

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PELOTAS
Instituto de Física e Matemática
Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática



Dissertação

**Estudo Analítico-Numérico e Geométrico de Estruturas Galvanizadas para
Trocadores de Calor Solo-Ar**

Ana Maria Bersch Domingues

Pelotas, 2025

Ana Maria Bersch Domingues

**Estudo Analítico-Numérico e Geométrico de Estruturas Galvanizadas para
Trocadores de Calor Solo-Ar**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática da Universidade Federal de Pelotas, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Modelagem Matemática

Orientador: Prof. Dr. Jairo Valões de Alencar Ramalho
Coorientadores: Prof. Dr. Honório Joaquim Fernando
Prof. Dr. Michel Kepes Rodrigues

Pelotas, 2025

Universidade Federal de Pelotas / Sistema de Bibliotecas
Catalogação da Publicação

D671e Domingues, Ana Maria Bersch

Estudo analítico-numérico e geométrico de estruturas galvanizadas para trocadores de calor solo-ar [recurso eletrônico] / Ana Maria Bersch Domingues ; Jairo Valões de Alencar Ramalho, orientador ; Honório Joaquim Fernando, Michel Kepes Rodrigues, coorientadores. — Pelotas, 2025.

116 f. : il.

Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática, Instituto de Física e Matemática, Universidade Federal de Pelotas, 2025.

1. Potenciais térmicos. 2. Modelagem matemática. 3. Modelagem numérica. 4. Material galvanizado. 5. Eficiência térmica. I. Ramalho, Jairo Valões de Alencar, orient. II. Fernando, Honório Joaquim, coorient. III. Rodrigues, Michel Kepes, coorient. IV. Título.

CDD 511.8

ESTUDO ANALÍTICO-NUMÉRICO E GEOMÉTRICO DE ESTRUTURAS GALVANIZADAS PARA TROCADORES DE CALOR SOLO-AR

por

Ana Maria Bersch Domingues

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática, PPGMMat, do Instituto de Física e Matemática da Universidade Federal de Pelotas, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de

Mestre em Modelagem Matemática

Banca examinadora:

Prof. Dr. Jairo Valões de Alencar Ramalho - Orientador (UFPel)

Prof. Dr. Honório Joaquim Fernando - Coorientador (UFF)

Prof. Dr. Michel Kepes Rodrigues - Coorientador (FURG)

Prof. Dr. Régis Sperotto de Quadros - Membro interno (UFPel)

Prof. Dr. Liércio André Isoldi - Membro externo (FURG)

Prof. Dr. Andre Luis Razera - Membro externo (FURG)

Pelotas, 19 de fevereiro de 2025

AGRADECIMENTOS

O percurso do mestrado é uma jornada repleta de desafios e exigências que testam nossos limites. É uma fase em que cada minuto conta, e cada responsabilidade parece multiplicar-se num piscar de olhos. Nesse contexto, expresso minha imensa gratidão aqueles que tornaram essa trajetória um pouco mais suave.

Primeiramente, desejo expressar minha profunda gratidão à minha família, cujo apoio foi a âncora que me sustentou nos momentos mais desafiadores. Em especial, gostaria de agradecer a minha mãe, Andréia, e ao meu padrasto, Alessandro.

Não posso deixar de mencionar meu namorado, Lucas, cujo apoio foi uma fonte de força e estabilidade durante toda esta jornada. Sua presença e encorajamento foram fundamentais para minha perseverança.

Além disso, expresso minha sincera gratidão aos meus orientadores, Jairo, Honório e Michel. Ao professor Jairo, por ter acreditado em mim desde o início da minha trajetória acadêmica, oferecendo a primeira bolsa de iniciação científica e, mesmo após cinco anos, continuando a me ensinar e abrir portas. Ao professor Honório, pela tranquilidade e amizade construídas nestes anos de convivência em meio a telas (e também pelo seu incrível e invejável conhecimento de Elementos Finitos). Ao professor Michel, pela sua sensibilidade, dedicação e pelos meses de conversas ininterruptas pelo WhatsApp (para este agradecimento para um pedido de desculpas) que fizeram com que meu desejo de sempre melhorar este trabalho fosse atendido. A orientação e comprometimento deles foram cruciais para o meu desenvolvimento acadêmico e pessoal. Eles foram e são os melhores orientadores que eu poderia ter.

Por último, mas não menos importante, gostaria de estender meus agradecimentos à professora Daniela. Sua capacidade de encontrar soluções para todos os problemas e sua dedicação incansável ao sucesso dos seus alunos foram verdadeiramente inspiradoras. Estendo também meu agradecimento a todos os professores do Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática, por momentos de aprendizado, trocas e alegria.

Esta dissertação é dedicada a todos vocês, que desempenharam papéis tão significativos no meu percurso acadêmico e pessoal. Vocês são os pilares que sustentaram minha jornada até aqui. Obrigada!

O que sabemos é uma gota; o que ignoramos é um oceano.
ISAAC NEWTON

RESUMO

BERSCH DOMINGUES, Ana Maria. **Estudo Analítico-Numérico e Geométrico de Estruturas Galvanizadas para Trocadores de Calor Solo-Ar**. 2025. 115 f. Dissertação (Mestrado em Modelagem Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática, Instituto de Física e Matemática, Universidade Federal de Pelotas, Pelotas, 2025.

Os Trocadores de Calor Solo-Ar (TCSAs) são dispositivos que atuam no auxílio a sistemas de condicionamento de ar, contribuindo para o melhoramento da condição térmica do ar no interior de edifícios, reduzindo o consumo de energia elétrica. Os TCSAs operam com a utilização de dutos enterrados no solo e um sistema de ventilação de baixo consumo energético, fazendo com que o ar escoe pelos dutos e troque calor com o solo, chegando nas edificações mais resfriado ou aquecido dependendo da época do ano. Neste estudo, além do TCSA convencional, é incorporado um material galvanizado em volta do duto. Este material, devido à sua alta condutividade térmica, é capaz de aproveitar grande parte do potencial térmico do solo. Assim, o objetivo deste trabalho é promover uma análise do efeito da configuração geométrica de estruturas galvanizadas em TCSA para investigação de desempenho geral do sistema. Para alcançar esse propósito, desenvolveu-se uma abordagem analítico-numérica. O modelo do TCSA é desenvolvido de forma analítica, enquanto a temperatura do solo é estimada numericamente em duas dimensões, utilizando o método dos elementos finitos. As modificações nas dimensões e formas do material galvanizado ocorreram em duas etapas: a primeira consistiu em uma avaliação paramétrica de cinco configurações predefinidas do material a fim de encontrar a geometria e os parâmetros adequados que conduzem ao melhor desempenho do sistema. Já a segunda, utilizou o método Design Construtal para encontrar uma geometria otimizada a fim de maximizar o desempenho do sistema. Como resultados, observa-se que a inserção do material galvanizado na região próxima ao duto do TCSA foi benéfica, uma vez que a eficiência anual do sistema teve um aumento de cerca de 20% em comparação com simulações sem nenhum tipo de estrutura, além disso, maiores áreas cobertas pelo material galvanizado não necessariamente se traduzem em melhores potenciais térmicos do TCSA e no melhor aproveitamento do potencial térmico do solo. Também constata-se que grandes profundidades não estão diretamente ligadas aos maiores potenciais térmicos. Ainda, destaca-se que os melhores níveis de potenciais térmicos foram registrados na abordagem com o método Design Construtal.

Palavras-chave: Potenciais térmicos, Modelagem matemática, Modelagem numérica, Material galvanizado, Eficiência térmica.

ABSTRACT

BERSCH DOMINGUES, Ana Maria. **Analytical-Numerical and Geometrical Study of Galvanized Structures for Earth-Air Heat Exchangers**. 2025. 115 f. Dissertação (Mestrado em Modelagem Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática, Instituto de Física e Matemática, Universidade Federal de Pelotas, Pelotas, 2025.

Earth-Air Heat Exchangers (EAHEs) are devices that assist air conditioning systems, contributing to the improvement of the thermal condition of indoor air in buildings while reducing electricity consumption. EAHEs operate using ducts buried in the ground and a low-energy-consumption ventilation system, causing the air to flow through the ducts and exchange heat with the soil, arriving at the buildings either cooled or heated, depending on the time of year. In this study, in addition to the conventional EAHE, a galvanized material is incorporated around the duct. This material, due to its high thermal conductivity, can take advantage of a large portion of the soil's thermal potential. Thus, the objective of this work is to analyze the effect of the geometric configuration of galvanized structures in EAHEs to investigate the overall performance of the system. To achieve this purpose, an analytical-numerical approach was developed. The EAHE model is developed analytically, while the soil temperature is estimated numerically in two dimensions using the finite element method. The modifications in the dimensions and shapes of the galvanized material occurred in two stages: the first consisted of a parametric evaluation of five predefined material configurations to find the appropriate geometry and parameters that lead to the best system performance. The second stage used the Constructal Design method to find an optimized geometry to maximize system performance. As results, it is observed that the insertion of the galvanized material in the region near the EAHE duct was beneficial, as the system's annual efficiency increased by approximately 20% compared to simulations without any type of structure. Furthermore, larger areas covered by the galvanized material do not necessarily translate into better thermal potentials for the EAHE or a better utilization of the soil's thermal potential. It is also found that greater depths are not directly linked to higher thermal potentials. Moreover, it is highlighted that the highest levels of thermal potential were recorded in the approach using the Constructal Design method.

Keywords: Thermal potentials, Mathematical modeling, Numerical modeling, Galvanized material, Thermal efficiency.

LISTA DE FIGURAS

1	Esquema TCSA para dias frios.	19
2	Sistemas de fluxo encontrados na natureza	27
3	Perspectiva isométrica do problema físico (a) e Representação do domínio computacional e condições de contorno (b).	30
4	Ilustração do domínio espacial $\Omega :=]0, l_x[\times]0, l_z[$ de fronteira $\partial\Omega$. . .	44
5	Exemplo de malha utilizada nas simulações.	54
6	Comparação dos resultados do modelo atual com dados experimentais e outros resultados numéricos.	55
7	Representação esquemática da Análise Paramétrica em cada uma das Formas investigadas.	57
8	Domínio computacional para a Forma Circular.	58
9	Domínio computacional para a Forma Elipsoidal.	59
10	Domínio computacional para a Forma Semicircular-Parabólica com Simetria Próxima ao Eixo.	60
11	Domínio computacional para a Semicircular-Parabólica com Simetria Distante do Eixo.	62
12	Domínio computacional para a Forma Semicircular-Trapezoidal. . .	63
13	Etapas do Método Design Construtal aplicado nesta pesquisa. . . .	64
14	Representação esquemática da aplicação do Método Construtal Design para definir o espaço de busca.	65
15	Configurações utilizadas para as simulações com blocos verticais. .	67
16	Representação dos graus de liberdade da Forma em T (Casos $V_2/H_2 = 1$).	68
17	Configurações para a Forma em T - Casos 13 e 1.	70
18	Representação dos graus de liberdade da Forma em T (Casos $V_2/H_2 = 2$).	71
19	Configurações para a Forma em T - Casos 19 e 14.	71
20	Representação dos graus de liberdade da Forma em Y (Casos $\hat{A} = 115^\circ$).	72
21	Configurações para a Forma em Y - Casos 26 e 20.	73
22	Representação dos graus de liberdade da Forma em Y (Casos $\hat{A} = 140^\circ$).	74
23	Configurações para a Forma em Y - Casos 32 e 27.	75
24	Representação dos graus de liberdade da Forma em Y (Casos $\hat{A} = 180^\circ$).	76
25	Configurações para a Forma em Y - Casos 38 e 33.	77

26	Valores RMS anuais do potencial térmico do solo em função da profundidade.	78
27	Temperatura do ar na entrada do TCSA, do solo na coordenada de centro do duto (x_0, z_0) e da saída do TCSA no Caso de Referência. .	79
28	Campos de temperatura das frações de área ψ de 0,1% (a) e 5,0% (b). 80	
29	Potencial térmico anual do solo e do TCSA, para $\psi = 2\%$, em função do semieixo vertical da elipse (b).	82
30	Evolução da estrutura semicircular-trapezoidal em resposta ao aumento de z_f	83
31	Campos de temperatura da Forma Elipsoidal na fração de área de 0,5% (a) e da Forma Semicircular-Parabólica com Simetria Próxima ao Eixo (b).	84
32	Evolução da estrutura semicircular-parabólica 2 em resposta ao aumento de z_f	85
33	Evolução da Forma Semicircular-Trapezoidal em resposta ao aumento de z_f	86
34	Potencial térmico anual do solo e do TCSA encontrado nas simulações com a Forma Semicircular-Trapezoidal.	87
35	Comparação entre os Casos com $\psi = 0,5\%$ das Formas analisadas e o Caso de Referência, utilizando como parâmetro o potencial térmico médio anual do solo e do TCSA.	88
36	Comparação entre os Casos com $\psi = 0,5\%$ das Formas analisadas e o Caso de Referência, utilizando como parâmetro a eficiência máxima anual do TCSA.	89
37	Ilustração em escala da evolução das formas analisadas com $\psi = 0,5\%$. 89	
38	Potencial térmico médio mensal do TCSA para aquecimento e resfriamento em função de V_1/H_1 para $V_2/H_2 = 1$	91
39	Potencial térmico médio mensal do TCSA para aquecimento e resfriamento em função de V_1/H_1 para $V_2/H_2 = 2$	92
40	Avaliação da eficiência máxima anual (θ_{max}) em função do grau de liberdade V_1/H_1 para $V_2/H_2 = 1$ e $V_2/H_2 = 2$	93
41	Domínio computacional discretizado (a) e campos de temperatura (b) para a geometria otimizada.	94
42	Potencial térmico médio mensal do TCSA para aquecimento e resfriamento em função de V_1/L_1 para $\hat{A} = 115^\circ$	95
43	Potencial térmico médio mensal para aquecimento e resfriamento em função de V_1/L_1 para $\hat{A} = 140^\circ$	96
44	Potencial térmico médio mensal para aquecimento e resfriamento em função do grau de liberdade V_1/L_1 para $\hat{A} = 180^\circ$	97
45	Avaliação da eficiência anual máxima (θ_{max}) em função do grau de liberdade V_1/L_1 para $\hat{A} = 115^\circ$, $\hat{A} = 140^\circ$ e $\hat{A} = 180^\circ$	98
46	Domínio computacional discretizado (a) e campos de temperatura (b) para a geometria otimizada.	98
47	Comparação entre o melhor e o pior Caso da Forma em T e da Forma em Y e Caso de Referência.	99
48	Comparação entre o melhores Casos da Forma em T e da Forma em Y e Caso de Referência.	100

49	Comparação entre o melhores Casos da Forma em T e da Forma em Y e Caso de Referência.	100
50	Ilustração em escala para comparação entre o melhor e o pior caso da Forma em T (a), o melhor e o pior Caso da Forma em Y (b), o melhor Caso da Forma em T e o melhor Caso da Forma em Y (c). .	101

LISTA DE TABELAS

1	Propriedades termofísicas dos materiais.	32
2	Dados finais dos testes de malha	54
3	Resultados obtidos em cada fração de área analisada na Forma Circular.	80
4	Melhores resultados obtidos em cada fração de área analisada na Forma Elipsoidal.	81
5	Resultados obtidos em cada caso da Forma Semicircular-Parabólica com Simetria Próxima ao Eixo.	83
6	Parâmetros usados nas simulações da Forma Semicircular-Parabólica com Simetria Distante do Eixo.	85
7	Parâmetros usados para cada caso da Forma Semicircular-Trapezoidal.	86
8	Resultados das simulações com blocos verticais.	90
9	Resultados obtidos para a fração de área de 0,1%.	112
10	Resultados obtidos para a fração de área de 0,2%.	112
11	Resultados obtidos para a fração de área de 0,3%.	113
12	Resultados obtidos para a fração de área de 0,4%.	113
13	Resultados obtidos para a fração de área de 0,5%.	113
14	Resultados obtidos para a fração de área de 1,0%.	114
15	Resultados obtidos para a fração de área de 2,0%.	114

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

Abreviaturas

GAEA	<i>Graphische Auslegung von Erdwärme Austauschern</i> (Desenho gráfico de trocadores de calor geotérmicos - tradução livre do Alemão)
GMSH	Gerador de malhas
MEF	Método de elementos finitos
PVIC	Problema de valor inicial e de contorno
RMS	Raiz do valor médio quadrático
TCSA	Trocador de calor solo-ar

Nomenclatura

A	Área (m ²)
a	Medida do semieixo horizontal da Forma Elipsoidal (m)
B	Base maior do trapézio retângulo (m)
b	Medida do semieixo vertical da Forma Elipsoidal (m)
c_p	Calor específico (J/kg K)
D	Diâmetro do duto (m)
$\dot{E}_g$	Termo de fonte de energia associado à taxa de geração de energia térmica (W)
h	Coeficiente de convecção (W/m ² K)
H_1	Comprimento da fileira de blocos galvanizados horizontais na Forma em T (m)
H_2	Largura dos blocos galvanizados da fileira vertical nas Formas em T e Y (m)
H_3	Distância entre as ramificações na Forma em Y (m)
h_t	Altura do trapézio retângulo (m)
L	Comprimento (m)
l_1	Distância entre A_p e H_1 na direção horizontal (m)
l_2	Distância entre A_p e H_1 na direção vertical (m)
L_1	Comprimento da ramificação dos blocos galvanizados na Forma em Y (m)

$\dot{m}$	Vazão do ar (kg/s)
$\hat{n}$	Vetor normal unitário (adimensional)
Nu_D	Número de Nusselt (adimensional)
P_t	Potencial térmico médio anual (°C)
$P_{t,m}$	Potencial térmico médio mensal (°C)
Pr	Número de Prandtl (adimensional)
$\dot{Q}$	Taxa de transferência de calor (W)
q	Taxa de transferência de calor por condução (W/m ²)
$\dot{q}$	Taxa de energia gerada por unidade de volume (W/m ³)
R	Raio da estrutura galvanizada sob a Forma Circular e a Forma Elipsoidal (m)
R_s	Raio da estrutura galvanizada sob a Forma Semicircular-Parabólica com Simetria Próxima ao Eixo (m)
R_p	Raio da estrutura galvanizada sob a Forma Semicircular-Parabólica com Simetria Distante do Eixo (m)
Re_D	Número de Reynolds (adimensional)
T	Temperatura (°C)
t	Tempo (s ou dias)
t_f	Período (s ou dias)
U^*	Relação de condutância (adimensional)
U_L	Coeficiente de transferência de calor por convecção e por unidade de comprimento (W/m K)
V_1	Comprimento da fileira de blocos galvanizados verticais na Forma em T (m)
V_2	Altura dos blocos galvanizados da fileira horizontal na Forma em T (m)
v_a	Velocidade do escoamento (m/s)
x	Coordenada espacial cartesiana (m)
x_0	Abscissa do centro do duto (m)
y	Coordenada espacial cartesiana (m)
z	Coordenada espacial cartesiana (m)
z_0	Profundidade de centro do duto (m)
z_f	Profundidade final da instalação do material galvanizado (m)

Letras gregas

α	Difusividade térmica (m ² /s)
θ	Eficiência térmica do TCSA (%)
λ	Condutividade térmica (W/m K)

μ	Viscosidade dinâmica (kg/ms)
ρ	Massa específica (kg/m ³)
ψ	Fração de área correspondente ao material galvanizado (%)
Ω	Domínio espacial

Subscritos ou Sobrescritos

0	Duto
<i>a</i>	Ar
<i>c</i>	Forma circular
<i>d</i>	Domínio computacional
<i>e</i>	Forma Elipsoidal
<i>ent</i>	Entrada do duto
<i>g</i>	Região ocupada pelo material galvanizado
<i>k</i>	Índice
<i>p</i>	Região máxima que o material galvanizado pode ocupar
<i>p1</i>	Forma Semicircular-Parabólica com Simetria Próxima ao Eixo
<i>p2</i>	Forma Semicircular-Parabólica com Simetria Distante do Eixo
<i>q</i>	Quadrado usado nas configurações com a aplicação do método Design Construtal
<i>q₂</i>	Metade do quadrado usado nas configurações com a aplicação do método Design Construtal
<i>s</i>	Solo
<i>saida</i>	Saída do duto
<i>t</i>	Forma Semicircular-Trapezoidal
<i>v</i>	Região disponível para a ocupação das configurações utilizadas no método Design Construtal
<i>w</i>	Parede do duto
<i>x</i>	Direção x
<i>y</i>	Direção y
<i>z</i>	Direção z

Demais Símbolos

$\hat{A}$	Ângulo correspondente a um dos graus de liberdade da Forma em Y
θ_{annual}	Eficiência térmica anual do TCSA (%)
θ_{max}	Eficiência térmica máxima anual do TCSA (%)

Δx	Tamanho de segmento
∇	Operador gradiente
∇^2	Operador laplaciano
$\overline{\Omega}$	Fecho do conjunto (neste caso, do domínio Ω)
Q	Cilindro espaço-tempo

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	18
1.1	Contextualização e Motivação	18
1.2	Estado da Arte	19
1.3	Justificativa	23
1.4	Objetivos	23
1.4.1	Objetivo Geral	23
1.4.2	Objetivos Específicos	23
1.5	Estrutura do Trabalho	24
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	25
2.1	Princípio de Funcionamento do Trocador de Calor Solo-Ar	25
2.2	Material Galvanizado	26
2.3	Método Design Construtal	26
3	METODOLOGIA	29
3.1	Descrição do Problema	29
3.2	Modelagem Matemática	33
3.2.1	Modelagem Matemática de Trocador de Calor Solo-Ar	33
3.2.2	Modelagem Matemática para a Temperatura do Solo	35
3.3	Modelagem Numérica	37
3.3.1	Espaços Funcionais	37
3.3.2	Problema Modelo: Caso Estacionário	43
3.3.3	Formulação Forte: Abordagem Clássica	45
3.3.4	Formulação Fraca: Abordagem Variacional	46
3.3.5	Aproximação da Solução por Elementos Finitos	48
3.3.6	Problema Modelo: Caso Transiente	49
3.3.7	Resultados Numéricos	53
3.3.8	Validação e Verificação do Modelo Computacional	54
3.4	Avaliação Paramétrica Aplicada em Configurações com Estruturas Galvanizadas	56
3.4.1	Avaliação paramétrica: Definições e aplicação	56
3.4.2	Forma Circular	58
3.4.3	Forma Elipsoidal	59
3.4.4	Forma Semicircular-Parabólica com Simetria Próxima ao Eixo	60
3.4.5	Forma Semicircular-Parabólica com Simetria Distante do Eixo	61
3.4.6	Forma Semicircular-Trapezoidal	63
3.5	Design Construtal Aplicado em Configurações com Estruturas Galvanizadas	64

3.5.1	Método Design Construtal: Definições e Aplicação	64
3.5.2	Definição da Área da Estrutura Galvanizada para o Presente Estudo . .	66
3.5.3	Formas em T	67
3.5.4	Formas em Y	72
4	RESULTADOS	78
4.1	Análise Térmica do Solo	78
4.2	Análise Térmica do Trocador de Calor Solo-Ar sem Material Galvanizado .	79
4.3	Análise Paramétrica em Configurações com Estruturas Galvanizadas . . .	80
4.3.1	Forma Circular	80
4.3.2	Forma Elipsoidal	81
4.3.3	Forma Semicircular-Parabólica com Simetria Próxima ao Eixo	82
4.3.4	Forma Semicircular-Parabólica com Simetria Distante do Eixo	84
4.3.5	Forma Semicircular-Trapezoidal	85
4.3.6	Comparação entre o Caso de Referência e as Formas Geométricas Investigadas com a Análise Paramétrica	87
4.4	Análise do Design Construtal em Configurações com Estruturas Galvanizadas	90
4.4.1	Formas em T	91
4.4.2	Formas em Y	94
4.4.3	Comparação entre o Caso de Referência, a Forma em T e a Forma em Y	99
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	103
5.1	Conclusões	103
5.2	Contribuições do Estudo	104
5.3	Sugestões para Trabalhos Futuros	104
	REFERÊNCIAS	106
	APÊNDICE A RESULTADOS DA FORMA ELIPSOIDAL	112

1 INTRODUÇÃO

1.1 Contextualização e Motivação

Atualmente, as atenções mundiais estão voltadas ao meio ambiente e aos impactos constantes que o ser humano causa nele, ocasionando mudanças bruscas de temperatura, enchentes, vendavais, entre outros fenômenos.

Com isso, a busca pelo conforto térmico nas edificações cresce consideravelmente, uma vez que o resfriamento e o aquecimento de ambientes utilizam cerca de 33% do consumo total de energia elétrica em todo o mundo, conforme apontam Agrawal et al. (2018).

No entanto, os sistemas de ar condicionado convencionais, amplamente utilizados para este fim, consomem muita energia elétrica, sendo assim prejudiciais ao meio ambiente (LOTTI et al., 2006).

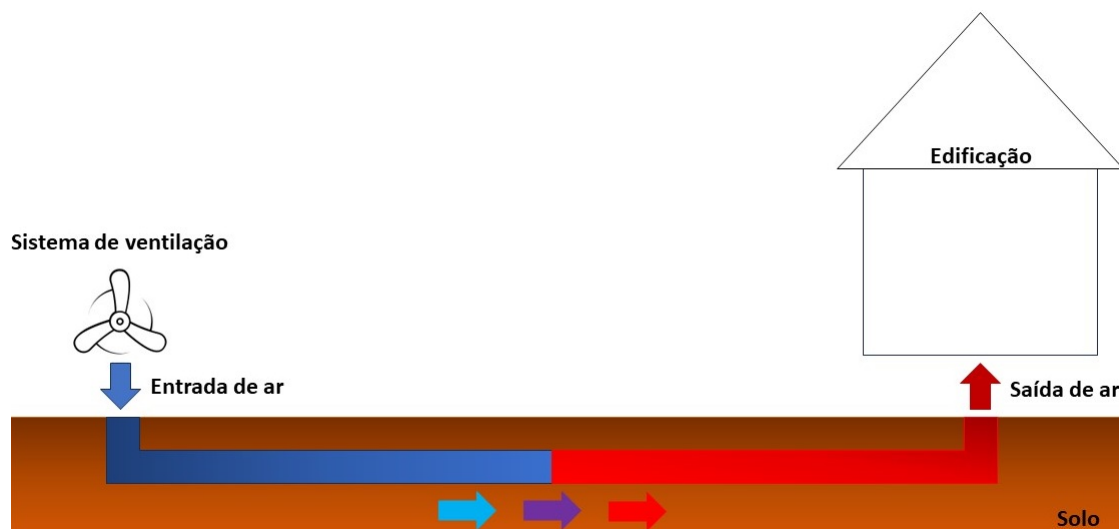
Diante da necessidade de reduzir os impactos ambientais, Rodrigues et al. (2022) apontam que as fontes de energia renováveis se destacam como alternativas aos combustíveis fósseis. Estas podem contribuir para a redução da emissão de gases de efeito estufa, como mencionam Zhang et al. (2019), e, portanto, em diversas regiões do mundo, cresce o número de sistemas que utilizam esta possibilidade sustentável (RODRIGUES et al., 2022).

Nesse cenário, os TCSAs destacam-se como uma solução promissora. Esses sistemas contribuem para o melhoramento da condição térmica do ar no interior de edificações com um baixo consumo de energia elétrica (RAMALHO et al., 2022).

Segundo Mihalakakou et al. (2022), um TCSA consiste, principalmente, em um ou mais dutos enterrados no solo, aproveitando-o como fonte/dissipador de calor. Em períodos quentes, o calor é transferido do ar para o solo (modo de resfriamento), enquanto em períodos frios a transferência de calor ocorre do solo para o ar (modo de aquecimento).

Ao empregar um sistema de ventilação de baixo consumo energético, os TCSAs têm o potencial de reduzir o uso de energia elétrica em comparação aos sistemas de ar condicionado convencionais (BELLOUFI et al., 2022). A Figura 1 ilustra o funcionamento

de um TCSA em dias frios.



Fonte: A autora.

Figura 1: Esquema TCSA para dias frios.

No entanto, é importante considerar diversas variáveis, como enfatizado por Mihalakakou et al. (2022), que influenciam o desempenho térmico do TCSA. Entre essas variáveis estão os parâmetros de projeto do TCSA (como material, comprimento e número de dutos), tipos de solo e fatores ambientais que afetam a distribuição da temperatura no solo (como radiação, convecção, velocidade do ar e características da vegetação e da cobertura do solo).

No contexto deste estudo, além do TCSA convencional, é inserida uma estrutura galvanizada ao redor do duto. Devido à sua alta condutividade térmica, essa estrutura permite melhorar o aproveitamento do potencial térmico do solo, conclusão esta que é observada em trabalhos anteriores, como os de Hassanzadeh, Darvishyadegari e Arman (2018) e Ramalho et al. (2022).

A motivação desta pesquisa, portanto, está na busca de uma solução sustentável e eficiente para atender à crescente demanda por conforto térmico em edificações, aliada à necessidade de reduzir os impactos ambientais.

A próxima seção trará uma revisão bibliográfica de estudos sobre TCSAs realizados em diferentes regiões do mundo. Esses estudos foram úteis para compreender as contribuições desta dissertação no estado da arte e oferecer direcionamentos para trabalhos futuros.

1.2 Estado da Arte

Esta seção apresenta uma revisão de trabalhos da literatura que abordam temas relacionados a esta pesquisa, incluindo simulações de TCSA, TCSAs híbridos, uso

de materiais galvanizados no solo, estudos paramétricos e a aplicação do método Design Construtal em problemas de TCSA. Esses estudos servem como base teórica e metodológica para o desenvolvimento deste trabalho, que busca otimizar a geometria de materiais galvanizados inseridos ao redor do duto de TCSA.

