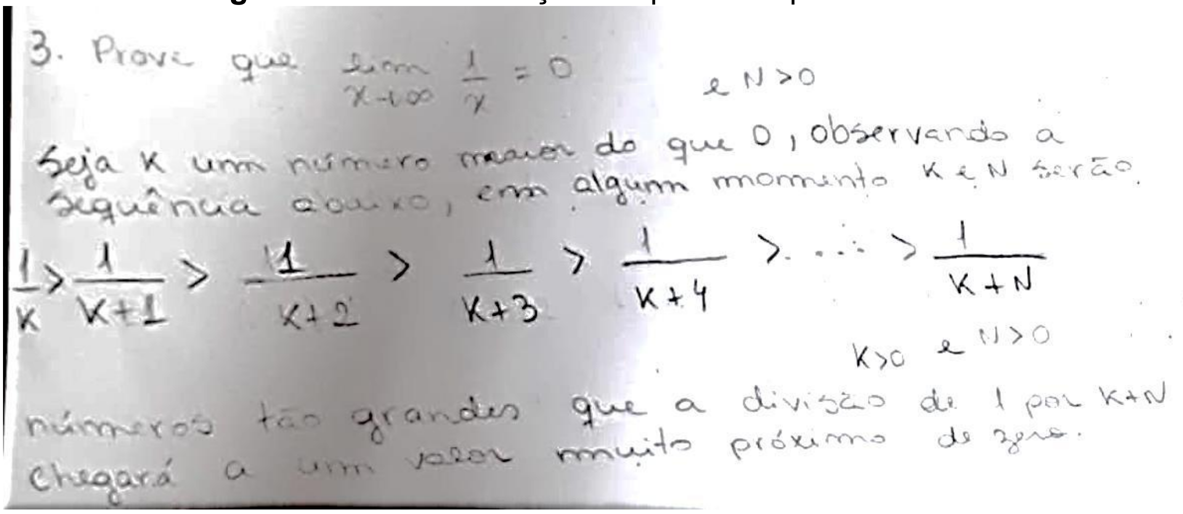
Relacionando então a Figura 33 com a Figura 35, onde a primeira é a definição formal esperada que o aluno consiga desenvolver e a segunda expressa a imagem conceitual da aluna.

Sendo assim observamos que ela usa os quantificadores os quais Tall (2013, p. 273, tradução nossa) considera “compreender essa definição é problemático, principalmente porque ela possui vários quantificadores”, para ele a dificuldade em entender a definição está na presença de múltiplos quantificadores lógicos ($\forall$ e $\exists$) que são alinhados. Cada quantificador adiciona um nível de complexidade lógico, exigindo que o aluno ou matemático acompanhe condições alternadas de "para todo" e "existe", o que pode ser confuso. Apesar do desafio Amanda esboça bem a ideia utilizando os quantificadores, ela apenas não precisava usar o módulo de D porque $D > 0$. Quando ela escreve $\epsilon = \frac{1}{|D|}$, na realidade a escolha é do $D = \frac{1}{\varepsilon}$. Afim de que se $|x| < D \Rightarrow \left|\frac{1}{x} - 0\right| < \frac{1}{D} = \varepsilon$, porém sua escolha não afeta no entendimento de sua prova apresentando assim características de um conceito imagem relacional com a aplicação da definição formal e a tentativa de generalização.

A definição de limite no cálculo diferencial, expressa com quantificadores lógicos formais, é um exemplo clássico do pensamento do mundo formal. Para muitos alunos, o salto para o mundo formal é difícil porque exige abandonar intuições e confiar exclusivamente em lógica abstrata, o que Amanda demonstra nesta questão te alcançado uma compreensão satisfatória.

Resolução da questão 3 por Carla

Figura 36 - Caracterização da questão 3 por Carla



Fonte: Da autora

A resposta da aluna, apresentada na Figura 36, não utiliza a definição formal de limite conforme descrita na Figura 33, já que em nenhum momento ela menciona ε, nem estrutura sua argumentação de forma a atender a essa definição.

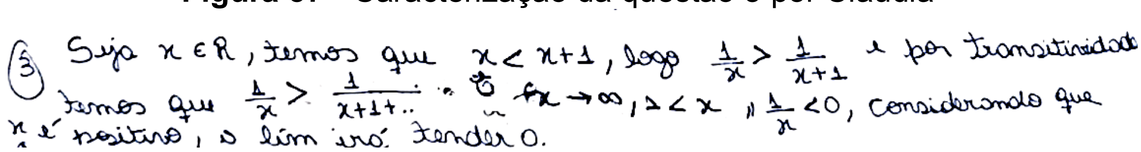
Embora Carla observe corretamente o comportamento da função, ela não define K nem N de forma clara. Na formalização correta, seria necessário expressar N como uma função de ε, garantindo que $\frac{1}{x} < \varepsilon$ quando $x > N$. Expressões como "em algum momento $K + N$" e "valores muito próximos de zero" carecem de rigor matemático, pois não especificam, em termos de ε, quão próximos esses valores realmente estão.

Apesar de apresentar uma boa intuição sobre o comportamento do limite e tentar representá-lo simbolicamente, a resposta não atende aos critérios exigidos pela definição formal. A transição do mundo corporificado e simbólico para o formal é, de fato, desafiadora. No caso de Carla, essa dificuldade, segundo Tall (2013) ocorre porque seu conceito imagem de limite está fundamentado em intuições baseadas em gráficos ou cálculos numéricos, o que pode entrar em conflito com a definição formal e rigorosa de limite.

Sua resposta revela alguns aspectos dos conceitos imagem instrumental, conforme descritos por Domingos (2003). Este nível é caracterizado pela aplicação das definições e conceitos matemáticos de forma organizada, mas ainda sem um rigor formal completo. O fato de Carla compreender qualitativamente o comportamento da função, mas não estruturar sua argumentação em termos da definição, indica que sua compreensão está nesse nível. Então para avançar para o nível relacional, ela ainda precisa refinar sua argumentação para alcançar uma compreensão plenamente relacional do conceito de limite.

Resolução da questão 3 por Cláudia

Figura 37 - Caracterização da questão 3 por Cláudia



Fonte: Da autora

Tomando por base a demonstração formal apresentada na Figura 33, a resposta da aluna descrita na Figura 37 não faz uso da definição formal de limite, que é essencial para uma demonstração rigorosa. Embora mencione a transitividade para justificar o decrescimento de $\frac{1}{x}$, isso não substitui a necessidade de provar formalmente que $\frac{1}{x} < \varepsilon$ para $x > N$, com N adequadamente escolhido.

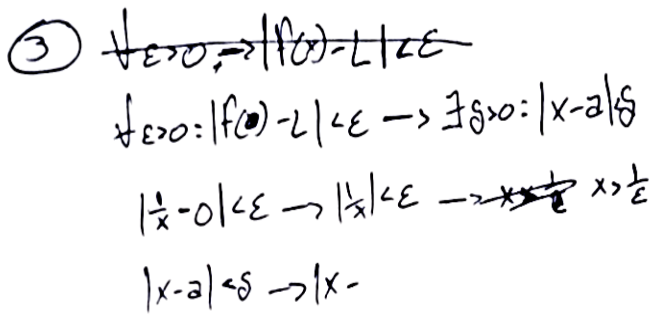
A frase final "o limite tende a zero" é ambígua e não atende ao rigor matemático. É necessário concluir que, dado qualquer $\varepsilon > 0$, é possível escolher um $N > 0$ que satisfaça a condição da definição formal.

Ainda assim a aluna apresenta uma boa intuição e usa corretamente a propriedade de decrescimento de $\frac{1}{x}$. O que reflete uma compreensão estrutural sólida, com uma boa intuição sobre o problema e o uso correto de algumas propriedades da função demonstrando aspectos do conceito imagem instrumental e relacional, mas ainda está consolidando a capacidade de abstração e generalização necessárias para atingir o nível relacional pleno.

Para Tall (2013) o conceito de limite é formalizado com base em estruturas rigorosas e quantificadores lógicos ($\forall\ e\ \exists$), garantindo que ele seja independente de qualquer intuição visual ou operacional, e esses quantificadores não foram utilizados para a prova desta questão.

Resolução da questão 3 por Gustavo

Figura 38 - Caracterização da questão 3 por Gustavo



Fonte: Da autora

Tomando por base a Figura 33 e analisando então a resposta do aluno apresentada na Figura 38, é possível perceber que ele começou corretamente com a estrutura da definição formal de limite, porém em algumas partes, ele mistura a notação formal (usando $\forall \varepsilon > 0$) com passos intermediários menos rigorosos, tornando o argumento confuso e difícil de acompanhar.

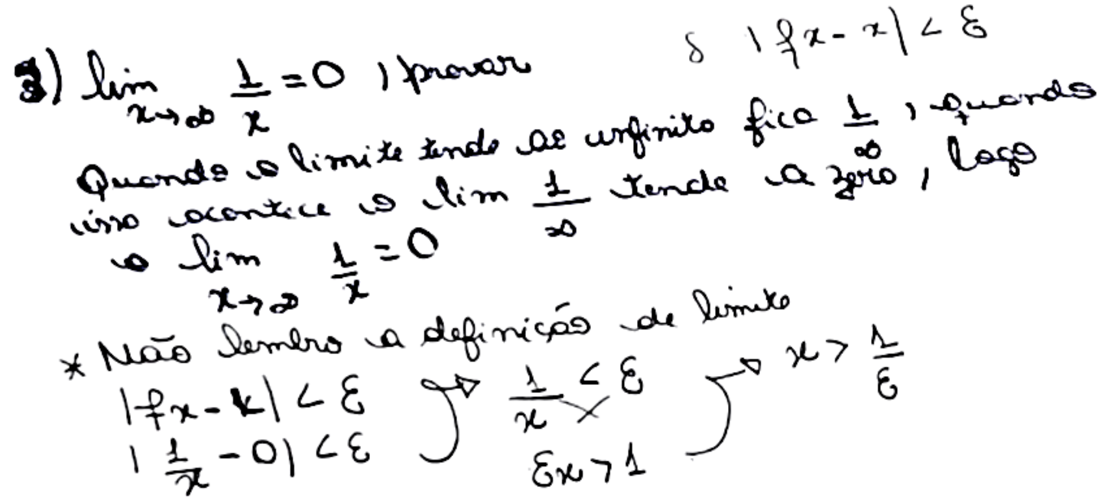
Ele inicia com a definição geral de limite, mas não conecta cada passo claramente ao problema específico do limite de $\frac{1}{x}$ quando $x \to \infty$. Faltou amarrar as etapas para explicar como a escolha de $\delta = \frac{1}{\varepsilon}$ resolve a desigualdade e satisfaz a definição formal, onde δ é um número real positivo que funciona como um "limite mínimo" para x. Essa tentativa de aplicar a definição formal e estabelecer relações entre variáveis é de acordo com Domingos (2003) um indicativo de um movimento em direção ao conceito imagem relacional, no entanto, as inconsistências no rigor matemático e a falta de abstração completa mostram que o aluno ainda está consolidando sua compreensão nesse nível.

Apesar do formalismo épsilon-delta ser uma ferramenta fundamental que permitiu o desenvolvimento rigoroso da análise matemática, ela "frequentemente é problemática para os estudantes que encontram o cálculo pela primeira vez" (Tall

2013, p. 289, tradução nossa) a utilização dos quantificadores de maneira apropriada sempre é motivo de confusão entre os estudantes, inclusive o foi também para Gustavo.

Resolução da questão 3 por Juliana

Figura 39 - Caracterização da questão 3 por Juliana



Fonte: Da autora

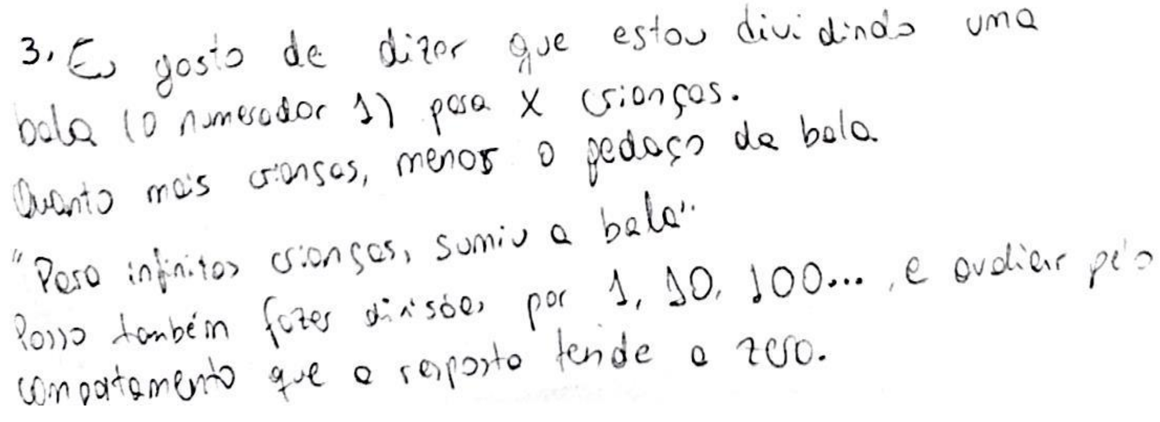
A Figura 39 mostra que a aluna identificou corretamente que, quando $x \to \infty$, o valor de $\frac{1}{x}$ se aproxima de zero. A justificativa inicial ("quando o limite tende ao infinito, fica $\frac{1}{x}$, e quando isso acontece, $\frac{1}{x}$ tende a zero") reflete uma compreensão qualitativa da propriedade do limite. Porém não faz uso explícito da definição formal de limite. A explicação inicial é mais baseada em intuição e não formaliza o conceito de maneira rigorosa, deixando de lado termos como "para todo $\epsilon > 0$, existe $M > 0$ tal que...".

Juliana demonstra uma compreensão inicial do conceito de limite, baseada em observações intuitivas e qualitativas do comportamento da função. Essa compreensão é suficiente para identificar o comportamento de $\frac{1}{x}$, mas não para articular uma resposta formal e rigorosa, sua resposta possui indícios de um conceito imagem instrumental, já que tenta aplicar a definição formal do limite. No entanto, sua execução apresenta erros que revelam uma compreensão limitada do uso da ferramenta indicando assim que há uma mudanças do conceito imagem incipiente para o início da construção de um conceito imagem instrumental.

A aluna tentou aplicar a definição formal do limite usando ϵ, embora tenha cometido alguns erros na execução e apresentando muito mais uma abordagem intuitiva do que formal. Isso demonstra esforço em trabalhar de maneira rigorosa, porém Tall (2013) explica que essa compreensão intuitiva, é baseada em percepções sensoriais e experiências práticas do mundo corporificado, não sendo suficiente para capturar o rigor matemático da definição épsilon-delta, que exige precisão lógica e abstração.

Resolução da questão 3 por Lucas

Figura 40 - Caracterização da questão 3 por Lucas


3. Eu gosto de dizer que estou dividindo uma bala (o numerador 1) para X crianças.
Quanto mais crianças, menor o pedaço da bala.
"Para infinitas crianças, sumiu a bala".
Posso também fazer divisão por 1, 10, 100... e avaliar pelo comportamento que a resposta tende a zero.

Fonte: Da autora

Embora a explicação intuitiva seja válida, ela não aborda o rigor da definição formal de limite. Frases como "sumiu a bala" são ilustrativas, mas podem ser vistas como vagas em um contexto formal. Isso demonstra uma dificuldade em transitar do pensamento intuitivo para o rigor matemático exigido, e sobre isso o aluno faz a seguinte explanação: “Essa demonstração que eles usam do épsilon e do delta eu vi em cálculo 1 vagamente.” Esta afirmação demonstra, em tese, que o aluno tem uma boa base intuitiva, mas precisa de orientação para alcançar o nível formal exigido em matemática avançada. A resposta de Lucas é caracterizada por uma forte dependência da intuição e pela ausência de rigor formal e apesar das dificuldades, Lucas tem conhecimento básico das ferramentas matemáticas formais, como a definição de limite com ε e δ, mas ainda não sabe utilizá-las adequadamente. Essas características estão presentes em um estágio inicial do conceito imagem instrumental segundo Domingos (2003), precisando de apoio para consolidar a aplicação dessas ferramentas, de modo que podemos afirmar que seu conceito imagem está em transição do incipiente para o instrumental.

Em outra perspectiva, a explicação de Lucas evidencia que ele se encontra no mundo corporificado de Tall (2013), pois ele faz uma analogia com um objeto que ao sofrer muitas divisões acaba ficando tão pequeno que desaparece, ou seja, o comportamento de uma ação que se aproxima de zero a medida que as divisões se tornam cada vez maiores, o que ele revela ao inserir os três pontos.

O desafio da transição do mundo corporificado ou simbólico, para o formal surge segundo Tall (2013) porque os estudantes precisam abandonar parcialmente suas intuições do mundo corporificado e simbólico para adotar o pensamento abstrato e lógico do mundo formal, o que pode ser desconfortável, pois as intuições sensoriais frequentemente entram em conflito com as definições formais mais abstratas.

Resolução da questão 3 por Paulo

Paulo encontrou dificuldades de relacionar a teoria com a prática. Isso é comum em tópicos abstratos como a definição formal de limite, que exige uma compreensão conceitual profunda e habilidade de traduzir ideias em passos formais. Ao ser questionado sobre essa questão ele relatou que: "O limite de qualquer n, sendo n um número real, sobre x, quando x termina em infinito, dava zero. Porque não importa o quão grande é o infinito." Isso sugere que o aluno entendeu que, à medida que x cresce indefinidamente, o denominador x domina o numerador n, reduzindo o valor da fração. Porém a explicação carece de fundamentação matemática formal, como a definição rigorosa de limite.

O aluno comenta também que: "Isso daqui eu sei que estava no livro de análise, eu vi ela no livro de análise, mas eu não lembrava como seguir." Este fato demonstra que ele reconhece a relevância do tema e onde buscar informações, indicando um esforço ou familiaridade inicial com o assunto, revelando então que o aluno tem memória associativa sobre o conteúdo, mesmo que não tenha conseguido aplicá-lo.