A literatura apresenta uma ampla gama de estudos sobre simulações de TCSA, utilizando diferentes abordagens e ferramentas computacionais. Por exemplo, Akbarpoor, Poshtiri e Biglari (2021) analisaram um sistema de refrigeração integrado composto por um TCSA e uma cobertura abobadada. A simulação do fluxo de ar no TCSA e na sala de testes foi conduzida com o software ANSYS FLUENT, enquanto o comportamento térmico foi modelado com um código desenvolvido no MATLAB. Li et al. (2023) avaliaram o potencial de economia de energia do sistema TCSA em um edifício padrão *Passivhaus*¹ de vários andares em diferentes cidades da China com diferentes condições climáticas. Um modelo do edifício com o TCSA foi desenvolvido e verificado usando a ferramenta de previsão do *Passive House Institute* (PHI) e a ferramenta de simulação de energia de edifícios comerciais, *Virtual Environment* (VE).

Outra pesquisa propõe um modelo MATLAB/Simulink para prever a distribuição de temperaturas do solo e projetar os TCSAs de maneira eficiente (ALI; KURJAK; BEKE, 2023). Além disso, há casos que utilizam aparelhos experimentais em escala real para investigar os efeitos de TCSAs em condições práticas, destacando a importância de testes que complementem os modelos computacionais (WEI et al., 2021). Em Molina-Rodea et al. (2024) um TCSA vertical em forma de "U" é analisado experimentalmente. Os autores calcularam a temperatura do ar dentro do TCSA, a temperatura do solo ao redor, a velocidade do ar e a potência consumida pelo ventilador. Os resultados mostram que o dispositivo avaliado neste trabalho tem desempenho térmico adequado para fins de resfriamento em comparação com os requisitos de um escritório e que o sistema é adequado para fins de resfriamento em áreas com restrições de espaço. Já em Huang et al. (2025) um TCSA Vertical que usa defletores para dividir o duto em dois túneis de ventilação com uma área oca na parte inferior para circulação de ar é analisado de maneira experimental. Dentre as vantagens do estudo destaca-se a pequena área de ocupação do sistema e a análise do desempenho térmico do sistema por meio de testes experimentais sob várias condições operacionais.

Os tipos de abordagens são variados, abrangendo modelos numéricos, analíticos ou uma combinação de ambos. Em Minaei e Safikhani (2021), foi desenvolvido um modelo transiente para avaliar o desempenho térmico de TCSAs. Para verificar o modelo analítico, também foi realizada uma simulação numérica tridimensional. Como resultados, os autores destacaram que o modelo analítico reduziu significativamente os custos computacionais. Além disso, as análises mostraram que negligenciar o efeito da

¹Casa passiva, passive house ou passivhaus é um modelo de construção sustentável de impacto zero e alta eficiência energética.

saturação térmica do solo no modelo analítico leva à superestimação da capacidade térmica do TCSA.

No campo dos TCSAs híbridos, que combinam o sistema tradicional com outras tecnologias para aprimorar o desempenho, há trabalhos que integram o TCSA com um resfriador evaporativo indireto e mostram que o acoplamento do TCSA a um resfriador não apenas melhorou o desempenho de resfriamento, mas também diminuiu significativamente o consumo de água (NEMATİ; OMİDVAR; ROSTİ, 2021).

Em Shahsavari, Talebizadehsardari e Arici (2022), foi realizado um estudo comparativo avaliando um sistema fotovoltaico/térmico integrado de edifício híbrido (BIPV/T) acoplado a um TCSA, em comparação com os sistemas BIPV/T e TCSA individuais.

Materiais de mudança de fase (PCM) aliados a TCSAs são amplamente discutidos na literatura. Em Long et al. (2022), propuseram um sistema passivo que integra uma chaminé solar (CS) a um TCSA, utilizando PCM para melhorar o ambiente térmico interno e evitar incompatibilidades entre radiação solar, fluxo de ar e carga térmica. Em Maytorena et al. (2023) esses dois dispositivos foram incorporados com o objetivo de fornecer ar resfriado à sala em temperaturas abaixo da temperatura de conforto e, através do PCM, reduzir a carga térmica em direção à sala e deslocar a carga de pico térmico, atuando como isolamento térmico.

O uso de materiais galvanizados ao redor dos dutos de TCSA também tem atraído atenções. Configurações de blocos e aletas envolta do duto são investigadas visando aumentar os níveis de transferência de calor no solo (HASSANZADEH; DARVISHYAN-DEGARI; ARMAN, 2018), avaliar o TCSA por meio do potencial térmico e eficiência (PASTOR, 2022) e analisar como os resultados da inserção do material galvanizado podem ser úteis para, inclusive, ser possível diminuir o tamanho do duto (OLIVERA, 2022). Além disso, há trabalhos que investigam como as formas deste material galvanizado impactam nos potenciais térmicos e eficiência do TCSA (RAMALHO et al., 2022).

Em Saeidi et al. (2023) aletas de alumínio cilíndricas são exploradas em TCSAs horizontais no solo. Essas aletas foram examinadas por parâmetros variados, como comprimento, diâmetro, posição e material. Os resultados mostraram que em geral, a aleta aumenta a área de contato com o solo e uma aleta de comprimento de um metro pode aumentar a transferência de calor por unidade de comprimento do tubo em até 20,7%.

Estudos paramétricos também são fundamentais, pois definem diretrizes para o projeto de TCSAs. Além disso, a eficiência operacional do TCSA pode ser influenciada pela configuração dos parâmetros do sistema. É o que apontam Zhang et al. (2024), os quais, de acordo com os resultados de suas simulações, propuseram valores específicos de alguns destes: comprimento do duto 20 m, diâmetro do duto 100 mm, profundidade de instalação 4 m e velocidade do fluxo de ar 7 m/s. Resultados relativa-

mente próximos foram encontrados em Mudhafar e Firas (2025), os quais destacaram que o valor máximo da eficácia do TCSA foi encontrado em profundidades de 4 e 5 m nos meses de janeiro, fevereiro, março, novembro e dezembro.

Por outro lado, Xiao et al. (2023-a) observaram que o aumento do comprimento do duto melhora significativamente a eficiência da troca de calor, enquanto a profundidade do solo apresenta uma correlação positiva com o desempenho térmico. Complementarmente, Hegazi, Abdelrehim e Khater (2021) identificaram que o comprimento ideal do duto varia inversamente com o número de dutos no sistema, sugerindo que um maior número de dutos exige comprimentos individuais menores e Qasim, Alshara e Abood (2024) constataram que a redução do diâmetro do duto leva à diminuição da temperatura do ar na saída do TCSA, impedindo o aproveitamento máximo da temperatura do solo. Ainda, Riaz et al. (2025) apontam que uma queda na velocidade do ar de 8 para 5 m/s causa um aumento de temperatura de aproximadamente 0,5°C e que durante o inverno o ar de entrada exibe um nível de umidade variando de 80 a 90%, o qual posteriormente diminui para 48 a 58% após passar pelo sistema de tubulação, resultando em um ambiente interno confortável adequado para várias atividades.

Outro estudo paramétrico interessante é o de Campolongo, Cariboni e Saltelli (2007), que apresentam uma abordagem sistemática para a identificação dos parâmetros mais críticos em modelos complexos, contribuindo para a redução da complexidade dos estudos por meio de técnicas de triagem (screening) e análise de sensibilidade. A metodologia proposta no artigo é especialmente relevante para problemas de engenharia, pois fornece diretrizes práticas para a implementação de estudos paramétricos, permitindo a otimização e a robustez dos sistemas analisados.

O método Design Construtal tem sido amplamente aplicado para otimizar configurações geométricas de TCSAs. Estudos como o de Nunes et al. (2021) avaliam a organização de arranjos dos dutos, enquanto Rodrigues et al. (2021) utilizam a técnica de Busca Exaustiva em conjunto com o Design Construtal para otimizar TCSAs em forma de T, minimizando a ocupação do volume de solo, a queda de pressão do fluxo de ar e maximizando o potencial térmico. De forma similar, Rodrigues et al. (2022) apresentaram uma análise numérica detalhada de um TCSA em forma de Y, utilizando o Design Construtal para identificar arranjos otimizados com um duto de entrada e dois de saída. Andrade et al. (2024) apresentaram uma análise numérica do comportamento térmico e fluidodinâmico de TCSAs retilíneos com duto de seção transversal elíptica. O método Design Construtal combinado com a Busca Exaustiva foi utilizado para definir as restrições do sistema, grau de liberdade e indicadores de desempenho. Como resultados, os autores destacam que o aumento da área da superfície da seção transversal do duto tem influência direta na transferência de calor no TCSA e, em relação à análise fluidodinâmica, observou-se que, ao mesmo tempo em que dutos de seção transversal mais alongados aumentam o potencial térmico do TCSA, eles também resultam em um

aumento substancial na queda de pressão, levando a um maior consumo de energia pelo sistema.

A revisão apresentada destaca que a geometria do TCSA desempenha um papel fundamental no desempenho do sistema. Embora os avanços no tema sejam notáveis, poucos estudos investigam a aplicação de materiais galvanizados ao redor do duto, especialmente no que diz respeito ao impacto na eficiência do sistema, no potencial térmico do solo e no potencial térmico do TCSA. Nesse contexto, o presente trabalho busca identificar a forma ideal para o material galvanizado, utilizando análises paramétricas e o método Design Construtal. Vale ressaltar que, até o momento, não há estudos que combinem o método Construtal com o uso desses materiais galvanizados, evidenciando a inovação e a relevância desta abordagem.

1.3 Justificativa

Os TCSAs apresentam-se como uma alternativa eficiente e sustentável aos sistemas de climatização convencionais. Apesar de seus benefícios e deste assunto ser amplamente conhecido e discutido na literatura, ainda existem lacunas em relação à otimização de seus parâmetros de projeto, principalmente quanto à geometria e aos materiais utilizados para potencializar o desempenho térmico do sistema.

A inovação deste trabalho reside na investigação de uma dessas lacunas existentes na literatura. Esta pesquisa ressalta a análise geométrica de uma estrutura galvanizada acoplada ao TCSA, considerando sua alta condutividade térmica e seu potencial de melhorar o desempenho dos TCSAs. Estudos anteriores, como os de Hassanzadeh, Darvishyadegari e Arman (2018) e Ramalho et al. (2022), apontaram a relevância do uso de materiais de alta condutividade para a melhoria dos sistemas. No entanto, não há consenso sobre qual seria a configuração ideal.

Assim, este trabalho não apenas aborda uma lacuna existente na literatura, mas também tem o potencial de gerar impactos práticos e científicos, contribuindo para soluções sustentáveis no setor de climatização de edificações.

1.4 Objetivos

1.4.1 Objetivo Geral

Promover análise analítico-numérica do efeito da configuração geométrica de estruturas galvanizadas em TCSA para investigação de desempenho geral do sistema.

1.4.2 Objetivos Específicos

- Resolver numericamente a equação de conservação, utilizando o método de elementos finitos para um modelo que considera o solo e o material galvanizado,

em problemas que envolvem o TCSA;

- Simular um TCSA pelo método analítico, levando-se em consideração as características (do solo e do ar) do município de Viamão, Rio Grande do Sul;
- Determinar o potencial térmico do solo, potencial térmico do TCSA e eficiência do sistema para distintas configurações geométricas com estruturas galvanizadas;
- Identificar a(s) configuração(ões) geométrica(s) da estrutura galvanizada que conduzem ao melhoramento do desempenho do sistema através de uma análise paramétrica.
- Identificar a(s) configuração(ões) geométrica(s) da estrutura galvanizada que conduzem ao melhoramento do desempenho do sistema através do uso do método Design Construtal aliado com a Busca Exaustiva.

1.5 Estrutura do Trabalho

O Capítulo 1 apresentou a justificativa principal para o estudo de TCSAs, juntamente com a revisão bibliográfica que embasa a escolha do tema de pesquisa. Além disso, foram definidos o objetivo geral e os objetivos específicos do estudo, bem como introduzida uma visão geral sobre o que será abordado nos capítulos subsequentes.

O Capítulo 2 apresenta a fundamentação teórica a respeito de alguns pontos importantes que serão tratados no decorrer do texto, como o princípio de funcionamento de um TCSA e o Método Design Construtal, o qual será utilizado na segunda parte das simulações desta pesquisa.

O capítulo 3 apresenta em detalhe a metodologia adotada em todas as etapas do processo. Inicialmente, são fornecidos dados e definições gerais que auxiliam o leitor na compreensão de equações e nomenclaturas fundamentais, amplamente abordadas ao longo do texto. Em seguida, é apresentada a modelagem matemática e numérica utilizada neste trabalho, incluindo o modelo empregado nas simulações do TCSA e a estimativa da temperatura do solo, obtida por meio de uma abordagem numérica baseada nos métodos de elementos finitos e diferenças finitas. Também são discutidos a validação e a verificação do modelo TCSA utilizado. Por fim, são descritas todas as formas dos materiais galvanizados empregadas nas simulações, acompanhadas de uma explicação sobre o processo de definição de cada uma dessas formas.

No Capítulo 4, são apresentados os resultados obtidos, incluindo uma variedade de gráficos e tabelas, facilitando a compreensão do leitor.

Por fim, o Capítulo 5 apresenta as considerações finais deste estudo e perspectivas de ações futuras.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 Princípio de Funcionamento do Trocador de Calor Solo-Ar

O funcionamento de um TCSA é regido por princípios físicos, os quais podem ser definidos em duas áreas principais: mecânica dos fluidos e transferência de calor. Esta seção é destinada a entender melhor estes processos.

No âmbito da mecânica dos fluidos, o funcionamento do TCSA está associado a um escoamento interno e turbulento. Um escoamento turbulento é aquele em que as partículas fluidas rapidamente se misturam enquanto se movimentam ao longo do escoamento devido a flutuações aleatórias no campo tridimensional de velocidades. O número de Reynolds¹ é um parâmetro importante o qual indica se o escoamento em um tubo será laminar ou turbulento. Os escoamentos serão geralmente laminares para $Re \leq 2.300$ e turbulentos para valores maiores (FOX; MCDONALD; PRITCHARD, 2014)

Já um escoamento interno, como o escoamento no interior de um duto, é aquele no qual o fluido encontra-se confinado por uma superfície. A configuração de escoamento interno representa uma geometria conveniente para o aquecimento e o resfriamento de fluidos usados em processos químicos, no controle ambiental e em tecnologia de conversão de energia (INCROPERA et al., 2008).

A transferência de calor no TCSA ocorre por meio de dois mecanismos fundamentais: condução e convecção. Segundo Incropera et al. (2008), a transferência de calor por condução refere-se ao transporte de energia das partículas mais energéticas para as menos energéticas de uma substância devido às interações entre partículas. Esse processo é governado pela lei de Fourier, que requer o conhecimento da distribuição de temperatura no meio para calcular o fluxo térmico.

A transferência de calor por convecção, por sua vez, trata dos processos de transporte de calor realizados pelo escoamento de fluidos (BEJAN, 2013).

¹O número de Reynolds representa a razão entre as forças de inércia e as viscosas. Se o número for pequeno, as forças de inércia são insignificantes em relação às viscosas. Os distúrbios são, então, dissipados e o escoamento permanece laminar. Entretanto, para um número de Reynolds grande, as forças de inércia podem ser suficientes para amplificar os mecanismos de gatilho e a transição para a turbulência ocorre (INCROPERA et al., 2008).

O processo convectivo combina dois mecanismos: transferência de energia por movimento molecular aleatório (difusão) e transferência de energia pelo movimento global do fluido (advecção). Este movimento ocorre devido ao contato entre um fluido em movimento e uma superfície a diferentes temperaturas (INCROPERA et al., 2008).

A transferência de calor por convecção também pode ser classificada em convecção forçada, quando o escoamento é causado por meios externos, convecção natural, quando o escoamento do fluido ocorre devido a forças de empuxo originadas por diferenças de densidade causadas por variações de temperatura no fluido e convecção mista, quando os dois regimes de convecção (natural e forçada) são combinados (INCROPERA et al., 2008). No caso de um TCSA, tem-se uma convecção forçada, visto que há um sistema de ventilação fazendo com que o ar flua pelos dutos.

2.2 Material Galvanizado

A estrutura galvanizada inserida no solo e acoplada ao redor do duto constitui-se como um material sólido, com propriedades termofísicas características de um aço-carbono galvanizado. Este tipo de material apresenta massa específica elevada, condutividade térmica considerável e calor específico adequado, propriedades que favorecem seu desempenho em sistemas de troca de calor (CALLISTER; RETHWISCH, 2018).

O processo de transferência de calor entre a estrutura galvanizada e o solo ao redor ocorre predominantemente por difusão térmica. A eficiência desta difusão é diretamente influenciada pela condutividade térmica do aço-carbono galvanizado e pelas condições térmicas e físicas do solo (HASSANZADEH; DARVISHYADEGARI; ARMAN, 2018).

Além de sua função térmica, o revestimento galvanizado oferece proteção contra corrosão, contribuindo para a durabilidade da estrutura no ambiente subterrâneo. No entanto, mesmo com as medidas de proteção, a corrosão pode ocorrer, uma vez que o solo, embora aparentemente seco, sempre contém certa quantidade de água que atua como eletrólito, facilitando a passagem de correntes e acelerando o processo corrosivo. O potencial corrosivo do solo também pode ser significativamente agravado por atividades industriais que alteram suas propriedades químicas e físicas (SANDRES, 2004; AVILA et al., 2017).

2.3 Método Design Construtal

A Teoria Construtal, proposta pelo professor Adrian Bejan oferece uma perspectiva profunda sobre a dinâmica dos sistemas de fluxo/escoamento presentes na natureza e nas criações humanas. Esta teoria é fundamentada na Lei Construtal (BEJAN, 2023):

“Para um sistema de tamanho finito persistir no tempo (para viver), ele deve evoluir (com liberdade) de tal forma que forneça acesso mais fácil às correntes impostas (globais) que fluem através dele”.

Ou seja, essa teoria consiste em identificar a direção de evolução de geometrias que estão sujeitas a restrições. Nesse sentido, a configuração da geometria se torna uma incógnita livre para mudar dentro dos limites impostos pelas restrições (BELLO-OCHENDE et al., 2007; RODRIGUES, 2024). Em essência, é uma visão que encara o fluxo/escoamento como uma força evolutiva, moldando continuamente as estruturas que o direcionam. A Figura 2 ilustra a teoria em sistemas de fluxos/escoamentos presentes na natureza.



- Fonte: 1. <https://umsoplaneta.globo.com/clima/noticia/2023/09/21/dia-da-arvore-6-motivos-pelos-quais-nao-podemos-viver-sem-elas.ghtml> (Acesso em julho de 2024)
 2. <https://olhardigital.com.br/2023/03/01/ciencia-e-espaco/o-que-e-um-raio/> (Acesso em julho de 2024)
 3. <https://www.todamateria.com.br/rio-amazonas/> (Acesso em julho de 2024)
 4. <https://drramiro.com.br/o-que-sao-doencas-pulmonares/> (Acesso em julho de 2024)
 Adaptado de Michaello et al. (2018)

Figura 2: Sistemas de fluxo encontrados na natureza

A teoria Construtal desafia a concepção tradicional de design ao argumentar que a origem das configurações dos sistemas de fluxo/escoamento não pode ser negligenciada.

Enquanto, muitas vezes, o design é tratado como algo estático ou atribuído ao acaso, à inspiração ou à arte, a teoria Construtal destaca que o desenho é um processo dinâmico e evolutivo, intrinsecamente ligado à busca contínua por acesso mais fácil ao fluxo/escoamento global. Portanto, a geometria não é uma entidade fixa, mas sim um produto em constante evolução do movimento persistente dos sistemas de fluxo/escoamento. Quando o fluxo/escoamento cessa, o desenho natural se fossiliza, tornando-se um vestígio do processo dinâmico que o gerou. Assim, a teoria Construtal não apenas oferece uma nova lente para a compreensão dos sistemas

de fluxo/escoamento, como desafia os paradigmas estabelecidos sobre o design e a dinâmica dos processos naturais e tecnológicos (BEJAN; ZANE, 2012).

De acordo com Bejan (1996), o que torna determinístico o método de evolução e organização é a seta do tempo de pequeno para grande. Confluência sim, ramificação não. Emparelhamento sim, bifurcação não. Construção sim, fraturamento não. Se "fractal" é uma palavra para quebrar coisas, então a palavra apropriada para a geometria e evolução de sistemas finitos otimizados e organizados pelo tamanho dos sistemas é Construtal.

O Design Construtal é uma abordagem para a análise geométrica que aplica restrições e objetivos a geometrias presentes em sistemas de fluxo/escoamento de dimensões finitas. Essa técnica tem sido utilizada para demonstrar que os padrões observados na natureza não são meramente aleatórios, mas resultado de um processo natural e espontâneo de evolução, no qual as formas se desenvolvem de maneira a facilitar o movimento e a distribuição de fluxos (BEJAN, 2023; RODRIGUES, 2024).

Segundo Bejan e Lorente (2008) e Bejan e Zane (2012), essa abordagem não se limita apenas à compreensão dos fenômenos naturais, como bacias hidrográficas e pulmões, mas se estende ao campo do design e da engenharia. Estudos em diversas áreas utilizam o método Construtal, como por exemplo em problemas de cavidade (RODRIGUES, 2024), envolvendo TCSAs (RODRIGUES, 2019) e transferência de calor (XIE et al., 2015).

Para este trabalho, a ideia é a utilização do método de Design Construtal no desenvolvimento da geometria do material galvanizado. Esta proposta é apresentada nas seções seguintes.

3 METODOLOGIA

Com base em Gil (2019) e Creswell e Creswell (2018), o presente estudo se trata de uma pesquisa aplicada de natureza tecnológica, voltada ao melhoramento do desempenho térmico dos TCSA. O estudo investiga a incorporação de estruturas galvanizadas ao redor dos dutos para melhorar o desempenho do sistema, explorando suas propriedades térmicas na redução do consumo energético.

Quanto aos objetivos, a pesquisa é explicativa e preditiva, pois analisa a relação entre diferentes configurações geométricas e o desempenho do sistema, caracterizando-se como um estudo de caso. Além disso, utiliza simulações computacionais para prever o desempenho das soluções propostas, permitindo uma abordagem fundamentada em modelagem matemática e computacional.

A metodologia segue uma abordagem mista, combinando modelagem matemática e numérica para quantificar os efeitos térmicos (e fluidodinâmicos), ao mesmo tempo que avalia qualitativamente as configurações que conduzem aos melhores desempenhos. Esse equilíbrio permite uma análise abrangente do impacto das estruturas galvanizadas no sistema.

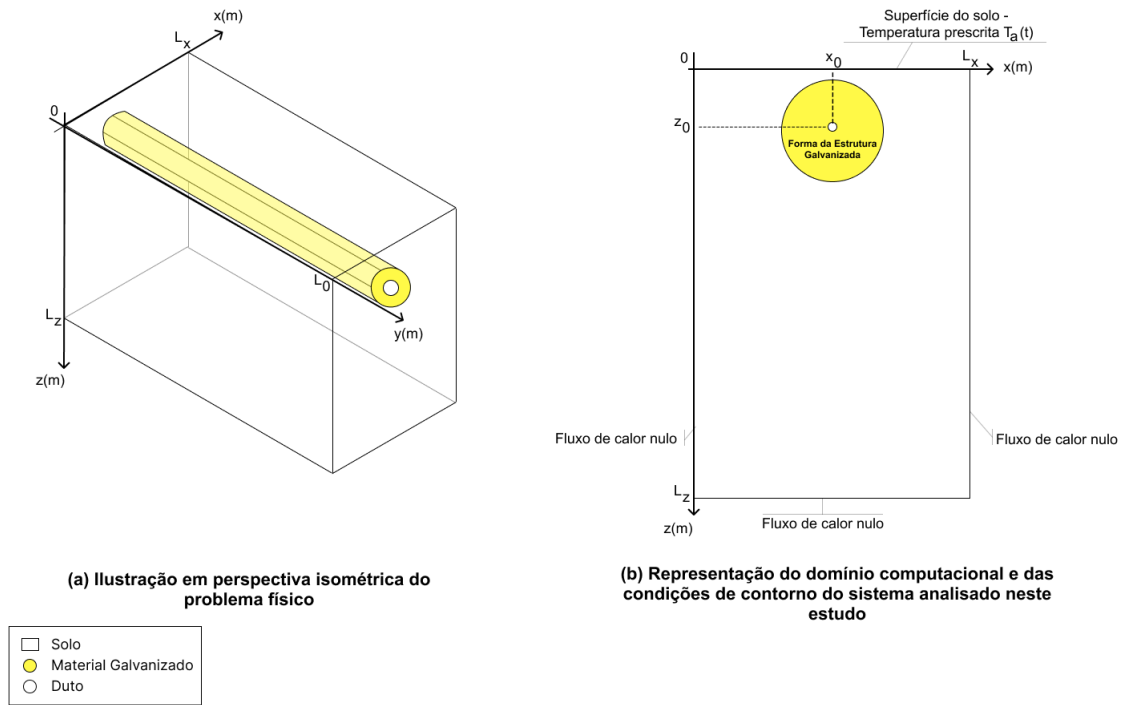
Os procedimentos incluem simulações computacionais, metodologia analítica e análise observacional, avaliando o comportamento térmico do TCSA sob diferentes configurações. A abordagem analítico-numérica e a análise no decorrer do tempo garantem uma investigação detalhada da viabilidade dos casos analisados.

Por fim, o estudo adota métodos dedutivos e indutivos, formulando hipóteses a partir de princípios teóricos e validando-as por meio da modelagem proposta e análise de dados. Dessa forma, combina fundamentação teórica com aplicação prática, contribuindo para o aprimoramento de sistemas térmicos sustentáveis.

3.1 Descrição do Problema

Neste trabalho são realizadas simulações de um TCSA a partir de características climáticas e geotécnicas do município de Viamão, no Estado do Rio Grande do Sul, cujas coordenadas geográficas são 30°04'51"S, 51°01'24"O e altitude de 111 m. A

Figura 3 (a) exibe uma ilustração em perspectiva isométrica do problema físico, enquanto a Figura 3 (b) apresenta a representação do domínio computacional e as condições de contorno do sistema analisado neste estudo. A estrutura galvanizada é representada em formato circular, sendo essa uma das configurações analisadas neste trabalho.



Fonte: A autora.

Figura 3: Perspectiva isométrica do problema físico (a) e Representação do domínio computacional e condições de contorno (b).

A Figura 3 (a) apresenta o domínio computacional em uma perspectiva isométrica, representando o problema físico. Nota-se que o material galvanizado envolve todo o comprimento do duto, que é de $L_0 = 25,77$ m, conforme descrito em Vaz (2011). Ainda na figura, $L_x = 10$ m e $L_z = 15$ m representam, respectivamente, a extensão do domínio computacional nas direções x e z , conforme Ramalho et al. (2022). Neste estudo, a espessura do duto é desconsiderada, uma vez que pesquisas anteriores demonstram que esse parâmetro não exerce influência significativa nas simulações (ASCIONE; BELLIA; MINICHELLO, 2011; BRUM, 2013).

Através da Figura 3 (b) é possível observar a vista transversal do domínio computacional proposto para a simulação da temperatura do solo. Ainda na Figura 3 (b), $x_0 = 5$ m e $z_0 = 1,6$ m correspondem às coordenadas do ponto de centro do duto.

Com base no trabalho de Hassanzadeh, Darvishyadegari e Arman (2018), é acoplado um material galvanizado ao redor do duto, com o objetivo de aumentar a condutividade térmica do solo circundante e, conseqüentemente, melhorar os potenciais térmicos do TCSA e o aproveitamento do potencial térmico do solo. Desse modo, a

principal proposta desta pesquisa é estabelecer uma forma ótima para a estrutura, capaz de aumentar o desempenho do sistema.

A temperatura do solo é estimada numericamente, de forma bidimensional, através do Método dos Elementos Finitos de Galerkin (HUGHES, 1987) para a discretização espacial e o Método de Euler Implícito de Primeira Ordem (ÖZISIK, 1993) para a discretização temporal.

As condições de contorno adotadas para o problema consideram que a temperatura da superfície do solo é igual à temperatura do ar ambiente. Nas demais paredes do domínio, foram aplicadas condições adiabáticas. De acordo com Rodrigues (2019), essa abordagem é válida, pois, lateralmente, o gradiente de temperatura no solo é muito pequeno, podendo ser considerado nulo. Além disso, a partir de determinada profundidade, as variações de temperatura tornam-se insignificantes, estabilizando-se em um valor constante.

O modelo utilizado para as simulações do TCSA chama-se GAEA (*Graphische Auslegung von Erdwärme Austauschern*¹). Este foi descrito pela primeira vez em Benkert, Heidt e Schöler (1997) e, posteriormente, citado em trabalhos como os de Papakostas, Tsamitros e Martinopoulos (2019), Domingues et al. (2021) e Ramalho et al. (2022). Trata-se de um modelo unidimensional, que necessita, além de parâmetros geométricos do duto, das temperaturas do ar e do solo da região analisada.

As condições prescritas na entrada do duto incluem a temperatura e a velocidade do escoamento do ar. Nesse caso, a temperatura de entrada é considerada igual à temperatura do ar ambiente (T_a), enquanto a velocidade do escoamento (v_a) é fixada em $v_a = 3,3$ m/s, conforme adotado por Vaz (2011), Rodrigues (2019), Ramalho et al. (2022).

Em resumo, este estudo adota uma abordagem analítico-numérica. A temperatura do solo é estimada numericamente por meio de um modelo bidimensional, que considera as variações térmicas ao longo das coordenadas horizontais e verticais. Já as simulações envolvendo o TCSA são conduzidas por um modelo analítico, no qual um ponto específico da simulação 2D, com coordenadas (5; 1,6) m representando o ponto de centro do duto, é selecionado e utilizado como entrada no modelo GAEA. Dessa forma, torna-se possível analisar o desempenho do TCSA em conjunto com as condições térmicas do solo.