O uso da memória associativa sugere que Paulo está no início de sua construção de imagens conceituais para conceitos mais avançados. No entanto, a falta de prática formal e conexão profunda com a teoria limita sua capacidade de aplicação. Tall (2013) enfatiza que o aprendizado matemático é um processo cumulativo. Paulo demonstra estar no mundo corporifica, onde reconhece elementos importantes do conceito, mas ainda não desenvolveu completamente o raciocínio formal necessário.

Explorando o conceito imagem evocado por este aluno, é possível analisar a dificuldade que este possui em conectar teoria e prática, sendo essa uma característica de um conceito imagem incipiente, na qual os conceitos são reconhecidos, mas ainda não estão suficientemente claros ou estruturados para serem aplicados de forma autônoma e consistente. A menção de Paulo ao fato de que o conceito estava no "livro de análise" indica que ele possui memória associativa sobre o tema, mas não um domínio ativo do mesmo. Domingos (2003, p. 133) explica que no conceito imagem incipiente uma “das principais propriedades que os alunos evocam neste nível estão permeadas pela memorização e pelo ventriloquismo, sendo os alunos capazes de as referir verbalmente mas não conseguindo dar-lhe o significado esperado”.

Reflexão da questão 3

De maneira geral, as respostas apresentadas pelos alunos refletem os diferentes estágios de desenvolvimento conceitual descritos por Tall (2013) no contexto do aprendizado matemático. Carla, Cláudia e Juliana mostram que, embora os alunos possuam uma boa intuição sobre o comportamento do limite, essa abordagem não é suficiente para alcançar o rigor formal necessário. Tall (2013) destaca que o aprendizado começa no mundo corporificado, onde a intuição visual ou sensorial predomina, mas deve progredir para o mundo formal, onde a abstração é essencial. Paulo e Lucas demonstram uma compreensão inicial dos conceitos, reconhecendo sua relevância e aplicabilidade, mas enfrentam dificuldades em traduzi-los em termos formais. Isso reforça a ideia de Tall de que a construção de imagens conceituais é um processo cumulativo e gradual, que requer prática e exposição contínua aos conceitos. Gustavo e Amanda ilustram a transição os dois mundos, pois eles são os únicos estudantes que fazem o uso apropriado da definição formal, Gustavo ainda com alguns erros de associação, mas ambos mostram que é possível vencer o desafio da complexidade dos quantificadores lógicos envolvidos na definição.

Em relação ao conceito imagem de cada aluno percebemos que Carla e Cláudia se apoiam em procedimentos ou intuições parciais, mas sem demonstrar uma compreensão completa ou relacional, embora elas consigam identificar aspectos gerais, como o comportamento da função; sua abordagem é limitada pela ausência de uma conexão profunda entre os passos realizados e os conceitos teóricos subjacentes. Juliana apresenta uma tentativa de formalização o que reflete um uso inicial de ferramentas matemáticas sem pleno entendimento das conexões mais abstratas, já Lucas apresenta uma explicação prática que, apesar de correta em termos qualitativos, é insuficiente para uma demonstração formal, esses alunos diferem mais do grupo inicial, devido a utilização de conceitos mais intuitivos. Eles aplicam estratégias práticas, mas sem um domínio relacional que permita conectar formalmente as definições com as soluções, Domingos (2003) explica que o conceito imagem instrumental enfatiza a execução de passos ou o uso de ferramentas, sem uma compreensão profunda do "porquê" subjacente aos procedimentos.

Paulo exibe uma compreensão parcial e fragmentada, com limitações na formalização e aplicação prática; o entendimento dele se limita a uma intuição qualitativa, sem rigor matemático ou conexões profundas entre os conceitos, com aspectos de memorização e ventriloquismo.

Tanto Amanda quanto Gustavo mostram indícios de um conceito imagem relacional, conectando o comportamento da função $\frac{1}{x}$ a limites laterais e às implicações do sinal de x. Eles percebem que a direção de aproximação influencia o resultado, evidenciando que compreendem as relações subjacentes entre variáveis, mas Amanda parece mais próxima de alcançar uma compreensão relacional plena, enquanto Gustavo ainda precisa fortalecer a conexão entre conceitos estruturais e as formalizações necessárias.

Embora cada aluno apresente diferentes níveis de compreensão, todos mostram algum grau de esforço e familiaridade com o conceito de limite. Isso evidencia que, com intervenções pedagógicas adequadas, como a utilização de representações gráficas, pois nesta questão nenhum aluno fez uso deste recurso, e a prática de definições formais, há um grande potencial para avanço no raciocínio formal.

O Quadro 6 foi elaborado com base na sequência de quatro etapas para a descrição do conceito matemático exigido nesta questão, conforme descrito por Tall (2013) e previamente mencionado. Abaixo, estão os requisitos analisados em cada uma dessas etapas:

1. Reconhecimento de Propriedades dos Conceitos: Identificar características fundamentais da função $f(x) = \frac{1}{x}$;
2. Descrição de Propriedades no Contexto: Explorar as propriedades no contexto dos limites;
3. Definição de Propriedades como Base para Conceitos: Definir formalmente o comportamento assintótico da função;
4. Dedução de Propriedades e Construção de Estruturas: Usar as definições formais de limite para provar as propriedades deduzidas.

O Quadro 6 refere-se ao que observamos dessas estruturas nas respostas dos alunos.

Quadro 6 - Caracterização das Respostas dos Estudantes à Questão 3

Estudante	Reconhecimento de Propriedades dos Conceitos	Descrição de Propriedades no Contexto	Definição de Propriedades como Base para Conceitos	Dedução de Propriedades e Construção de Estruturas
Amanda	X	X	X	X
Carla	X	X		
Cláudia	X	X		
Gustavo	X	X	X	X
Juliana	X	X	X	
Lucas	X	X		
Paulo	X			

7.4. Análise da questão 4

Esta questão foi apresentada no Enade de 2017 com o objetivo de não apenas verificar a capacidade técnica do aluno em calcular limites, mas também sua habilidade de aplicar conceitos fundamentais (como o teorema do confronto) e interpretar desigualdades em contextos avançados. A Figura 40 mostra o problema abordado e a Figura 41 o gráfico que forneceria suporte para resolução.

Figura 41 - Questão do Enade

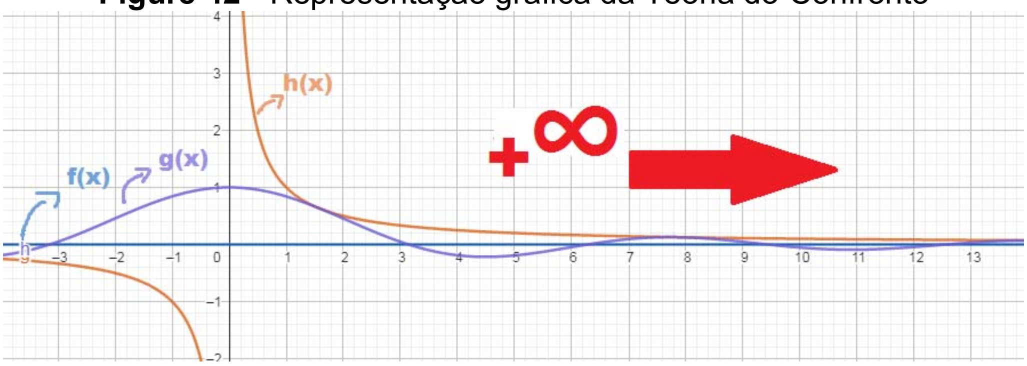
Para calcular o limite $L = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-\text{sen}\, x}{x}$, os argumentos podem ser desenvolvidos usando as desigualdades $0 \leqslant \left|\dfrac{\text{sen}\, x}{x}\right| \leqslant \dfrac{1}{x}$, válidas para todo real $x > 0$.

A partir desses argumentos, conclui-se que L é igual a

A) -1.
B) 0.
C) 1.
D) ∞.
E) $-\infty$.

Fonte: Enade 2017 - Questão 12

Figure 42 - Representação gráfica da Teoria do Confronto



Fonte: Mevs et al. (2013, p. 51)

Após a resolução de questões mais diretas e objetivas envolvendo limite, esta atividade enfatiza a relevância da prática com desigualdades e conceitos fundamentais em análise matemática, elementos essenciais para o aprofundamento e consolidação do entendimento no cálculo diferencial. Além disso, busca avaliar as habilidades dos alunos em calcular limites de funções definidas por partes e em analisar o comportamento dessas funções em pontos específicos, exigindo uma abordagem rigorosa e fundamentada. Esta questão integrou a prova do Enade 2017, avalição aplicada aos cursos de Licenciatura em Matemática em 2017, a qual foi respondida por alunos concluintes no respectivo ano, uma analise geral dos resultados foi proposto por Mevs et al. (2023).

Figura 43 - QR Code para acessa o Artigo

Acesse no QR Code ao lado a fim de acessar o artigo que explora o tema **"Avaliação do Cálculo Diferencial e Integral pelo Enade em um curso de Licenciatura em Matemática do Rio Grande do Sul"** de Mevs, Dynnikov e Pires (2023) publicado no **Educação Matemática em Revista.**

Fonte: Da autora

Resolução da questão 4 por Amanda

Figura 44 - Caracterização da questão 4 por Amanda

Figura 7 - Questão 4 do Enade

$\lim_{x \to \infty} \frac{\text{sen}\, x}{x} = 1$

Para calcular o limite $L = \lim_{x \to +\infty} \frac{-\text{sen}\, x}{x}$, os argumentos podem ser desenvolvidos usando as desigualdades $0 \leqslant \left|\frac{\text{sen}\, x}{x}\right| \leqslant \frac{1}{x}$, válidas para todo real $x > 0$.

A partir desses argumentos, conclui-se que L é igual a

Pelo teo de sanduiche $\lim_{x \to \infty} 0 \leq \lim_{x \to \infty} \left|\frac{\text{sen}\, x}{x}\right| \leq \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x}$

$\Rightarrow 0 \leq \lim_{x \to \infty} \left|\frac{\text{sen}\, x}{x}\right| \leq 0$

Logo, $\lim_{x \to \infty} \left|\frac{-\text{sen}\, x}{x}\right| = 0$

A −1.
B 0.
C 1.
D ∞.
E −∞.

Fonte: Da autora

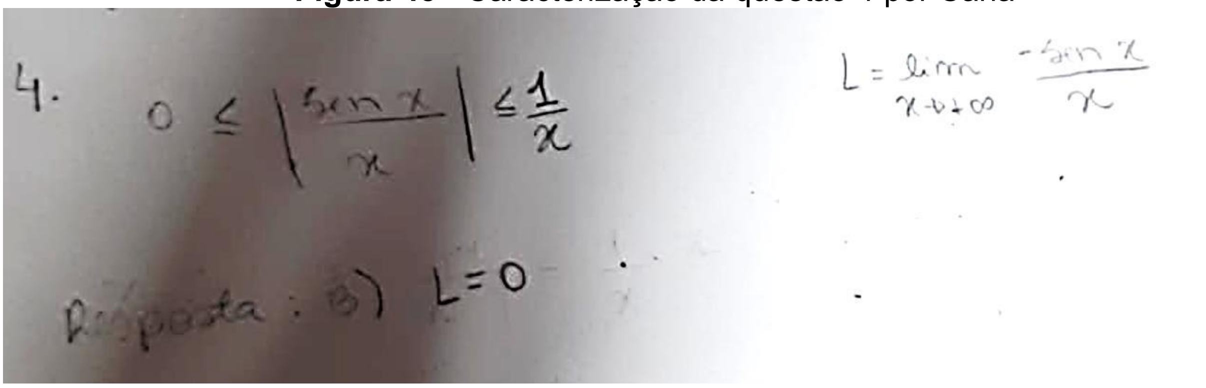
Conforme ilustrado na Figura 44, a aluna aplica corretamente o Teorema do Confronto e estabelece uma relação adequada entre o limite trigonométrico e o módulo. No entanto, ao analisar o módulo da função trigonométrica, ela o expressa com sinal negativo, o que contraria a definição formal de módulo. Apesar disso, como a solução da função trigonométrica é zero, conclui-se corretamente que o módulo também tende a zero.

Tall (1981) destaca a importância das imagens conceituais como representações mentais que os estudantes constroem durante o aprendizado. Nesse contexto, a aluna parece possuir uma imagem conceitual precisa do teorema do confronto e do limite trigonométrico, mas sua compreensão sobre o conceito de módulo revela-se incompleta ou equivocada.

De acordo com Tall (2013), a aluna demonstra operar no mundo simbólico, utilizando corretamente o teorema do confronto e conectando os conceitos de limite trigonométrico e módulo. Entretanto, o deslize identificado pode ser interpretado como um reflexo de uma base conceitual que ainda mistura intuições corporificadas com raciocínios simbólicos, indicando a necessidade de maior consolidação no pensamento formal.

Resolução da questão 4 por Carla

Figura 45 - Caracterização da questão 4 por Carla



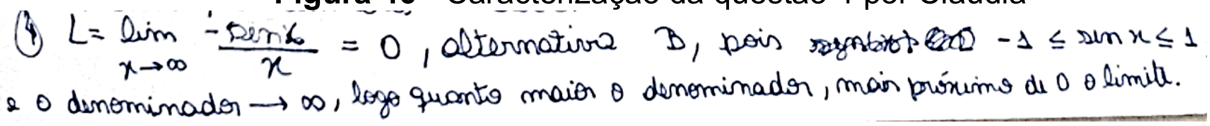
Fonte: Da autora

Embora a aluna responda a questão corretamente e utilize a desigualdade, ela não menciona explicitamente o teorema do confronto que é fundamental para justificar formalmente a conclusão, conforme pode ser verificado na Figura 45. Apesar de utilizar o módulo na desigualdade, ela não explora o fato de que o limite do módulo implica o limite da função original $\left(\frac{-sen(x)}{x}\right)$, chegando então ao resultado de $L = 0$, porém não deixa claro como chegou a essa conclusão, já que não desenvolve completamente os argumentos fornecidos na questão deixando claro que o limite central é encontrado porque as funções 0 e $\frac{1}{x}$ possuem o mesmo limite no infinito, conforme exige o teorema.

A resposta da aluna revela intuições corretas e habilidades simbólicas iniciais, como o uso de desigualdades e módulos, mas demonstra dificuldade em realizar uma justificativa completa com base no rigor formal exigido pelo teorema do confronto. Essa lacuna reflete desafios comuns no ensino e aprendizado do cálculo, conforme apontado por Tall (2013). O autor destaca a dificuldade dos alunos em superar abordagens baseadas em intuições corporificadas e simbólicas, avançando para o raciocínio abstrato e formal requerido pela matemática avançada. Além disso, Tall (1981) observa que estudantes frequentemente enfrentam obstáculos ao lidar com conceitos formais, especialmente quando teoremas interligam múltiplos conceitos, como é o caso do teorema do confronto.

Resolução da questão 4 por Cláudia

Figura 46 - Caracterização da questão 4 por Cláudia


(4) $L = \lim_{x \to \infty} \frac{-\operatorname{sen} x}{x} = 0$, alternativa D, pois $-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1$ e o denominador $\to \infty$, logo quanto maior o denominador, mais próximo de 0 o limite.

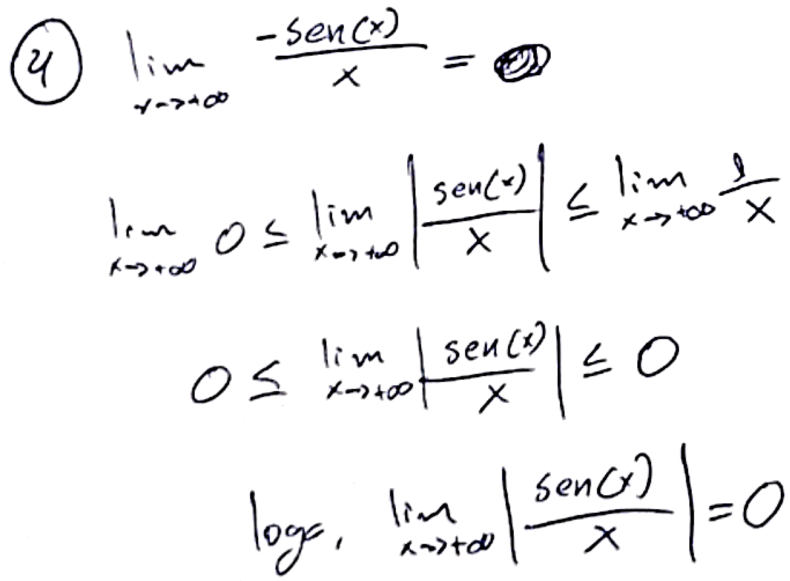
Fonte: Da autora

Conforme pode ser observado na Figura 46, a aluna justifica corretamente que, à medida que $x \to \infty$, o denominador cresce, levando a fração a se aproximar de zero, e isso é um aspecto importante para a solução, assim como identificar que $-1 \leq sen\ (x) \leq 1$ que é essencial para justificar o comportamento da função. Ela menciona que o denominador tende ao infinito e que isso aproxima a fração de zero, mas não aborda explicitamente o efeito do comportamento oscilatório de $sen\ (x)$, nem justifica como isso é neutralizado pelo denominador. Porém, apesar de apresentar a lógica do comportamento da função central, a aluna não utiliza o teorema do confronto, que seria a abordagem formalmente correta para resolver a questão com as desigualdades e nem deixa claro como elas implicam na solução.

A aluna demonstra intuições corporificadas ao perceber que o denominador crescente leva a fração a se aproximar de zero, baseando-se em uma compreensão prática e intuitiva do comportamento da função. A aluna reconhece a desigualdade básica $-1 \leq sen(x) \leq 1$, essencial para a solução. No entanto, não utiliza essa informação de maneira rigorosa no contexto do teorema do confronto, o que, de acordo com Tall (1981), revela uma lacuna no desenvolvimento de sua imagem conceitual sobre o limite. Essa imagem conceitual apresenta uma compreensão parcial, mas não está plenamente conectada à formalização matemática necessária para justificar a solução de forma rigorosa.