O modelo é validado por meio dos dados experimentais de Vaz (2011) e verificado com resultados presentes na literatura (HERMES et al., 2020; DOMINGUES et al., 2021).

Três softwares são utilizados nas etapas de pré-processamento, processamento e pós-processamento. No pré-processamento, o Gmsh - versão 4.12.0 (GEUZAINÉ; REMACLE, 2025) é empregado para a geração das malhas. Para o processamento,

¹Projeto gráfico de TCSA em tradução livre do Alemão

as simulações são realizadas no Matlab - versão R2012a (MATLAB, 2010). Por fim, o pós-processamento, responsável pela plotagem dos gráficos, é realizado no Python por meio do Anaconda Navigator - versão 2.1.1 (ANACONDA, 2025).

A Tabela 1 apresenta as propriedades termofísicas do solo e do ar de Viamão (VAZ, 2011); já as propriedades do bloco galvanizado podem ser encontradas em Hassanzadeh, Darvishyadegari e Arman (2018).

Tabela 1: Propriedades termofísicas dos materiais.

	ρ (kg/m ³)	c_p (J/kgK)	λ (W/mK)	μ (kg/ms)
Solo	1800	1780	2,1	-
Material galvanizado	7800	446	52	-
Ar	1,16	1010	0,0242	$1,789 \times 10^{-5}$

Fonte: A autora adaptado de Vaz (2011), Hassanzadeh, Darvishyadegari e Arman (2018).

A seguir serão apresentadas algumas definições importantes. A primeira delas trata do potencial térmico do solo ($P_{t,s}$), que se caracteriza como a diferença entre a temperatura do ar (T_a), (adota-se aqui como sendo igual à temperatura na entrada do duto) e a média da temperatura do solo na posição de centro do duto (T_s) (RAMALHO et al., 2022):

$$P_{t,s}(t) = T_a(t) - T_s(t). \quad (1)$$

Além do potencial térmico do solo, define-se o potencial térmico do TCSA ($P_{t,TCSA}$), por intermédio da diferença das temperaturas na saída (T_{saida}) e na entrada (T_a) do duto, isto é (RAMALHO et al., 2022):

$$P_{t,TCSA}(t) = T_a(t) - T_{saida}(t). \quad (2)$$

A eficiência térmica anual do TCSA em um tempo t é dada pela equação (RAMALHO et al., 2022):

$$\theta(t) = \frac{P_{t,TCSA}(t)}{P_{t,s}(t)}. \quad (3)$$

Assim, tem-se que a alta eficiência é um indicativo de que $P_{t,TCSA}$ está próximo de $P_{t,s}$, logo o TCSA está produzindo tanto potencial térmico quanto o solo pode fornecer em uma profundidade específica. No entanto, como T_s pode ser igual a T_a durante a primavera e o outono, trabalhos como Brum et al. (2019), Hermes et al. (2020) e Ramalho et al. (2022), sugerem calcular uma eficiência anual do TCSA, dada por:

$$\theta_{anual} = \frac{\sqrt{\int_0^{365} P_{t,TCSA}(t)^2 dt}}{\sqrt{\int_0^{365} P_{t,s}(t)^2 dt}}, \quad (4)$$

A Equação 5 apresenta o valor médio quadrático (RMS), para uma determinada função f , sendo este utilizado para estimar o erro do modelo (RAMALHO et al., 2022).

$$f_{RMS} = \sqrt{\frac{\int_0^{365} f(t)^2 dt}{365}}. \quad (5)$$

É possível estimar um máximo para o valor RMS anual do potencial térmico do solo $P_{s,RMS}^{max}$ que ocorre em alguma profundidade z . Essa eficiência, que será chamada de eficiência máxima anual, avalia o quanto de potencial térmico uma instalação TCSA alcança do máximo potencial que o solo pode fornecer durante o ano (DOMINGUES; RAMALHO; FERNANDO, 2023):

$$\theta_{max} = \frac{P_{t,TCSA,RMS}}{P_{t,s,RMS}^{max}}. \quad (6)$$

Com base nas definições apresentadas nesta seção, é possível dar continuidade ao trabalho, agora com a elaboração da modelagem matemática adotada. A seção seguinte descreve de forma detalhada o processo utilizado, explicando tanto o modelo para o TCSA quanto a metodologia numérica aplicada.

3.2 Modelagem Matemática

3.2.1 Modelagem Matemática de Trocador de Calor Solo-Ar

As simulações do TCSA foram feitas via modelo unidimensional GAEA, que calcula a temperatura do ar no duto usando estimativas dos coeficientes de transferência de calor para o fluxo de calor entre o ar, a parede do duto e o solo, a partir de coeficientes de material, propriedades de fluxo e parâmetros geométricos (BENKERT; HEIDT; SCHÖLER, 1997; PPAKOSTAS; TSAMITROS; MARTINOPOULOS, 2019).

Pode-se destacar algumas limitações do modelo adotado: é feita uma simplificação, considerando que a temperatura do solo não varia; considera-se as propriedades do solo como sendo constantes; este modelo não permite múltiplos dutos, visto que não é possível calcular a transferência de calor entre os mesmos.

A Equação (7) refere-se à relação de condutância da transferência de calor, na qual λ_s corresponde à condutividade térmica do solo, e z_0 e D representam, respectivamente, a profundidade de centro do duto e o diâmetro do duto (BENKERT; HEIDT; SCHÖLER, 1997):

$$U^* = \frac{2\pi\lambda_s}{U_L \ln\left(\frac{2z_0}{D} + \sqrt{\left(\frac{2z_0}{D}\right)^2 - 1}\right)}. \quad (7)$$

Na Equação (8), é possível observar o coeficiente geral de transferência de calor (por comprimento do duto) entre a corrente de ar e as paredes do duto (BENKERT; HEIDT; SCHÖLER, 1997):

$$U_L = \pi D h, \quad (8)$$

sendo h o coeficiente de transferência de calor por convecção na superfície interna do duto, o qual é obtido a partir de (BENKERT; HEIDT; SCHÖLER, 1997):

$$h = \frac{\lambda_a Nu_D}{D}, \quad (9)$$

onde λ_a representa a condutividade térmica do ar e Nu_D o número de Nusselt, que pode ser calculado por meio de (BENKERT; HEIDT; SCHÖLER, 1997):

$$Nu_D = 0.0214 (Re_D^{0.8} - 100) Pr^{0.4}, \quad (10)$$

sendo Re_D e Pr , respectivamente, os valores adimensionais de Reynolds e Prandtl (BEJAN, 2013):

$$Re_D = \frac{\rho_a v_a D}{\mu_a}, \quad (11)$$

$$Pr = \frac{\mu_a c_{p,a}}{\lambda_a}. \quad (12)$$

Aqui, ρ_a , μ_a , $c_{p,a}$ e v_a são, respectivamente, a massa específica, viscosidade dinâmica, calor específico do ar e velocidade de escoamento do ar.

No trabalho de Benkert, Heidt e Schöler (1997), o duto do TCSA foi dividido em 100 segmentos de mesmo tamanho. Dessa maneira, é possível calcular iterativamente a temperatura em cada segmento. A partir disso, a equação (13) apresenta uma forma ponderada de calcular a temperatura na parede do duto em cada segmento k (BENKERT; HEIDT; SCHÖLER, 1997):

$$T_w^k = \frac{U^* T_s + T_{a,ent}^k}{U^* + 1}, \quad (13)$$

em que $T_{a,ent}^k$ é a temperatura do ar na entrada de cada segmento e T_s é a temperatura do solo. Dessa forma, também é possível estimar a temperatura do ar na saída dos segmentos, a partir das equações que seguem. Na equação (14), calcula-se a taxa de transferência de calor (BENKERT; HEIDT; SCHÖLER, 1997).

$$\dot{Q}_k = \Delta x U_L (T_w^k - T_{a,ent}^k), \quad (14)$$

no qual $\Delta x = L_0/100$ é o tamanho de cada segmento e L_0 o comprimento do duto. A taxa também pode ser escrita conforme a equação (15) (RAMALHO et al., 2022):

$$\dot{Q}_k = \dot{m} c_{p,a} (T_{a,sai}^k - T_{a,ent}^k), \quad (15)$$

sendo $T_{a,sai}^k$ a temperatura do ar na saída do k -ésimo segmento e $\dot{m}$ a vazão do ar, que pode ser obtida da seguinte maneira (ALI; KURJAK; BEKE, 2023):

$$\dot{m} = \rho_a v_a \frac{\pi D^2}{4}. \quad (16)$$

Usando as equações (14) e (15), isola-se $T_{a,sai}^k$, obtendo a temperatura da saída de cada segmento (RAMALHO et al., 2022):

$$T_{a,sai}^k = T_{a,ent}^k + \frac{\Delta x U_L (T_w^k - T_{a,ent}^k)}{\dot{m} c_{p,a}}. \quad (17)$$

Em resumo, a temperatura de entrada no primeiro segmento k corresponde à temperatura do ar ambiente, a qual deve ser previamente conhecida. A partir dessa condição, determina-se a temperatura na saída do primeiro segmento do duto, que, por sua vez, será utilizada como temperatura de entrada para o segmento seguinte. Esse processo é repetido sequencialmente até o último segmento, no qual se obtém a temperatura de saída do TCSA.

Neste estudo, a temperatura do solo foi estimada numericamente. Nas seções seguintes será explicado o método utilizado para tal.

3.2.2 Modelagem Matemática para a Temperatura do Solo

Para simular um TCSA com o modelo GAEA, é necessário determinar a temperatura do solo sem influência das condições do TCSA. Nesta seção, apresenta-se a equação da condução de calor utilizada neste estudo para estimar essa temperatura. A dedução completa da equação pode ser encontrada na literatura (INCROPERA et al., 2008).

A Equação (18) expressa a forma geral da equação da condução de calor em coordenadas cartesianas (INCROPERA et al., 2008):

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (18)$$

sendo os termos $\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right)$, $\frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right)$ e $\frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right)$ correspondentes ao fluxo líquido de calor por condução para o interior do volume de controle na direção das coordenadas x , y e z , respectivamente. Além disso, $\dot{q}$ denota a taxa de geração de energia no

volume, ρ e c_p são a densidade e o calor específico do meio e $\frac{\partial T}{\partial t}$ corresponde ao termo transiente.

A Equação (18) fornece a ferramenta básica para a análise da condução de calor. A partir de sua solução, é possível obter a distribuição de temperaturas $T(x, y, z)$ como uma função do tempo (INCROPERA et al., 2008).

Para o problema em questão, algumas hipóteses simplificativas foram adotadas: taxas de energia geradas não foram consideradas, a condutividade térmica é um parâmetro conhecido e o problema é bidimensional. A partir disso, a equação que rege a modelagem deste trabalho é:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (19)$$

Para determinar a distribuição de temperaturas em um meio, é necessário resolver a forma apropriada da equação do calor. No entanto, tal solução depende das condições físicas existentes nas fronteiras do meio, e, se a situação variar com o tempo, a solução também depende das condições existentes no meio em algum instante inicial (INCROPERA et al., 2008).

No caso deste estudo, tem-se uma equação de segunda ordem em relação às coordenadas espaciais e de primeira ordem em relação ao tempo. Dessa maneira, serão necessárias duas condições de contorno, uma para cada coordenada espacial e uma condição inicial para a parte transiente.

A primeira condição de contorno adotada corresponde a uma situação na qual a superfície é mantida a uma temperatura fixa. Ela é comumente chamada de condição de Dirichlet ou de condição de contorno de primeira espécie (INCROPERA et al., 2008). Neste caso, a função T_a representa a função da temperatura do ar no município de Viamão, expressa em °C, para um tempo t em dias (HERMES et al., 2020):

$$T_a = 20,49 + 5,66 \sin \left(-5,3 + \frac{2\pi t}{365} \right) \text{ em } z = 0\text{m} \quad (20)$$

A segunda condição de contorno, a qual contemplará as demais fronteiras do domínio computacional, corresponde a uma condição de segunda espécie ou de Neumann. Está será uma condição adiabática ou perfeitamente isolada, ou seja, apresenta fluxo nulo de calor (INCROPERA et al., 2008):

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad \text{em} \quad x = 0 \text{ e } x = 10\text{m} \quad (21)$$

e

$$\frac{\partial T}{\partial z} = 0 \quad \text{em} \quad z = 15\text{m} \quad (22)$$

Neste estudo, a condição inicial é definida com base em um modelo analítico unidimensional, considerando variações de temperatura apenas na direção z . Com base

nas condições específicas de Viamão e utilizando um ajuste por mínimos quadrados, obtém-se a seguinte condição inicial:

$$T = T_0(z) = 20,49 - 5,66 \operatorname{sen}(5,30 + 0,39z)e^{-0,39z} \text{ em } t = 0 \text{ s.} \quad (23)$$

Testes feitos mostraram que esta condição inicial afeta apenas os dois primeiros meses da simulação. Assim, as simulações cobriram um tempo total de um ano e dois meses, descartando-se os dois primeiros. Esta metodologia é vantajosa, pois reduz o custo computacional para avaliar um ano de operação do TCSA. Em referências como Brum et al. (2019), os autores adotavam como condição inicial a temperatura média do solo e isto influenciava a solução por quase um ano. Assim, eles precisavam simular dois anos, descartando todos os resultados do primeiro.

Na próxima seção será abordada a modelagem numérica da equação de condução de calor apresentada aqui e como ela é resolvida neste trabalho.

3.3 Modelagem Numérica

Como foi dito anteriormente na seção 3.2.2, a modelagem integral do TCSA considerada neste trabalho requer a determinação do campo de temperatura do solo, T_s , desconsiderando a presença dos demais elementos que compõem o sistema.

Por conveniência de apresentação, a discussão numérica do problema do calor está separada em duas partes. Na primeira parte, objeto da seção 3.3.2, aborda-se preliminarmente a contrapartida estacionária do problema do calor usado para determinar T_s . Explorando fortemente as ideias previamente apresentadas na seção 3.3.2 para a contrapartida estacionária, a segunda parte, destinada ao desenvolvimento integral do problema do calor, é abordada na seção 3.3.6.

3.3.1 Espaços Funcionais

A formulação tanto clássica quanto variacional de problemas envolvendo equações diferenciais depende da suavidade da solução analítica para o problema em consideração, que por sua vez, depende da suavidade dos dados.

Suposições precisas sobre a regularidade da solução e dos dados podem ser convenientemente estabelecidas considerando classes de funções com propriedades específicas de diferenciabilidade e integrabilidade, chamadas espaços funcionais.

Esta seção apresenta uma breve visão geral das definições básicas e resultados simples da teoria de espaços de funções cuja consulta detalhada pode ser encontrada por exemplo em Kufner, John e Fucik (1977), Dautray e Lions (1992) e Evans (2010).

Para tanto, $\mathbb{Z}$ denota o conjunto dos números inteiros não-negativos, $\mathbb{Z}^+$ indica o conjunto dos números inteiros positivos e para $n \in \mathbb{Z}^+$, $\mathbb{G} \subset \mathbb{R}^n$ representa um conjunto aberto.

3.3.1.1 Espaços das Funções Contínuas

Nesta subseção, são descritos alguns espaços de funções simples que consistem em funções diferenciáveis. Por uma questão de conveniência notacional, é inicialmente introduzido o conceito de **multi-índice**.

Para $n \in \mathbb{Z}^+$, uma n -úpla

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n,$$

é designada um **multi-índice**. O inteiro não-negativo $|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ é chamado de comprimento do multi-índice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Com isso,

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad (24)$$

denota o operador diferencial composto por todas as derivadas parciais de ordem $|\alpha|$.

Indica-se por $C(\mathbb{G})$ o espaço das funções a valores reais definidas em $\mathbb{G}$ que são contínuas em todo ponto $x \in \mathbb{G}$, i.e,

$$C(\mathbb{G}) := \{w : \mathbb{G} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} ; w \text{ é contínua em } \mathbb{G}\}. \quad (25)$$

Seja $m \in \mathbb{N}$. Denota-se por $C^m(\mathbb{G})$ o conjunto de todas as funções contínuas a valores reais w , definidas em $\mathbb{G}$, tais que $D^\alpha w$ é contínua em $\mathbb{G}$ para todo multi-índice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ com $|\alpha| \leq m$. Ou seja,

$$C^m(\mathbb{G}) := \{w \in C(\mathbb{G}) ; D^\alpha w \in C(\mathbb{G})\}, \quad (26)$$

para todo $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ com $|\alpha| \leq m$. Por coerência de notação, segue que $C^0(\mathbb{G}) := C(\mathbb{G})$.

Assumindo que $\mathbb{G}$ é um conjunto aberto limitado, $C^m(\overline{\mathbb{G}})$ denota o conjunto de todas as funções $w \in C^m(\mathbb{G})$ tais que $D^\alpha w$ pode ser estendida a partir de $\mathbb{G}$ por uma função contínua sobre $\overline{\mathbb{G}}$, o fecho do conjunto $\mathbb{G}$, para todo $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $|\alpha| \leq m$.

O espaço de funções $C^m(\overline{\mathbb{G}})$ pode ser equipado com a norma

$$\|w\|_{C^m(\overline{\mathbb{G}})} := \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in \mathbb{G}} |D^\alpha w(x)|. \quad (27)$$

Em particular, quando $m = 0$, (27) fornece

$$\|w\|_{C^0(\overline{\mathbb{G}})} := \sup_{x \in \mathbb{G}} |w(x)| = \max_{x \in \overline{\mathbb{G}}} |w(x)|. \quad (28)$$

Similarmente, se $m = 1$, de (27) segue que

$$\begin{aligned} \|w\|_{C^1(\mathbb{G})} &:= \sum_{|\alpha| \leq 1} \sup_{x \in \mathbb{G}} |D^\alpha w(x)| \\ &= \sup_{x \in \mathbb{G}} |w(x)| + \sup_{x \in \mathbb{G}} \left| \frac{\partial w}{\partial x_j}(x) \right|. \end{aligned} \quad (29)$$

3.3.1.2 Espaços das Funções de Quadrado Integrável

Nesta subseção, é considerada uma classe de espaços de funções que consiste em funções Lebesgue-integráveis². Denota-se por $L^2(\mathbb{G})$ o conjunto de todas as funções com valor real definidas em um subconjunto aberto $\mathbb{G}$ do $\mathbb{R}^n$ tais que

$$\int_{\mathbb{G}} |w(x)|^2 dx < \infty, \quad (31)$$

ou seja,

$$L^2(\mathbb{G}) := \{w : \mathbb{G} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} ; \int_{\mathbb{G}} |w(x)|^2 dx < \infty\}. \quad (32)$$

O espaço $L^2(\mathbb{G})$ pode ser equipado com o produto interno

$$(w, v)_{L^2(\mathbb{G})} := \int_{\mathbb{G}} w(x)v(x)dx, \quad (33)$$

que induz a norma

$$\|w\|_{L^2(\mathbb{G})} := [(w, w)_{L^2(\mathbb{G})}]^{1/2} = \left[\int_{\mathbb{G}} |w(x)|^2 dx \right]^{1/2}. \quad (34)$$

Em seguida, para $m \in \mathbb{N}$, o espaço de Hilbert de ordem m , denotado por $H^m(\mathbb{G})$, é definido como sendo o conjunto de todas as funções a valores reais definidas sobre a região $\mathbb{G}$ que residem em $L^2(\Omega)$, cujas derivadas parciais até a ordem m também residem em $L^2(\mathbb{G})$. Consequentemente,

$$H^m(\mathbb{G}) := \{w \in L^2(\mathbb{G}) ; D^\alpha w \in L^2(\mathbb{G})\}, \quad (35)$$

para todo $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ com $|\alpha| \leq m$, equipado com o produto interno

$$(w, v)_{H^m(\mathbb{G})} := \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha w, D^\alpha v)_{L^2(\mathbb{G})}, \quad (36)$$

²Seja Ω um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}^n$. Considera-se uma medida μ e um número real fixo $p \in [1, \infty]$. Define-se o seguinte conjunto (BAZÁN; PEREIRA; FERNANDEZ, 2023):

$$L^p(\Omega, \mu) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ é mensurável e } \int_{\Omega} |f(x)|^p d\mu(x) < \infty \right\} \quad (30)$$

que por sua vez induz a norma

$$\|w\|_{H^m(\mathbb{G})} := \left[\sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha w, D^\alpha v)_{L^2(\mathbb{G})} \right]^{1/2}, \quad (37)$$

e semi-norma

$$|w|_{H^m(\mathbb{G})} := \left[\sum_{|\alpha|=m} (D^\alpha w, D^\alpha v)_{L^2(\mathbb{G})} \right]^{1/2}. \quad (38)$$

Ao longo do texto, serão feitas frequentemente referências aos espaços hilbertianos nos casos especiais quando $m \in \{0, 1, 2\}$ para os quais as definições de $H^m(\mathbb{G})$, de sua norma e de sua semi-norma fornecem:

$$H^0(\mathbb{G}) := L^2(\mathbb{G}), \quad (39)$$

$$H^1(\mathbb{G}) := \left\{ w \in L^2(\mathbb{G}) ; \frac{\partial w}{\partial x_j} \in L^2(\mathbb{G}), \forall j \in \{1, \dots, n\} \right\}, \quad (40)$$

$$\|w\|_{H^1(\mathbb{G})} := \left[\|w\|_{L^2(\mathbb{G})}^2 + \sum_{j=1}^n \left\| \frac{\partial w}{\partial x_j} \right\|_{L^2(\mathbb{G})}^2 \right]^{1/2}, \quad (41)$$

$$|w|_{H^1(\mathbb{G})} := \left[\sum_{j=1}^n \left\| \frac{\partial w}{\partial x_j} \right\|_{L^2(\mathbb{G})}^2 \right]^{1/2}, \quad (42)$$

e

$$H^2(\mathbb{G}) := \left\{ w \in H^1(\mathbb{G}) ; \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j} \in L^2(\mathbb{G}), \forall i, j \in \{1, \dots, n\} \right\}, \quad (43)$$

$$\|w\|_{H^2(\mathbb{G})} := \left[\|w\|_{L^2(\mathbb{G})}^2 + \sum_{j=1}^n \left\| \frac{\partial w}{\partial x_j} \right\|_{L^2(\mathbb{G})}^2 + \sum_{i,j=1}^n \left\| \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{L^2(\mathbb{G})}^2 \right]^{1/2}, \quad (44)$$

$$|w|_{H^2(\mathbb{G})} := \left[\sum_{i,j=1}^n \left\| \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{L^2(\mathbb{G})}^2 \right]^{1/2}. \quad (45)$$

Supondo $\mathbb{G} \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado e visando formular variacionalmente problemas de valor de contorno com condições de contorno essenciais do tipo Dirichlet especificadas em parte ou em toda fronteira de $\mathbb{G}$, torna-se necessário também definir os subconjuntos $H_D^1(\mathbb{G})$, $H_{0,D}^1(\mathbb{G})$ e $H_0^1(\mathbb{G})$ do espaço de funções $H^1(\mathbb{G})$ como abaixo. Aqui novamente, $\overline{\mathbb{G}}$ denota o fecho de $\mathbb{G}$ e sua fronteira $\partial\mathbb{G}$ admite uma decomposição disjunta em subconjuntos $\partial\mathbb{G}_D$ e $\partial\mathbb{G}_N$. Ou seja, $\partial\mathbb{G} := \partial\mathbb{G}_D \cup \partial\mathbb{G}_N$ com $\partial\mathbb{G}_D$ sendo um

conjunto fechado e $\partial\mathbb{G}_D \cap \partial\mathbb{G}_N = \emptyset$. Com isso, define-se

$$H_D^1(\mathbb{G}) := \{w \in H^1(\mathbb{G}) ; w|_{\partial\mathbb{G}_D} = g_D\} , \quad (46)$$

$$H_{0,D}^1(\mathbb{G}) := \{w \in H^1(\mathbb{G}) ; w|_{\partial\mathbb{G}_D} = 0\} , \quad (47)$$

e

$$H_0^1(\mathbb{G}) := \{w \in H^1(\mathbb{G}) ; w|_{\partial\mathbb{G}} = 0\} , \quad (48)$$

no caso especial de condições de contorno de Dirichlet homogêneas ($g_D = 0$) e $\partial\mathbb{G}_N = \emptyset$.

Esta subseção é finalizada com a apresentação do espaço $L^\infty(\mathbb{G})$ consistindo de funções w a valores reais definidas em $\mathbb{G}$ tais que $|w|$ possui supremo essencial finito em $\mathbb{G}$ (ou seja, existe uma constante positiva M tal que $|w(x)| \leq M$ para quase todo x em $\mathbb{G}$). O menor número M satisfazendo $|w(x)| \leq M$ para quase todo $x \in \mathbb{G}$ é chamado de supremo essencial de $|w|$, e escreve-se $M = \sup_{\text{ess } x \in \mathbb{G}} |w(x)|$. Aqui, $|\cdot|$ indica o operador módulo. O espaço $L^\infty(\mathbb{G})$ está equipado com a norma

$$\|w\|_{L^\infty(\mathbb{G})} := \sup_{\text{ess } x \in \mathbb{G}} |w(x)| . \quad (49)$$

3.3.1.3 Espaços de Bochner

Visando o estabelecimento de uma estrutura de espaço de funções adequada aos problemas dependentes do tempo, supõe-se $\mathbb{G}$ um domínio espacial e define-se $\mathbb{G}_T := \mathbb{G} \times]a, b[$ com $]a, b[\subset \mathbb{R}$ como sendo um domínio espaço-tempo. Assim $\mathbb{G} \times]a, b[\ni (x, t) \mapsto w(x, t) \in \mathbb{R}$ indica uma função a valores reais definida no domínio espaço-tempo $\mathbb{G}_T$, ou seja $w : \mathbb{G}_T \rightarrow \mathbb{R}$.

Assim, a estratégia comumente considerada na abordagem desses problemas definidos em um domínio espaço-tempo, consiste em tratar separadamente a variável espacial $x \in \mathbb{G}$ da variável temporal $t \in]a, b[$. Para fazer isso, introduz-se os chamados **espaços de Bochner** definidos abaixo.

Aqui, X representa um espaço funcional de Banach (espaço normado completo) cujas funções a valores reais encontram-se definidas em $\mathbb{G}$.

Definição 1 (Continuidade em espaços de Bochner). *A função $w : [a, b] \rightarrow X$ é dita ser contínua se, para todo $t \in]a, b[$, a convergência*

$$\|w(t+k) - w(t)\|_X \rightarrow 0 , \quad \text{quando } k \rightarrow 0 ,$$

vale.

Definição 2 (Espaços de Bochner de classe C^m). *Para $m \in \mathbb{N}$, o espaço de Bochner*

de classe C^m , indicado por $C^m(a, b; X)$, consiste de todas as funções contínuas $w : [a, b] \rightarrow X$ que possuem derivadas contínuas até a ordem m em $]a, b[$, com a norma:

$$\|w\|_{C^m(a,b;X)} = \sum_{i=0}^m \sup_{t \in]a,b[} \|w^{(i)}(t)\|_X.$$

Por simplicidade, a notação $C(a, b; X) := C^0(a, b; X)$ é usada. Além disso, $w^{(i)} := \frac{d^i w}{dt^i}$ é a derivada temporal de ordem i da função w .

Mais especificamente, para $m \in \{0, 1, 2\}$, a definição 2 fornece

$$C(a, b; X) := \left\{ w : [a, b] \rightarrow X ; \sup_{t \in]a,b[} \|w(t)\|_X < \infty \right\}, \quad (50)$$

$$C^1(a, b; X) := \left\{ w \in C(a, b; X) ; \frac{dw}{dt} \in C(a, b; X) \right\}, \quad (51)$$

$$C^2(a, b; X) := \left\{ w \in C^1(a, b; X) ; \frac{d^2 w}{dt^2} \in C(a, b; X) \right\}. \quad (52)$$

Definição 3 (Espaços de Bochner de classe H^m). Para $m \in \mathbb{N}$ e X um espaço de Hilbert, o espaço de Bochner de classe H^m , indicado por $H^m(a, b; X)$, é o espaço de Hilbert que consiste de todas as funções $w : [a, b] \rightarrow X$ que possuem derivadas generalizadas (derivadas fracas) até a ordem m em $]a, b[$, com o produto interno

$$(w, v)_{H^m(a,b;X)} = \sum_{i=0}^m \int_a^b (w^{(i)}, v^{(i)})_X dt$$

e norma induzida pelo produto interno

$$\|w\|_{H^m(a,b;X)}^2 = \sum_{i=0}^m \int_a^b (w^{(i)}, w^{(i)})_X dt.$$

Por simplicidade, a notação $L^2(a, b; X) := H^0(a, b; X)$ é usada.

Por exemplo, considerando $X \in \{L^2(\mathbb{G}), H^1(\mathbb{G}), H^2(\mathbb{G})\}$, quando $m \in \{0, 1, 2\}$, a definição 3 fornece

$$L^2(a, b; X) := \left\{ w :]a, b[\rightarrow X ; \int_a^b \|w(t)\|_X^2 dt < \infty \right\}, \quad (53)$$

$$H^1(a, b; X) := \left\{ w \in L^2(a, b; X) ; \frac{dw}{dt} \in L^2(a, b; X) \right\}, \quad (54)$$

$$H^2(a, b; X) := \left\{ w \in H^1(a, b; X) ; \frac{d^2 w}{dt^2} \in L^2(a, b; X) \right\}. \quad (55)$$

Finaliza-se esta subseção com a observação abaixo mostrando tópicos a respeito

da interpretação das funções que residem em um espaço de Bochner.