Resolução da questão 4 por Gustavo

Figura 47 - Caracterização da questão 4 por Gustavo



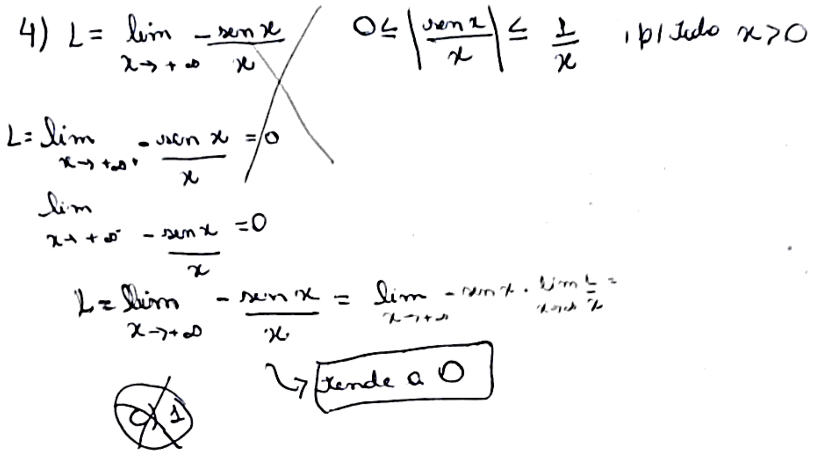
Fonte: Da autora

A Figura 47 expressa como o aluno descreveu a resolução da questão 4, ele demonstra ter compreendido o teorema do confronto, identifica as funções extremas e suas soluções. Porém não menciona diretamente que $sen\ (x)$ é limitado entre -1 e 1 o que é essencial para justificar a aplicação das desigualdades e o comportamento gráfico da função.

Os estudantes frequentemente dependem do mundo corporificado para formular ideias iniciais, mas a ausência de uma explicação formal mostra que o aluno ainda não internalizou completamente a necessidade de justificar cada passo logicamente, como é esperado no mundo formal. O aluno demonstra estar no mundo simbólico, pois compreendeu o teorema do confronto e foi capaz de identificar as funções extremas e suas soluções. Essa habilidade de lidar com desigualdades reflete um progresso significativo na abstração e no uso de conceitos mais avançados.

Resolução da questão 4 por Juliana

Figura 48 - Caracterização da questão 4 por Juliana



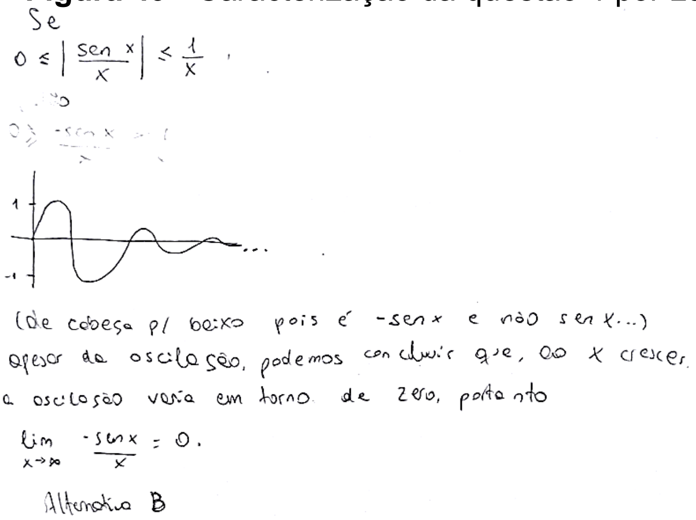
Fonte: Da autora

É possível perceber na Figura 48 que a aluna reconheceu corretamente o limite a ser calculado e a aplicação das desigualdades que serão essenciais para resolver o teorema do confronto, porém não justifica explicitamente o comportamento de $sen\,(x)$, ou seja, que ele está limitado entre -1 e 1, o que fundamenta as desigualdades aplicadas. Ela também realiza vários passos intermediários de forma desconexa. E escreve expressões de limite que não estão diretamente ligadas ao raciocínio final, o que pode gerar confusão, inclusive inicialmente respondeu a questão como sendo A, porém risca percebendo que sua conclusão não está coerente com os cálculos que realizou.

A realização de passos intermediários desconexos e a escrita de expressões de limite que não se conectam diretamente ao raciocínio final sugerem que a aluna ainda não consolidou uma imagem conceitual clara do teorema do confronto, Tall (2013) explica que o aprendizado matemático eficaz ocorre quando os estudantes desenvolvem imagens conceituais que integram propriedades, comportamentos e regras em uma estrutura lógica coerente.

Resolução da questão 4 por Lucas

Figura 49 - Caracterização da questão 4 por Lucas



Fonte: Da autora

Na Figura 49 o aluno fez o esboço de um gráfico a ilustrar o comportamento oscilatório da função $-sen\ (x)$, embora nesta tentativa de representar $-sen\ (x)$ há uma inversão de $sen\ (x)$, que não afeta diretamente o resultado, mas pode ser mal interpretado. Na prática, o comportamento de $-sen\ (x)$ continua oscilando entre os mesmos valores de amplitude, mas com inversão de sinal. Essa percepção o próprio aluno teve durante o seu depoimento, após refletir sobre os resultados apresentados.

Apesar de utilizar a desigualdade, o estudante não menciona explicitamente o teorema do confronto, que é o passo operacional para justificar que o limite é $L = 0$.

O erro ao representar o gráfico de $-sen(x)$ revela que o aluno ainda está imerso no mundo corporificado, que enfatiza percepções sensoriais e visuais, como gráficos e comportamento oscilatório. A inversão de sinal de $sen(x)$ reflete uma falha na transição para o mundo simbólico, onde manipulações algébricas corretas são fundamentais, segundo Tall (2013). No entanto, a reflexão do aluno sobre o erro sugere uma evolução no pensamento matemático, pois ele foi capaz de reconhecer a discrepância e ajustar sua interpretação.

Ele demonstra intuições corretas sobre o comportamento oscilatório da função e do limite, mas carece de um entendimento sólido, como o uso explícito do teorema do confronto o que indica que o aluno está no mundo corporificado e simbólico. A reflexão sobre o erro gráfico é positiva, mas a dificuldade em justificar rigorosamente o resultado reforça a necessidade de abordagens pedagógicas que conectem intuições visuais, manipulações algébricas e formalismos abstratos.

Resolução da questão 4 por Paulo

Embora o estudante tenha assinalado resposta correta, a falta de justificativa indica que sua escolha foi baseada na intuição, o que demonstra que ele não compreendeu plenamente os conceitos matemáticos envolvidos. Quando questionado sobre como chegou a essa conclusão, o mesmo disse: - “Eu sinto que é isso daqui, mas eu não sei dizer o porquê que eu sei que é isso daqui.” O mesmo caracterizou as alternativas como uma “muleta”, sugerindo que ainda que não se consiga realizar as operações matemáticas que solucionem a questão é possível realizar algumas suposições que solucionem a questão.

O estudante demonstra um processo de pensamento ancorado na intuição, utilizando o que Domingos (2003, p.167) chamaria de “imagem conceitual incompleta”. Ele "sente" que a resposta está correta, mas não consegue articular a lógica formal que embasa sua escolha. Isso indica que a conexão entre a intuição inicial e o entendimento simbólico ou formal ainda não foi desenvolvida.

Tall (2013) destaca que muitos estudantes, especialmente em estágios iniciais do aprendizado matemático, recorrem a estratégias heurísticas, como eliminar alternativas ou realizar suposições, para chegar a uma resposta. Embora essas estratégias possam ser úteis em alguns contextos, elas não promovem o desenvolvimento de uma estrutura mais sofistica que suporte o raciocínio lógico e formal.

Reflexões da questão 4

Alunos como Amanda e Carla mostram que possuem imagens conceituais parciais ou incompletas sobre os conceitos de limite e módulo. Embora tenham intuições corretas sobre os conceitos, deslizes como a expressão incorreta do módulo ou a falta de justificativa rigorosa indicam que a imagem conceitual precisa ser refinada. A falta de explicitação de informações essenciais, como $-1 \leq sen(x) \leq 1$ ou o uso desconexo de passos intermediários (como Juliana demonstrou) apontam para dificuldades na construção de imagens conceituais coerentes, como destacado por Tall (1981).

Alguns alunos, como Paulo, basearam-se exclusivamente em intuições ou percepções, como "senti que era a resposta certa" ou uso das alternativas como "muletas", sugere uma dependência do pensamento corporificado, sem uma transição para níveis mais simbólicos ou formais.

Respostas como as de Gustavo e Cláudia mostram que os alunos estão começando a operar no mundo simbólico, utilizando ferramentas como desigualdades, gráficos e limites. No entanto, a ausência de justificativas formais ou a falta de menção ao teorema do confronto mostram que essa transição ainda não está completa.

Apesar disso, os progressos no uso de símbolos e raciocínios algébricos são sinais de que os alunos estão desenvolvendo habilidades mais avançadas, ainda que precisem de reforço na articulação rigorosa dos conceitos. E o uso de estratégias como construção de gráficos (como Lucas tentou) podem ser úteis para reforçar a intuição inicial, mas precisam ser complementadas por explicações formais que conectem o mundo corporificado ao simbólico e formal.

Segundo Tall (2013), essa lacuna ocorre porque os estudantes permanecem no mundo corporificado (visual e intuitivo) ou no simbólico inicial, sem avançar para o pensamento formal abstrato, que exige maior articulação lógica e justificativa rigorosa. Ele destaca que as imagens conceituais inadequadas ou incompletas são um dos maiores desafios no aprendizado da matemática, pois os alunos precisam superar essas intuições iniciais para alcançar o pensamento formal. E a transição gradual entre os mundos corporificado, simbólico e formal é essencial para o aprendizado significativo.

As estruturas analisadas no Quadro 7 ressaltam as seguintes observações:

1. Reconhecimento de Propriedades dos Conceitos: Identificar os conceitos matemáticos ou propriedades fundamentais presentes no

problema, como limites, desigualdades, ou comportamento de funções trigonométricas;

2. Descrição de Propriedades no Contexto: Relacionar essas propriedades ao problema específico, explicando como elas se manifestam no cenário apresentado;
3. Definição de Propriedades como Base para Conceitos: Formalizar as propriedades identificadas, estabelecendo bases teóricas rigorosas. Isso pode incluir, por exemplo, a definição formal do teorema do confronto ou de limites no infinito;
4. Dedução de Propriedades e Construção de Estruturas: Usar as propriedades definidas para deduzir resultados e construir a solução formal, explicando cada passo com lógica rigorosa.

Com essas estruturas em mente elaboramos o Quadro 7.

Quadro 7 - Caracterização das Respostas dos Estudantes à Questão 4

Estudante	Reconhecimento de Propriedades dos Conceitos	Descrição de Propriedades no Contexto	Definição de Propriedades como Base para Conceitos	Dedução de Propriedades e Construção de Estruturas
Amanda	X	X		X
Carla	X			
Cláudia	X			
Gustavo		X	X	
Juliana	X	X		
Lucas	X			
Paulo				

7.5. Reflexões gerais: Conceito imagem e Classificação nos três mundos

O conceito imagem refere-se à representação mental que um indivíduo tem de um conceito matemático, construída a partir de experiências anteriores, interações com diferentes representações e aplicações do conceito. Ele não é necessariamente formal ou totalmente correto, mas reflete como o estudante entende e trabalha com a ideia matemática de limite, no nosso caso. Domingos (2003, p. 129) aponta que “Foi possível identificar três níveis diferentes de conceitos imagem nos alunos: conceito imagem incipiente, conceito imagem instrumental e conceito imagem relacional”; conforme já explicado no capitulo 5, possuem as seguintes características:

Conceito imagem incipiente: Representação inicial, fragmentada e muitas vezes intuitiva do conceito, baseia-se em exemplos específicos e percepções informais, e pode conter concepções errôneas ou incompletas.

Conceito imagem instrumental: Desenvolvimento de estratégias e procedimentos para manipular o conceito, o estudante aprende regras e técnicas, mas sem compreender totalmente a estrutura subjacente, e pode aplicar corretamente métodos sem entender o significado teórico por trás deles.

Conceito imagem relacional: Compreensão mais profunda e estruturada do conceito, integra diferentes representações (gráfica, algébrica, numérica, verbal), e relaciona o conceito a outros temas matemáticos e consegue justificar suas aplicações e propriedades.

O conceito imagem apresentados por Amanda, Carla, Cláudia, Gustavo, Juliana, Lucas e Paulo refletem diferentes níveis de compreensão, combinado com as categorias propostas por Domingos (2003). Em linhas gerais, os padrões identificados demonstram uma progressão do conceito imagem incipiente para o instrumental e, em alguns casos, indícios do conceito imagem relacional.

O conceito imagem incipiente é caracterizado pela compreensão inicial, marcada por intuições equivocadas, aplicação de regras matemáticas de forma mecânica e uma dependência de explicações externas. Estudantes como Paulo, Cláudia, e, em algumas questões, Juliana apresentam características desse estágio. Esses alunos demonstram dificuldades em conectar definições formais e conceitos teóricos com a prática, limitando-se a memorização ou percepções intuitivas. O desafio central é superar a visão superficial dos conceitos e alcançar um entendimento mais estruturado e integrado.

Amanda, Carla, Gustavo e, em várias situações, Lucas, já possuem uma compreensão mais técnica e organizada, característica do conceito imagem instrumental. Eles conseguem aplicar conceitos matemáticos, resolver problemas e realizar análises estruturadas, embora com limitações em termos de abstração e generalização. Esse nível demonstra progresso significativo, mas ainda requer refinamento para que os alunos desenvolvam uma visão mais ampla e relacional.

Embora nenhum aluno demonstre domínio pleno do conceito imagem relacional, Amanda, Gustavo e Lucas, em algumas questões, apresentam indícios de mudança para esse nível. Isso se reflete na tentativa de utilizar definições formais e estabelecer conexões mais profundas entre conceitos. No entanto, a falta de rigor matemático e de abstração completa ainda impede que alcancem uma compreensão relacional consolidada.

Para classificar as respostas dos alunos segundo os Três Mundos de David Tall, é importante analisar a forma como cada estudante se relaciona com os conceitos matemáticos e como eles resolvem (ou tentam resolver) a questão. Para tal, a partir das caracterizações que realizamos no capítulo 7.1 iremos relacioná-las com os Três Mundos de Tall (2013) que consistem em:

Corporificado: que baseia-se em experiências sensoriais, percepções intuitivas e representações visuais. Os alunos nesse mundo utilizam principalmente intuições ou imagens mentais para lidar com conceitos matemáticos.

Simbólico: Focado na manipulação de símbolos e regras matemáticas, como fórmulas, cálculos algébricos e procedimentos. Aqui, a compreensão está ligada ao domínio de algoritmos e operações formais.

Formalismo: É onde a matemática é vista em termos de sistemas formais, e o raciocínio se baseia em provas e generalizações.

O Quadro 8 estabelece um panorama geral das respostas dos alunos as questões e como relacionamos estas aos Três Mundos.

Quadro 8 - Classificação Geral a Luz da Teoria dos Três Mundos

Estudante	Questão	Mundo	Justificativa
Amanda	1	Corporificado	Não conseguiu identificar o comportamento dos limites laterais a fim de afirmar a existência de limite
	2	Corporificado e Simbólico	Apresentou argumentos gerais baseados na observação intuitiva, sem calcular

			limites laterais formalmente.
	3	Simbólico e Formal	Recorreu a definição formal de maneira precisa.
	4	Corporificado e Simbólico	Baseou-se em desigualdades e comportamento geral da função, porém com algumas inconsistências simbólicas.
Carla	1	Simbólico	Concluiu corretamente sobre o limite ao simplificar a expressão, mas sem explorar cálculos rigorosos.
	2	Simbólico	Reconheceu a inexistência do limite e apresentou cálculos formais incompletos dos limites laterais.
	3	Simbólico	Justificativa operacional, sem empregar a definição formal de limite.
	4	Simbólico	Utilizou desigualdades de forma intuitiva, sem conectar rigorosamente ao Teorema do Confronto.
Cláudia	1	Corporificado	Não conseguiu identificar o comportamento dos limites laterais a fim de afirmar a existência de limite
	2	Corporificado	Apresentou dificuldade em expressar os argumentos gerais para calcular limites laterais formalmente.
	3	Simbólico	Justificativa operacional, mas não utilizou a definição formal de limite.
	4	Simbólico	Demonstrou ideia geral com uso de

			desigualdades, sem formalizar o uso do Teorema do Confronto.
Gustavo	1	Simbólico e Formalismo	Apresentou limites laterais e justificou rigorosamente usando técnicas formais.
	2	Corporificado e Simbólico	Calculou os limites laterais corretamente e justificou a inexistência do limite de forma intuitiva.
	3	Formalismo	Usou definição formal (ϵ-δ) para demonstrar o limite, porém cometeu alguns erros na notação.
	4	Simbólico e Formalismo	Aplicou o Teorema do Confronto de maneira estruturada e rigorosa para justificar o limite.
Juliana	1	Simbólico	Baseou-se na análise do comportamento dos limites laterais, mas sem explorar a operacionalização requerida.
	2	Corporificado	Não conseguiu concluir sobre a inexistência do limite e nem os cálculos dos limites laterais.
	3	Simbólico e Formal	Demonstrou uma tentativa de justificar, mas sem empregar efetivamente a definição formal de limite.
	4	Corporificado e Simbólico	Justificou o limite com intuições sobre o comportamento das funções, sem fundamentação formal.
Lucas	1	Corporificado e Simbólico	Usou representações gráficas e operacionais para justificar sua resposta.

	2	Corporificado e Simbólico	Baseou-se em representações visuais para justificar a inexistência do limite, sem explorar limites laterais.
	3	Corporificado	Explicação intuitiva sobre o comportamento da função, sem rigor matemático ou uso de definições formais.
	4	Corporificado e Simbólico	Justificou com gráficos e argumentos intuitivos sobre o comportamento da função, não mencionando explicitamente a Teoria do Confronto.
Paulo	1	Corporificado	Não conseguiu representar simbolicamente ou graficamente sua resposta para justificar a existência de limite.
	2	Corporificado	Intuiu incorretamente a existência do limite e não utilizou cálculos ou justificativas rigorosas.
	3	Corporificado	Não apresentou resposta para essa questão, apenas uma memória de ter aprendido o conceito em questão.
	4	Corporificado	Baseou-se em argumentos intuitivos sobre o comportamento da função, sem formalização matemática.