Observação 3.3.1 (Interpretação de um espaço de Bochner). *Destaca-se aqui algumas notas sobre espaços de Bochner.*

1. Tratamento da variável espacial e da variável temporal:

- Para $t \in]a, b[$ fixo, a função $\mathbb{G} \ni x \mapsto w(x, t)$ é interpretada como um elemento $w(t)$ dependente de um parâmetro t e residindo em algum espaço X cujos elementos são funções apenas de x . Por exemplo, os elementos do conjunto $\{C^m(\mathbb{G}), H^m(\mathbb{G})\}$ com $m \in \mathbb{N}$ representam possíveis escolhas de X .
- Em uma etapa seguinte, pode-se pensar em t variável resultando no mapeamento $]a, b[\ni t \mapsto w(t) \in X$, que é uma função definida em $]a, b[$ com valores no espaço de funções X .

2. O espaço $W^m(a, b; X)$ com $m \in \mathbb{N}$ e $W \in \{C, H\}$:

- Consiste de todas as funções definidas em $\mathbb{G} \times]a, b[$ com valores em $\mathbb{R}$ possuindo as seguintes propriedades:
 - $w(t, \cdot) \in X$ para qualquer $t \in]a, b[$.
 - Existe uma função $z \in W^m(a, b)$ tal que $z(t) := \|w(t, \cdot)\|_X$.
- Além disso, a norma é definida como:

$$\|v\|_{W^m(a, b; X)} := \|z\|_{W^m(a, b)}.$$

3.3.2 Problema Modelo: Caso Estacionário

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um domínio poligonal, aberto e limitado cuja fronteira $\partial\Omega$ é formada por duas partes disjuntas indicadas por Γ_D e Γ_N . Assim, indicando o fecho de Ω por $\bar{\Omega}$, segue que $\bar{\Omega} := \Omega \cup \partial\Omega$, $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$ onde Γ_D é assumido ser um subconjunto fechado de $\partial\Omega$ e $\Gamma_N = \Gamma_{N_1} \cup \Gamma_{N_2} \cup \Gamma_{N_3}$, com $\Gamma_{N_1} := \{(0, z) \in \mathbb{R}^2; 0 < z < l_z\}$, $\Gamma_{N_2} := \{(x, l_z) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq l_x\}$ e $\Gamma_{N_3} := \{(l_x, z) \in \mathbb{R}^2; 0 < z < l_z\}$. Aqui e no restante do texto, $\hat{n}$ denota o vetor normal unitário exterior a Ω definido em cada ponto da fronteira $\partial\Omega$. Uma representação esquemática de $\bar{\Omega}$ é exibida na Figura 4.

Considere a equação de Poisson

$$(Lu)(x) := -\operatorname{div}(\lambda(x)\nabla u(x)) = f(x), \quad \text{para } x \in \Omega, \quad (56)$$

com os dados

$$\lambda : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}, \quad f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}. \quad (57)$$

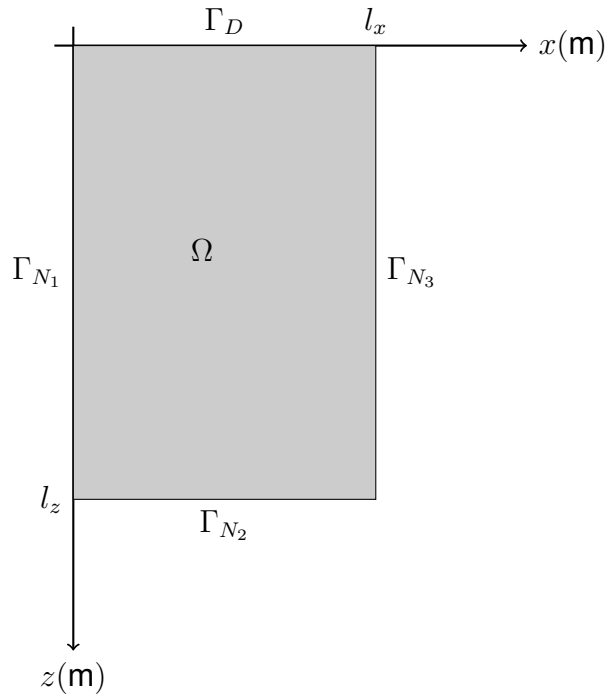


Figura 4: Ilustração do domínio espacial $\Omega :=]0, l_x[\times]0, l_z[$ de fronteira $\partial\Omega$.

3.3.2.1 Suposições a cerca do coeficiente e do lado direito em (56)

Relativamente aos dados que aparecem na equação (56), são estabelecidas as seguintes suposições:

- 1) Para uma interpretação de (56) no sentido clássico, é necessário

$$\partial_i \lambda_{ij}, f \in C^0(\overline{\Omega}), \quad i, j \in \{1, 2\}, \quad (58)$$

- 2) Para uma interpretação de (56) no sentido de $L^2(\Omega)$ com derivadas fracas e consequentemente para uma solução em $H^2(\Omega)$, é imposto

$$\partial_i \lambda_{ij} \in L^\infty(\Omega), \quad f \in L^2(\Omega), \quad i, j \in \{1, 2\}. \quad (59)$$

Além disso, para (56), a **elipticidade uniforme** do operador L é assumida, i.e, existe alguma constante $\kappa_0 > 0$ tal que para quase todo $x \in \Omega$ vale

$$\xi \cdot ([\lambda(x)]_{2 \times 2} \xi) \leq \kappa_0 (\xi \cdot \xi), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^2, \quad (60)$$

ou seja, a matriz dos coeficientes $[\lambda(x)]_{2 \times 2}$ é definida positiva uniformemente em x . Além disso, $[\lambda(x)]_{2 \times 2}$ deve ser simétrica.

Se $[\lambda(x)]_{2 \times 2}$ é uma matriz diagonal, i.e, $\lambda_{ij}(x) = \lambda_i(x) \delta_{ij}$, $i, j \in \{1, 2\}$, (situação que

ocorre no caso particular quando $\lambda_i(x) = \beta(x)$ com $\beta : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, $i \in \{1, 2\}$ onde $\lambda(x)\nabla u$ torna-se $\beta\nabla u$, isto significa que a condição (60) é equivalente a

$$\lambda_i(x) \geq \kappa_0, \quad \text{para (quase) todo } x \in \Omega, \quad i \in \{1, 2\}. \quad (61)$$

3.3.2.2 Condições de contorno

Lembrando que Γ_D e Γ_N representam uma decomposição disjunta do contorno $\partial\Omega$, i.e,

$$\partial\Omega := \Gamma_D \cup \Gamma_N,$$

dadas as funções

$$g_j : \Gamma_j \longrightarrow \mathbb{R}, \quad j \in \{D, N\}, \quad (62)$$

são assumidas sobre $\partial\Omega$ as seguintes condições de contorno:

- Condição de contorno natural de Neumann

$$\lambda\nabla u \cdot \hat{\mathbf{n}} := \partial_{\hat{\mathbf{n}}_\lambda} u = g_N, \quad \text{sobre } \Gamma_N, \quad (63)$$

- Condição de contorno essencial de Dirichlet

$$u = g_D, \quad \text{sobre } \Gamma_D. \quad (64)$$

No que diz respeito aos dados de fronteira, assume-se o seguinte: Para a abordagem clássica é necessário impor

$$g_j \in C^0(\bar{\Gamma}_j), \quad j \in \{D, N\}, \quad (65)$$

enquanto que para a interpretação variacional,

$$g_j \in L^2(\Gamma_j), \quad j \in \{D, N\}, \quad (66)$$

é suficiente.

3.3.3 Formulação Forte: Abordagem Clássica

A formulação forte do problema modelo que consiste em um problema de valor de contorno (PVC) com condições de contorno de Dirichlet e de Neumann para a equação de Poisson pode ser declarada da seguinte maneira: Dadas as funções λ , f , g_D e g_N ,

conforme definidas em (57) e (62), procurar por uma função $u : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\lambda(x)\nabla u) = f(x), & \text{em } \Omega, \\ u(x) = g_D(x), & \text{sobre } \Gamma_D, \\ \lambda \nabla u \cdot \hat{n} = g_N, & \text{sobre } \Gamma_N. \end{cases} \quad (67)$$

Definição 4 (Solução Clássica). *Assuma que os dados λ e f em $(67)_1$ satisfazem (58). Além disso, assuma também que os dados de contorno g_D e g_N satisfazem (65). Então, uma função $u : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada uma solução clássica de (67), desde que as condições abaixo estejam atendidas:*

- c1) $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$,
- c2) a equação $(67)_1$ vale para todo $x \in \Omega$,
- c3) a equação $(67)_2$ vale para todo $x \in \Gamma_D$,
- c4) a equação $(67)_3$ vale para todo $x \in \Gamma_N$.

3.3.4 Formulação Fraca: Abordagem Variacional

A estratégia básica para a derivação da formulação variacional associada ao problema de valor de contorno (PVC) (67) consiste nas três etapas descritas em seguida. Assumindo a existência de uma solução clássica de (67), as seguintes etapas são executadas:

- Etapla 1: Multiplicação da equação diferencial por uma função teste escolhida de forma compatível com o tipo de condição de contorno e subsequente integração sobre o domínio Ω ;
- Etapla 2: Integração por partes com incorporação das condições de contorno para derivar uma forma bilinear e outra forma linear adequadas;
- Etapla 3: Verificação das propriedades que garantem a existência e unicidade de solução como elipticidade e continuidade da forma bilinear, assim como a continuidade da forma linear.

Aqui, são escolhidos os subconjuntos $H_D^1(\Omega)$ e $H_{0,D}^1(\Omega)$ do espaço de Hilbert $H^1(\Omega)$ definidos em (46) e (47) como sendo espaço das funções tentativas e das funções testes respectivamente. Com isso, multiplicando $(67)_1$ pela função teste $v \in H_{0,D}^1(\Omega)$ e integrando a expressão resultante sobre Ω obtém-se

$$\int_{\Omega} -\operatorname{div}(\lambda \nabla u) v dx = \int_{\Omega} f v dx. \quad (68)$$

A identidade

$$-v \operatorname{div}(\lambda \nabla u) = -\operatorname{div}(v \lambda \nabla u) + \lambda \nabla u \cdot \nabla v, \quad (69)$$

permite escrever (68) como

$$\int_{\Omega} -\operatorname{div}(v \lambda \nabla u) dx + \int_{\Omega} \lambda \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega} f v dx. \quad (70)$$

Aplicando o teorema da divergência ao primeiro termo que aparece no lado esquerdo da equação acima obtém-se

$$-\int_{\partial\Omega} v \lambda \nabla u \cdot \hat{\mathbf{n}} dS + \int_{\Omega} \lambda \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega} f v dx. \quad (71)$$

O contorno $\partial\Omega$ é decomposto nas partes disjuntas Γ_D e Γ_N . Como $v \in H_{0,D}^1(\Omega)$, tem-se $v(x) = 0$ para todos os pontos x sobre Γ_D . Usando esta observação e as condições de contorno de Neumann dadas em (67)₃, pode-se escrever a integral sobre a fronteira $\partial\Omega$ em (71) como

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} v \lambda \nabla u \cdot \hat{\mathbf{n}} dx &= \int_{\Gamma_D} v \lambda \nabla u \cdot \hat{\mathbf{n}} dx + \int_{\Gamma_N} v \lambda \nabla u \cdot \hat{\mathbf{n}} dx \\ &= 0 + \int_{\Gamma_N} v g_N dx. \end{aligned} \quad (72)$$

Substituindo (72) em (71), após um pequeno rearranjo dos termos, chega-se a

$$\int_{\Omega} \lambda \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega} f v dx + \int_{\Gamma_N} v g_N dx. \quad (73)$$

Finalmente, a formulação fraca associada ao problema de valor de contorno (67) pode ser declarada da seguinte maneira: Dadas as funções λ , f definidas em (57) satisfazendo (59) e os dados de fronteira g_D , g_N satisfazendo (66), encontrar a função $u \in H_D^1(\Omega)$ tal que

$$a(u, v) = l(v), \quad \forall v \in H_{0,D}^1(\Omega), \quad (74)$$

onde $a : H_D^1(\Omega) \times H_{0,D}^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ e $l : H_{0,D}^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ representam respectivamente formas bilinear e linear definidas como

$$a(w, z) := \int_{\Omega} \lambda \nabla w \cdot \nabla z dx, \quad l(z) := \int_{\Omega} f z dx + \int_{\Gamma_N} z g_N dx. \quad (75)$$

Definição 5 (Solução Fraca). *Sejam $\lambda_{ij} \in L^\infty(\Omega)$, $i, j \in \{1, 2\}$, $f \in L^2(\Omega)$, $g_D \in L^2(\Gamma_D)$ e $g_N \in L^2(\Gamma_N)$. A função $u \in H_D^1$ satisfazendo*

$$a(u, v) = l(v), \quad \forall v \in H_{0,D}^1(\Omega), \quad (76)$$

onde $a(\cdot, \cdot)$ e $l(\cdot)$ encontram-se definidas em (75), é chamada de **solução fraca** de (67). Todas as derivadas parciais em (76) devem ser entendidas como derivadas fracas.

3.3.5 Aproximação da Solução por Elementos Finitos

Nesta seção descreve-se a construção do método de elementos finitos (MEF) que permite obter uma solução aproximada para o problema de valor de contorno em (67).

A aplicação do MEF é bastante sistemática. O primeiro passo de sua construção foi efetuado na seção anterior associando a (67) a formulação fraca em (76).

Em seguida, define-se uma partição $\mathcal{T}_h$ de Ω em elementos K fechados (triângulos neste trabalho), i.e., incluindo sua fronteira ∂K , com as seguintes propriedades:

- 1) $\bar{\Omega} = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} K$;
- 2) Para $K_1, K_2 \in \mathcal{T}_h$, $K_1 \neq K_2$,
$$\overset{\circ}{K}_1 \cap \overset{\circ}{K}_2 = \emptyset \quad (77)$$

onde $\overset{\circ}{K}$ denota o triângulo aberto (sem a fronteira ∂K) ;

- 3) Seja $K_1, K_2 \in \mathcal{T}_h$. Se $K_1 \neq K_2$ porém $K_1 \cap K_2 \neq \emptyset$, então $K_1 \cap K_2$ ou é um ponto, ou é uma aresta comum de K_1 e K_2 .

Uma partição $\mathcal{T}_h$ de Ω satisfazendo as propriedades 1) e 2) listadas acima é chamada de **triangulação**. Se, além disso, a propriedade 3) também é satisfeita, então $\mathcal{T}_h$ é chamada de uma **triangulação conforme**. Neste trabalho são consideradas somente triangulações conformes.

O segundo passo na construção do MEF consiste em substituir os espaços das funções tentativas $H_D^1(\Omega)$ e o espaço das funções testes $H_{0,D}^1(\Omega)$ em (76), pelos subconjuntos de funções $V_{h,D} \subset H_D^1(\Omega)$ e $V_{h0,D} \subset H_{0,D}^1(\Omega)$ que residem no espaço de dimensão finita $V_h \subset H^1(\Omega)$ cujas definições são apresentadas em seguida.

$$V_h := \{w \in C(\bar{\Omega}) ; w|_K \in \mathcal{P}_r(K), \forall K \in \mathcal{T}_h\} ; \quad (78)$$

$$V_{h,D} := \{w \in V_h ; w = g_{h,D} \text{ sobre } \Gamma_D\} ; \quad (79)$$

$$V_{h0,D} := \{w \in V_h ; w = 0 \text{ sobre } \Gamma_D\} ; \quad (80)$$

onde $\mathcal{P}_r(K)$ denota o espaço dos polinômios com grau no máximo igual a $r \in \mathbb{Z}^+$. Neste trabalho fixou-se $r = 1$, além disso, $g_{h,D}$ denota o interpolante de g_D no espaço V_h .

Com isso, o problema aproximado cuja resolução fornece a solução por elementos finitos do problema de valor de contorno (67) pode ser declarado da seguinte maneira: Dadas as funções λ , f , g_D e g_N conforme (76), encontrar $u_h \in V_{h,D}$ tal que

$$a(u_h, v_h) = l(v_h), \quad \forall v_h \in V_{h0,D} . \quad (81)$$

Assumindo

$$\dim(V_h) = N(h) \quad \text{e} \quad V_h = \text{span}\{\psi_1, \dots, \psi_{N(h)}\}, \quad (82)$$

pode-se expressar a solução aproximada u_h de (81) em termos das funções de base ψ_i em (82) como

$$u_h(x) = \sum_{i=1}^{N(h)} c_i \psi_i(x), \quad (83)$$

na qual os coeficientes c_i precisam ser determinados. Assim, o problema aproximado em (81) pode ser reescrito como se segue: Dadas as funções λ , f , g_D e g_N conforme (76), encontrar $(c_1, \dots, c_{N(h)}) \in \mathbb{R}^{N(h)}$ tal que

$$\sum_{i=1}^{N(h)} a(\psi_i, \psi_j) c_i = l(\psi_j), \quad \forall j \in \{1, \dots, N(h)\}. \quad (84)$$

O problema aproximado em (84) é um sistema de equações lineares da forma

$$A\mathbf{c} = \mathbf{b}, \quad (85)$$

para o vetor das incógnitas $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_{N(h)}) \in \mathbb{R}^{N(h)}$ com a matriz do sistema dada por

$$A = a(\psi_i, \psi_j), \quad i, j \in \{1, \dots, N(h)\}, \quad (86)$$

de tamanho $N(h) \times N(h)$ e o vetor dos termos independentes dado por

$$\mathbf{b} = l(\psi_j), \quad j \in \{1, \dots, N(h)\}, \quad (87)$$

tendo tamanho $N(h)$.

Uma vez que as funções ψ_i possuem suporte pequeno, $a(\psi_i, \psi_j) = 0$ para a maioria dos pares de i e j , tornando A uma matriz esparsa (no sentido que a maioria de suas entradas são nulas). Esta propriedade é crucial do ponto de vista da eficiência computacional. Em particular, métodos iterativos rápidos estão disponíveis para soluções de sistemas lineares para matrizes esparsas.

Uma vez resolvido o sistema linear em (84) para o vetor das incógnitas $\mathbf{c}$, a expansão (83) fornece a aproximação por elementos finitos desejada para o problema de valor de contorno (67).

3.3.6 Problema Modelo: Caso Transiente

Esta seção é dedicada ao método de elementos finitos (MEF) para o problema do calor que pode ser visto como uma extensão do problema de Poisson discutido na seção anterior. Mais precisamente, à aplicação do MEF a um problema de valor inicial

e de contorno (PVIC) parabólico governado pela equação do calor cuja contrapartida estacionária é justamente o PVC elíptico introduzido na seção anterior.

Em linhas gerais, a aplicação do MEF ao PVIC de interesse neste trabalho, consiste em aproximar a equação do calor por uma sequência de equações diferenciais parciais elípticas.

Daqui em diante, t indicará o tempo e $t_f > 0$ um instante de tempo arbitrário fixo, o que permite introduzir o intervalo de tempo $\mathcal{I}_{t_f} :=]0, t_f[$. Assim, $Q := \Omega \times \mathcal{I}_{t_f}$ define um domínio espaço-tempo também conhecido como **cilindro espaço-tempo**. O fecho de Q é definido como $\overline{Q} := \overline{\Omega} \times [0, t_f]$.

Indicamos por Σ a superfície lateral do **cilindro espaço-tempo** Q , isto é, $\Sigma := \partial\Omega \times [0, t_f]$, que por sua vez, pode ser escrita como $\Sigma = \Sigma_D \cup \Sigma_N$ onde $\Sigma_D := \Gamma_D \times [0, t_f]$ e $\Sigma_N := \Gamma_N \times [0, t_f]$

É importante ressaltar que encontram-se preservadas aqui as definições dos subconjuntos do $\mathbb{R}^2$ dados por Ω , $\overline{\Omega}$, $\partial\Omega$, Γ_D e Γ_N introduzidas na seção anterior.

3.3.6.1 Formulação Forte: Abordagem Clássica

A forma forte do problema modelo deste estudo pode ser declarada da seguinte maneira: Dadas as constantes reais positivas ρ e c_p , e as funções λ definida em (57) e satisfazendo (58), $g_N \in C(0, t_f; C^1(\Gamma_N))$, $g_D \in C(0, t_f; C(\Gamma_D))$, e $f_1 \in C(0, t_f; C(\Omega))$, encontrar $u \in C^1(0, t_f; C^2(\Omega))$ tal que

$$\begin{cases} \rho c_p \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(\lambda(x) \nabla u) = f_1(x, t), & \text{em } Q, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \Omega, \\ u(x, t) = g_D(x, t), & \text{sobre } \Sigma_D, \\ \partial_{\hat{n}_\lambda} u = g_N(x, t), & \text{sobre } \Sigma_N. \end{cases} \quad (88)$$

Definindo $\alpha = \frac{1}{\rho c_p}$ e $f_2 = \alpha f_1$, podemos reescrever (88) como

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \alpha \operatorname{div}(\lambda(x) \nabla u) = f_2(x, t), & \text{em } Q, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \Omega, \\ u(x, t) = g(x, t), & \text{sobre } \Sigma_D, \\ \partial_{\hat{n}_\lambda} u = g_N(x, t), & \text{sobre } \Sigma_N. \end{cases} \quad (89)$$

Neste trabalho, pretende-se resolver (88) para $f_1 \equiv 0$ em Q e $g_D(x, t) = T_a(t)$ sobre

Σ_D . Assim, uma mudança de variável da forma $u = T + T_a$ transforma (88) em

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t} - \alpha \operatorname{div}(\lambda(x) \nabla T) = f(x, t), & \text{em } Q, \\ T(x, 0) = T_0(x), & x \in \Omega, \\ T(x, t) = 0, & \text{sobre } \Sigma_D, \\ \partial_{\hat{n}_\lambda} T = g_N(x, t), & \text{sobre } \Sigma_N. \end{cases} \quad (90)$$

onde $f(x, t) = -\frac{\partial T_a}{\partial t}(t)$, $T_0(x) = u_0(x) - T_a(0)$.

3.3.6.2 Formulação Fraca: Abordagem Variacional

Em virtude da estrutura funcional dada pelos espaços de Bochner, é possível adotar uma abordagem direta para resolver EDPs (Equações Diferenciais Parciais) dependentes do tempo pelo método de elementos finitos. Uma tal estratégia, consiste em primeiro lugar, discretizar a derivada temporal por uma aproximação de diferenças finitas, o que gera uma sequência de problemas estacionários, e, em seguida, transformar cada problema estacionário em uma formulação variacional.

Assim, assumindo preliminarmente a existência de uma solução clássica para (90), particiona-se o intervalo $[0, t_f]$ em $N(\Delta t)$ subintervalos da forma $[t_{n-1}, t_n]$, onde $t_n = n\Delta t$, $n \in \mathcal{I}_{\Delta t} = \{1, 2, \dots, N(\Delta t)\}$, $t_0 = 0$, $t_{N(\Delta t)} = t_f$ e Δt é o parâmetro de discretização temporal. Além disso, define-se $T(t_n) = T^n$ para todo $n \in \mathcal{I}_{\Delta t}$.

Logo, uma discretização por diferenças finitas no tempo consiste, primeiro, em avaliar a EDP (90)₁ em algum nível de tempo, por exemplo t_{n+1} . Isso conduz a

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)^{n+1} - \alpha \operatorname{div}(\lambda(x) \nabla T^{n+1}) = f^{n+1}. \quad (91)$$

A derivada temporal em (91) pode ser aproximada por um quociente de diferenças. Por simplicidade e razões de estabilidade, escolhe-se uma diferença regressiva simples:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^{n+1} \approx \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t}. \quad (92)$$

Inserindo (92) em (91), obtém-se

$$\frac{T^{n+1} - T^n}{\Delta t} - \alpha \operatorname{div}(\lambda(x) \nabla T^{n+1}) = f^{n+1}. \quad (93)$$

A equação (93) fornece uma versão discretizada no tempo da equação do calor (90)₁. Essa discretização é conhecida como **método de Euler regressivo** ou **método de Euler implícito**.

É possível reorganizar (93) de modo que o lado esquerdo contenha os termos com a incógnita T^{n+1} e o lado direito contenha apenas termos já calculados. Desse

procedimento, resulta uma sequência de problemas espaciais (estacionários) para T^{n+1} , assumindo que T^n é conhecido do passo de tempo anterior cuja formulação lê-se: Dadas as funções T^n e f^{n+1} , para cada $n \in \{0, 1, 2, \dots, N(\Delta t) - 1\}$, encontrar a função $T^{n+1} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$T^{n+1} - \Delta t \alpha \operatorname{div} (\lambda(x) \nabla T^{n+1}) = T^n + \Delta t f^{n+1}. \quad (94)$$

A equação (94) é chamada de **formulação semi-discretizada no tempo** da EDP (90)₁. Sobre ela, pode-se adotar procedimento análogo ao apresentado na subseção 3.3.4 para obter a forma fraca associada cuja declaração lê-se: Dadas as funções $\alpha \in \mathbb{R}^+$, $\lambda_{ij} \in L^\infty(\Omega)$, $i, j \in \{1, 2\}$, $f^{n+1} \in L^2(\Omega)$, $g_D^{n+1} \in L^2(\Gamma_D)$ e $g_N^{n+1} \in L^2(\Gamma_N)$, para cada $n \in \{0, 1, \dots, N(\Delta t) - 1\}$, encontrar a função $T^{n+1} \in H_D^1(\Omega)$ tal que

$$a_n(T^{n+1}, v) = l_n(v), \quad \forall v \in H_{0,D}^1(\Omega), \quad (95)$$

com as formas bilinear $a_n : H_D^1(\Omega) \times H_{0,D}^1 \rightarrow \mathbb{R}$ e linear $l_n : H_{0,D}^1 \rightarrow \mathbb{R}$ definidas como

$$a_n(w, z) := \int_{\Omega} w z \, dx + \Delta t \alpha \int_{\Omega} \lambda \nabla w \cdot \nabla z \, dx, \quad (96)$$

e

$$l_n(z) := \int_{\Omega} w^n z \, dx + \Delta t \int_{\Omega} f^{n+1} z \, dx + \alpha \Delta t \int_{\Gamma_N} g_N^{n+1} z \, dx. \quad (97)$$

Para cada $n \in \{0, 1, \dots, N(\Delta t) - 1\}$, o problema em (95) fornece uma forma fraca associada ao problema de calor (90) que apesar de discretizada no tempo, permanece contínua no espaço. Para uma discretização completa, é suficiente considerar em (95), espaços de aproximação para T^{n+1} e v definidos em (79) e (80) respectivamente.

Com isso, o problema totalmente discretizado cuja resolução fornece a solução por elementos finitos do problema de valor inicial e de contorno (90) pode ser declarado da seguinte maneira: Para cada $n \in \{0, 1, \dots, N(\Delta) - 1\}$, dadas as funções α , λ , f^{n+1} , g_D^{n+1} e g_N^{n+1} conforme (95), encontrar $T_h^{n+1} \in V_{h,D}$ tal que

$$a_n(T_h^{n+1}, v_h) = l_n(v_h), \quad \forall v_h \in V_{h0,D}, \quad (98)$$

onde $a_n(\cdot, \cdot)$ e $l_n(\cdot)$ são as formas bilinear e linear definidas respectivamente em (96) e (97).

Finaliza-se esta subseção com apresentação da forma matricial associada a (98). Para tanto, assumi-se (82) e expressa-se a solução aproximada T_h^{n+1} de (98) em termos das funções de base ψ_i em (82) como

$$T_h^{n+1}(x) = \sum_{i=1}^{N(h)} c_i^{n+1} \psi_i(x), \quad (99)$$

na qual os coeficientes c_i^{n+1} precisam ser determinados. Inserindo (99) em (98), obtém-se a forma matricial desejada cuja declaração lê-se: Dadas as funções α , λ , f^{n+1} , g_D^{n+1} e g_N^{n+1} conforme (98), para cada $n \in \{0, 1, \dots, N(\Delta t) - 1\}$, encontrar o vetor das incógnitas $\mathbf{c}^{n+1} = (c_1^{n+1}, \dots, c_{N(h)}^{n+1}) \in \mathbb{R}^{N(h)}$ tal que

$$\sum_{i=1}^{N(h)} a_n(\psi_i, \psi_j) c_i^{n+1} = l_n(\psi_j), \quad \forall j \in \{1, \dots, N(h)\}. \quad (100)$$

O problema totalmente discretizado em (100) é um sistema de equações lineares da forma

$$[M + \Delta t \alpha A] \mathbf{c}^{n+1} = \mathbf{b}^{n+1}$$

para o vetor das incógnitas $\mathbf{c}^{n+1} \in \mathbb{R}^{N(h)}$ com a matrizes $A, M \in \mathbb{R}^{N(h) \times N(h)}$ definidas por

$$A = a(\psi_i, \psi_j), \quad M = \int_{\Omega} \psi_i(x) \psi_j(x) dx, \quad i, j \in \{1, 2, \dots, N(h)\}, \quad (101)$$

na qual a matriz A conhecida como **matriz de rigidez** é exatamente aquela definida em (86) para o caso estacionário, enquanto que a matriz M é chamada de **matriz de massa**.

Por outro lado, o vetor dos termos independentes $\mathbf{b}^{n+1} \in \mathbb{R}^{N(h)}$, é definido por

$$\mathbf{b}^{n+1} := l_n(\psi_j), \quad j \in \{1, 2, \dots, N(h)\}, \quad (102)$$

onde $l_n(\cdot)$ encontra-se definida em (97).

3.3.7 Resultados Numéricos

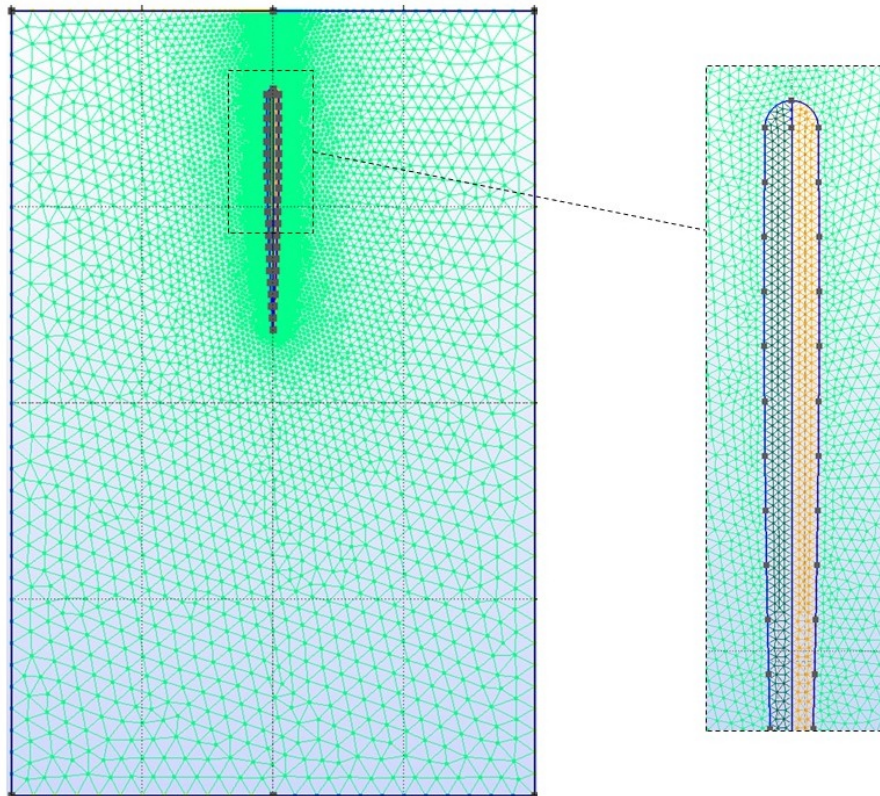
Testes de independência da malha foram conduzidos, adotando um intervalo de tempo de 1800 s (meia hora) para a discretização temporal.

Mais precisamente, nos testes de malha foram comparados os vetores de solução da temperatura anual no centro do bloco, nas coordenadas $x = 5$ m e $z = 1, 6$ m. Além disso, as diferenças entre dois vetores de solução sucessivos T^s foram comparados, utilizando a norma infinita, que, de acordo com Trefethen e Bau (1997), a norma infinita de um vetor $x = (x_1, \dots, x_n)$ é dada por: $\|x\|_{\infty} = \max_{i=1, \dots, n} |x_i|$. Os resultados dos testes podem ser observados na Tabela 2, que apresenta uma convergência esperada a partir do aumento do número de nós e elementos. Para completar as comparações, é escolhida uma diferença máxima na ordem de 10^{-4} entre duas soluções, conforme Domingues et al. (2021).

Tabela 2: Dados finais dos testes de malha

Simulações (s)	Nós	Elementos	Tempo (min)	Comparação $\ T^{s+1} - T^s\ _\infty$
1	1097	2137	2,6	-
2	1396	2722	3,4	$1,80 \times 10^{-3}$
3	1657	3230	4,2	$6,94 \times 10^{-4}$
4	2017	3935	5,5	$2,41 \times 10^{-4}$

Os resultados indicaram que malhas com mais de 2.000 nós e 3.000 elementos triangulares forneceram resultados que atendem ao critério utilizado (RAMALHO et al., 2022). Um exemplo de malha utilizada nas simulações é apresentado na Figura 5. A malha é composta por uma estrutura galvanizada de Formato Semicircular-Parabólico com Simetria Próxima ao Eixo, uma das configurações geométricas analisadas neste estudo.



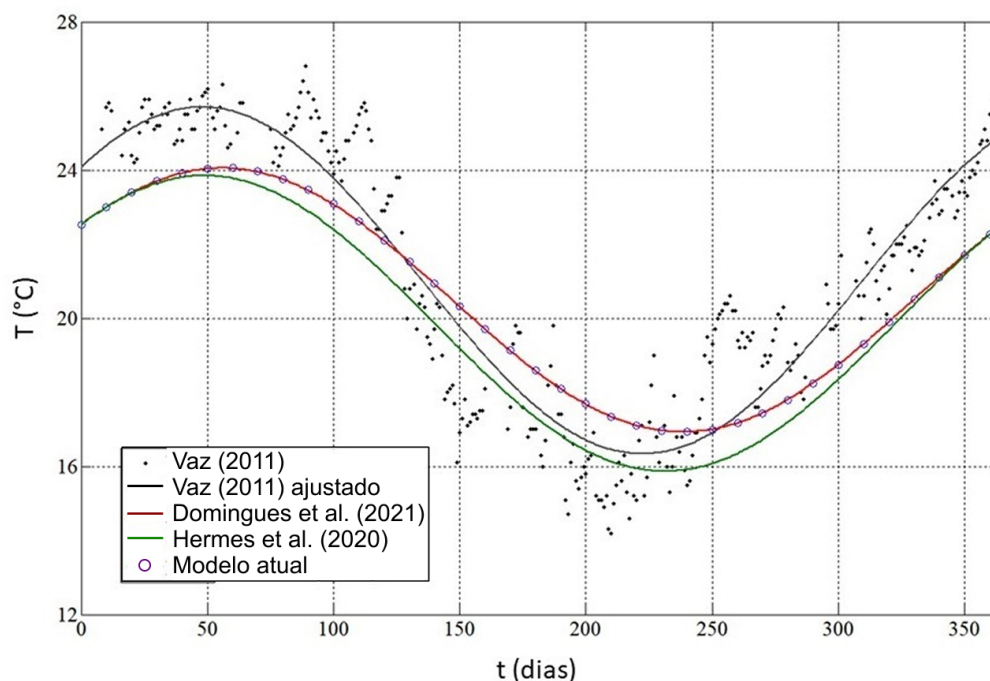
Fonte: A autora.

Figura 5: Exemplo de malha utilizada nas simulações.

3.3.8 Validação e Verificação do Modelo Computacional

Para a validação do modelo, foram utilizados os dados experimentais presentes em Vaz (2011). A Figura 6 apresenta uma comparação entre: (1) médias diárias (discretas) de temperatura na saída do TCSA, de acordo com Vaz (2011); (2) curva ajustada por mínimos quadrados dessas médias; (3) os resultados presentes em Domingues et

al. (2021), visto que os autores também validaram seu modelo pelos mesmos dados experimentais; (4) os resultados presentes em Hermes et al. (2020); (5) os resultados presentes nesta dissertação.



Fonte: A autora.

Figura 6: Comparação dos resultados do modelo atual com dados experimentais e outros resultados numéricos.

Para comparar os resultados deste trabalho com os dados experimentais, utilizou-se o coeficiente de correlação de Pearson. O sinal indica direção negativa ou positiva do relacionamento e o valor absoluto sugere a força da relação entre as variáveis. Para o cálculo, a função **corrcoef()** do MATLAB (2010) é utilizada, gerando um resultado de, aproximadamente 0,89, o que indica uma correlação forte entre os dados³. Por fim, a diferença anual RMS entre os valores do modelo e os experimentais é estimada em aproximadamente 1,45° C.

A análise da Figura 6 mostra uma concordância entre os resultados presentes neste trabalho e demais trabalhos da literatura. Resultados descritos em Hermes et al. (2020) apresentam uma correlação de aproximadamente 0,92 e diferença anual RMS de 1,58° C, quando comparados com os dados experimentais de Vaz (2011).

³O valor absoluto do coeficiente de correlação de Pearson varia entre 0 e 1. Se o coeficiente for 0, isso indica que não há correlação linear entre as variáveis; se for igual a 1, há uma correlação linear perfeita entre as variáveis, ou seja, à medida que uma aumenta, a outra também aumenta proporcionalmente de forma linear.

Ainda na Figura 6, observa-se a equivalência entre os resultados deste estudo e os apresentados por Domingues et al. (2021). Essa similaridade ocorre porque Domingues et al. (2021) utiliza o mesmo modelo analítico para a simulação com o TCSA. Além disso, na simulação da temperatura do solo, foram adotadas as mesmas condições de contorno e iniciais e a discretização temporal também foi resolvida pelo método de Euler implícito de primeira ordem, resultando em valores praticamente idênticos, sem variações significativas.

Estes resultados validam e verificam o presente modelo, fornecendo resultados correlatos aos experimentais e uma metodologia eficaz computacionalmente.

3.4 Avaliação Paramétrica Aplicada em Configurações com Estruturas Galvanizadas

3.4.1 Avaliação paramétrica: Definições e aplicação

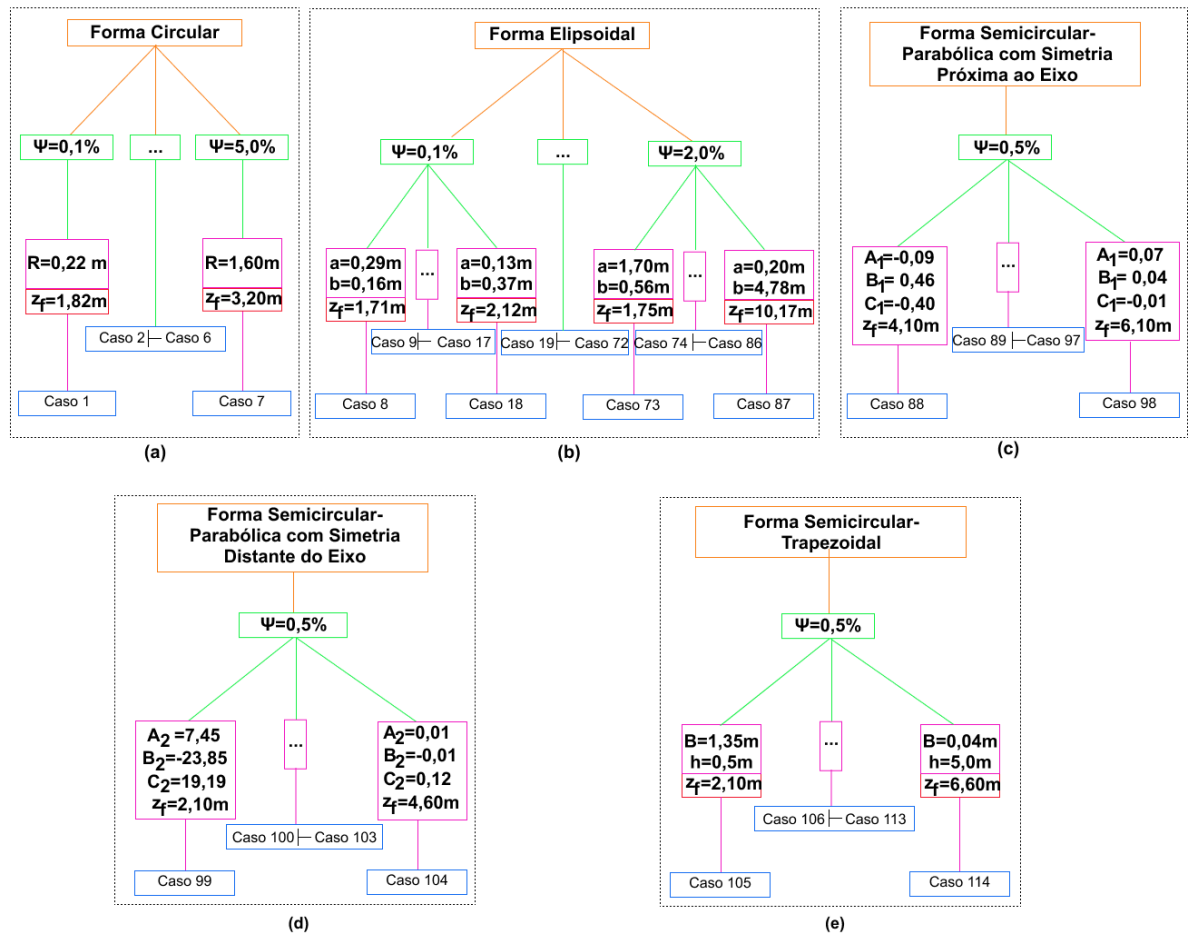
Com base em Montgomery (2013), a avaliação ou análise paramétrica em problemas de engenharia que envolvem mecânica dos fluidos e transferência de calor consiste na investigação sistemática do impacto que variações em parâmetros de entrada possuem sobre o desempenho e o comportamento de um sistema ou processo.

Essa abordagem permite identificar as variáveis mais críticas, avaliar a sensibilidade dos resultados e até otimizar condições operacionais, contribuindo para projetos mais robustos. Nesse sentido, a avaliação paramétrica oferece uma compreensão aprofundada dos fenômenos estudados, possibilitando a tomada de decisões fundamentadas na identificação de tendências dos parâmetros analisados.

A presente metodologia envolve o planejamento e execução de experimentos (simulações, estudo de casos), onde os parâmetros são sistematicamente alterados para se analisar a resposta do sistema. Técnicas como o design de experimentos e a análise de sensibilidade são amplamente empregadas para estruturar esses estudos, permitindo a determinação de intervalos operacionais ideais e a previsão de comportamentos sob diferentes condições.

Nesta pesquisa a análise paramétrica é aplicada/utilizada em cinco formas predefinidas: Forma Circular, Elipsoidal, Semicircular-Parabólica com Simetria Próxima ao Eixo, Semicircular-Trapezoidal e Semicircular-Parabólica com Simetria Distante do Eixo.

A Figura 7 apresenta um fluxograma ilustrativo acerca dos parâmetros que foram modificados em cada configuração.



Fonte: A autora.

Figura 7: Representação esquemática da Análise Paramétrica em cada uma das Formas investigadas.

A primeira Forma analisada do material galvanizado é a Circular, cujo parâmetro principal é ψ , representando a fração de área ocupada pelo material em relação ao domínio computacional.

Para a Forma Elipsoidal, além da variação de ψ , foram considerados dois parâmetros adicionais a e b , correspondendo, respectivamente, às medidas do semieixo horizontal e do semieixo vertical da Forma.

As Formas Semicircular-Parabólica com Simetria Próxima e Distante do Eixo apresentam como parâmetros variáveis as constantes A_1 , B_1 , C_1 , A_2 , B_2 , e C_2 , que definem as funções geradoras das curvas parabólicas associadas a essas geometrias. Além disso, o parâmetro z_f , que corresponde à profundidade final de instalação do material, também é considerado como parâmetro principal nesta configuração. Nesses casos, ψ é mantido constante em 0,5% do domínio computacional.

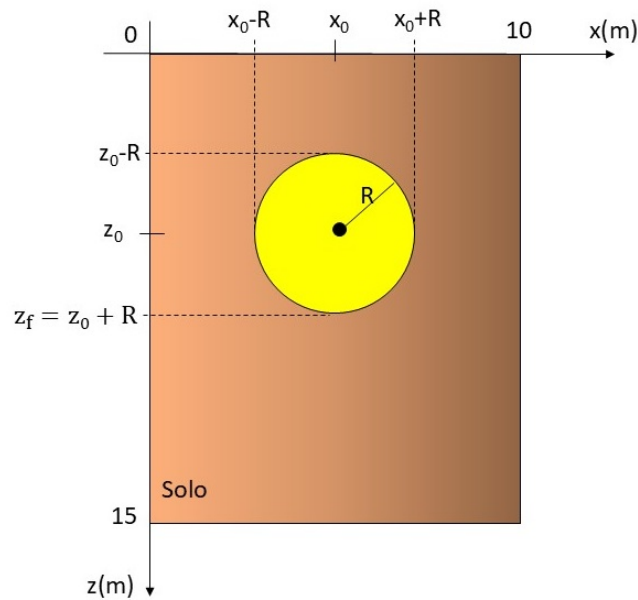
Por fim, a Forma Semicircular-Trapezoidal possui como parâmetros principais B e h , definidos, respectivamente, como a base maior e a altura do trapézio retângulo presente nessa configuração. Assim como nas Formas Parabólicas, ψ é fixo em 0,5%.

Os parâmetros destacados em vermelho na Figura 7 são classificados como parâmetros secundários, pois suas variações ocorrem em função das alterações nos parâmetros principais. Apesar disso, eles são apresentados devido à sua importância para a comparação final entre todas as Formas analisadas, contribuindo para uma avaliação abrangente e criteriosa dos resultados.

Os detalhes específicos de cada Forma geométrica, bem como o processo de construção dessas configurações, serão abordados nas seções seguintes.

3.4.2 Forma Circular

Os primeiros casos de simulação envolveram uma estrutura galvanizada com formato circular. A vista transversal do domínio computacional correspondente a essas simulações é apresentada na Figura 8.



Fonte: A autora.

Figura 8: Domínio computacional para a Forma Circular.

O domínio computacional apresentado na Figura 8 abrange uma área (A_d) de 150 m^2 (para todas as simulações, a mesma área é considerada). Na mesma figura, R denota o raio da estrutura galvanizada. Este, por sua vez, é determinado escolhendo-se uma fração de área, definida por ψ , a qual será proporcional à área A_d . Dessa maneira, no caso de uma região circular, ψ é dada por:

$$\psi = \frac{A_c}{A_d} 100\% = \frac{\pi R^2}{1,5} \%, \quad (103)$$

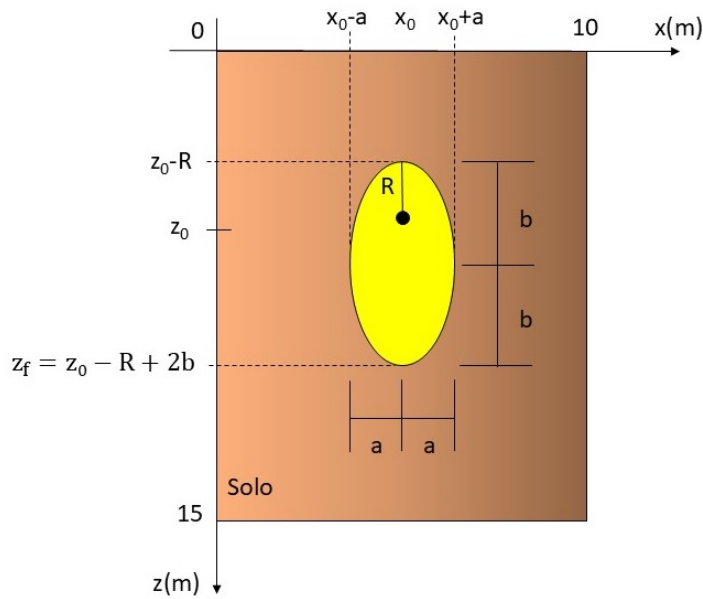
sendo A_c a área correspondente a Forma Circular.

É importante ressaltar o cuidado dedicado ao raio do círculo, uma vez que, para atender aos requisitos do modelo GAEA, é essencial estabelecer uma região com

condutividade uniforme ao redor do duto. Assim, uma área delimitadora é estabelecida, garantindo que o raio da estrutura, em todas as simulações, não fosse menor que o diâmetro do duto, ou seja, $R > D$. Além disso, é necessário ter $R < \min(z_0, 5 \text{ m})$ para que a região galvanizada não ultrapasse os limites estabelecidos para o solo.

3.4.3 Forma Elipsoidal

A próxima Forma investigada adotou a configuração de uma elipse. Na Figura 9, é apresentado o domínio computacional utilizado, onde a e b representam as medidas dos semieixos horizontal e vertical da elipse, respectivamente.



Fonte: A autora.

Figura 9: Domínio computacional para a Forma Elipsoidal.

Para esta análise, estabeleceu-se uma relação de equivalência entre a área A_c e a área da Forma Elipsoidal (A_e). Dessa forma, para uma fração previamente definida na Forma Circular, adotou-se uma região Elipsoidal com a mesma área, ou seja:

$$A_c = A_e \rightarrow \pi R^2 = \pi ab. \quad (104)$$

Diferente do Caso Circular, em que só o parâmetro R sofre modificações, nesta nova configuração é possível explorar as variações de a e b para analisar como eles afetam o desempenho do TCSA. Aqui, escolhe-se a medida de um semieixo e calcula-se a medida do outro, respeitando a equação (104).

Como acontece com a Forma Circular, o parâmetro a está sujeito à restrição $D < a < 5 \text{ m}$. Isso garante uma região uniforme mínima ao redor do duto (como fez-se no Caso Circular) e impede que a região ultrapasse o domínio.

A motivação para o uso da Forma Elíptica é que ela é mais genérica que a Forma

sendo $z \in [z_0 - R_s, z_0]$. Já as curvas Γ_2 e Γ_3 são definidas parametricamente pelas funções:

$$\Gamma_2 : x(z) = x_0 + x_1(z) \quad (107)$$

$$\Gamma_3 : x(z) = x_0 - x_1(z), \quad (108)$$

em que o parâmetro $z \in [z_0, z_f]$ e $x_1(z) = A_1 z^2 + B_1 z + C_1$. Para determinar as constantes da função $x_1(z)$, foram adotadas três condições: (i) $x_1(z_0) = R_s$, para que as curvas Γ_2 e Γ_3 interceptem Γ_1 ; (ii) $x_1(z_f) = 0$, para que as curvas Γ_2 e Γ_3 se interceptem. (iii) Para manter as áreas das regiões Circular e Semicircular-Parabólica com Simetria Próxima ao Eixo iguais, é preciso satisfazer a equação (105), o que implica em:

$$\frac{\pi R^2}{2} = \frac{\pi R_s^2}{4} + \int_{z_0}^{z_f} x_1(z) dz. \quad (109)$$

O parâmetro z_f sofreu variações em cada teste feito e é definido por:

$$z_f = z_0 - R + 2b + z_s. \quad (110)$$

Sendo R o raio do círculo correspondente à fração de área ψ de 0,5%, $b = 1,50$ a medida do semieixo vertical da Forma Elipsoidal que apresentou os melhores resultados, e z_s o parâmetro variável que assume valores no intervalo de 0 a 2. A ideia de utilizar valores de parâmetros da Forma Elipsoidal é justamente estabelecer uma relação entre esta nova estrutura e as configurações testadas anteriormente.

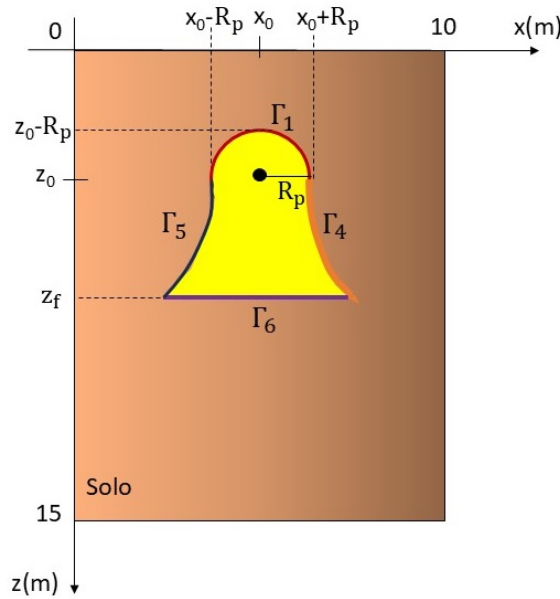
3.4.5 Forma Semicircular-Parabólica com Simetria Distante do Eixo

Da mesma forma que em casos anteriores, para uma área circular $A_c = \pi R^2$, tem-se que a área da nova estrutura A_{p2} é dada por:

$$A_c = A_{p2} \rightarrow \pi R^2 = A_{p2}. \quad (111)$$

A Figura 11 apresenta o domínio computacional utilizado para a Forma Semicircular-Parabólica com Simetria Distante do Eixo.

A Figura 11 apresenta o parâmetro R_p , correspondente ao raio da parte semicircular da estrutura analisada. Como na Forma anterior, a medida do parâmetro R_p é fixada em 0,11 m.



Fonte: A autora.

Figura 11: Domínio computacional para a Semicircular-Parabólica com Simetria Distante do Eixo.

A Forma Semicircular-Parabólica com Simetria Distante do Eixo é delimitada por Γ_1 , Γ_4 , Γ_5 e Γ_6 . A curva Γ_1 é definida a partir de equação (106), já as curvas Γ_4 e Γ_5 são definidas parametricamente pelas funções:

$$\Gamma_4 : x(z) = x_0 + x_2(z) \quad (112)$$

$$\Gamma_5 : x(z) = x_0 - x_2(z), \quad (113)$$

com $z \in [z_0, z_f]$ e $x_2(z) = A_2 z^2 + B_2 z + C_2$. Para determinar as constantes da função $x_2(z)$, foram adotadas três condições: (i) $x_2(z_0) = R_p$. (ii) $x'_2(z_0) = 0$. (iii) Para manter as áreas A_c e A_{p2} iguais, é preciso satisfazer a equação (111), o que implica em:

$$\frac{\pi R^2}{2} = \frac{\pi R_p^2}{4} + \int_{z_0}^{z_f} x_2(z) dz, \quad (114)$$

O parâmetro z_f sofreu variações em cada teste feito.

Por fim, a curva Γ_6 pode ser definida como:

$$\Gamma_6 : x(z) = z_f. \quad (115)$$

Nesta configuração, z_f também é um parâmetro variável, calculado a partir da expressão:

$$z_f = z_0 + z_p. \quad (116)$$

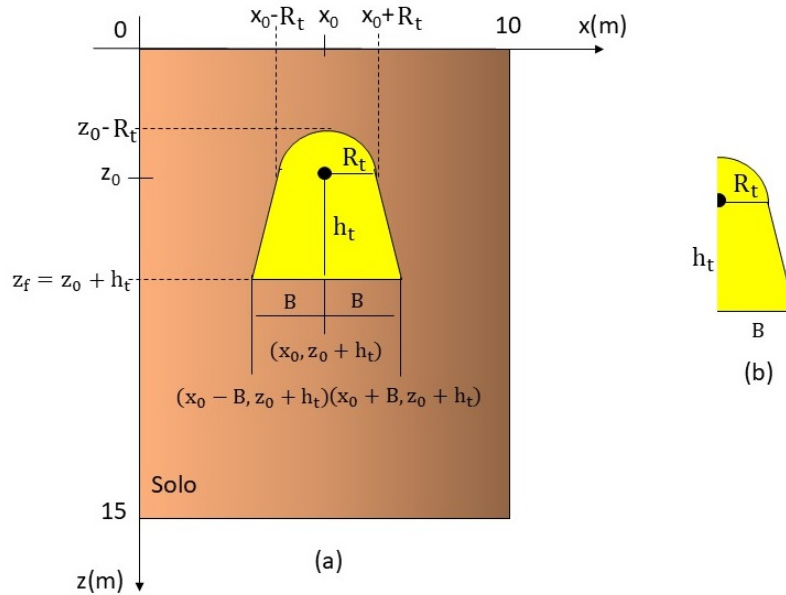
Sendo z_p um parâmetro variável compreendido entre os valores 0,5 a 3.

3.4.6 Forma Semicircular-Trapezoidal

Para a Forma Semicircular-Trapezoidal, ψ também é fixado em 0,5%. Logo, a área da estrutura, a qual chamaremos de A_t , pode ser determinada a partir de:

$$A_t = \frac{0,5}{100} \times 150 = 0,75m^2. \quad (117)$$

A Figura 12 (a) apresenta o domínio computacional utilizado, sendo R_t o raio da parte semicircular da Forma Semicircular-Trapezoidal, h_t a altura abaixo do centro do duto (variável de controle) e $2B$ a largura da região abaixo do centro do duto (variável dependente).



Fonte: A autora.

Figura 12: Domínio computacional para a Forma Semicircular-Trapezoidal.

Através da Figura 12(b), é possível notar que a metade da Forma Semicircular-Trapezoidal é composta por 1/4 de circunferência de raio R_t e um trapézio retângulo de base maior B , altura h_t e base menor R_t . Portanto, tem-se que a área da Figura 12(b) pode ser representada da seguinte maneira:

$$\frac{A_t}{2} = \frac{\pi R_t^2}{4} + \frac{(B + R_t)h_t}{2}. \quad (118)$$

Desse modo, é possível calcular o valor de B :

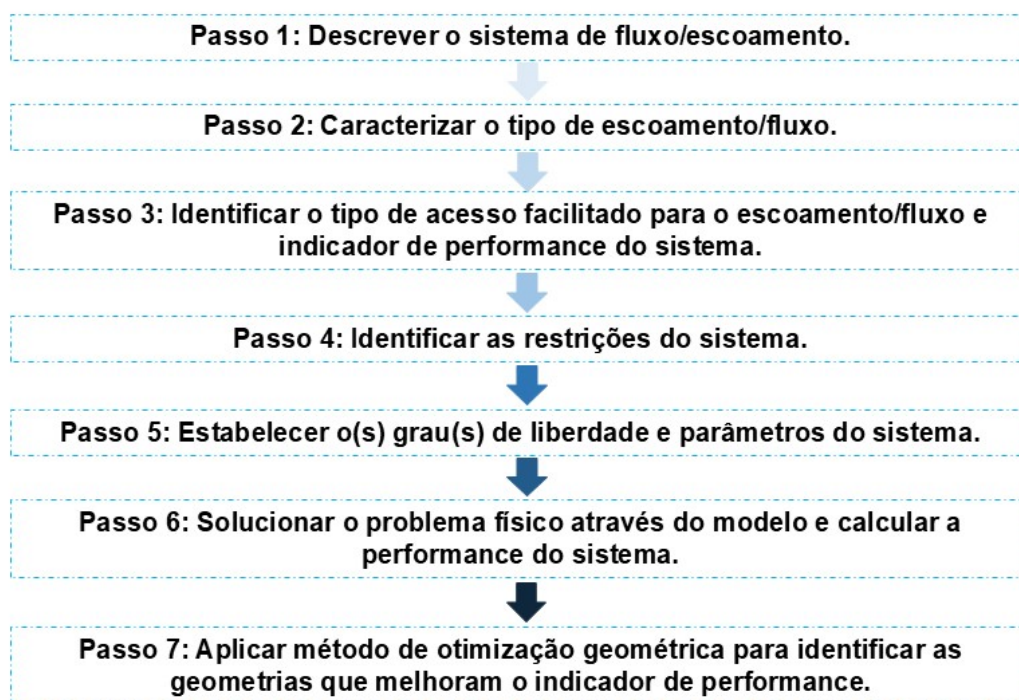
$$B = \frac{2A - \pi R_t^2}{2h_t} - R_t. \quad (119)$$

3.5 Design Construtal Aplicado em Configurações com Estruturas Galvanizadas

3.5.1 Método Design Construtal: Definições e Aplicação

O método Design Construtal será empregado na segunda etapa de simulações dessa pesquisa para avaliar a influência da geometria do material galvanizado no comportamento e nas variações de desempenho do sistema.