Fonte: Da autora

Mediante a tabela apresentada podemos dizer que:

- Nas respostas da **Amanda** não há evidências claras de representações visuais, gráficos ou explicações baseadas em experiências sensoriais. Amanda opera predominantemente no nível simbólico com transição para o formal, pois sua resposta não explora definições axiomáticas ou teoremas de maneira totalmente formalizada, o que sugere que ela está transitando para o mundo formal.

- **Carla** opera no mundo simbólico de Tall. Ela demonstra uma compreensão funcional dos conceitos, manipulando símbolos e aplicando regras matemáticas básicas para chegar à solução correta. Não faz uso de gráficos ou representações visuais que evidenciem uma compreensão baseada em experiências sensoriais comuns no mundo corporificado, mas ao representar na questão 3 a ideia empírica de que "ao aumentar o denominador tendo como 1 o numerador, o resultado se aproxima de 0", o que pode assim indicar a presença deste mundo. Ainda assim, sua abordagem carece de rigor formal e abstração mais profunda, típicos do mundo formal.
- **Cláudia** não utiliza representações visuais (como gráficos ou diagramas) para justificar suas respostas. Sua abordagem é predominantemente simbólica e sua interação é limitada com o mundo formal, inclusive há uma tentativa de formalidade, porém não foi justificada com definições rigorosas ou demonstrações generalizadas.
- **Gustavo** em suas respostas combina os três mundos de Tall, pois demonstra rigor matemático usando definições e teoremas formais, ainda que com alguns erros de formalização. Em todas as questões, ele mostra compreensão conceitual dos limites e os interpreta de forma abstrata, características do mundo simbólico. Utiliza de uma abordagem experimental para justificar a questão 3, onde interpreta intuitivamente a indeterminação, que o enquadraria no mundo corporificado. Assim podemos dizer que suas respostas refletem um entendimento profundo e fundamentado nos mundos formal, simbólico e corporificado de Tall.
- **Juliana** demonstra compreensão conceitual dos limites e procura aplicar técnicas algébricas e formais em várias respostas, apesar de em alguns casos elas aparecerem de maneira um pouco confusa. Ela também opta por uma explicação baseada na intuição do comportamento da função, apoiando a presença do mundo corporificado. Existe a presença dos três mundos de Tall, porém há uma ênfase maior no entendimento simbólico.

- As respostas de **Lucas** revelam uma integração dos mundos corporificado e simbólico, pois ele utiliza representações gráficas para auxiliar na intuição e explicação dos conceitos de limite, demonstrando maior preferência para o uso de representações visuais, complementada por uma compreensão operacional do conceito de limite. Seu uso do mundo formal não é evidente, mesmo nas questões em que era requerido.
- **Paulo** revela predominância do mundo corporificado e suas justificativas baseiam-se em uma interpretação do salto na função, intuição básica de comportamento da função, ou instinto, sem cálculo detalhado. Ele não utiliza definições, provas ou abordagens matemáticas rigorosas para justificar suas respostas. De forma geral, Paulo adota uma abordagem simplificada e qualitativa, com forte dependência da intuição e interpretação visual, sem aprofundar em operações ou formalizações matemáticas.

De forma geral, o enquadramento apresentado pode ser realizado a partir da análise de como os alunos interagem com os três mundos de Tall (2013). No mundo corporificado, os estudantes operam predominantemente utilizando representações visuais, gráficos e intuições baseadas em experiências sensoriais. Suas justificativas são qualitativas, fundamentadas em observações ou interpretações intuitivas do comportamento de funções, sem aprofundamento em cálculos ou formalizações matemáticas. Embora apenas Lucas tenha utilizado gráficos em suas respostas, algo que era esperado ocorrer com maior frequência, essa característica não exclui outros estudantes que pertençam a este mundo, pois suas respostas ainda evidenciaram aspectos relacionados a experiências sensoriais.

No mundo simbólico, os alunos demonstram habilidade em manipular símbolos e aplicar regras algébricas ou técnicas matemáticas básicas. Eles desenvolvem soluções operacionais, mas frequentemente sem compreender ou justificar formalmente os conceitos por meio de definições ou teoremas, apresentando, em alguns casos, erros conceituais que refletem fragilidades em sua compreensão.

Já no mundo formal, a análise mostra que os alunos que estão concluindo o curso de licenciatura em matemática ainda não possuem total segurança para operar de forma consistente nesse nível. Amanda, por exemplo, embora tenha apresentado respostas corretas no mundo formal em uma das questões, demonstrou conflitos conceituais relacionados ao conceito de limite na primeira questão. Gustavo, por sua vez, tentou operar no mundo formal, mas apresentou dificuldades na correta utilização dos quantificadores, revelando fragilidades nesse aspecto. Ainda assim, suas respostas nas demais questões foram mais coerentes, indicando um progresso nesse nível.

Paulo, entretanto, apresentou o conceito-imagem mais conflituoso, adotando uma abordagem simplificada e qualitativa que refletia uma compreensão limitada do conceito de limite. Seu caso exemplifica a perspectiva de Tall (1981), segundo a qual, quando o conceito imagem é negligenciado ou não desenvolvido adequadamente, podem surgir lacunas significativas no aprendizado subsequente. Sua dificuldade reforça, portanto, a importância de uma base sólida e bem estruturada para evitar prejuízos no desenvolvimento de conceitos mais avançados.

Além disso, nenhum dos sujeitos da pesquisa demonstrou um conceito imagem totalmente alinhado ao conceito-definição. Isso ocorre, segundo Tall (2013), porque a matemática é cumulativa, ou seja, conceitos anteriores servem de base para a construção de conhecimentos mais avançados. Quando um aluno desenvolve um conceito-imagem frágil, ele pode enfrentar dificuldades para conectar novas ideias àquelas que já possui, tornando-se suscetível a obstáculos no aprendizado. Muitas dificuldades no ensino de cálculo derivam de concepções errôneas formadas no ensino básico, especialmente em relação à ideia de limite. Assim, essa problemática evidencia um desafio recorrente no ensino de cálculo; a chegada de muitos alunos ao ensino superior sem um conceito imagem bem estruturado sobre limites, o que compromete significativamente seu aprendizado e progresso matemático.

7.6. Os relatos

As entrevistas, inicialmente, seriam realizadas de forma individual, precedendo a aplicação das atividades escritas e uma seleção de perguntas previamente elaboradas. No entanto, para otimizar o tempo, dada a dificuldade em reunir os participantes, optou-se por coletar apenas relatos após a resolução do questionário. O objetivo foi compreender as dificuldades enfrentadas durante a realização das questões e utilizar as respostas como suporte para caracterizar as soluções apresentadas, bem como para entender o contexto em que os participantes estudaram o conceito de limite na disciplina de Cálculo I.

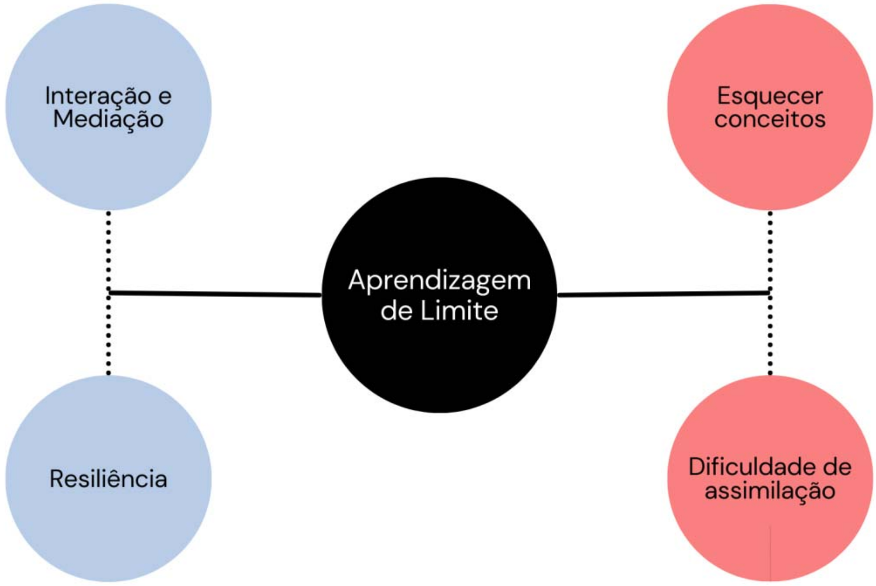
Os relatos dos alunos Paulo e Lucas foram realizados individualmente em momentos específicos. Paulo se deslocou até a UFPel exclusivamente para participar dessa conversa, enquanto Lucas, que estava cumprindo atividades acadêmicas no campus, interrompeu suas obrigações, temporariamente, para responder ao questionário e participar relatando suas percepções sobre sua aprendizagem do conceito de limite.

A aluna Carla respondeu ao questionário e fez seu relato no mesmo dia, durante uma transmissão realizada via webconferência, enquanto estava em sua casa, em um momento de tempo livre. Já os alunos Amanda, Cláudia, Gustavo e Juliana, que estavam em outro campus da UFPel para a realização de uma avaliação, responderam ao questionário e fizeram seu relato logo após o término da prova. Eles buscaram um local mais silencioso no campus, próximo à secretaria e durante o horário de almoço, para participar do processo. No entanto, alguns demonstraram desconforto durante nossa conversa, pois a exposição de suas dificuldades gerou certo constrangimento, por isso ao contrário dos outros estudantes que fiz a gravação, com este grupo observei e fiz algumas intervenções, e fiz anotações após nossa conversa. Esse sentimento, inclusive, foi identificado como um dos fatores que deixaram os alunos intimidados em participar da pesquisa, dado o receio de não conseguirem responder adequadamente às questões propostas no questionário.

Faremos abaixo a transcrição das principais informações coletadas destes relatos, que, do ponto de vista do aluno, apontam os facilitadores e as dificuldades encontradas para aprender sobre limite. As imagens atribuídas são um resumo com palavras-chave, representando os facilitadores (círculo azul) e os dificultadores (círculo vermelho).

Relato de Amanda, Cláudia, Gustavo e Juliana

Figura 50 - Facilitadores e Dificultadores segundo quatro estudantes



Fonte: Da autora

Após a conclusão do questionário, os estudantes Amanda, Cláudia, Gustavo e Juliana juntaram-se para discutir sobre a questão 2, a qual exigia o conceito de módulo, a fim de lembrar como deveria ser resolvido. Gustavo disse "lembro que tinha que abrir em duas, mas não sei como". Então a Amanda, aparentemente, um pouco insegura de sua resposta, disse que achava que "é algo como x e $-x$". Então Gustavo pensou um pouco e descreveu aos colegas a conclusão que havia chegado que "deveriam então ter separado o módulo em $\frac{x}{x}$ e $-\frac{x}{x}$ como tinha feito", porém Amanda e Gustavo não sabiam se sua conclusão estava correta. Cláudia e Juliana não participaram do assunto, pois estavam com fisionomia de não ter acompanhado muito bem o raciocínio.

Quando os questionei se teria um valor numérico para representar $\frac{x}{x}$, eles ponderaram um pouco e então Amanda com um tom de dúvida respondeu 1, então Gustavo afirmou com maior certeza "1", e complementou que "bahhh faz todo sentido".

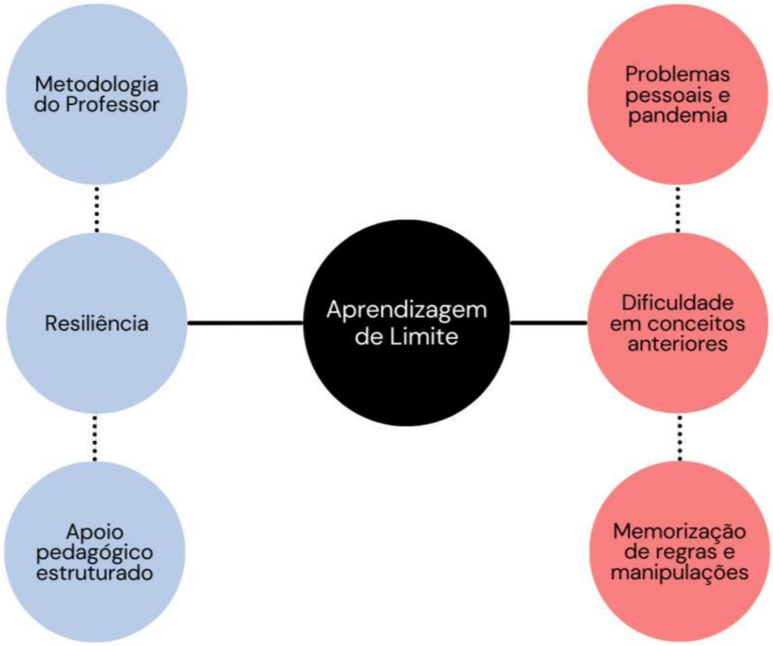
Ao serem questionados sobre o processo de aprendizagem de cálculo, os estudantes refletiram por alguns instantes e Gustavo respondeu que o processo foi tranquilo, mas mencionou ter esquecido grande parte do conteúdo. Seus colegas, então, concordaram com sua observação. E por fim, a entrevista foi encerrada devido às limitações de tempo e necessidades práticas, como a proximidade do horário de almoço e as atividades acadêmicas subsequentes dos participantes.

Os estudantes demonstraram dificuldades em relembrar e aplicar o conceito de módulo para resolver a questão proposta, o que sugere lacunas na fixação e na compreensão do conteúdo de funções. Gustavo conseguiu identificar parcialmente a abordagem correta, mencionando a necessidade de "abrir em duas", mas sua explicação, bem como a tentativa de Amanda em complementar a ideia, não alcançou uma conclusão segura. Cláudia e Juliana, por outro lado, não participaram ativamente da discussão, indicando uma possível falta de entendimento ou interesse no tema. Porém, nesse diálogo dos estudantes é possível perceber um exemplo característico do processo de aprendizado considerado eficaz por Vygotsky (2001) onde temos um problema a ser resolvido que por meio da interação dos alunos, eles conseguem sair da zona de desenvolvimento real até a proximal, por meio da mediação.

A reflexão sobre o processo de aprendizagem de cálculo revelou que os estudantes tiveram uma experiência tranquila, mas com significativa perda de conhecimento ao longo do tempo, conforme apontado por Gustavo e corroborado pelos colegas. Esse cenário reflete a necessidade de estratégias mais eficazes de retenção e aplicação dos conceitos no ensino de cálculo, e Tall e Vinner (1981) ressalta a importância de construir imagens mentais claras (conhecidas como conceito imagem) e associá-las corretamente às definições matemáticas (conceito definição).

Relato de Carla

Figura 51 - Facilitadores e Dificultadores segundo Carla



Fonte: Da autora

Com relação à sua trajetória anterior e ao cursar a disciplina de Cálculo I, Carla relatou ter enfrentado muitas dificuldades relacionadas às funções durante a disciplina de Pré-Cálculo. Por essa razão, antes de cursar Cálculo I, a estudante decidiu trancar o curso duas vezes. Na primeira ocasião, chegou a realizar um trabalho, mas, segundo suas palavras, "não estava disposta a madrugar [estudando] como das outras vezes". Na segunda vez, o contexto foi agravado pelo formato remoto, imposto pela pandemia, e por problemas pessoais que demandaram sua atenção, levando-a novamente a trancar o curso.

Quando finalmente decidiu realizar a disciplina, Carla destacou a metodologia do professor como um fator determinante para seu aprendizado. Segundo ela, as explicações detalhadas facilitaram a compreensão dos conceitos, o que, aliado ao seu esforço e dedicação, tornou a experiência menos desafiadora do que imaginava. Apesar disso, a estudante ainda considera difícil, em suas palavras, "lembrar de todos os macetes [...] regrinhas [...] e manipulações é o que torna a disciplina desafiadora". A matemática para essa aluna não parece ser uma construção de conceitos abstratos e formais, formado por relações entre estruturas, mas um acúmulo de regras e artimanhas para resolver problemas.

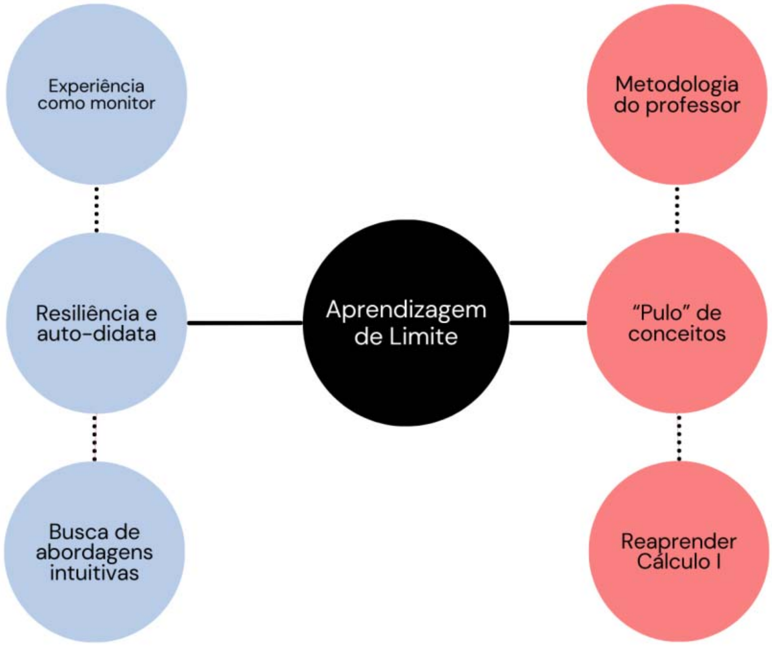
É possível evidenciar como fatores pessoais, metodológicos e contextuais podem influenciar o desempenho acadêmico. Inicialmente, as dificuldades em compreender conceitos relacionados a funções e a falta de disposição para enfrentar o estudo intensivo a levaram a interromper o curso duas vezes. Esses episódios mostram como desafios pessoais, aliados a questões pedagógicas, podem afetar a continuidade da formação.