No entanto, para aplicar esse recurso, é essencial atender a alguns princípios fundamentais do Design Construtal, que servirão de base para as configurações futuras. De acordo com Rodrigues (2014), Rocha, Lorente e Bejan (2017), Santos et al. (2017), o método segue uma série de passos. A Figura 13 apresenta as etapas do método aplicado neste estudo.



Fonte: A autora.

Figura 13: Etapas do Método Design Construtal aplicado nesta pesquisa.

De acordo com a Figura 13, identificam-se, ao todo, sete etapas a serem cumpridas. Nesta seção e nas próximas, todos esses passos serão discutidos.

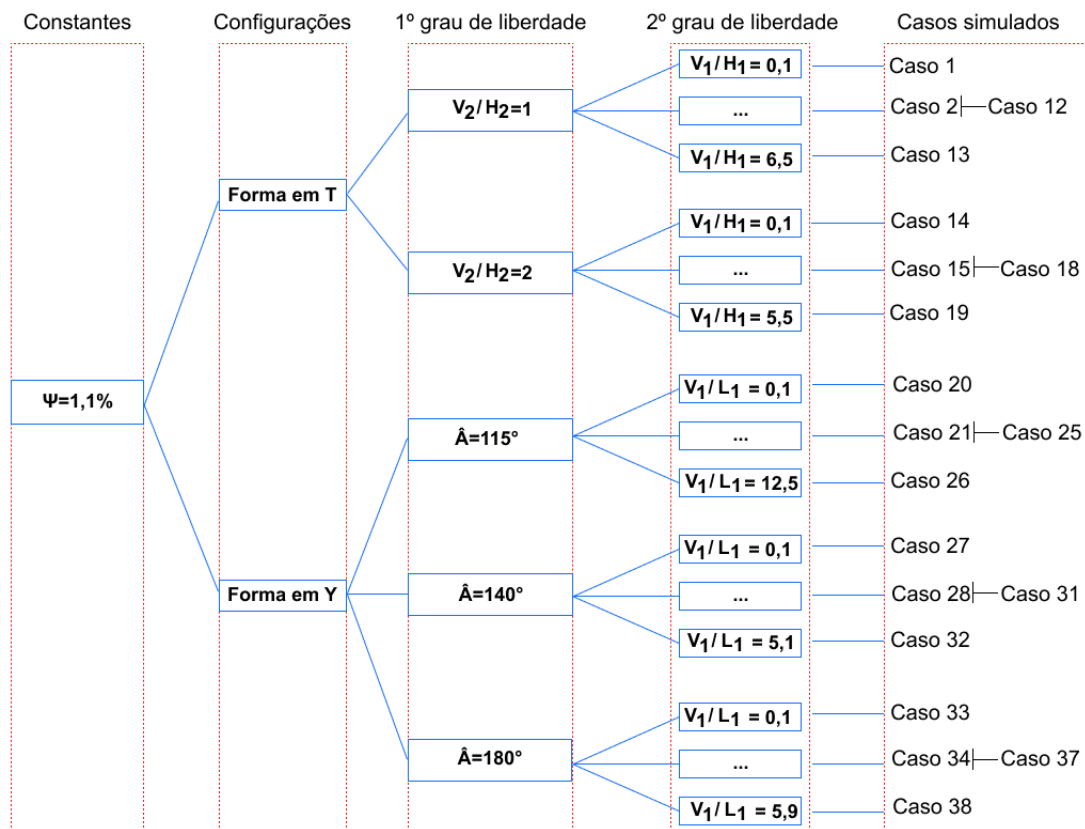
O primeiro passo consiste em definir o sistema de escoamento/fluxo; neste caso, trata-se de um escoamento interno com transferência de calor, englobando o princípio de troca térmica no TCSA e difusão no material galvanizado e no solo.

No segundo passo, é necessário caracterizar o tipo de fluxo/escoamento. Para este trabalho, considerou-se uma vazão mássica total de ar constante, igual a $3,64 \times$

10^{-2} kg/s, que também representa a restrição física do problema (Passo 4).

O terceiro passo refere-se à identificação do indicador de desempenho. Neste estudo, o indicador de desempenho é a eficiência máxima anual do TCSA (θ_{max}), definida na Equação 6. O objetivo principal é determinar a eficiência máxima anual duas vezes maximizada $(\theta_{max})_{2m}$, parâmetro diretamente relacionado à geometria ótima do material.

A respeito da geometria, a Figura 14 apresenta o esquema que será seguido nas simulações.



Fonte: A autora.

Figura 14: Representação esquemática da aplicação do Método Construtal Design para definir o espaço de busca.

A representação esquemática parte do parâmetro ψ , que representa a fração de área do material galvanizado, sendo esta proporcional à área do domínio computacional. Este parâmetro é a restrição geométrica do sistema (Passo 4). Todas as configurações analisadas possuem uma área constante de $1,6335 \text{ m}^2$. A justificativa para a escolha dessa área será abordada na Seção 4.4.

O material galvanizado será estudado em duas configurações principais: uma em T e outra em Y, utilizando o método Construtal para otimizar o desempenho do sistema. Para cada Forma, serão analisados dois graus de liberdade (Passo 5), que

estão apresentados na terceira e na quarta coluna da Figura 14 e serão detalhados na Seção 3.5.2.

Para resolver o problema físico, conforme indicado no passo 6, este trabalho aborda as equações de conservação (TCSA) e a equação de difusão de calor em meios materiais (solo e o material galvanizado).

Por fim, o sétimo passo consiste na escolha de um método de otimização para identificar as geometrias que aprimoram o indicador de performance. Neste estudo, adotou-se a Busca Exaustiva. Segundo PESARAN et al. (2015) e Rodrigues (2019), esse método envolve a enumeração sistemática de possíveis candidatos à solução, avaliando se cada um atende às condições do problema.

Além disso, conforme destacado por Angulo et al. (2021), essa técnica garante a obtenção de soluções globalmente ótimas e viáveis ao explorar diversas combinações de variáveis de decisão. No entanto, esse processo é trabalhoso, o que pode torná-la impraticável para aplicações que demandam respostas em prazos reduzidos, como dentro de um dia ou poucas horas.

3.5.2 Definição da Área da Estrutura Galvanizada para o Presente Estudo

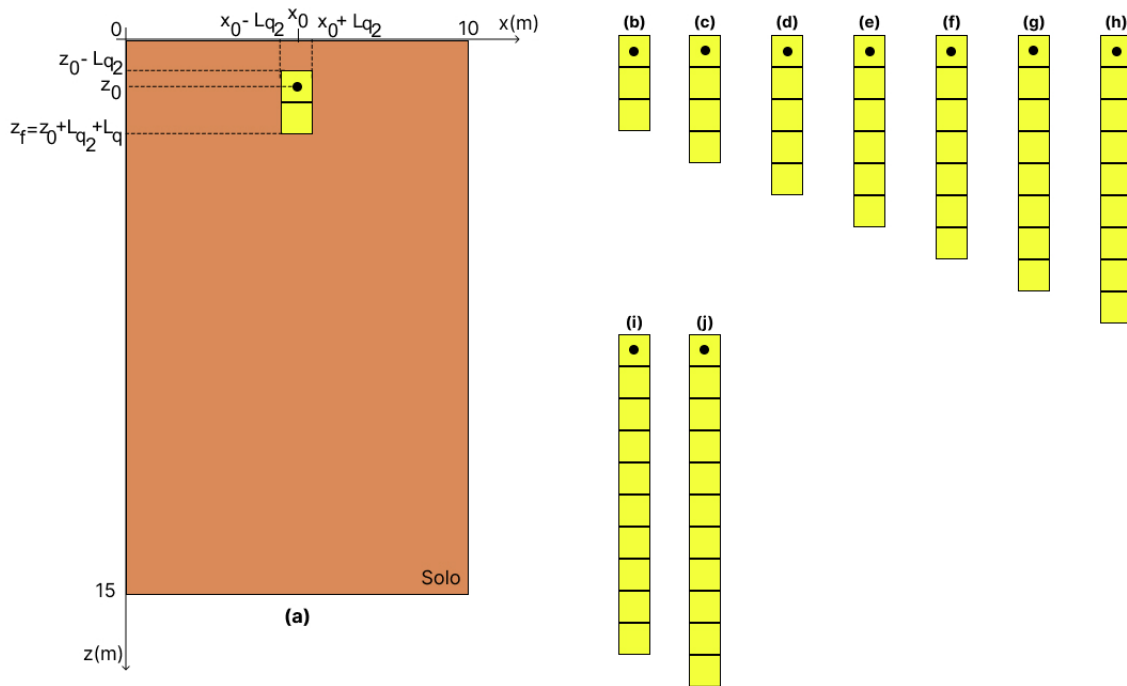
A estrutura galvanizada presente nesta etapa é formada por blocos quadrados de lado (L_q) igual a 0,33 m (o triplo da área do diâmetro do duto $D = 0,11$ m).

Para começar os estudos sobre uma estrutura que vai ao encontro da metodologia construtiva, é necessário definir uma área suficiente para o material galvanizado, a qual seja possível realizar modificações geométricas para a aplicação do método.

Desse modo, propôs-se uma disposição simples de blocos verticais, variando o número de blocos em 17 diferentes configurações. A Figura 15 apresenta 10 das 17 geometrias utilizadas na primeira rodada de simulações. As demais seguem o mesmo padrão, sendo compostas por 12, 13, 14, 15, 20, 25 e 30 blocos.

A ideia de extrapolar o número de blocos, como se observa nos 3 últimos casos, é justamente para mostrar que profundidades maiores de instalação não necessariamente se traduzem em potenciais elevados e na melhor escolha de configuração para o sistema.

Na Figura 15, é apresentado o parâmetro L_{q2} , que é justamente a metade de L_q , ou seja, $L_{q2} = 0,165$ m. Este aspecto reforça o cuidado dedicado à região envolta do duto, uma vez que, para atender aos requisitos do modelo GAEA, é essencial estabelecer uma região com condutividade uniforme ao redor do mesmo. Em outros casos já mencionados como o Circular, por exemplo, o raio do círculo R não poderia ser menor que a medida do diâmetro D do duto. Como $L_{q2} > D$, esta característica é preservada.



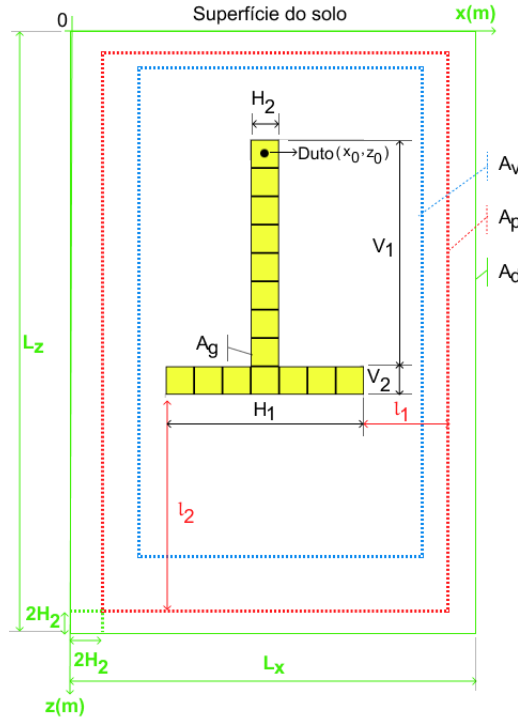
Fonte: A autora.

Figura 15: Configurações utilizadas para as simulações com blocos verticais.

A partir dos resultados obtidos nessas simulações, considerou-se suficiente escolher a configuração composta por 15 quadrados para servir de modelo para as demais simulações. Esta geometria possui uma área de $1,6335 \text{ m}^2$, correspondente a cerca de 1,1% da área do domínio computacional. A escolha do número de blocos será melhor discutida na seção 4.4.

3.5.3 Formas em T

A primeira configuração estudada na Forma em T, correspondente aos casos de 1 a 13 (ver Figura 14), é composta por uma fileira de blocos disposta na vertical e outra na horizontal. A Figura 16 ilustra o domínio computacional, uma das geometrias simuladas (Caso 6) e os graus de liberdade considerados.



Fonte: A autora.

Figura 16: Representação dos graus de liberdade da Forma em T (Casos $V_2/H_2 = 1$).

Na Figura 16, a área A_d representa o domínio computacional analisado. Dentro desse domínio, delimita-se uma área denominada A_p , que corresponde à região máxima que a geometria pode ocupar. Essa delimitação é essencial para evitar que a Forma seja influenciada pelas condições de contorno.

Portanto, o parâmetro H_1 (medida dos blocos horizontais) deve respeitar a seguinte restrição:

$$H_1 \leq L_x - 4H_2 \quad (120)$$

sendo L_x a extensão total do domínio na direção x e $4H_2$ o espaçamento necessário entre A_d e A_p .

Consequentemente, a medida do parâmetro l_1 (espaço entre A_p e H_1 na direção horizontal) deve ser calculada como:

$$l_1 = \frac{L_x}{2} - \frac{H_1}{2} - 2H_2. \quad (121)$$

Assim como H_1 , o parâmetro $V_1 + V_2$ sofre a restrição:

$$V_1 + V_2 \leq L_z - 4H_2 \quad (122)$$

sendo L_z a extensão total do domínio na direção z .

Por fim, a medida do parâmetro l_2 (espaço entre A_p e H_1 na direção vertical) deve ser calculada como:

$$l_2 = L_z - \left(z_0 - \frac{H_2}{2} - 2H_2 \right) - (V_1 + V_2) - 2H_2 = L_z - z_0 + \frac{H_2}{2} - (V_1 + V_2). \quad (123)$$

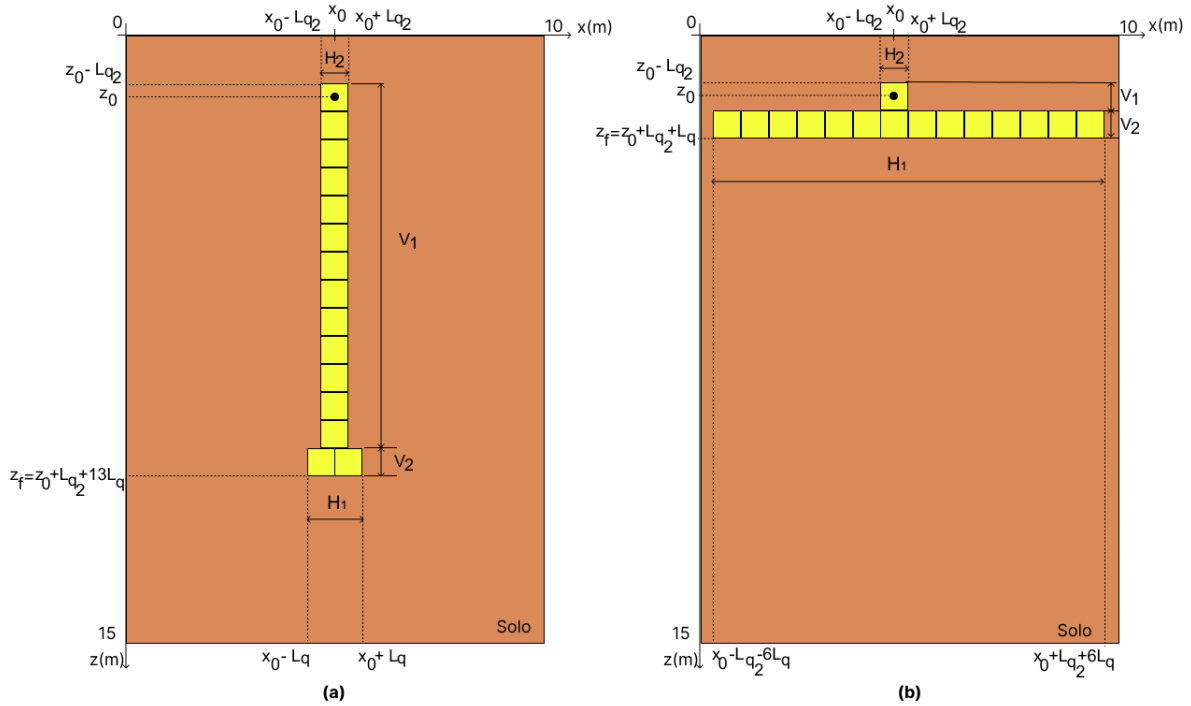
Ainda na Figura 16, A_g representa a área ocupada pela geometria e A_v corresponde à área disponível para ocupação, de acordo com os graus de liberdade definidos.

O primeiro grau de liberdade analisado (V_2/H_2) corresponde à razão entre a altura dos blocos dispostos na vertical (V_2) e a largura dos blocos dispostos na horizontal (H_2). Neste caso, as variáveis possuem a mesma medida, correspondente ao lado do quadrado, ou seja, $V_2 = H_2 = L_q$ e, portanto, $V_2/H_2 = 1$. Este parâmetro será mantido fixo para todas as simulações desta etapa.

O segundo grau de liberdade (V_1/H_1), por sua vez, está relacionado à razão entre o comprimento das fileiras de blocos verticais (V_1) e horizontais (H_1). Diferentemente do primeiro, esse parâmetro será variável. A cada etapa, um bloco será removido da fileira vertical e adicionado à fileira horizontal, fazendo com que a razão V_1/H_1 varie entre:

$$0,1 \leq V_1/H_1 \leq 6,5 \quad (124)$$

A Figura 17 ilustra as configurações limites, correspondendo ao valor máximo (Caso 13) e mínimo (Caso 1) de V_1/H_1 , respectivamente.



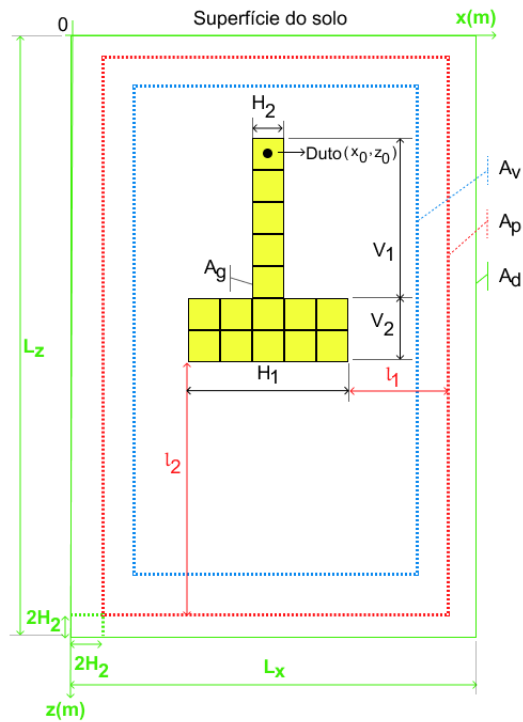
Fonte: A autora.

Figura 17: Configurações para a Forma em T - Casos 13 e 1.

Na segunda configuração das Formas em T (Casos 14 a 19), optou-se por aumentar a altura da parte horizontal da configuração, utilizando duas linhas horizontais para compor a estrutura. Nesse caso, o grau de liberdade fixo assume o valor $V_2/H_2 = 2$. Já o grau de liberdade variável apresenta valores no intervalo:

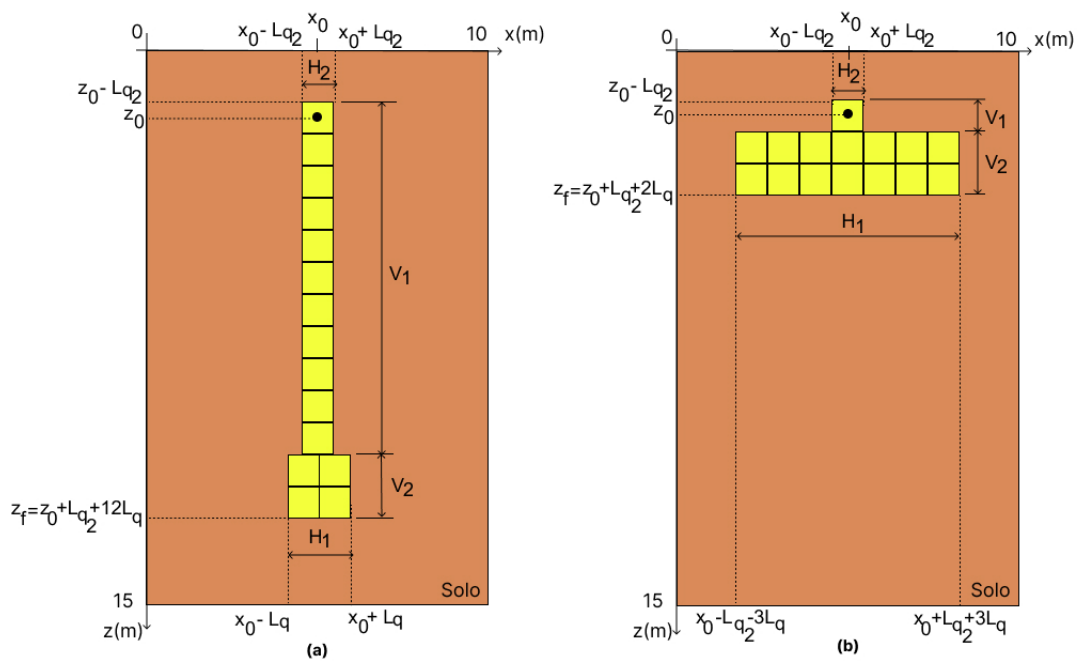
$$0,1 \leq V_1/H_1 \leq 5,5 \quad (125)$$

A Figura 18 ilustra uma das configurações simuladas (Caso 17), destacando os graus de liberdade utilizados nesta etapa. Além disso, a Figura 19 apresenta as configurações correspondentes aos valores máximo (Caso 19) e mínimo (Caso 14) de V_1/H_1 considerados.



Fonte: A autora.

Figura 18: Representação dos graus de liberdade da Forma em T (Casos $V_2/H_2 = 2$).



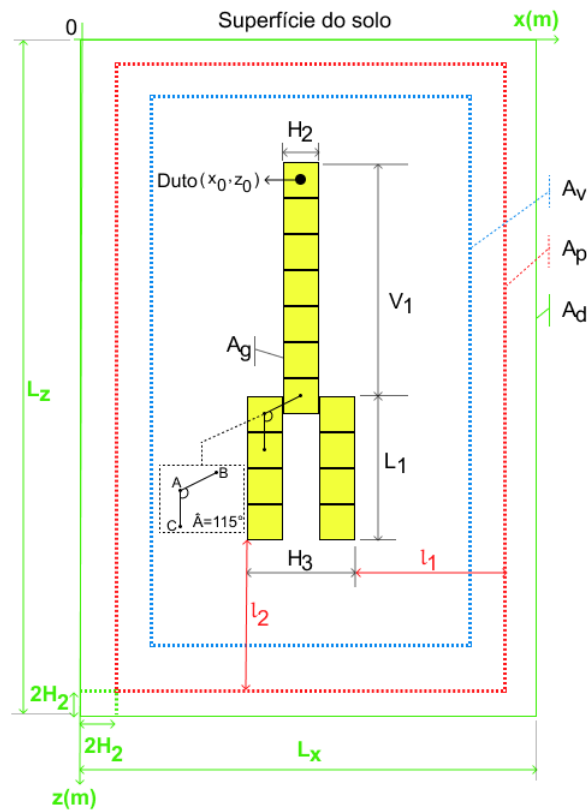
Fonte: A autora.

Figura 19: Configurações para a Forma em T - Casos 19 e 14.

3.5.4 Formas em Y

As configurações em Y foram definidas de maneira progressiva, partindo de uma geometria mais rígida até alcançar uma configuração que se assemelha a uma estrutura em Y.

A Figura 20 apresenta o domínio computacional, exemplifica uma das geometrias simuladas para a primeira configuração em Y (Caso 22) e destaca os graus de liberdade considerados para essa configuração.



Fonte: A autora.

Figura 20: Representação dos graus de liberdade da Forma em Y (Casos $\hat{A} = 115^\circ$).

Na Figura 20, destaca-se o ângulo $\hat{A}$, que corresponde ao primeiro grau de liberdade desta configuração. Esse ângulo é definido pelos segmentos de reta $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, sendo B o ponto central do último quadrado da fileira vertical, A o ponto central do primeiro quadrado da bifurcação, e C o ponto central do segundo quadrado da bifurcação. O ângulo $\hat{A}$ será mantido fixo em 115° nesta etapa de simulações.

O segundo grau de liberdade corresponde a razão V_1/L_1 , sendo L_1 a medida da bifurcação da Forma em Y. Para $\hat{A} = 115^\circ$, V_1/L_1 assumirá os valores do intervalo:

$$0,1 \leq V_1/L_1 \leq 12,5 \quad (126)$$

Nesta configuração, mantém-se a mesma área delimitadora A_p . Consequentemente,

os parâmetros H_3 (comprimento total da bifurcação) e $V_1 + L_1$ devem atender às restrições:

$$H_3 \leq L_x - 4H_2 \quad (127)$$

e

$$V_1 + L_1 \leq L_z - 4H_2 \quad (128)$$

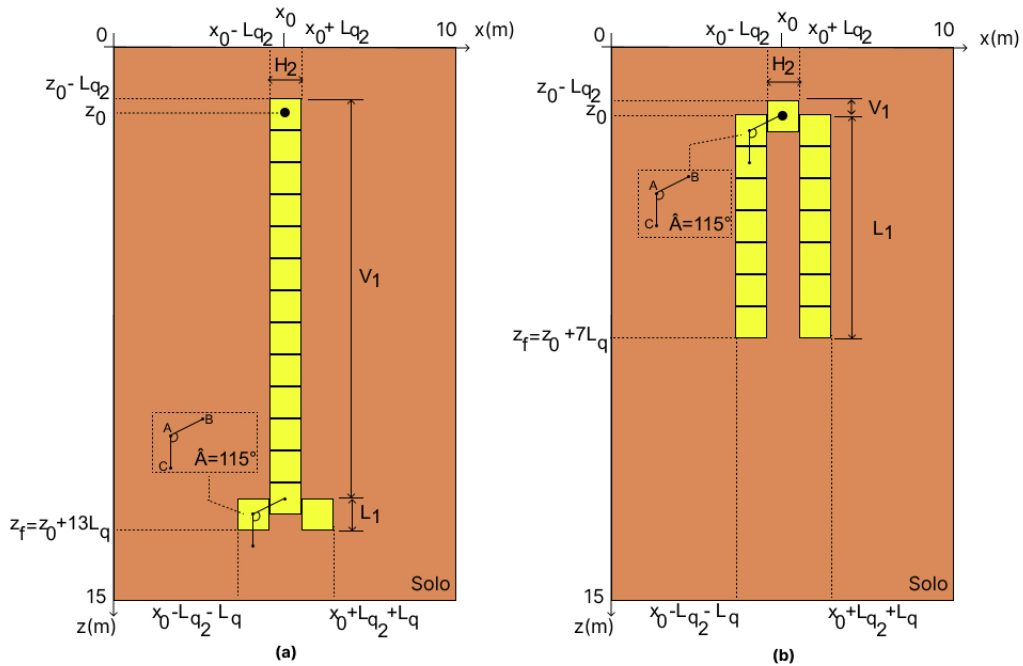
A medida do parâmetro l_1 , portanto, deve ser calculada como:

$$l_1 = \frac{L_x}{2} - \frac{H_3}{2} - 2H_2. \quad (129)$$

O parâmetro l_2 , por sua vez, será calculado a partir de:

$$l_2 = L_z - \left(z_0 - \frac{H_2}{2} - 2H_2 \right) - (V_1 + L_1) - 2H_2 = L_z - z_0 + \frac{H_2}{2} - (V_1 + L_1). \quad (130)$$

A Figura 21 apresenta duas das sete geometrias utilizadas nas simulações desta etapa (Casos 26 e 20). Conforme ilustrado, as duas fileiras laterais estão conectadas ao último bloco da fileira vertical exatamente no centro de sua extensão.



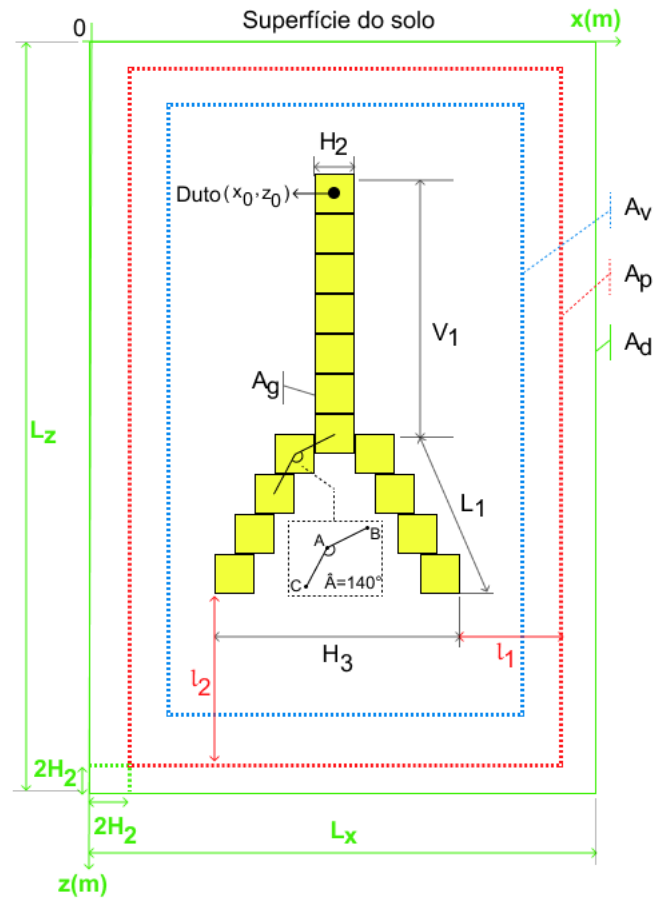
Fonte: A autora.