No entanto, a experiência com um professor, que adotava uma metodologia clara e detalhada, mostrou como estratégias pedagógicas adequadas podem desempenhar um papel crucial na superação de barreiras de aprendizado. A dedicação e o esforço pessoal de Carla foram fatores importantes para seu progresso na disciplina de cálculo I. No entanto, os resultados apresentados evidenciam dificuldades significativas na aplicação de regras, manipulações algébricas e formalismo matemático. Embora Carla se veja como uma aluna esforçada e comprometida com os estudos, seu desempenho na atividade aplicada ainda não refletem avanços expressivos em matemática.

Essa reflexão destaca a importância de uma abordagem pedagógica que valorize explicações acessíveis e o apoio ao estudante, especialmente em disciplinas tradicionalmente consideradas difíceis, como o Cálculo. Além disso, ressalta que o aprendizado não é apenas resultado de esforço individual, mas também de um ambiente educacional que favoreça a compreensão e acolha as particularidades dos estudantes.

Relato de Lucas

Figura 52 - Facilitadores e Dificultadores segundo Lucas



Fonte: Da autora

Lucas relatou não ter se adaptado ao método utilizado pelo professor. Segundo sua avaliação, o professor adotava uma abordagem muito computacional e direta, o que, para Lucas, resultou no "pulo" de certos conteúdos, como a construção e análise de gráficos. Ao assumir a monitoria de Cálculo II, Lucas percebeu o quanto essas lacunas conceituais interferiram na sua aprendizagem, as quais precisaram ser preenchidas devido à exigência de domínio desses conceitos para o desempenho de suas atribuições como monitor, pois ainda que não atendesse os alunos de Cálculo I, os alunos o procuravam com dúvidas que algumas vez não abrangiam a disciplina do qual era responsável e para não deixar o colega desamparado acabou atendendo alunos com dificuldade no conceito de limite.

Essa experiência também lhe trouxe a percepção de que, embora a disciplina de Cálculo I no curso de Licenciatura tenha 6 créditos e já seja considerada desafiadora, em outros cursos, com apenas 4 créditos, o conteúdo frequentemente é reduzido. Essa situação é agravada em graduações nas quais os estudantes têm menor aptidão para matemática, o que dificulta ainda mais o aprendizado. Lucas destacou que buscou explicações mais praticas e intuitivas, especialmente, relacionadas a gráficos, para auxiliar os alunos. Ele enfatizou que a análise de gráficos era um aspecto frequentemente demandado em cursos como Agronomia.

Sobre sua atuação como monitor, Lucas complementou observando que, ao trabalhar com o conceito de limite, percebeu que muitos alunos tinham dificuldade em realizar operações básicas, como o uso de produtos notáveis, o que comprometia ainda mais o entendimento de conceitos mais avançados.

O relato de Lucas evidencia o desafio docente destacado por Tall (2013) de adotar metodologias de ensino que atendam às diferentes necessidades e perfis de aprendizagem dos alunos. Tall (2013, p. 274) destaca duas abordagens que devem ser levadas em consideração no momento da escolha da metodologia, são elas as

> - Uma abordagem natural baseada na matemática teórica que envolve corporificação, ou simbolismo, ou uma combinação dos dois;
> - Uma abordagem formal que utiliza a matemática com definições baseadas na teoria dos conjuntos e deduções formais.

Essas duas abordagens refletem diferentes níveis de maturidade no pensamento matemático e a transição gradual que os aprendizes fazem ao progredirem em sua jornada matemática.

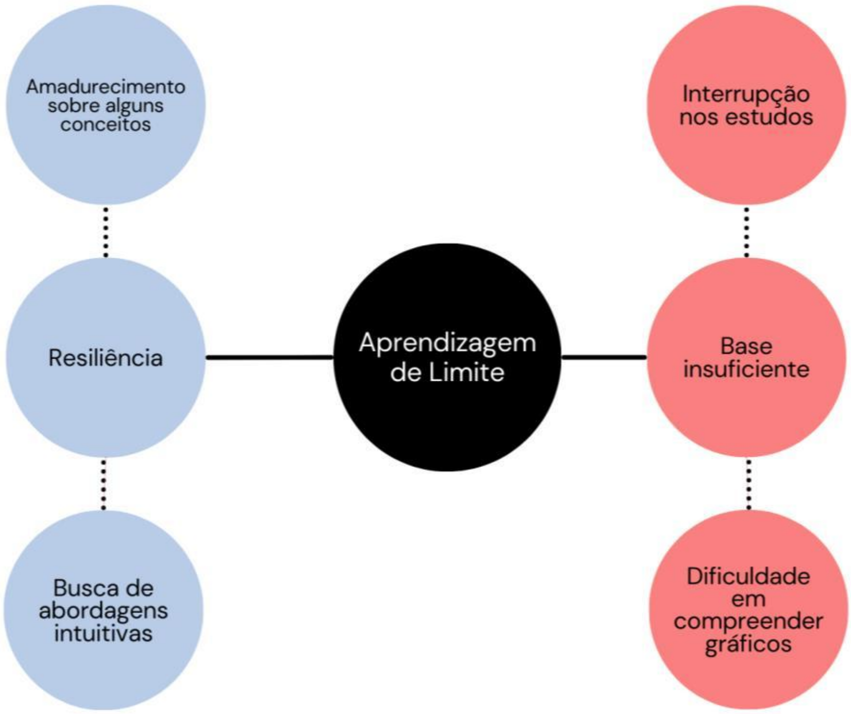
O caso de Lucas destaca a relevância de abordagens pedagógicas mais integradoras, que contemplem tanto a aplicação computacional quanto a interpretação gráfica e conceitual dos conteúdos. A percepção dele como monitor reforça a necessidade de um ensino de base mais sólido, especialmente em conceitos fundamentais como produtos notáveis e a construção de gráficos, que são ferramentas essenciais para o entendimento de disciplinas como cálculo.

Além disso, o relato de Lucas chama atenção para o impacto do currículo e da carga horária das disciplinas. A redução de créditos em alguns cursos pode levar ao enxugamento de conteúdos, dificultando ainda mais a assimilação por parte de alunos que possuem pouca familiaridade ou aptidão para matemática. A experiência do estudante também ressalta o papel crucial da monitoria, não apenas como suporte aos colegas, mas como uma oportunidade de aprofundar a própria compreensão e identificar falhas no processo de aprendizagem.

Essa reflexão aponta para a necessidade de uma abordagem pedagógica mais equilibrada, que combine explicações de processos, desenvolvimento de habilidades básicas e aplicações práticas, a fim de promover uma aprendizagem significativa e abrangente para os diferentes perfis de estudantes.

Relato de Paulo

Figure 53 - Facilitadores e Dificultadores segundo Paulo



Fonte: Da autora

Paulo relatou que possui grande dificuldade com o conceito de limite. Ele afirma que nunca conseguiu compreender adequadamente a teoria, as demonstrações, os limites laterais e os processos de prova da existência de um limite. Durante as aulas e em seus estudos individuais, tais tópicos se mostraram complexos e pouco assimilados. No entanto, ele acredita que, ao revisar algumas técnicas, como a aplicação do teorema de L'Hôspital, talvez fosse possível resolver exercícios específicos.

O estudante destacou que sua maior dificuldade está relacionada ao longo intervalo de tempo entre suas experiências com o tema. Ele cursou a disciplina de Cálculo I em 2017 ou 2018, mas ficou afastado da universidade por um período e retornou para cursar Análise Real. Essa interrupção e a ausência de contato contínuo com o tema representaram um desafio significativo em sua aprendizagem.

Ao ser questionado sobre a relação entre sua dificuldade com limites e o conceito de função, Paulo respondeu afirmativamente, justificando que sua formação em matemática no ensino básico foi voltada predominantemente à geometria. O estudo de funções foi limitado a conceitos básicos, como funções de primeiro e segundo grau e seus gráficos. Ele acredita que essa base insuficiente comprometeu seu desempenho em disciplinas como Pré-Cálculo, na qual, inicialmente, foi reprovado. Ele relata que seu professor frequentemente utilizava gráficos em explicações, dizendo que bastava “olhar o gráfico”. Contudo, Paulo não compreendia o significado dessa orientação e, em suas palavras, pensava: “eu não sei o que é só olhar”. Hoje, mais maduro, ele afirma, com um sorriso, que entende o sentido do comentário do professor e reconhece que realmente era simples observar o gráfico para compreender.

Ainda assim, Paulo reflete que a falta de consolidação do conhecimento de funções foi um obstáculo que dificultou seu progresso ao estudar limite, influenciando negativamente sua aprendizagem na época.

O relato de Paulo evidencia como lacunas na formação básica e a descontinuidade nos estudos podem impactar negativamente na aprendizagem de conceitos matemáticos mais avançados, como limites. A ausência de uma base sólida em funções e gráficos, aliada a uma abordagem pedagógica que ele não compreendia completamente no ensino básico e em disciplinas iniciais, gerou dificuldades que se acumularam ao longo de sua trajetória acadêmica.

A percepção de Paulo sobre sua experiência reforça a importância de uma sequência estruturada de ensino, que priorize a consolidação de conceitos fundamentais antes da introdução de tópicos mais complexos. Funções, por exemplo, servem como base para a compreensão de limites e de outros conceitos em matemática superior. Quando essa etapa não é bem trabalhada, o estudante tende a encontrar obstáculos significativos em disciplinas subsequentes, como aconteceu no caso dele com Cálculo I e Análise Real.

Por outro lado, o reconhecimento tardio de Paulo, ao dizer que hoje entende a simplicidade das explicações gráficas sugeridas pelo professor, mostra que o aprendizado matemático é contínuo e muitas vezes não ocorre no ritmo esperado, mas pode ser recuperado em momentos futuros. Sua experiência também aponta para a necessidade de metodologias que integrem mais exemplos e representações visuais, como gráficos, de forma acessível e alinhada ao nível de entendimento do aluno.

Além disso, a interrupção nos estudos e o longo intervalo entre disciplinas relacionadas ao mesmo tema revelam como a desconexão temporal pode dificultar a recuperação e a aplicação de conceitos previamente aprendidos. Isso sugere que currículos acadêmicos devem ser estruturados para manter uma continuidade e revisão frequente de conteúdos essenciais, promovendo uma aprendizagem duradoura.

Por fim, o relato de Paulo é um lembrete valioso para educadores e instituições sobre a relevância de fornecer suporte pedagógico adequado, especialmente em momentos de transição, e de criar ambientes de aprendizagem que considerem as diversas trajetórias e ritmos dos estudantes.

7.7. O processo de aprendizagem

Figura 54 - Wordcloud da aprendizagem

Fonte: Da autora

A partir dos quatro relatos analisados, podemos extrair diversas reflexões e conclusões sobre o processo de aprendizagem, especialmente no contexto do ensino de cálculo e de conceitos matemáticos mais avançados. Cada estudante apresenta uma trajetória única, mas há padrões recorrentes que ajudam a compreender desafios comuns no ensino e na aprendizagem da matemática. As principais conclusões incluem:

- A aprendizagem é um processo contínuo e pessoal

Os relatos mostram que cada aluno enfrenta desafios específicos de acordo com sua trajetória acadêmica, suas experiências anteriores e o contexto no qual está inserido. Enquanto alguns estudantes, como Amanda e Gustavo, demonstram dificuldades momentâneas, mas conseguem avançar por meio da interação social (como discutido por Vygotsky), outros, como Paulo, enfrentam desafios mais profundos devido a lacunas na formação básica e à descontinuidade nos estudos. Isso evidencia que a aprendizagem matemática não ocorre de maneira linear e que cada estudante possui um ritmo próprio de assimilação e desenvolvimento conceitual.

- A importância de uma compreensão sólida da matemática básica

Uma das dificuldades mais recorrentes nos relatos foi a falta de uma base consolidada em conceitos fundamentais, como funções e manipulação algébrica. Paulo, por exemplo, enfrentou dificuldades com limites devido à fragilidade no entendimento de funções. Já Lucas percebeu, ao atuar como monitor, que muitos alunos tinham dificuldades até mesmo com operações básicas, o que comprometia o aprendizado de conceitos mais avançados. Isso demonstra a necessidade de um ensino estruturado que garanta que os estudantes dominem os pré-requisitos antes de avançar para conteúdos mais complexos. Tall (2013) considera o mundo corporificado e simbólico como a base para se alcançar a matemática formal expressa nas universidades.

- O papel da interação social na construção do conhecimento

Baseados no primeiro relato, entendemos que a troca de ideias entre os alunos foi essencial para que eles conseguissem progredir em sua compreensão sobre o conceito de módulo. Ainda que, inicialmente, as respostas nem sempre estivessem corretas, o processo de discussão permitiu que avançassem em sua "zona de desenvolvimento proximal", conforme proposto por Vygotsky (2001). Esse aspecto reforça a importância de metodologias que incentivem a colaboração e o aprendizado coletivo, seja por meio de monitorias, atividades em grupo ou estratégias pedagógicas ativas.

- A influência da estratégia de ensino na aprendizagem

Os depoimentos mostram que as estratégias adotadas pelo professor tem um impacto significativo no aprendizado dos alunos. No caso de Carla, por exemplo, a mudança para um professor que explicava os conteúdos de forma mais clara e detalhada foi determinante para sua progressão na disciplina. Em contrapartida, Lucas sentiu dificuldades com um ensino excessivamente computacional, que não enfatizava construções conceituais e análises gráficas, dificultando sua assimilação do conteúdo. Esses relatos demonstram que diferentes abordagens pedagógicas podem beneficiar ou prejudicar a aprendizagem, dependendo do perfil do estudante, o que torna o trabalho docente ainda mais desafiador.

- Desafios da interrupção e da revisão na construção do conhecimento

Tanto Carla quanto Paulo relataram que a interrupção dos estudos e a falta de contato contínuo com os conteúdos dificultaram sua aprendizagem. Paulo, em especial, teve um grande intervalo entre o estudo de Cálculo I e Análise Real, o que comprometeu sua compreensão e exigiu um esforço adicional para recuperar conceitos esquecidos. Isso sugere que a aprendizagem matemática exige uma revisão frequente e um encadeamento lógico de conteúdos ao longo do curso, evitando lacunas que dificultam a retomada dos conceitos, Tall (2013) expressa que a aprendizagem da matemática é acumulativa, ou seja, os conceitos estão de certa forma, conectados.

- A necessidade de estratégias equilibradas entre teoria, prática e generalização

Os relatos também evidenciam a necessidade de um ensino que equilibre diferentes abordagens. Como destacado por Tall (2013), há dois caminhos principais no ensino da matemática: uma abordagem natural, que envolve representações visuais e intuição, e uma abordagem formal, baseada em definições rigorosas e provas matemáticas. O caso de Lucas mostrou como a ausência de uma abordagem visual mais estruturada prejudicou sua aprendizagem inicial, enquanto Paulo teve dificuldades com a formalização matemática. Isso demonstra que a matemática deve ser ensinada de forma integrada, permitindo que os alunos desenvolvam tanto a intuição quanto o rigor formal.

Os quatro relatos analisados reforçam que a aprendizagem matemática é um processo complexo, influenciado por diversos fatores, como a base prévia do aluno, a metodologia utilizada pelo professor, a continuidade dos estudos e o ambiente de aprendizado. Além disso, demonstram a importância de um ensino que equilibre teoria, prática e intuição, favorecendo a construção de conhecimento de forma significativa. Para melhorar o processo de ensino-aprendizagem, é essencial investir em estratégias pedagógicas mais inclusivas, que atendam diferentes perfis de estudantes e promovam um aprendizado mais sólido e duradouro.

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este estudo teve como objetivo mapear as percepções dos alunos sobre o conceito de limite, confrontando-as com as definições formais esperadas, a fim de promover uma reflexão sobre o processo de construção do conhecimento matemático ao longo da formação acadêmica. Para isso, analisamos os "conceitos imagens" dos estudantes dos cursos Integral e Noturno de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Pelotas, identificando como essas representações se relacionavam com a definição formal do conceito. A pesquisa foi conduzida à luz da teoria dos três mundos de David Tall, permitindo estabelecer conexões entre as compreensões intuitivas e a formalização matemática adquirida ao longo do curso.

Os relatos e análises apresentados oferecem um panorama abrangente sobre como os alunos caracterizam sua compreensão do conceito de limite. Tall (2013) ressalta que o aprendizado matemático é um processo individualizado, influenciado pelas características pessoais e experiências prévias de cada aluno. Assim, não há um único caminho para o amadurecimento matemático, pois cada indivíduo desenvolve suas habilidades de forma única, refletindo a diversidade de trajetórias de aprendizagem.

Nossa análise revelou uma grande lacuna entre conceito imagem e conceito definição, reforçando a necessidade de uma base matemática sólida para a assimilação de conceitos abstratos. A dificuldade no uso da linguagem formal e na manipulação de definições compromete a construção do conceito de limite, especialmente para alunos com conceitos imagem incipientes ou instrumentais. A influência do contexto social e acadêmico na aprendizagem também foi observada, em consonância com a perspectiva de Vygotsky (2001), indicando que metodologias de ensino e oportunidades de interação impactam o avanço conceitual.

A compreensão dos alunos é em grande parte corporificada transitando para o simbolismo, pois a falta de internalização abstrata dos conceitos impede a aplicação eficiente de cálculos e fórmulas, dificultando a transição para um pensamento matemático mais formal e generalizado.

Alguns alunos, como Paulo e Cláudia, apresentam um conceito-imagem incipiente, sendo que Cláudia demonstra um leve avanço em relação a Paulo. Suas compreensões baseiam-se em intuições fragmentadas e na aplicação mecânica de regras, sem uma estrutura conceitual bem definida. Outros, como Carla, Juliana e Lucas, possuem um conceito-imagem instrumental, conseguindo manipular símbolos e resolver problemas, mas sem uma visão teórica aprofundada. Amanda e Gustavo apresentam indícios de transição para um conceito-imagem relacional, tentando conectar definições formais a diferentes representações do conceito de limite. Entretanto, Amanda demonstrou dificuldades em outras questões, o que torna desafiador determinar precisamente seu conceito-imagem. De forma geral, nenhum dos alunos analisados desenvolveu um conceito-imagem completamente alinhado ao conceito-definição, pois ainda há fragilidades na formalização e na abstração matemática. Além disso, deficiências em conceitos básicos da matemática agravam essa lacuna, dificultando a construção sólida do conceito de limite.