Figura 21: Configurações para a Forma em Y - Casos 26 e 20.

Nos casos das Formas em Y, a cada nova simulação adicionam-se dois blocos nas fileiras laterais e removem-se dois blocos da fileira vertical. Essa característica serve para preservar a simetria do modelo GAEA, um aspecto fundamental a ser respeitado

durante todas as simulações.

A segunda configuração utilizada na Forma em Y é ilustrada na Figura 22 através do Caso 28.



Fonte: A autora.

Figura 22: Representação dos graus de liberdade da Forma em Y (Casos $\hat{A} = 140^\circ$).

Da mesma forma que nos casos anteriores, a delimitação da área A_p faz com que H_3 permaneça delimitado por:

$$H_3 \leq L_x - 4H_2 \quad (131)$$

A medida do parâmetro l_1 , portanto, é calculada através da Equação 129.

Para calcular o parâmetro l_2 , é necessário determinar o valor total da medida vertical da geometria. Para isso, é preciso definir o comprimento do prolongamento de V_1 , que será denominado V_3 . Considerando um triângulo retângulo cuja hipotenusa é L_1 (comprimento total da ramificação) e um dos catetos é V_3 , este prolongamento pode ser calculado utilizando a seguinte relação:

$$\cos(\beta) = \frac{V_3}{L_1} \rightarrow V_3 = L_1 \cos(\beta), \quad (132)$$

sendo β o ângulo formado entre L_1 e V_3 .

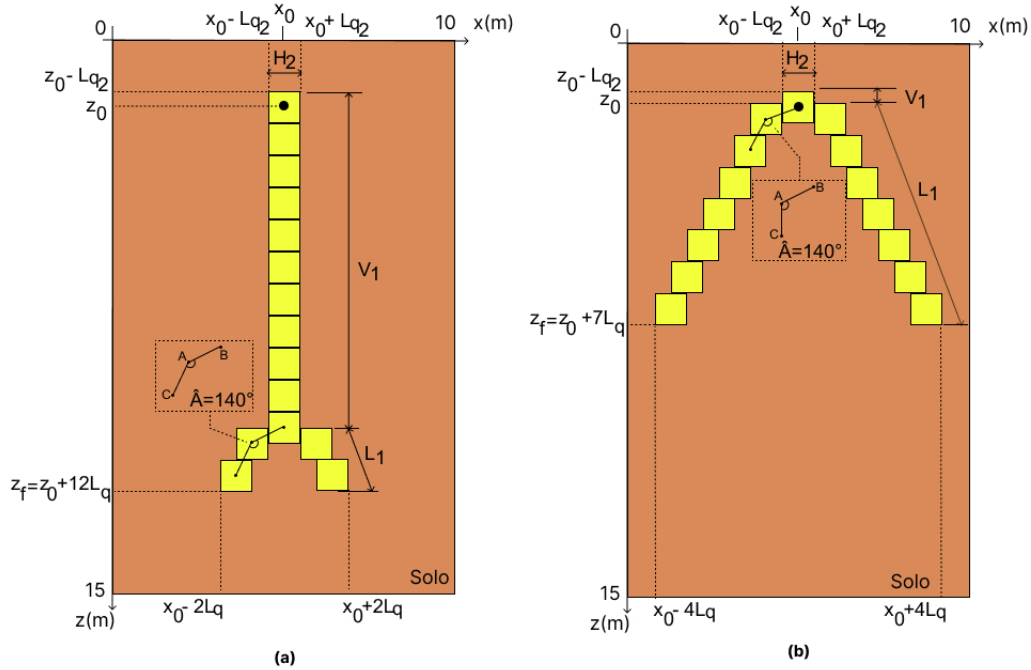
Com a medida de V_3 é possível calcular l_2 por meio de:

$$l_2 = L_z - \left(z_0 - \frac{H_2}{2} - 2H_2 \right) - (V_1 + V_3) - 2H_2 = L_z - z_0 + \frac{H_2}{2} - (V_1 + V_3). \quad (133)$$

De forma semelhante ao caso anterior, o grau de liberdade fixo será o ângulo $\hat{A}$, desta vez igual a 140° . O segundo grau de liberdade é a razão V_1/L_1 , a qual irá variar no intervalo:

$$0,1 \leq V_1/L_1 \leq 5,1 \quad (134)$$

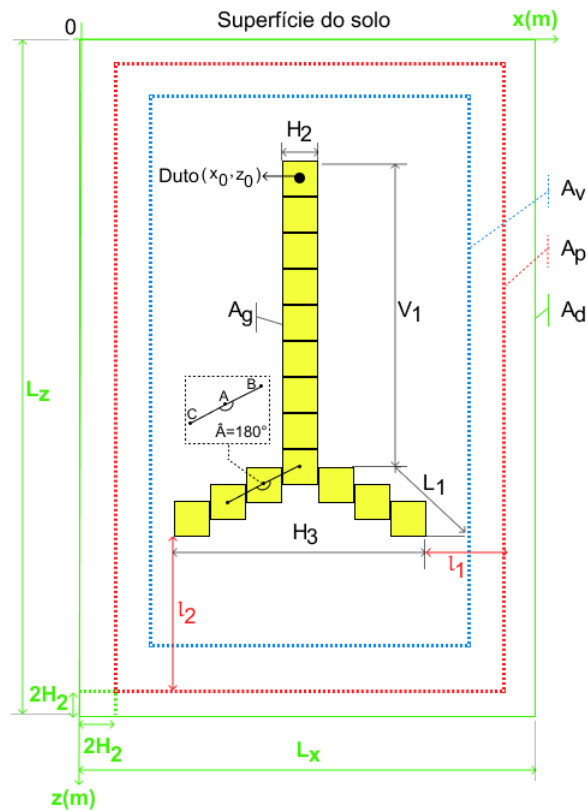
A Figura 23 apresenta as configurações para V_1/L_1 máximo (Caso 32) e mínimo (Caso 27), respectivamente.



Fonte: A autora.

Figura 23: Configurações para a Forma em Y - Casos 32 e 27.

A terceira e última configuração analisada na Forma em Y é ilustrada na Figura 24, a qual apresenta uma das configurações simuladas (Caso 34), os graus de liberdade e as delimitações do domínio.



Fonte: A autora.

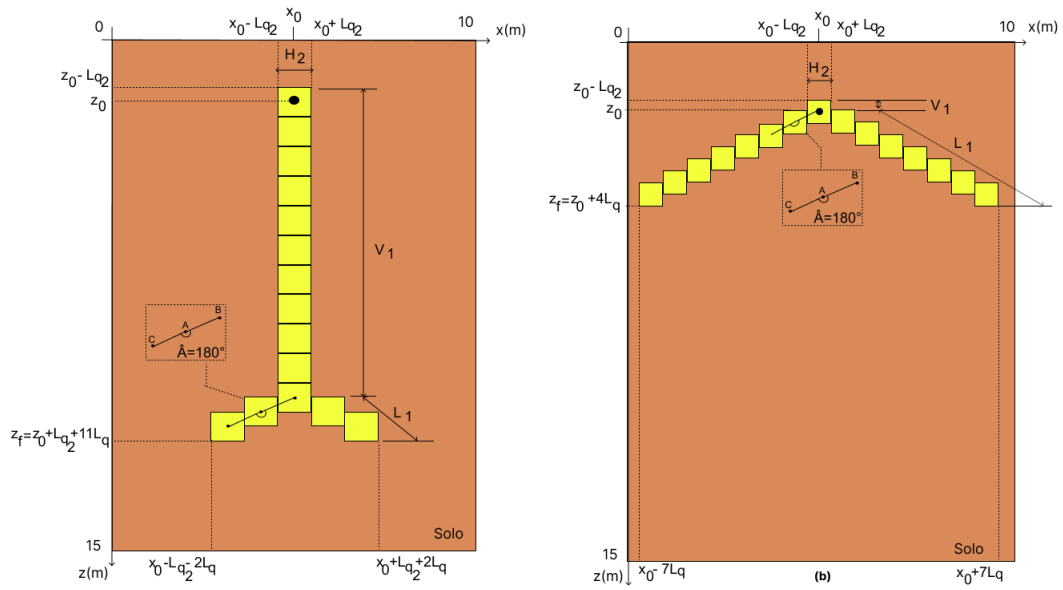
Figura 24: Representação dos graus de liberdade da Forma em Y (Casos $\hat{A} = 180^\circ$).

Estes casos são compostos das mesmas delimitações de área que a configuração anterior, portanto os valores l_1 e l_2 podem ser calculados de acordo com as Equações 129 e 133, respectivamente.

Nesta configuração, o grau de liberdade $\hat{A}$ assume o valor 180° e V_1/L_1 varia entre:

$$0,1 \leq V_1/L_1 \leq 5,9 \quad (135)$$

A Figura 25 apresenta as duas geometrias limites para esta configuração (Casos 38 e 33).



Fonte: A autora.

Figura 25: Configurações para a Forma em Y - Casos 38 e 33.

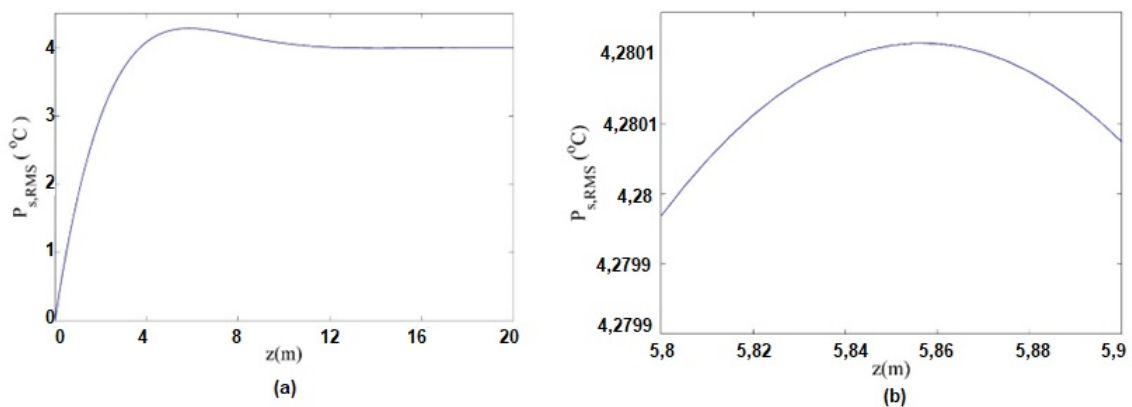
4 RESULTADOS

4.1 Análise Térmica do Solo

Considerando um solo homogêneo e não influenciado pelas condições do TCSA, a temperatura T_s depende exclusivamente da profundidade z (OZGENER; OZGENER; TESTER, 2013). Com base no modelo ajustado para temperaturas do ar em Viamão (ver Equação (20)), os valores diários de T_s podem ser estimados usando:

$$T_s(z, t) = 20,49 + 5,66 \sin\left(\frac{2\pi}{365}t - 5,30 - 0,39z\right) e^{-0,39z} \quad (136)$$

Assim, é possível obter os valores RMS anuais do potencial térmico do solo $P_{s,RMS}$. A Figura 26(a) ilustra que os valores RMS para os primeiros 5 m apresentam variações significativas, enquanto os valores após 8 m aproximam-se assintoticamente de um valor de aproximadamente 4°C. A ampliação na Figura 26(b) mostra um valor máximo de aproximadamente 4,28°C ocorrendo entre 5,8 e 5,9 m. Portanto, tem-se que o potencial térmico anual máximo que o solo pode alcançar é de aproximadamente 4,28°C.

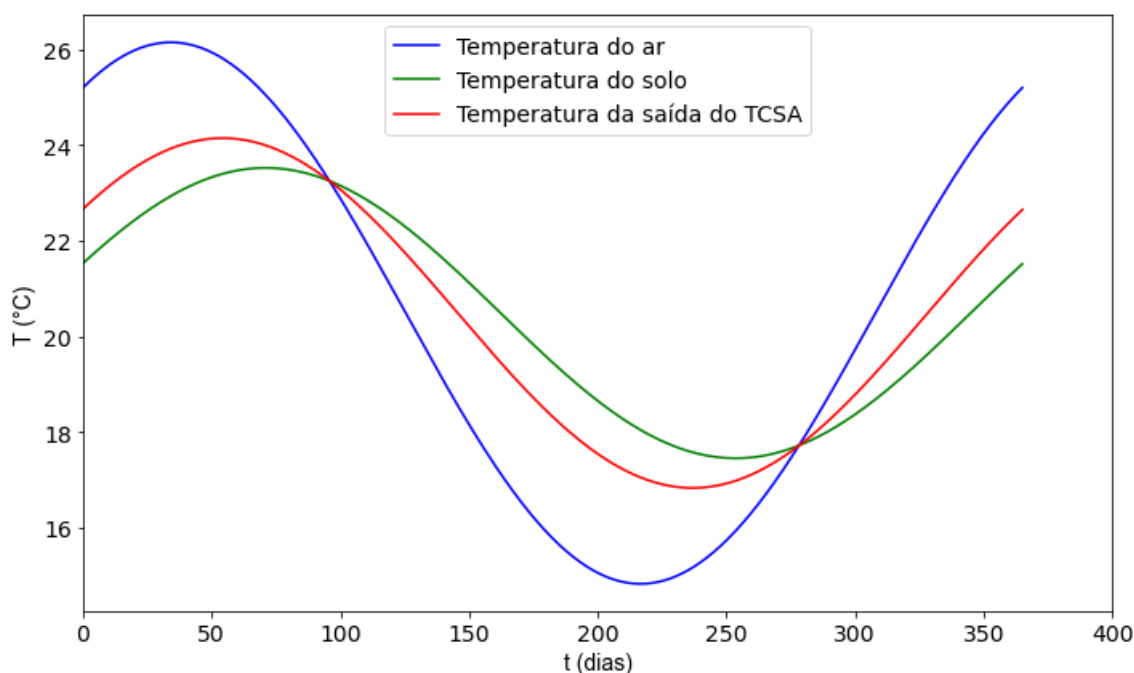


Fonte: A autora.

Figura 26: Valores RMS anuais do potencial térmico do solo em função da profundidade.

4.2 Análise Térmica do Trocador de Calor Solo-Ar sem Material Galvanizado

A primeira simulação, a qual será chamada Caso de Referência, é conduzida sem estrutura galvanizada circundante ao duto. O propósito dessa etapa é estabelecer uma base de comparação para os resultados das simulações subsequentes. A Figura 27 apresenta a temperatura do ar na entrada do TCSA, a temperatura do solo na coordenada de centro do duto (x_0, z_0) e a temperatura da saída do TCSA no Caso de Referência.



Fonte: A autora.

Figura 27: Temperatura do ar na entrada do TCSA, do solo na coordenada de centro do duto (x_0, z_0) e da saída do TCSA no Caso de Referência.

Destaca-se que o Caso de Referência obteve um potencial térmico anual do solo de 2,58 °C, enquanto que o potencial térmico anual do TCSA alcançou 1,90 °C. Isso resultou em uma eficiência anual do TCSA em torno de 73% e uma eficiência máxima anual de aproximadamente 44,4%.

Dado que um dos objetivos deste estudo é encontrar uma geometria que consiga aproveitar o máximo de potencial térmico que o solo oferece, foram consideradas alternativas para alcançar essa meta. Como mencionado anteriormente, a abordagem de incorporar estruturas de alta condutividade térmica ao redor do duto surgiu como a mais promissora. As próximas seções discutem os resultados obtidos com essas estruturas.

4.3 Análise Paramétrica em Configurações com Estruturas Galvanizadas

4.3.1 Forma Circular

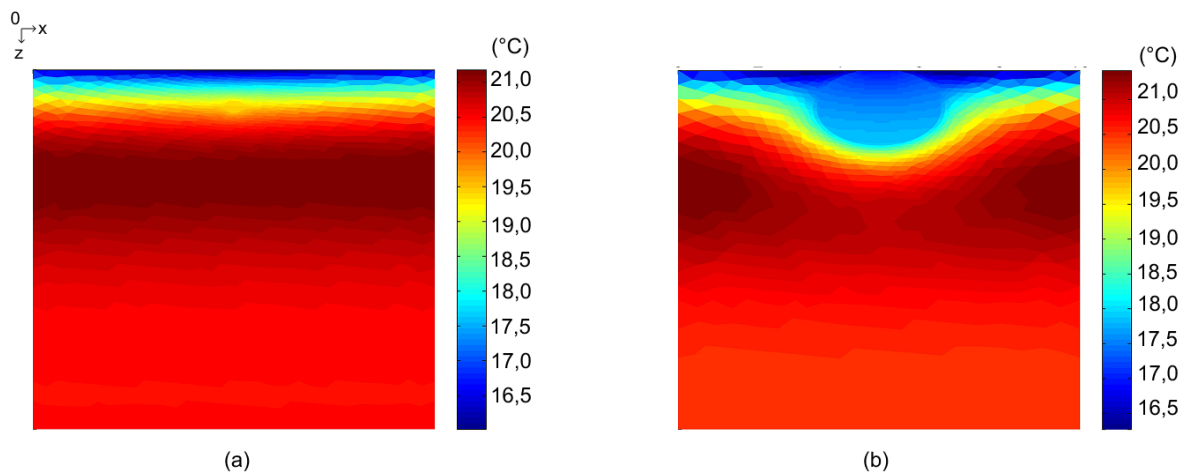
O estudo para a Forma Circular abordou a realização de sete simulações. A Tabela 3 apresenta as frações de área, com seus respectivos raios, além dos resultados encontrados, bem como as eficiências máximas anuais do TCSA.

Tabela 3: Resultados obtidos em cada fração de área analisada na Forma Circular.

Caso	ψ (%)	R (m)	z_f (m)	$P_{t,s}$ (°C)	$P_{t,TCSA}$ (°C)	θ_{max} (%)
1	0,10	0,22	1,82	2,58	2,46	57,5
2	0,50	0,49	2,09	2,54	2,43	56,8
3	1,00	0,69	2,29	2,48	2,37	55,4
4	2,00	0,97	2,57	2,33	2,23	52,1
5	3,00	1,20	2,80	2,13	2,04	47,7
6	4,00	1,38	2,98	1,83	1,76	41,1
7	5,00	1,60	3,20	1,34	1,30	30,4

Fonte: A autora.

Conforme evidenciado na Tabela 3, o desempenho mais favorável é alcançado com a menor fração de área (Caso 1). Isso ocorre porque, à medida que a fração aumenta, a estrutura se aproxima cada vez mais da superfície do solo, ficando sujeita à influência da temperatura ambiente. Esta conclusão pode ser vista na Figura 28, a qual apresenta os campos de temperatura para um dia de inverno na fração de área ψ de 0,1 e 5,0%.



Fonte: A autora.

Figura 28: Campos de temperatura das frações de área ψ de 0,1% (a) e 5,0% (b).

Ressalta-se também um ponto observado em todas as simulações que empregaram estruturas galvanizadas ao redor do duto: a eficiência anual do TCSA (θ_{anual}), em todas

as configurações, atingiu 95%, representando um aumento de mais de 20% em relação às simulações com o Caso de Referência.

Embora o potencial térmico anual do TCSA tenha aumentado em comparação com o Caso de Referência, (θ_{max}) permanece relativamente baixa. Isso sugere a possibilidade de encontrar geometrias mais adequadas para maximizar os potenciais térmicos e aprimorar o sistema proposto.

4.3.2 Forma Elipsoidal

Nestas simulações, as frações de área foram modificadas 7 vezes, com os valores de ψ variando de 0,1% a 2%. Em cada uma dessas proporções, foram realizadas cerca de 10 simulações, variando as medidas dos semieixos. Isso resultou em aproximadamente 70 simulações para a Forma Elipsoidal.

A Tabela 4 apresenta os melhores resultados obtidos em cada uma das frações de área ψ . Os demais resultados encontram-se no Apêndice A.

Tabela 4: Melhores resultados obtidos em cada fração de área analisada na Forma Elipsoidal.

Caso	ψ (%)	R (m)	a (m)	b (m)	z_f (m)	$P_{t,s}$ (°C)	$P_{t,TCSA}$ (°C)	θ_{max} (%)
8	0,10	0,22	0,13	0,37	2,12	2,70	2,56	59,8
19	0,20	0,31	0,14	0,69	2,67	2,83	2,70	63,1
30	0,30	0,38	0,14	1,03	3,28	2,92	2,79	65,2
41	0,40	0,44	0,15	1,29	3,74	2,96	2,82	65,9
52	0,50	0,49	0,16	1,50	4,11	2,99	2,84	66,4
63	1,00	0,69	0,20	2,38	5,67	3,00	2,85	66,4
76	2,00	0,97	0,35	2,69	6,01	2,94	2,80	65,4

Fonte: A autora.

A análise da Tabela 4 revela que os resultados mais promissores são obtidos nos Casos 52, com $\psi = 0,5\%$ e 63, com $\psi = 1\%$. Essa descoberta é significativa, pois indica que o potencial térmico não está diretamente relacionado à maior fração de área, o que é crucial também em termos de custos do sistema. Uma possível explicação para esse fenômeno é que, à medida que a fração ψ aumenta, a geometria tende a se aproximar da superfície, sendo mais afetada pelas condições da temperatura da superfície.

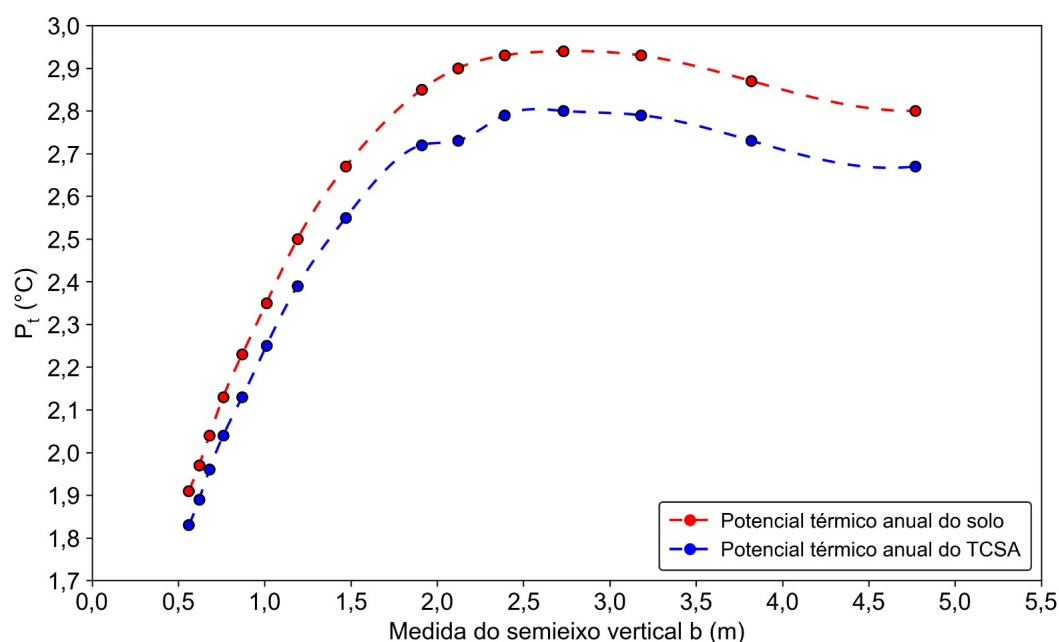
Outro aspecto relevante a ser abordado é a fração de área ψ igual a 2%. Nos demais casos simulados, os resultados mais favoráveis foram observados quando o valor do semieixo vertical b assumia o maior dos valores testados. No entanto, para esta fração de área específica isso não aconteceu.

A Figura 29 exibe o potencial térmico anual do solo e o potencial térmico anual do TCSA para cada valor do semieixo. Esses resultados destacam que profundidades maiores não garantem potenciais térmicos mais elevados. Por exemplo, quando $b =$

4,7 m, a profundidade final da Forma Elipsoidal é de 10,03 m, resultando em uma eficiência máxima anual menor em comparação com o caso em que $b = 2,69$ m e a profundidade final é de 6,01 m.

Essa característica ocorre porque, à medida que a profundidade aumenta, a temperatura do solo se estabiliza em um valor quase constante. Como resultado, em instalações muito profundas, não há ganho significativo de potencial térmico, tornando a profundidade excessiva ineficaz.

A partir dos resultados obtidos com a Forma Elipsoidal, resolve-se fixar a fração de área ψ em 0,5%.

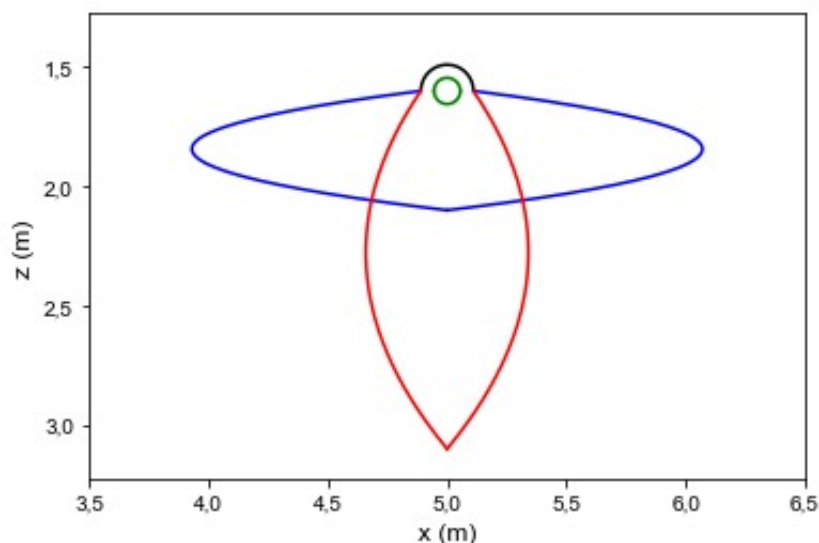


Fonte: A autora.

Figura 29: Potencial térmico anual do solo e do TCSA, para $\psi = 2\%$, em função do semieixo vertical da elipse (b).

4.3.3 Forma Semicircular-Parabólica com Simetria Próxima ao Eixo

Como mencionado anteriormente, a partir desta Forma resolveu-se fixar a fração de área ψ em 0,5%. A Figura 30 ilustra a evolução da estrutura em resposta ao aumento de z_f .



Fonte: A autora.

Figura 30: Evolução da estrutura semicircular-trapezoidal em resposta ao aumento de z_f .

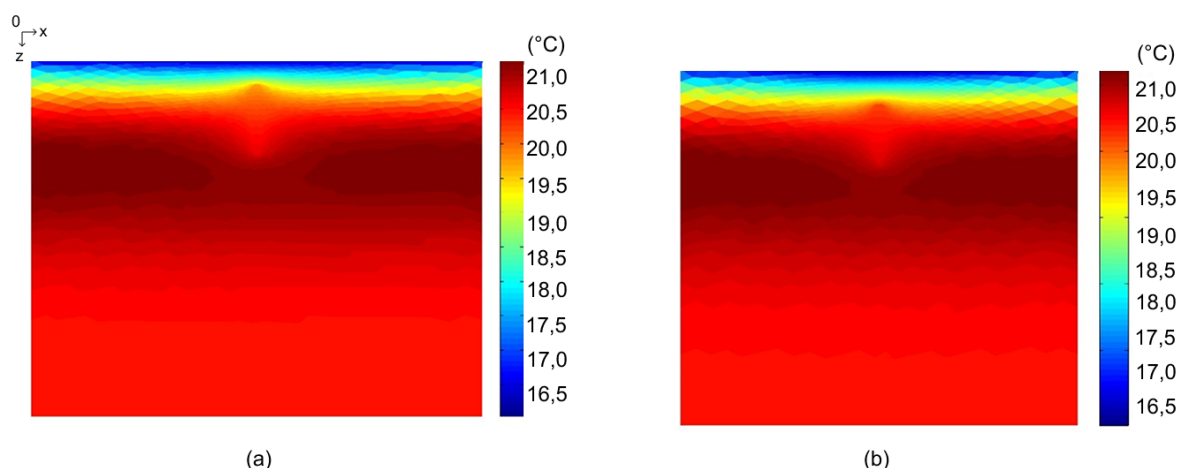
A Tabela 5 apresenta os valores dos parâmetros utilizados nas simulações, bem como os resultados encontrados com a estrutura.

Tabela 5: Resultados obtidos em cada caso da Forma Semicircular-Parabólica com Simetria Próxima ao Eixo.

Caso	z_f (m)	A_1	B_1	C_1	$P_{t,s}$ ($^{\circ}C$)	$P_{t,TCSA}$ ($^{\circ}C$)	θ_{max} (%)
88	4,10	-0,09	0,46	-0,40	3,17	3,02	70,6
89	4,30	-0,07	0,35	-0,28	3,18	3,02	70,6
90	4,50	-0,05	0,24	-0,19	3,18	3,02	70,6
91	4,70	-0,04	0,21	-0,13	3,18	3,02	70,6
92	4,90	-0,03	0,17	-0,08	3,17	3,02	70,6
93	5,10	-0,02	0,13	-0,04	3,17	3,02	70,6
94	5,30	-0,02	0,10	-0,02	3,16	3,01	70,3
95	5,50	0,02	0,08	-0,02	3,16	3,00	70,1
96	5,70	0,04	0,06	-0,01	3,15	3,00	70,1
97	5,90	0,06	0,05	-0,01	3,14	2,99	69,9
98	6,10	0,07	0,04	-0,01	3,14	2,98	69,6

Fonte: A autora.