Em relação à aproximação entre conceito-imagem e conceito-definição, a análise revela uma lacuna significativa entre ambos. O caráter cumulativo da matemática, conforme apontado por Tall (2013), exige uma base sólida para o avanço em conhecimentos mais abstratos. Os alunos com conceito imagem incipiente ou instrumental enfrentam dificuldades para conectar definições formais a problemas práticos, comprometendo seu raciocínio matemático sobre limites, essas dificuldades ou momentos críticos podem representar o que Tall (1976) interpretou como “catástrofes cognitivas” que precisam ser resolvidas para que um novo conceito seja assimilado, o autor diz que “nesse momento, cabe ao professor identificar o conflito e suavizá-lo de maneira adequada” (Tall 1976, p.15). Além disso, a dificuldade em lidar com a linguagem formal, como observado nas respostas de Gustavo e Amanda, reforça a necessidade de uma abordagem pedagógica que auxilie essa transição.

Os relatos dos alunos também destacam fatores determinantes para esse processo, como a importância de uma base matemática sólida, a influência da metodologia de ensino e a necessidade de um aprendizado contínuo e revisado. A falta de contato frequente com conceitos fundamentais, como funções e manipulação algébrica, compromete a estruturação do conceito-imagem e dificulta a compreensão do limite no ensino superior. A interação social e a abordagem pedagógica desempenham um papel crucial, pois alunos que tiveram mais oportunidades de discutir e revisar conceitos demonstraram maior avanço, ainda que sem alcançar plenamente o conceito-definição.

Adicionalmente, a perspectiva de Vygotsky (2001) sobre a influência do contexto social na aprendizagem se faz presente nos relatos analisados. As respostas dos alunos refletem o impacto de adversidades educacionais, como lacunas conceituais e dificuldades no domínio do formalismo matemático. Esses elementos reforçam a ideia de que a aprendizagem é moldada não apenas por experiências individuais, mas também pelo ambiente social e acadêmico.

A compreensão dos alunos sobre o conceito de limite pode ser caracterizada como em desenvolvimento. Esse processo ocorre em um espectro que vai desde níveis iniciais, baseados em intuições corporificadas, até avanços no uso de raciocínios simbólicos. No entanto, muitos alunos enfrentam desafios na formalização rigorosa do conceito, mesmo estando em fases avançadas de sua formação, como a conclusão de um curso de licenciatura em matemática.

Assim, surge a necessidade de identificar estratégias para tornar a formalização do conceito de limite mais clara e acessível. O objetivo é garantir que os alunos concluam o ensino superior com maior segurança e domínio do formalismo matemático, especialmente em relação ao conceito de limite. Para isso, é fundamental a implementação de metodologias pedagógicas que integrem intuições, simbolismos e formalismos, promovendo um aprendizado matemático mais sólido e abrangente.

Domingos (2003, p. 1) relata sua experiência como professor de Análise dizendo que

> os alunos apresentam uma concepção dos conceitos matemáticos aprendidos no secundário de cariz operacional, isto é, relacionada com os processos subjacentes aos conceitos, mas que é reveladora de uma falta de reificação dos mesmos. Desta forma a capacidade de abstracção dos conceitos é reduzida e manifesta-se sobretudo na manipulação de objectos matemáticos definidos simbolicamente.

Em nosso estudo semelhante ao autor, constatamos que os alunos apresentam uma compreensão muito intuitiva, técnica e operacional dos conceitos matemáticos, sem, contudo, alcançarem um entendimento conceitual mais profundo. Essa limitação compromete sua capacidade de abstração, generalização e exploração dos conceitos de forma flexível, restringindo-os à manipulação de símbolos e processos, sem uma assimilação completa dos significados subjacentes.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABREU, Oswaldo H. **Discutindo algumas relações possíveis entre intuição e rigor e entre imagem conceitual e definição conceitual no ensino de Limite e continuidade** - Dissertação para grau de mestrado em Educação Matemática, Universidade Federal de Ouro Preto, 2011.

ALMEIDA, Marcio Vieira de. **Um panorama de artigos sobre a aprendizagem do cálculo diferencial e integral na perspectiva de David Tall**. Dissertação para grau de Mestrado em Educação - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2013.

AMORIM, L. I. **A (re)construção do conceito de limite do cálculo para a análise: um estudo com alunos do curso de licenciatura em matemática.** 2011. 133 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) – Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2011.

BOYER, Carl B. **História da Matemática**, tradução: Elza F. Gomide. São Paulo, Edgard Blücher, Ed. da Universidade de São Paulo, 1974.

BUENO, R. W. da S.; VIALI, L. Ensino e aprendizagem de cálculo: explorando os três mundos da Matemática. **Olhar de Professor**, *[S. l.]*, v. 24, p. 1–20, 2021.

CELESTINO, Marcos Roberto. **Concepções sobre limite: imbricações entre obstáculos manifestos por alunos do ensino superior**. 2008. 208 f. Tese (Doutorado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2008.

DENARDI, V. B. **Contribuições das representações semióticas para compreensão de conceitos fundamentais para o cálculo diferencial e integral por alunos de um curso de licenciatura em matemática**. Universidade franciscana. Santa Maria, p. 285. 2019.

DOMINGOS, António M. D. **Compreensão de conceitos matemáticos Avançados - A matemática no início do Ensino Superior** - Dissertação para grau de doutor em Ciências de Educação, Universidade Nova Lisboa, 2003.

DUBINSKY, Ed et al. The student's construction of quantification. For the **Learning of Mathematics**, v. 8, n. 2, p. 44–51, 1988

GOIS, V. H. dos S.; SILVA, K. A. P. da; DALTO, J. O. Análise da Produção Escrita de Estudantes do Ensino Superior: Uma Abordagem Semiótica. **ALEXANDRIA: R. Educ. Ci. Tec.**, Florianópolis, v. 12, n. 2, p. 255-278, maio. 2019.

Gray, Eddie M., and David O. Tall. "Duality, Ambiguity, and Flexibility: A 'Proceptual' View of Simple Arithmetic." Journal for **Research in Mathematics Education**, vol. 25, no. 2, 1994, pp. 116–40.

LIMA, E. L. **Curso de análise**. V. 1. 7ª ed. Rio de Janeiro: Projeto Euclides, Sociedade Brasileira de Matemática, 1992. 344 p.

LIMA, M. S. Santos, J. V. C. **A teoria dos campos conceituais e o ensino de cálculo.** - 1. ed. - Curitiba, Appis, 2015. 227 p.

MARTINS, E. S.; ARAÚJO, D. J. G.; OLIVEIRA, R. F. de. Ensino E Aprendizagem De Cálculo I Em Cursos De Licenciatura: Limite E Possibilidades. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, *[S. l.]*, v. 3, n. 9, p. 18–32, 2018.

MARTINS, Rodrigo. Atitude Reflexiva, 2016. O Método da Exaustão e o Surgimento da Constante Pi (π). Disponível em: https://atitudereflexiva.wordpress.com/2016/12/01/o-metodo-da-exaustao-e-o-surgimento-da-constante-pi-%CF%80/. Acesso em 25 de jan. 2024.

MORAES, Mônica Suelen Ferreira de. **Um estudo sobre as implicações dos obstáculos epistemológicos de limite de função em seu ensino e aprendizagem**. 2013. 132 f. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará, Instituto de Educação Matemática e Científica, Belém, 2013. Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas

MEVS, A. C. S.; DYNNIKOV, C. M. S. D. S.; PIRES, E. DE S. Avaliação do Cálculo Diferencial e Integral Pelo Enade Num Curso de Licenciatura Em Matemática do Rio Grande Do Sul. **Educação Matemática em Revista - RS**, v. 2, n. 24, 30 dez. 2023.

MEVS, Andreza Cardoso Santos; DYNNIKOV, Circe Mary Silva da Silva; PIRES, ELIEZER DE SOUZA. Aprendizagem De Limite Por Ex-Alunos Do Curso De Licenciatura De Matemática Da Ufpel. In: **Anais do Encontro Gaúcho de Educação Matemática**. Anais...Bagé(RS) UNIPAMPA, 2024.

NASCIMENTO, Jorge Costa do; Tarcisio da Rocha Falcão, Jorge. **Conceito de limite em cálculo : obstáculos e dificuldades de aprendizagem no contexto do ensino superior de matemática.** 2003. Tese (Doutorado). Programa de Pós-Graduação em Psicologia Cognitiva, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2003.

PINTO , M. M. F.. **Students' Understanding of Real Analysis** . PhD thesis, University of Warwick, 1998.

REIS, F.S. **A tensão entre rigor e intuição no ensino de Cálculo e Análise: A visão de professores-pesquisadores e autores de livros didáticos**. Tese de Doutorado. Faculdade de Educação. Universidade Estadual de Campinas. Campinas, 2001.

ROSA, Chaiane de Medeiros; ALVARENGA, Karly Barbosa; SANTOS, Fabiano Fortunato Teixeira dos. Desempenho acadêmico em cálculo diferencial e integral: um estudo de caso. **Revista Internacional de Educação Superior**, Campinas, SP, v. 5, p. e019023, 2019.

SANTOS, Letícia Rodrigues et al. As contribuições da Teoria da Aprendizagem de Lev Vygotsky para o desenvolvimento da competência em Informação**. Revista Brasileira de Biblioteconomia e Documentação**, [S. l.], v. 17, p. 1–15, 2021.

SILVA, C. M. S. da. Limite: Uma Breve Passagem Nos Livros Brasileiros Do Ensino Secundário . **ACERVO - Boletim do Centro de Documentação do GHEMAT-SP**, *[S. l.]*, v. 5, p. 1–25, 2023. DOI: 10.55928/ACERVO.2675-2646.2023.5.87.

SOARES, G. de O.; CURY, H. N. O conteúdo de limite em cursos de licenciatura em Matemática: uma pesquisa à luz da teoria dos três mundos da Matemática. **Revista Brasileira de Educação em Ciências e Educação Matemática**, *[S. l.]*, v. 1, n. 1, p. 64–83, 2017. DOI: 10.33238/ReBECEM.2017.v.1.n.1.18557.

TALL, D. Conflits and catastrophes in the learning of mathematics. **Mathematical Education for Teaching**, 1976. 2(4), 2-18.

TALL, D. e Vinner, S. Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. **Educational Studies in Mathematics**, 1981 12, 151-169.

TALL, D. (1991). The psychology of advanced mathematical thinking. In D. Tall (Ed.), **Advanced mathematical thinking** (pp. 3-21). Kluwe

TALL, D. Cognitive growth in elementary and advanced mathematical thinking. In: International Conference For The Psychology Of Mathematics Education, 19th, 1995, Recife, Brasil. Proceedings… Recife: UFPE, 1995. v. 1, p. 61- 75.

TALL, David. The transition from embodied thought experiment and symbolic manipulation to formal proof. Em **David Tall Home Page**, 2007. Disponível em.: http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2005g-delta-plenary.pdf. Acesso em 15 de Novembro de 2023.

TALL, D. Concept image and concept definition. Em **David Tall Home Page**, 2003. [Acesso electrónico]. Disponível: http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/themes/conceptimage.html. Acesso em 10 de Outubro de 2023.

TALL, D. **How Humans Learn to Think Mathematically: Exploring the Three Worlds of Mathematics** (Learning in Doing: Social, Cognitive and Computational Perspectives). Cambridge: Cambridge University Press. 2013, p. 457

TALL, D., KATZ, M. A cognitive analysis of Cauchy's conceptions of function, continuity, limit and infinitesimal, with implications for teaching the calculus. **Educ Stud Math 86**, 97–124, 2014

THIELE, T.; MIOTTO KAMPHORST, E.; KAMPHORST, C. H. O ensino de cálculo diferencial e integral sob a óptica da teoria dos campos conceituais. **Revista**

Brasileira de Ensino de Ciências e Matemática, *[S. l.]*, v. 1, n. 2, p. 119-129, 2018.

VYGOTSKY, Lev S., Pensamento e Linguagem, Ridendo Castigat Mores, Edição Eletrônica, Setembro, 2001, p. 136

ZANOLLA, S. R. S. O conceito de mediação em Vygotsky e Adorno. **Psicologia & Sociedade**, 2012. 24(1), 5-14

APÊNDICE A - QUESTIONÁRIO

Questionário 1

1. Calcule, caso exista o $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ em que $f(x) \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & se\ x \neq 1 \\ 3 & se\ x\ = 1 \end{cases}$. Explique como você resolveu.
2. Calcule, caso exista o $\lim\limits_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$. Por que?
3. Prove que $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$.
4. Questão do Enade

Figura 55 - Questão Enade 2017

Para calcular o limite $L = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-\text{sen}\ x}{x}$, os argumentos podem ser desenvolvidos usando as desigualdades $0 \leqslant \left|\frac{\text{sen}\ x}{x}\right| \leqslant \frac{1}{x}$, válidas para todo real $x > 0$.

A partir desses argumentos, conclui-se que L é igual a

Ⓐ -1.

Ⓑ 0.

Ⓒ 1.

Ⓓ ∞.

Ⓔ $-\infty$.

Fonte: Enade 2017

APÊNDICE B - RESPOSTA DOS ALUNOS

Licenciado 1

QUESTÃO 1

SOLUÇÃO:

NOTEMOS QUE $\lim_{x \to 1} f(x)$, NÃO CONSIDERAMOS

O VALOR DA FUNÇÃO EM $x=1$, OU SEJA, NESTE CASO, NÃO NOS INTERESSA O VALOR DA FUNÇÃO EM $x=1$ PROPRIAMENTE, PODENDO ATÉ NEM ESTAR DEFINIDA

PARA ESSE VALOR.

PORTANTO FAREMOS $\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{\cancel{(x-1)}.(x+1)}{\cancel{(x-1)}} = \lim_{x \to} x+1 = 2$$

$$\boxed{\text{PORTANTO o } \lim_{x \to 1} f(x) = 2}$$

QUESTÃO ②

SOLUÇÃO:

LEMBRANDO:

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ SE } x \geq 0 \\ -x, \text{ SE } x < 0 \end{cases}$$

ASSIM,

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = \lim_{x \to 0^-} -1 = -1$$

E

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x \to 0^+} 1 = 1$$

COMO $\lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1 \neq \lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1$, CONCLUÍMOS

QUE $\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x} = \nexists$

QUESTÃO ③

SOLUÇÃO:

SE $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$, ENTÃO, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists L > 0$ TAL QUE

$$x > L \Rightarrow \left|\frac{1}{x}\right| < \varepsilon$$

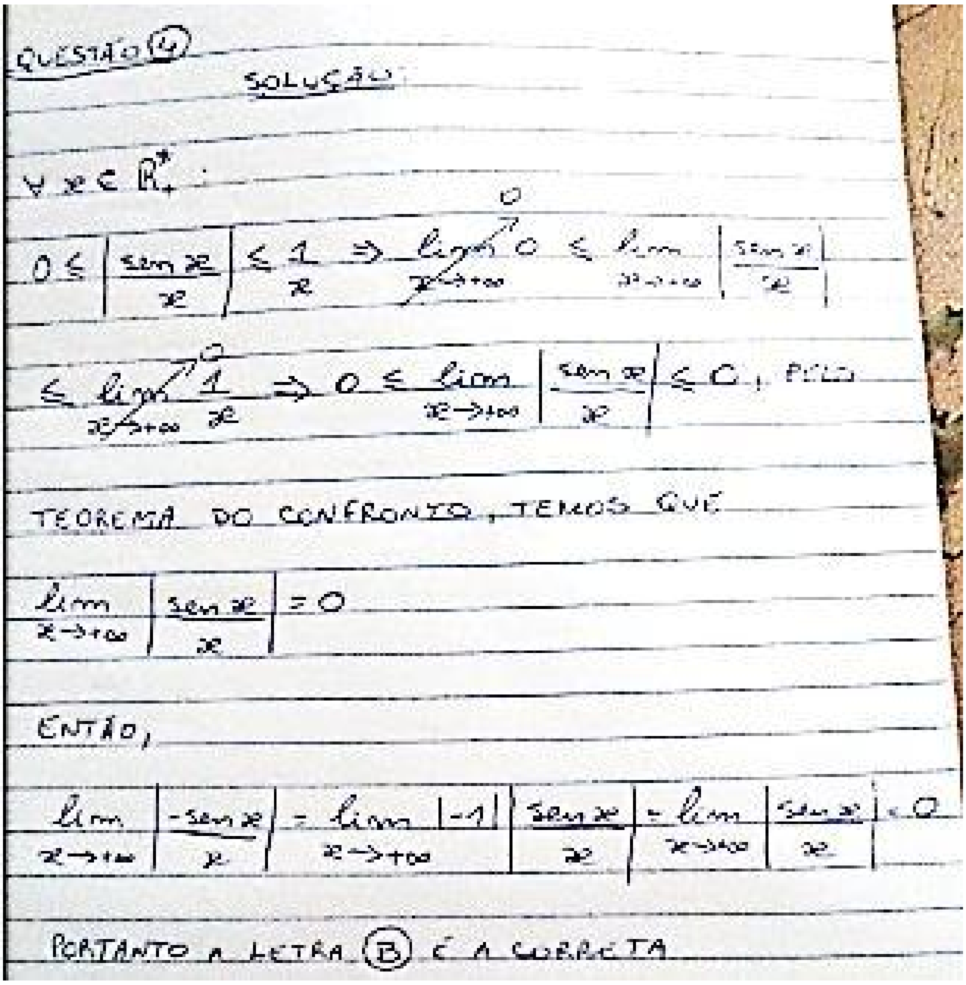
PRECISAMOS APRESENTAR UM $L(\varepsilon)$

$$\left|\frac{1}{x}\right| < \varepsilon \Longleftrightarrow 1 < \varepsilon|x| \Longleftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} < |x|$$

$$L(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow x > L = \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{1}{x} < \varepsilon$$

ASSIM ENCONTRAMOS $L = \frac{1}{\varepsilon}$, PROVANDO QUE

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$



QUESTÃO 4

SOLUÇÃO

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$0 \le \left|\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right| \le \frac{1}{x} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} 0 \le \lim_{x\to+\infty}\left|\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right|$$

$$\le \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} \Rightarrow 0 \le \lim_{x\to+\infty}\left|\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right| \le 0,$$ PELO

TEOREMA DO CONFRONTO, TEMOS QUE

$$\lim_{x\to+\infty}\left|\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right| = 0$$

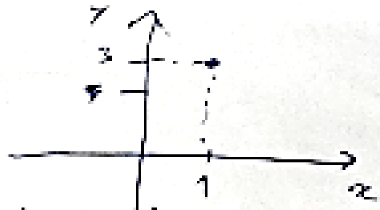
ENTÃO,

$$\lim_{x\to+\infty}\left|\frac{-\operatorname{sen} x}{x}\right| = \lim_{x\to+\infty}|-1|\left|\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right| = \lim_{x\to+\infty}\left|\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right| = 0$$

PORTANTO A LETRA B É A CORRETA

Licenciado 2

$$\lim_{x\to 1} \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & se\ x \neq 1 \\ 3 & se\ x = 1 \end{cases}$$



Suponhamos que tentaremos calcular o limite da f(x), utilizando os limites laterais.

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2-1}{x-1}$$

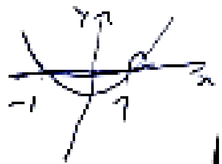
suponha que $x = 1,001$, logo:

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{(1,001)^2-1}{(1,001)-1}$$

(*) $(1,001)^2 = 1,002$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{1,002-1}{1,001-1}$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{0,002}{0,001} = 2$$



$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-1}{x-1}$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{(0,9999)^2-1}{(0,9999-1)}$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{(0,9998-1)}{(-0,0001)}$$

$$\lim_{x\to 1^-} = -\frac{(-0,0002)}{(0,0001)}$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{0,0002}{0,0001} = 2$$

$$\lim_{x\to 1^-} = 2$$

Portanto, conclui-se que o limite existe, aplicando a existência dos limites laterais.

(2)

Vamos tentar obter o limite da f, utilizando limites laterais:

$$\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$$

Como $x \to 0$, temos que x não é zero, mas pode ser qualquer valor numérico existente em $\mathbb{R}$, tal que "x" não seja zero.

Então: Por limites laterais, temos:

Sup. $x = 0{,}01$ e $x = -0{,}01$, logo:

$$\lim_{x \to 0} \frac{|0{,}01|}{0{,}01}$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{100}}{\frac{1}{100}} \Rightarrow \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{100} \cdot \frac{100}{1} \Rightarrow \lim_{x \to 0^+} \frac{100}{100} = 1$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{|-0{,}01|}{(-0{,}01)} = \frac{0{,}01}{-0{,}01} = \frac{-0{,}01}{0{,}01} = \frac{-\frac{1}{100}}{\frac{1}{100}} = \frac{-1}{100} \cdot \frac{100}{1} = \frac{-100}{100} = -1$$

Portanto, como os limites são diferentes portanto, o limite não existe. A construção para encontrar o limite da $f(x) = \frac{|x|}{x}$, foi pela tentativa dos limites laterais.

7) $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$

Dado $x \in \mathbb{R}^+$, temos que provar que $x \to \infty$, tenderá a zero.

Seja $x = 2$, logo a tendência é que o resultado seja igual a zero

$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{2} => 0$

Como $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}^+$, temos que pegando qualquer $x \in \mathbb{Z}$, onde seja diferente de 1, então, temos $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x}$ sendo igual a 0.

Temos que se supormos que $x > 1$, então:

$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{3} = 0$

$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{4} = 0$

$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{5} = 0$

$\vdots$

A tendência é que seja igual a zero.

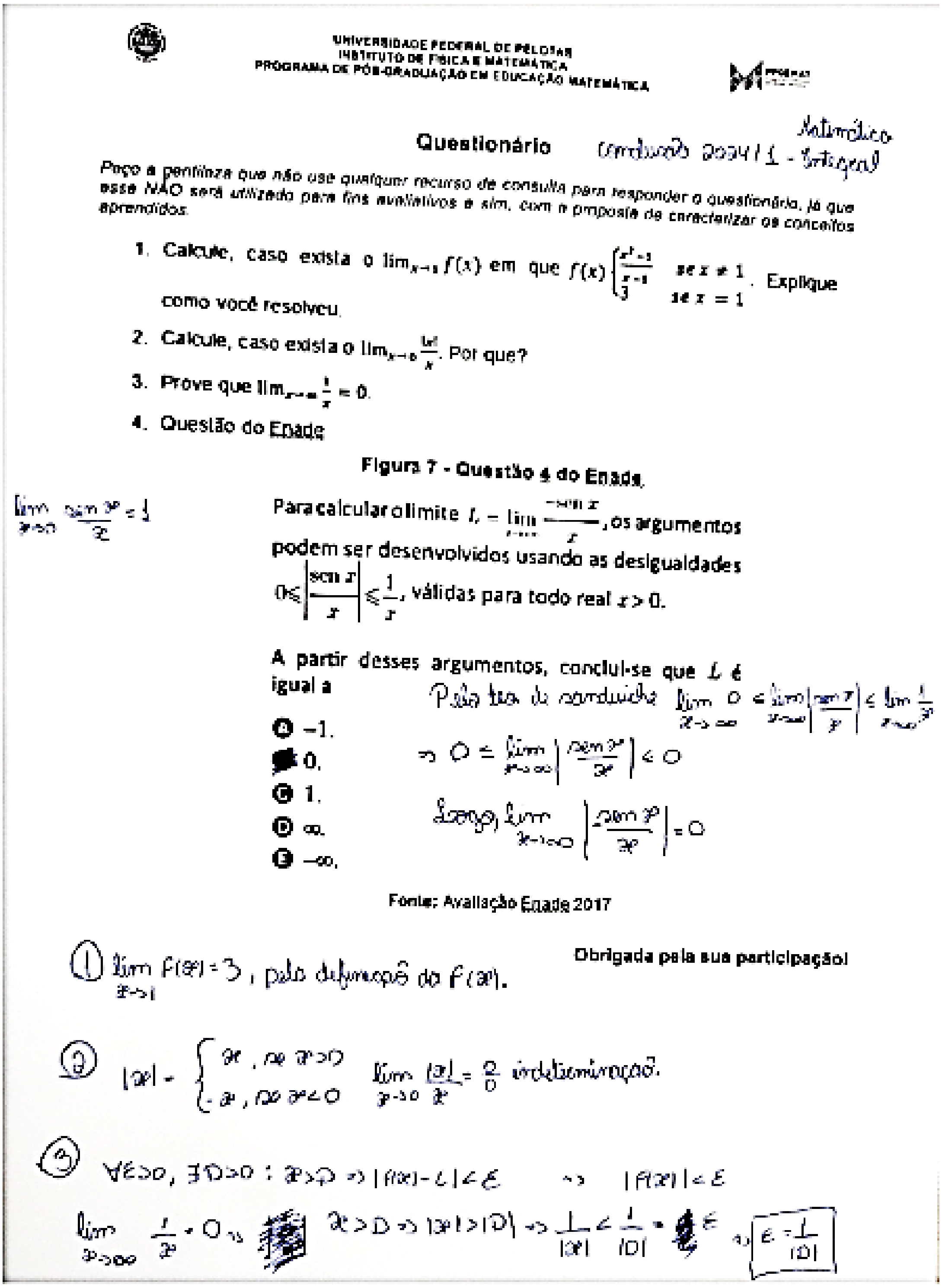
Conclui-se que

$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$.

4 Não compreendi, pois é um problema de uma questão do Enade onde não consegui nem compreender o que a questão está pedindo, portanto não farei. Pois sempre tive dificuldade na parte de limites.

– É uma questão que envolve limite fundamental, se eu não estou errado, porém eu não recordo muito do estudo sobre limite fundamental, este foi uma das ocasiões que fez não ser efetuado a questão do Enade.

Amanda



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PELOTAS
INSTITUTO DE FÍSICA E MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Questionário Conclusão 2024/1 - Matemática Integral

Peço a gentileza que não use qualquer recurso de consulta para responder o questionário, já que esse NÃO será utilizado para fins avaliativos e sim, com o proposta de caracterizar os conceitos aprendidos.

1. Calcule, caso exista o $\lim_{x \to 1} f(x)$ em que $f(x)\begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & se\ x \neq 1 \\ 3 & se\ x = 1 \end{cases}$. Explique como você resolveu.
2. Calcule, caso exista o $\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$. Por que?
3. Prove que $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$.
4. Questão do Enade

Figura 7 - Questão 4 do Enade.

$\lim_{x \to \infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

Para calcular o limite $L = \lim_{x \to \infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$, os argumentos podem ser desenvolvidos usando as desigualdades $0 \leq \left|\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right| \leq \frac{1}{x}$, válidas para todo real $x > 0$.

A partir desses argumentos, conclui-se que L é igual a

Pelo teo. do sanduíche $\lim_{x \to \infty} 0 \leq \lim_{x \to \infty} \left|\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right| \leq \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x}$

$\Rightarrow 0 \leq \lim_{x \to \infty} \left|\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right| \leq 0$

Logo, $\lim_{x \to \infty} \left|\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right| = 0$

- A −1.
- B 0.
- C 1.
- D ∞.
- E −∞.

Fonte: Avaliação Enade 2017

① $\lim_{x \to 1} f(x) = 3$, pela definição de $f(x)$.

Obrigada pela sua participação!

② $|x| = \begin{cases} x, & se\ x > 0 \\ -x, & se\ x < 0 \end{cases}$ $\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x} = \frac{0}{0}$ indeterminação.

③ $\forall \varepsilon > 0, \exists D > 0 : x > D \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$

$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow$ $x > D \Rightarrow |x| > |D| \Rightarrow \frac{1}{|x|} < \frac{1}{|D|} = \varepsilon \Rightarrow \boxed{\varepsilon = \frac{1}{|D|}}$

Carla

1. $\lim_{x \to 1} f(x) \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{se } x \neq 1 \\ 3 & \text{se } x = 1 \end{cases}$

$$\frac{x^2}{x} = \frac{x \cdot x}{\cancel{x}} = x$$

2. $\lim_{x \to 0} \dfrac{|x|}{x} = \begin{cases} \dfrac{-x}{x} = -1 & \text{se } x \neq 0 \\ \dfrac{x}{x} = 1 & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$

3. Prove que $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

e $N > 0$

Seja K um número maior do que 0, observando a sequência abaixo, em algum momento K e N serão

$$\frac{1}{K} > \frac{1}{K+1} > \frac{1}{K+2} > \frac{1}{K+3} > \frac{1}{K+4} > \dots > \frac{1}{K+N}$$

$K > 0$ e $N > 0$

números tão grandes que a divisão de 1 por K+N chegará a um valor muito próximo de zero.

4. $0 \leq \left| \dfrac{\text{sen } x}{x} \right| \leq \dfrac{1}{x}$

$L = \lim_{x \to +\infty} \dfrac{-\text{sen } x}{x}$

Resposta: B) $L = 0$

Cláudia

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PELOTAS
INSTITUTO DE FÍSICA E MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Integral
Conclusão 2024/1

Questionário

Peço a gentileza que não use qualquer recurso de consulta para responder o questionário, já que esse NÃO será utilizado para fins avaliativos e sim, com a proposta de caracterizar os conceitos aprendidos.

1. Calcule, caso exista o $\lim_{x\to 1} f(x)$ em que $f(x)\begin{cases}\frac{x^2-1}{x-1} & se\ x \neq 1\\ 3 & se\ x = 1\end{cases}$. Explique como você resolveu.
2. Calcule, caso exista o $\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$. Por que?
3. Prove que $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0$.
4. Questão do Enade

Figura 7 - Questão 4 do Enade

Para calcular o limite $L = \lim_{x\to\infty}\frac{-\operatorname{sen} x}{x}$, os argumentos podem ser desenvolvidos usando as desigualdades $0 \leqslant \left|\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right| \leqslant \frac{1}{x}$, válidas para todo real $x > 0$.

A partir desses argumentos, conclui-se que L é igual a

- (A) -1.
- (B) 0.
- (C) 1.
- (D) ∞.
- (E) $-\infty$.

Fonte: Avaliação Enade 2017

Obrigada pela sua participação!

1. Pela forma que f(x) está definida $\lim_{x\to 1} f(x) = 3$.

2. É uma indeterminação do tipo 0/0, não lembro como resolver.

3. Seja $x \in \mathbb{R}$, temos que $x < x+1$, logo $\frac{1}{x} > \frac{1}{x+1}$ e por transitividade temos que $\frac{1}{x} > \frac{1}{x+1+\ldots}$ ... $x \to \infty$, $1 < x$, $\frac{1}{x} < 0$, considerando que x é positivo, o lim vai tender a 0.

4. $L = \lim_{x\to\infty} \frac{-\operatorname{sen} x}{x} = 0$, alternativa B, pois sabemos que $-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1$ e o denominador $\to \infty$, logo quanto maior o denominador, mais próximo de 0 o limite.

Gustavo

1) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} \\ 3 \end{cases} \leadsto \frac{(x+1)(\cancel{x-1})}{(\cancel{x-1})} = x+1$ $\lim_{x \to 1} x+1$ $\lim_{x \to 1} f(x) = 2$

$\lim_{x \to 1^-} x+1 = 2^-$ e $\lim_{x \to 1^+} x+1 = 2^+$ Os limites laterais existem e são iguais. 2

2) $\lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = \frac{|0^-|}{0^-} = \frac{+}{-} = -$ e $\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = \frac{|0^+|}{0^+} = +$

Os limites laterais existem mas são diferentes, logo $\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$ não existe.

3) ~~$\forall \varepsilon > 0, \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$~~

$\forall \varepsilon > 0 : |f(x) - L| < \varepsilon \rightarrow \exists \delta > 0 : |x-a| \delta$

$|\frac{1}{x} - 0| < \varepsilon \rightarrow |\frac{1}{x}| < \varepsilon \rightarrow x > \frac{1}{\varepsilon}$

$|x-a| < \delta \rightarrow |x -$

4) $\lim_{x \to +\infty} \frac{-\operatorname{sen}(x)}{x} =$

$\lim_{x \to +\infty} 0 \leq \lim_{x \to +\infty} \left| \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \right| \leq \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x}$

$0 \leq \lim_{x \to +\infty} \left| \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \right| \leq 0$

logo, $\lim_{x \to +\infty} \left| \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \right| = 0$

Juliana

1) $\lim_{x \to 1} f(x)$

$\lim_{x \to 1^+} \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{1^2-1}{1-1} = \underbrace{\frac{0}{0}}_{}$ = Indeterm.

não lembro como resolver

$\lim_{x \to 1} 3 = 3$

$\lim_{x \to 2} \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{2^2-1}{2-1} = \frac{3}{1} = 3$

$\lim_{x \to 0} \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{0^2-1}{0-1} = \frac{+1}{-1} = 1$

3) $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$, provar $\quad \delta \quad |fx - x| < \varepsilon$

Quando o limite tende ao infinito fica $\frac{1}{\infty}$, quando isso acontece o $\lim \frac{1}{\infty}$ tende a zero, logo o $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$

* Não lembro a definição de limite

$|fx - k| < \varepsilon$

$|\frac{1}{x} - 0| < \varepsilon \quad \frac{1}{x} < \varepsilon \quad \varepsilon x > 1 \quad x > \frac{1}{\varepsilon}$

2) $\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$. Porquê?

$\lim_{x \to 0} |x| \cdot \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = 0 \cdot 0 = 0$

Ao calcular os limites deu zero.

4) $L = \lim_{x \to +\infty} \frac{-\operatorname{sen} x}{x}$ $\quad 0 \leq \left|\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right| \leq \frac{1}{x}$, p/ todo $x > 0$

$L = \lim_{x \to +\infty^+} \frac{-\operatorname{sen} x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{-\operatorname{sen} x}{x} = 0$

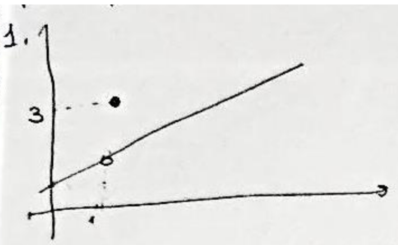
$L = \lim_{x \to +\infty} \frac{-\operatorname{sen} x}{x} = \lim_{x \to +\infty} -\operatorname{sen} x \cdot \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} =$

$\boxed{\text{tende a } 0}$

0/1

Lucas

1.



Podemos concluir que há uma descontinuidade pontual para $x = 1$.

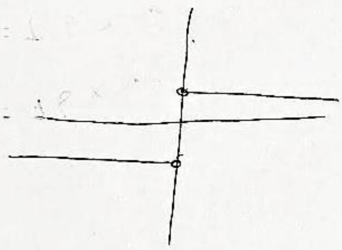
Notamos que $\frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = x+1 \quad (x \neq 1)$

Ou seja, a representação gráfica será igual a $y = x+1$.

com a restrição "herdada" de $x \neq 1$.

Os limites laterais tendem a 2, apesar de $f(1) = 3$.

2. $y = \frac{|x|}{x} =$



O gráfico seria

tendendo a

-1 pela esquerda
1 pela direita } Logo, não existe no ponto.

3. Eu gosto de dizer que estou dividindo uma bala (o numerador 1) para x crianças.

Quanto mais crianças, menor o pedaço de bala

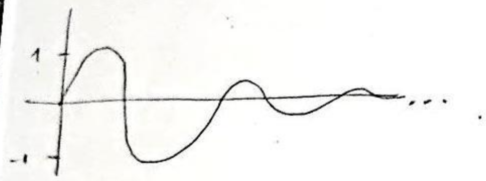
"Para infinitas crianças, sumiu a bala"

Posso também fazer divisões por 1, 10, 100..., e avaliar pelo comportamento que a resposta tende a zero.

4.

Se

$0 \le \left| \frac{\text{sen } x}{x} \right| \le \frac{1}{x}$



(de cabeça p/ baixo pois é $-\text{sen } x$ e não $\text{sen } x$...)
apesar da oscilação, podemos concluir que, ao x crescer,
a oscilação varia em torno de zero, portanto

$\lim_{x \to \infty} \frac{-\text{sen } x}{x} = 0.$

Alternativa B

Paulo

Questionário

Peço a gentileza que não use qualquer recurso de consulta para responder o questionário, já que esse NÃO será utilizado para fins avaliativos e sim, com a proposta de caracterizar os conceitos aprendidos.

1. Calcule, caso exista o $\lim_{x \to 1} f(x)$ em que $f(x)\begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & se\ x \neq 1 \\ 3 & se\ x = 1 \end{cases}$. Explique como você resolveu.
2. Calcule, caso exista o $\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$. Por que?
3. Prove que $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$.
4. Questão do Enade

Figura 7 - Questão 4 do Enade

Para calcular o limite $L = \lim_{x \to +\infty} \frac{-\operatorname{sen} x}{x}$, os argumentos podem ser desenvolvidos usando as desigualdades $0 \leqslant \left|\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right| \leqslant \frac{1}{x}$, válidas para todo real $x > 0$.

A partir desses argumentos, conclui-se que L é igual a

Ⓐ -1.
● 0.
Ⓒ 1.
Ⓓ ∞.
Ⓔ $-\infty$.

Fonte: Avaliação Enade 2017

Obrigada pela sua participação!

1. Não existe limite no ponto $x=1$ pois a função apresenta um salto.

2. $|x| = \sqrt{x^2} \longrightarrow$

3.

APÊNDICE C - DEPOIMENTOS DOS ALUNOS

Todos os nomes citados nos depoimentos abaixo descritos são fictícios.

TRANSCRIÇÃO DO DEPOIMENTO DA CARLA

Pesquisadora: Quando você aprendeu o limite pela primeira vez, teve alguma dificuldade? Como foi?

Carla: Vixe, deixa eu ver... O limite foi em Cálculo I. Quantas vezes eu reprovei! (risadas) As funções foram mais tensas. Cálculo I... Acho que foi na segunda ou terceira vez que fiz a disciplina, mas só terminei porque, nas duas primeiras, eu tranquei. Foi tenso, mas me dediquei muito.

Pesquisadora: Você trancou Cálculo I?

Carla: É, era online. Aí eu peguei com o Amaro e o Cleiton, que já tinham me feito sofrer em Funções. Mas passei! Eles foram bons em Funções pra mim, sabe? Só que eu não estava disposta a madrugar de novo, que nem das outras vezes. Então, tranquei aquela primeira vez. Cheguei até a começar, fiz um trabalho, mas tranquei.

Depois, comecei de novo no online. Não, pera... Era presencial, com o Amaro. Só que eu não estava numa fase boa da minha vida, então nem dá pra culpar o professor. Aí, depois, fiz com o Joilson e, pô, o Joilson foi excelente! Tá louco, ele até o "1 + 1" ele explica.

Mas foi uma disciplina em que me dediquei demais, demais, demais! Então, sei lá... Acho que foi difícil, mas não foi o fim do mundo. Pra mim, Funções foi pior.

Pesquisadora: E o que tu acha que, dentro do conceito de Limite, acaba sendo mais difícil de entender? O que você achou mais difícil e fácil em Limite?

Carla: Eu acho que as regrinhas... A questão de módulo, por exemplo, eu estava tentando me lembrar como abrir o módulo, por que tinha que abrir, se tinha alguma regra específica... Não lembro exatamente se tinha algo muito específico, mas, dependendo da questão, é mais trabalhoso.

Então, às vezes algumas coisas de funções, às vezes, umas manipulações algébricas que tu tem que fazer pra conseguir achar o limite. Nesse caso aqui, não achei nada fora do normal na manipulação algébrica, mas, algumas vezes, a gente tem que enxergar o que não tá ali.

Isso, pra mim, é o mais difícil, porque, às vezes, tu não te lembra mais, sabe? Algumas coisas, exatamente... Tipo: "Como faço pra resolver isso aqui?" E até se lembrar do que tem que fazer... Então...

Pesquisadora: E essas questões de prova, de provar, você compreende bem a definição formal?

Carla: Ah, eu acho bem ruim. Bem ruim mesmo.

Tentei usar aqui, mas não sei se foi suficiente, sabe? Eu fiz porque considerei: seja k um número maior do que 0 e N um número maior do que 0. Aí, coloquei numa sequência: 1 sobre K vai ser maior do que 1 sobre $K + 1$.

E assim fui indo, até chegar a 1 sobre $K + N$. Então, vai chegar o momento em que K e N vão ser números tão grandes que a divisão de 1 por $K + N$ vai chegar num valor muito próximo de 0. Foi isso que eu fiz, mas não sei se é suficiente.

Pesquisadora: E nessa questão do Enade, que usa uma ideia mais complexa, o que você pensou para resolver?

Carla: Primeiro, pensei em eliminar o x embaixo, mas não ia adiantar. Acho que não, pelo menos.

Tentei, não foi. Aí, fui mais para o raciocínio... Pensei: "Ah, o seno de qualquer número vai acabar sendo 1 ou -1. Então, dividindo isso por qualquer número infinito, vai chegar num número próximo de 0."

Agora, se tá certo, eu não sei. É a mesma coisa com 1 sobre x, né? 1 sobre um número muito grande vai tender a 0.

Pesquisadora: Sim, muito obrigada, Carla, pela participação e pela ajuda!

TRANSCRIÇÃO DO DEPOIMENTO DO LUCAS

Pesquisadora: Me conta um pouco sobre como pensou e realizou cada questão.

Lucas: Aqui, nesta primeira, a gente tem um produto notável, uma função de várias leis. Eu vou abrindo um produto notável e ali, né, quando x for igual a 1, só vou ter um deslocamento de um pontinho ali para o 3.

Eu gosto de usar a analogia de que, quando faço a simplificação do produto notável, ele geralmente é uma questão que terá uma restrição no meu domínio. Só que, ao fazer essa transformação no gráfico — que, no caso, é o gráfico dessa primeira função —, eu posso simplificá-lo e ele continuará igual a esse, só que herda a restrição da função original, como se essa função fosse "filha" daquela. A herança da função "mãe" será herdada pela "filha", incluindo sua restrição.

Então, na hora de construir o gráfico, ele fica como o gráfico de $x + 1$, mas com essa restrição em $x = 1$. Nesse gráfico, pelos limites laterais, eu faço com que ele tenda a 1, apesar de o ponto estar "voando" no 3. Esse é o jeito que tentei explicar essa primeira questão.

Essa segunda é $\frac{x}{x}$, só que como é módulo... Até agora eu tô pensando... Ah, não, tá certo. Se fosse só $\frac{x}{x}$, daria 1, né? Só que, como é módulo de $\frac{x}{x}$, os valores negativos para x fazem esse lado do gráfico ir para baixo, né? Apesar da parte de cima ser positivo, como é módulo, então ficaria mais dividido por menos, resultando em 1 e -1. Isso causa uma quebra nos limites laterais, então ele não vai existir.

Na terceira questão, eu fiz toda uma explicação sobre como falar que o limite de $\frac{1}{x}$ é 0 quando x tende ao infinito. Eu gosto de dizer: Pensa que você está dividindo uma bala, que é esse numerador, para crianças — x crianças. Quanto mais crianças, menos bala. Para infinitas crianças, acaba a bala, não tem bala, né?

Por que a gente está falando de bala? Também dá para fazer aquela construção intuitiva na tendência da resposta. Eu vou aumentando o número pelo qual estou dividindo e vejo, intuitivamente, que isso tenderia a 0. Não é uma demonstração rigorosa, mas tentei explicar com minhas palavras.

Pesquisadora: E a demonstração que normalmente se usa com o delta e épsilon?

Lucas: Eu vi isso em Cálculo 1 vagamente e não lembro de ver em Análise.

Na questão 4, eu deduzi o gráfico. Até botei que fiz o seno de x sobre x, e ele vai oscilando, né? O $sen(x)$ é um gráfico que oscila entre -1 e 1. Só que, como estou fazendo $\frac{\text{sen}(x)}{x}$, esse valor de x está aumentando, apesar de o valor do seno continuar oscilando.

Então, o gráfico vai se achatando conforme ele tende ao infinito, como se fosse um "tornadinho". Só que eu botei ele espelhado. Eu fiz $sen(x)$, mas, na questão, era $-sen(x)$. No infinito, acaba dando o mesmo resultado, só que o gráfico está ao contrário. E aí deduzi que ele tende a zero.

Pesquisadora: Como foi o teu curso de Cálculo? O que tu considera que facilitou ou dificultou tua aprendizagem?

Lucas: Eu tive Cálculo I com um professor cujo método não me adaptei muito bem.

Vou tentar ser mais anônimo nas minhas colocações. Ele seguia um caminho muito computacional, muito direto. Inclusive, pulamos certos conteúdos, como a questão dos gráficos. Quando fui para Cálculo 2, acabei precisando de certos conceitos, principalmente os de derivada, quando falávamos de antiderivada.

Acabei tendo que correr atrás para reaprender alguns conteúdos de Cálculo I. A questão do limite não foi um grande problema, porque, no Cálculo II — pelo menos do jeito que estamos vendo agora —, ele se concentra mais nas integrais, e não entramos muito no tópico de limite.

Só que aí eu virei monitor. Entrei para o GAMA e passei a atender as turmas de Cálculo 1. Foi quando senti muito forte a minha lacuna.

Corri atrás tanto para aprender para mim quanto para aprender o suficiente para auxiliar os alunos. Enquanto monitor, lidei com diferentes cálculos, porque temos diferentes cursos de Cálculo aqui na UFPEL.

No curso de Matemática, apesar de ser um Cálculo mais aprofundado — pois o Cálculo I tem 6 créditos —, há cursos com Cálculo reduzido, com apenas 4 créditos. Nesses cursos, os alunos veem desde matemática básica até o final de integrais, mas de forma muito resumida.

Além disso, são cursos cujos alunos, muitas vezes, não têm tanta afinidade com a matemática. Por exemplo, cursos de Ciências Biológicas, Farmácia, Biologia e Química. Por isso, busquei explicações mais palpáveis para que fizessem sentido, principalmente na questão dos gráficos.

Na Agronomia, por exemplo, a análise de gráficos é muito utilizada. Então, a maior parte do meu conhecimento veio do que corri atrás, porque, quando cursei a disciplina, não foi suficiente. Além disso, minha experiência como monitor ajudou muito.

Mas, na disciplina que fiz, não foi suficiente. É isso.

Pesquisadora: E como foi a experiência com o GAMA e com os alunos? Eles têm muita dificuldade nessa parte?

Lucas: Nossa... Tu sente.

Claro, a gente se coloca disponível para atender. Eu sou monitor de Cálculo II. O aluno chega com dúvida de Cálculo II, mas tem problema em propriedade de potência. Isso não é Cálculo II! Não está na ementa de Cálculo II. Isso a gente considera como lacuna de matemática básica.

Mesmo assim, acabamos respondendo. Mas uma coisa que percebemos muito é que os alunos trazem uma dúvida, mas a dificuldade real é fazer manipulação algébrica na conta.

Isso pesa desde o estudo de limite, porque o aluno precisa manipular produto notável. Quando ele chega no início de Cálculo II, onde começamos a trabalhar integrais, que exigem mais manipulação algébrica para encaixar no formulário, ele sente muita dificuldade.

A aplicação da fórmula em si, entender qual fórmula usar, até vai. Mas, até conseguir encaixar a função no formato adequado, os alunos têm muita dificuldade.

Isso foi o que mais notei quando trabalhava com limites. Eles não conseguiam fazer produto notável. Produto notável era uma grande dificuldade.

Pesquisadora: E produto notável foi tua dificuldade também? Quando tu aprendeu limite, teve dificuldade com isso?

Lucas: Não. Eu já vinha com produto notável bem tranquilo. Minha dificuldade foi mais uma questão de não me dar bem com o professor.

Pesquisadora: Muito obrigada pelo relato!

TRANSCRIÇÃO DO DEPOIMENTO DE PAULO

Paulo: Eu fiz Cálculo I em 2018 e fiz Álgebra Linear e Geometria Analítica também em 2017. Não, foi em 2018... 2017 e 2018. A memória já não tá... Enfim, em 2017 e 2018 eu fiz Álgebra Linear e Geometria Analítica.

Só que, daí, na metade de 2019, eu larguei. 2020 foi fim do mundo. 2021 foi fim do mundo. Em 2022, eu continuei fora e fui voltar em 2023... Tá.

Então, eu voltei para o curso agora. E, como eu já tinha feito os cálculos, trocou o currículo e tudo mais. Depois que voltei, fiquei com Matemática Elementar e Funções Transcendentais... Desculpa, agora no meu currículo é chamado de Funções Transcendentais, que é a parte sobre trigonometria.

Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) e Numérico. Então, eram três cadeiras que... Ah, tecnicamente tem limite, mas... Aham. O foco não era esse. Ah, e Análise Real também.

Tinha Análise Real, que ainda faltava. Aham. Fiz Análise Real em 2023/2, junto com EDO.

Daí, o que aconteceu? Análise Real teve três avaliações. As primeiras partes foram super bem, mas a última parte era sobre demonstração em relação ao limite. E eu sou péssimo com limite, como deu para notar na prova. Então, fui péssimo, mas foi o suficiente para passar.

EDO é derivada e integral. Aham, sim. E, em Numérico, são técnicas, e de novo tu não vê limite. Então, a última vez que eu vi limite deve ter sido, sei lá, em 2018.

Pesquisadora: Mas qual foi a maior dificuldade que tu teve para aprender limite?

Paulo: Para aprender limite, eu acho que a maior dificuldade, com certeza, é a parte teórica. Porque, quando tu começa a fazer, sei lá, L'Hôspital, técnicas para resolver limite, essas coisas, se tu dá uma revisada, tu faz tranquilo, e passa voando.

Só que a parte teórica, a demonstração do limite, limite à direita e à esquerda, provar a existência do limite... Sabe quando tu assiste às aulas e pensa: "Ok, eu não entendi"? Daí, tu estuda em casa e fala: "Ok, eu ainda não entendi."

Pesquisadora: Você acha que Isso porque limite envolve um pouco de função? Ou tu acha que a base de função estava boa, mas o limite não fazia sentido?

Paulo: Eu sou de Porto Alegre, não sou daqui. E o colégio onde estudei era muito voltado para preparar para o ENEM.

Então, tinha um foco bem forte na parte de geometria, tanto que eu nunca tive dificuldade com isso. Também enfatizavam equações e gráficos mais simples, tipo equação de segundo grau, equação de primeiro grau, que eu resolvia sem pensar. Além disso, davam bastante atenção a porcentagem, regra de sinal, regra de três... Essas coisas que a gente sabe que vai acabar usando de alguma forma.

Meu colégio tinha essa pegada de preparar para passar em alguma coisa, e não exatamente porque a BNCC exigia. Então, com certeza, a parte de pré-cálculo foi um caos para mim.

Fui reprovado em pré-cálculo. A primeira vez que fiz foi com o professor Carlos, e ele me mostrou aquele conceito de que, se tu tem uma função e faz modificações nela, tu pode prever o comportamento sem refazer tudo. Por exemplo, se tem logaritmo de *x*, e depois logaritmo de *3x*, tu não precisa montar todo o logaritmo de *x* de novo, porque já sabe a distorção da função.

E eu olhava para isso e pensava: "Não entendi." E o professor dizia: "Mas é só olhar." E eu falava: "Cara, eu não sei o que é 'só olhar'."

Tu tá me dizendo que é "só olhar", mas eu não sei o que eu tenho que olhar. Hoje em dia, eu sei o que ele queria dizer. (risos) Mas, no começo, ainda não estava claro.

Então, fiz pré-cálculo, reprovei. Fiz de novo. Em 2017, fiz Cálculo I.

No Cálculo I, a revisão foi super rápida. Ele dava, sei lá, duas aulas revisando o que é uma função, bem superficialmente. Daí, entrava direto na parte de limite e ficava metade do semestre nisso, para só depois entrar em derivada e passar o restante do semestre nessa parte.

Foi bem... bem intensivo, né? Intensivo de limite.

Pesquisadora: Tá, e nessas questões, o que tu achou mais difícil de fazer?

Paulo: Sinceramente, o fato de não lembrar as coisas. Tipo... Eu acho que essa daqui tá certa, a do Enade, questão 4.

Só que, na do Enade, eu senti que, por ter opções de resposta, eu pensei: "Tá, é isso daqui." Mas aí vinha a dúvida: "Por que é isso daqui?" Eu não lembrava, não tinha certeza. Sentia que era aquilo, mas não sabia justificar.

Nas outras questões, era a mesma coisa, mas, como não tinham alternativas, eu me sentia ainda mais perdido. Quando tu tem opções, tu tem uma espécie de muleta, sabe? Tu sabe que a resposta vai ser uma daquelas e tenta se aproximar de um dos resultados.

Já nas questões abertas, eu sentia que sabia um pedaço, mas, sei lá, 70% do conteúdo eu não lembrava. E daí eu ficava tipo: "Tá... Ok."

Pesquisadora: Mas as demais questões, você conseguiria pensar como seria a função delas?

Paulo: Ah, sim. Por exemplo, essa daqui (referindo-se à questão 1), eu sei que tá errada, a resposta que eu dei.

Porque essa daqui existe. Apesar de ter o salto, o fato de existir limite à direita e à esquerda faz com que ele exista. Só que, na hora, eu respondi o contrário. Depois, pensando melhor, vi que tava errado.

Essa daqui (questão 2) também... Sim, essa existe.

E a questão 3... Eu sei que tava no livro de Análise, eu vi ela lá, mas não lembrava como resolver. O limite, na real, dava qualquer número... Como é que era mesmo?

O limite de qualquer *n*, sendo *n* um número real, sobre *x*, quando *x* tende ao infinito, dava zero. Porque não importa o quão grande seja o infinito.

Sim, eu lembro que tinha essa demonstração no livro. Inclusive, era o livro do Maurício Zahn. Mas não consegui fazer!

Espero que minhas respostas tenham ajudado de alguma forma.

Pesquisadora: Muito obrigada. Me ajudou demais.