Comparativamente à Forma Elipsoidal, observou-se um aumento de aproximadamente 6% no potencial térmico anual do solo e cerca de 4% na eficiência máxima anual do TCSA. Isso pode ser atribuído ao fato de que a parte semicircular da estrutura possui um tamanho fixo, impedindo que a estrutura se aproxime da superfície, ao contrário da Forma Elipsoidal. Esta conclusão pode ser vista através da Figura 31, que apresenta os campos de temperatura da Forma Elipsoidal e da Forma Semicircular-Parabólica com Simetria Próxima ao Eixo. Percebe-se que a Forma Elipsoidal está mais próxima da superfície e essa proximidade aumenta com o crescimento de sua fração de área.



Fonte: A autora.

Figura 31: Campos de temperatura da Forma Elipsoidal na fração de área de 0,5% (a) e da Forma Semicircular-Parabólica com Simetria Próxima ao Eixo (b).

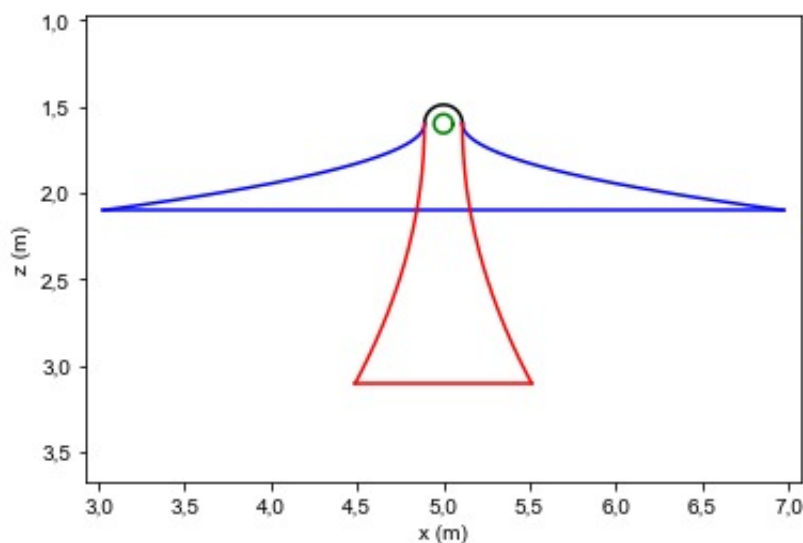
Por meio da Tabela 5, observa-se que, da forma como a estrutura foi construída, a profundidade final de instalação do material galvanizado ainda é excessiva. Para trabalhos futuros, pretende-se desenvolver um método de construção que permita analisar a estrutura para uma profundidade de instalação mais rasa.

4.3.4 Forma Semicircular-Parabólica com Simetria Distante do Eixo

A ideia de adotar a Forma Semicircular-Parabólica com Simetria Distante do Eixo para a estrutura visa aumentar a utilização da área abaixo do duto. Enquanto as outras estruturas se estreitavam, essa expande, apresentando-se como um caso interessante a ser investigado.

A Figura 32 apresenta a evolução da estrutura em função do aumento de z_f .

No total, foram analisados seis casos para essa Forma e a Tabela 6 apresenta os valores de z_f , A_2 , B_2 e C_2 utilizados nas simulações, juntamente com os resultados do potencial térmico anual do solo, do potencial térmico anual do TCSA e da eficiência máxima anual do TCSA.



Fonte: A autora.

Figura 32: Evolução da estrutura semicircular-parabólica 2 em resposta ao aumento de z_f .

Tabela 6: Parâmetros usados nas simulações da Forma Semicircular-Parabólica com Simetria Distante do Eixo.

Caso	z_f (m)	A_2	B_2	C_2	$P_{t,s}$ ($^{\circ}C$)	$P_{t,TCSA}$ ($^{\circ}C$)	θ_{max} (%)
99	2,10	7,45	-23,85	19,19	2,90	2,77	64,7
100	2,60	0,77	-2,45	2,07	3,07	2,92	68,2
101	3,10	0,18	-0,57	0,57	3,11	2,97	69,4
102	3,60	0,05	-0,17	0,25	3,14	2,99	69,9
103	4,10	0,02	-0,06	0,15	3,14	2,99	69,9
104	4,60	0,004	-0,01	0,12	3,14	2,99	69,9

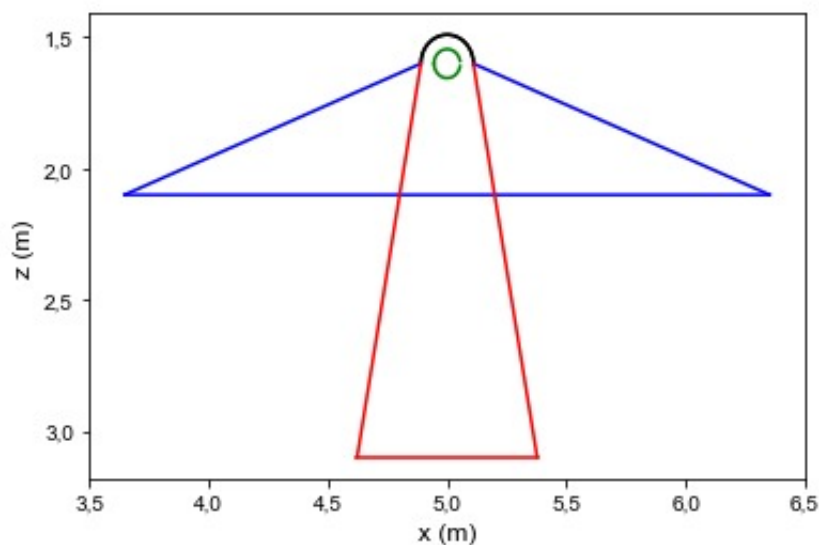
Fonte: A autora.

A melhor condição é alcançada no Caso 102, a uma profundidade de $z_f = 3,6$ m, onde o potencial térmico anual do solo e o potencial térmico anual do TCSA são de 3,14 e 2,99 $^{\circ}C$, respectivamente.

Com a configuração adotada neste estudo, é possível analisar simulações em uma profundidade de instalação mais rasa. Os resultados obtidos indicam que se alcança praticamente o mesmo potencial térmico da Forma Semicircular-Parabólica com Simetria Próxima ao Eixo, porém com uma profundidade final de instalação do material 0,5 m mais rasa. Em outras palavras, o mesmo desempenho é alcançado sem a necessidade de uma escavação tão profunda.

4.3.5 Forma Semicircular-Trapezoidal

Também optou-se por incluir um caso com a estrutura Semicircular-Trapezoidal. A Figura 33 ilustra a evolução da estrutura trapezoidal em resposta ao aumento de z_f .



Fonte: A autora.

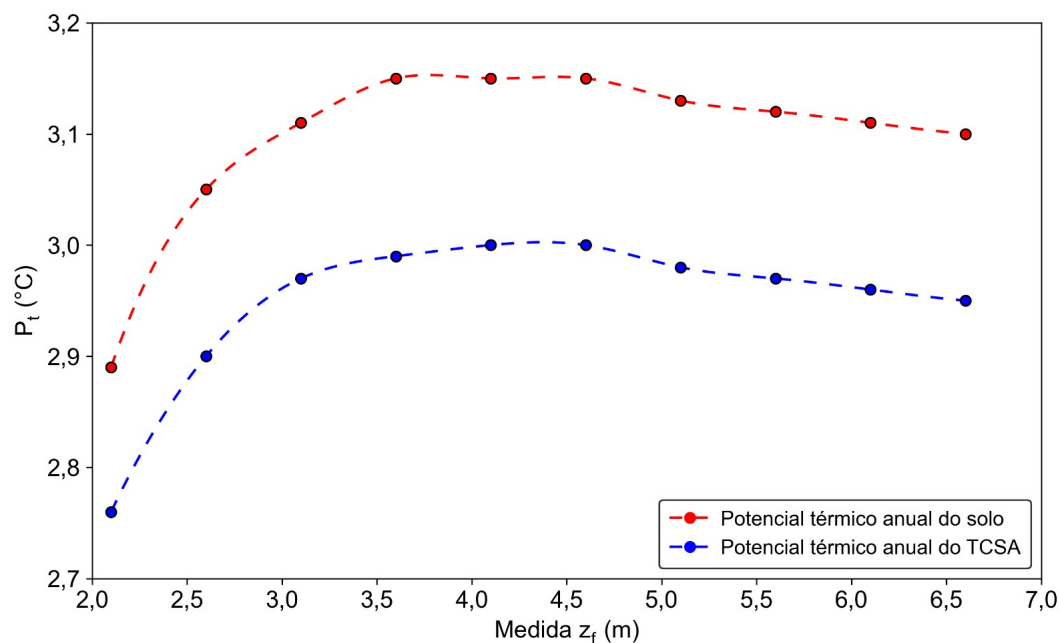
Figura 33: Evolução da Forma Semicircular-Trapezoidal em resposta ao aumento de z_f .

A Tabela 7 apresenta os parâmetros z_f e B utilizados nas simulações da Forma Semicircular-Trapezoidal juntamente com os valores do potencial térmico anual do solo, do potencial térmico anual do TCSA e da eficiência máxima anual correspondentes a cada configuração. Além disso, a Figura 34 fornece uma análise visual das curvas do potencial térmico anual do solo e do TCSA para cada simulação.

Tabela 7: Parâmetros usados para cada caso da Forma Semicircular-Trapezoidal.

Caso	z_f (m)	B (m)	$P_{t,s}$	$P_{t,TCSA}$	θ_{max}
105	2,10	1,35	2,89	2,76	64,5
106	2,60	0,62	3,05	2,90	67,8
107	3,10	0,38	3,11	2,97	69,4
108	3,60	0,26	3,15	2,99	69,9
109	4,10	0,18	3,15	3,00	70,1
110	4,60	0,13	3,15	3,00	70,1
111	5,10	0,10	3,13	2,98	69,6
112	5,60	0,07	3,12	2,97	69,4
113	6,10	0,05	3,11	2,96	69,2
114	6,60	0,04	3,10	2,95	68,9

Fonte: A autora.



Fonte: A autora.

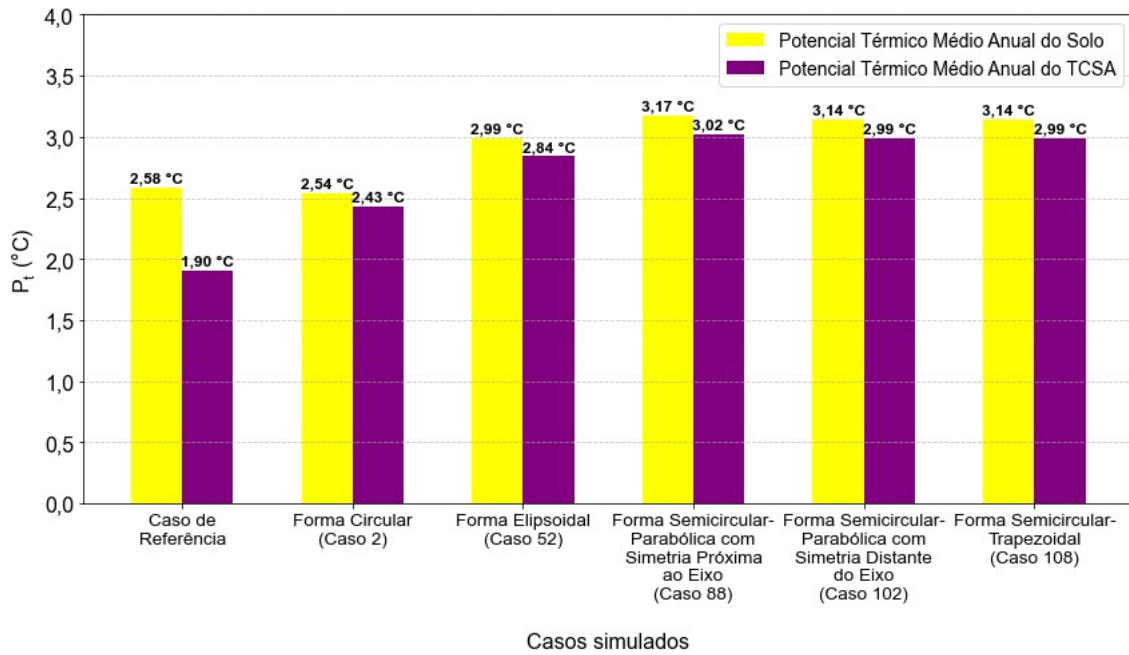
Figura 34: Potencial térmico anual do solo e do TCSA encontrado nas simulações com a Forma Semicircular-Trapezoidal.

Ao comparar a Tabela 6 e a Tabela 7 pode-se notar que os resultados para ambas as Formas foram praticamente idênticos. Esta característica pode ser explicada pelo fato de que as geometrias não apresentam diferenças significativas entre si.

4.3.6 Comparação entre o Caso de Referência e as Formas Geométricas Investigadas com a Análise Paramétrica

Nesta seção, compara-se os casos com $\psi = 0,5\%$ entre cada uma das cinco Formas analisadas e o Caso de Referência. Esta fração de área é escolhida por ser comum a todas as Formas avaliadas. A Figura 35 apresenta os resultados de $P_{t,s}$ e $P_{t,TCSA}$ para essas configurações.

Observa-se na Figura 35 que a Forma Semicircular-Parabólica com Simetria Próxima ao Eixo apresenta o melhor desempenho, registrando $P_{t,s}$ $1,12^\circ\text{C}$ superior ao do Caso de Referência. Além disso, como apresentado anteriormente, a Forma Semicircular-Parabólica com Simetria Distante do Eixo e a Forma Semicircular-Trapezoidal apresentaram praticamente o mesmo $P_{t,s}$ e $P_{t,TCSA}$, mas com uma profundidade mais rasa.



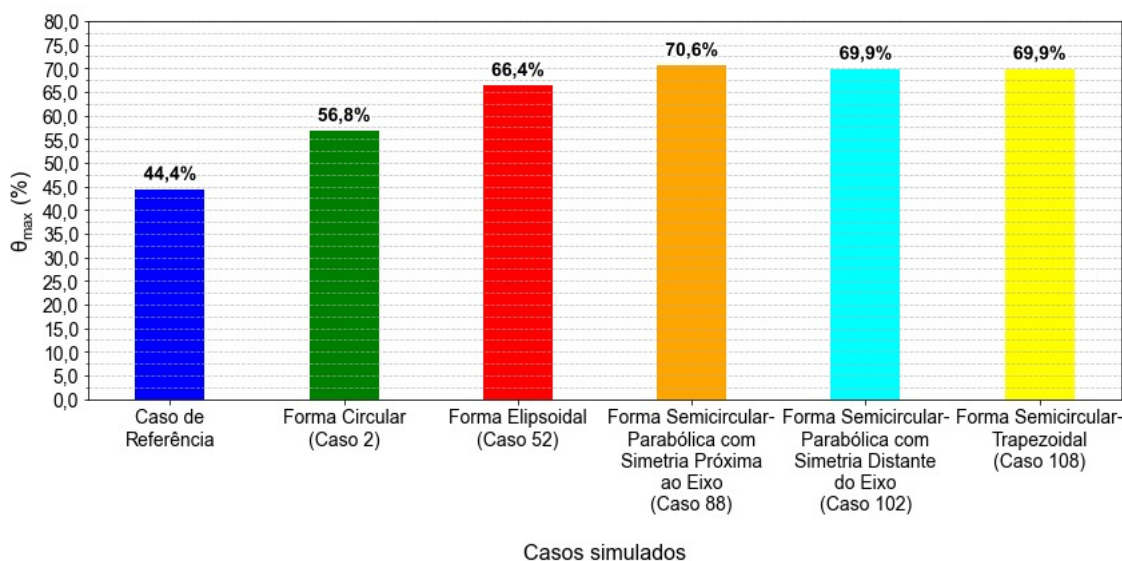
Fonte: A autora.

Figura 35: Comparação entre os Casos com $\psi = 0,5\%$ das Formas analisadas e o Caso de Referência, utilizando como parâmetro o potencial térmico médio anual do solo e do TCSA.

Também é possível observar na Figura 35 que a Forma Circular não apresentou ganhos em $P_{t,s}$. No entanto, houve um aumento em $P_{t,TCSA}$, o que indica que a inserção do material galvanizado contribui positivamente para o desempenho térmico do TCSA.

A Figura 36, por outro lado, compara θ_{max} entre as mesmas configurações. Nesse contexto, o melhor caso alcançou um aumento de 26,2% em θ_{max} em relação ao Caso de Referência, ressaltando o impacto positivo da configuração no desempenho térmico do sistema.

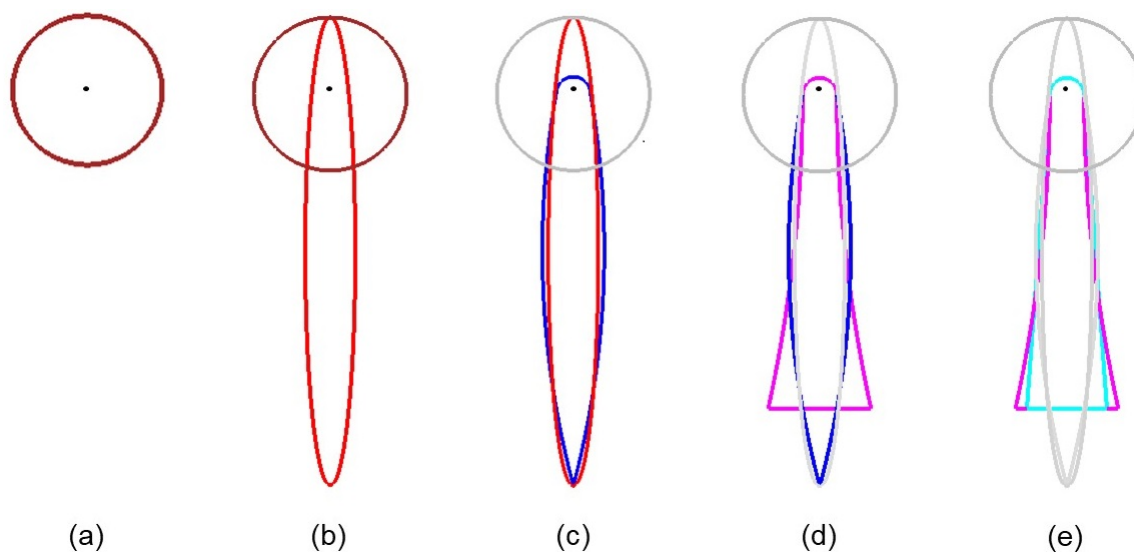
Destaca-se que essa comparação evidencia que não basta possuir a mesma fração de área do material galvanizado, pois os resultados obtidos são distintos. Isso demonstra que a forma do material impacta significativamente o desempenho do sistema, ressaltando a importância de selecionar a configuração mais adequada.



Fonte: A autora.

Figura 36: Comparação entre os Casos com $\psi = 0,5\%$ das Formas analisadas e o Caso de Referência, utilizando como parâmetro a eficiência máxima anual do TCSA.

A Figura 37 apresenta a evolução das formas analisadas para a fração de área ψ de 0,5%.



Fonte: A autora.

Figura 37: Ilustração em escala da evolução das formas analisadas com $\psi = 0,5\%$.

A Figura 37 permite observar que a Forma Circular não aproveita a profundidade do solo de maneira eficiente e permanece relativamente próxima da superfície, tornando-se mais suscetível às variações da temperatura ambiente. Como consequência, o TCSA não apresenta ganhos significativos de potencial térmico.

Por outro lado, a Forma Elipsoidal se beneficia melhor da profundidade do solo, resultando em um aumento do potencial térmico do TCSA. No entanto, ainda se mantém relativamente próxima à superfície, o que pode limitar seu desempenho.

A Forma Semicircular-Parabólica com Simetria Próxima ao Eixo combina o aproveitamento da profundidade da Forma Elipsoidal com uma distância maior em relação à superfície. Essa configuração reduz a influência das condições ambientais, promovendo um maior potencial térmico do TCSA.

Por fim, a Forma Semicircular-Parabólica com Simetria Distante do Eixo e a Forma Trapezoidal demonstram um desempenho térmico similar ao da Forma Semicircular-Parabólica com Simetria Próxima ao Eixo, mas com a vantagem de uma profundidade 0,5 m menor.

4.4 Análise do Design Construtal em Configurações com Estruturas Galvanizadas

A primeira rodada de simulações teve como objetivo determinar a quantidade ideal de blocos para as simulações subsequentes (ver Figura 15). Os resultados dessas simulações estão apresentados na Tabela 8.

Tabela 8: Resultados das simulações com blocos verticais.

Nº de blocos	z_f (m)	$P_{t,s}$ (°C)	$P_{t,TCSA}$ (°C)	θ_{max} (%)
2	2,095	2,72	2,59	60,5
3	2,425	2,83	2,70	63,1
4	2,755	2,92	2,78	64,9
5	3,085	2,99	2,85	66,6
6	3,415	3,05	2,90	67,8
7	3,745	3,09	2,94	68,7
8	4,075	3,12	2,97	69,4
9	4,405	3,14	2,99	69,9
10	4,735	3,16	3,00	70,1
11	5,065	3,17	3,00	70,1
12	5,395	3,17	3,02	70,6
13	5,725	3,17	3,02	70,6
14	6,055	3,17	3,02	70,6
15	6,385	3,17	3,02	70,6
20	8,035	3,15	3,00	70,1
25	9,685	3,14	2,98	69,6
30	11,335	3,13	2,98	69,6

Fonte: A autora.

A Tabela 8 revela que os potenciais térmicos aumentam inicialmente até atingirem uma profundidade limite, após a qual começam a diminuir. Esse comportamento já foi discutido em seções anteriores, onde se observou que profundidades maiores não estão necessariamente associadas a maiores potenciais.

A escolha do caso que consiste em 15 blocos, baseia-se no fato de que esse número é adequado para a realização de modificações na geometria do sistema, apesar de

casos anteriores terem apresentado resultados semelhantes em termos de potenciais térmicos. O objetivo é garantir um número de blocos suficiente para realizar ajustes na geometria de forma eficiente.

4.4.1 Formas em T

A Forma em T é analisada em duas configurações distintas. Na primeira, o grau de liberdade V_2/H_2 manteve-se fixo em 1, enquanto V_1/H_1 assume valores entre 0,1 e 6,5. Na segunda configuração, V_2/H_2 é fixado em 2, enquanto V_1/H_1 varia entre 0,1 e 5,5.

A Figura 38 apresenta o potencial térmico médio mensal do TCSA ($P_{t,m,TCSA}$) para aquecimento e resfriamento nas configurações com $V_2/H_2 = 1$.

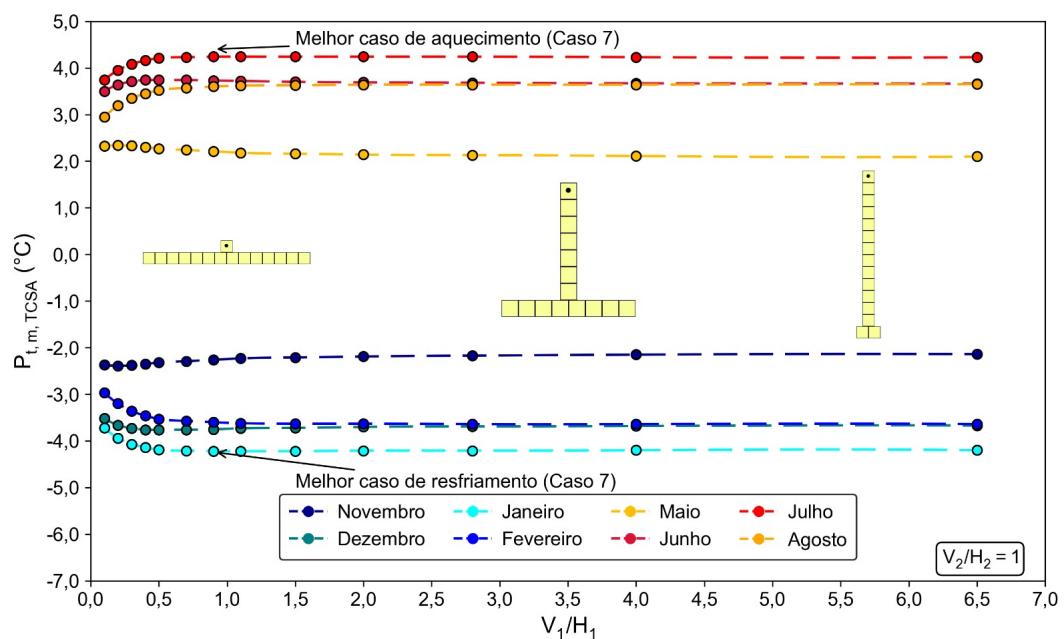


Figura 38: Potencial térmico médio mensal do TCSA para aquecimento e resfriamento em função de V_1/H_1 para $V_2/H_2 = 1$.

Através da Figura 38 é possível perceber que há um aumento em $P_{t,m,TCSA}$ para a condição de aquecimento e diminuição de $P_{t,m,TCSA}$ para a condição de resfriamento com o crescimento de V_1/H_1 no intervalo de 0 a 1,0. Posteriormente, para o intervalo entre 1,0 e 6,5 o $P_{t,m,TCSA}$ permanece praticamente constante.

Esse melhoramento de $P_{t,m,TCSA}$ pode ser atribuído ao aumento da profundidade de instalação do sistema, uma vez que V_1/H_1 maior implica em uma maior profundidade. Embora a profundidade não seja o único fator determinante, ela exerce um impacto significativo no desempenho térmico do TCSA.

O melhor desempenho térmico, tanto para aquecimento quanto para resfriamento, é registrado no Caso 7 ($V_1/H_1 = 0,9$), o qual é composto por 7 blocos na vertical e 8 blocos na horizontal e possui uma profundidade final z_f de 4,08 m.

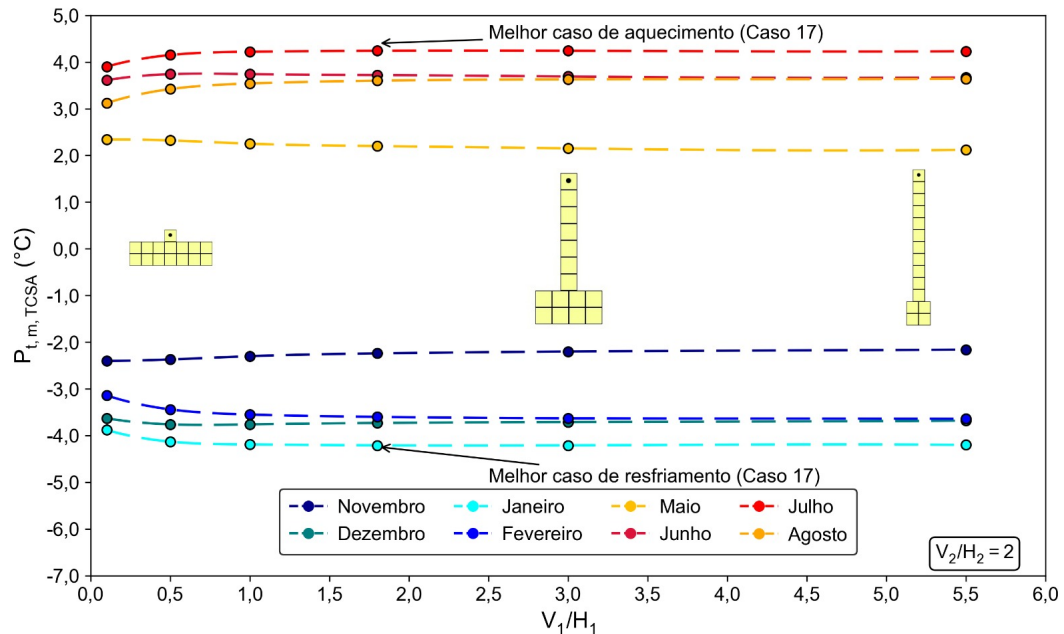
O Caso 7 apresentou $P_{t,m,TCSA}$ de aquecimento igual a $4,24^{\circ}\text{C}$ e $P_{t,m,TCSA}$ de resfriamento de $-4,22^{\circ}\text{C}$ atingidos, respectivamente, nos meses de janeiro e julho.

A Figura 39 apresenta $P_{t,m,TCSA}$ para aquecimento e resfriamento nas configurações com $V_2/H_2 = 2$.

Neste caso, também observa-se uma melhora em $P_{t,m,TCSA}$ conforme V_1/H_1 aumenta, até alcançar valores praticamente invariáveis no intervalo entre 2 e 5,5.

O melhor desempenho térmico é observado no Caso 17 ($V_1/H_1 = 1,8$), sendo este composto por 4 blocos em cada fileira horizontal e 7 blocos na fileira vertical e apresentando uma profundidade final de 4,41 m.

O Caso 17 apresentou os maiores potenciais de aquecimento e resfriamento nos meses de julho e janeiro, respectivamente. O $P_{t,m,TCSA}$ de aquecimento registrou $4,24^{\circ}\text{C}$ e o $P_{t,m,TCSA}$ de resfriamento atingiu $-4,21^{\circ}\text{C}$, resultados consideravelmente próximos às análises das configurações $V_2/H_2 = 1$.



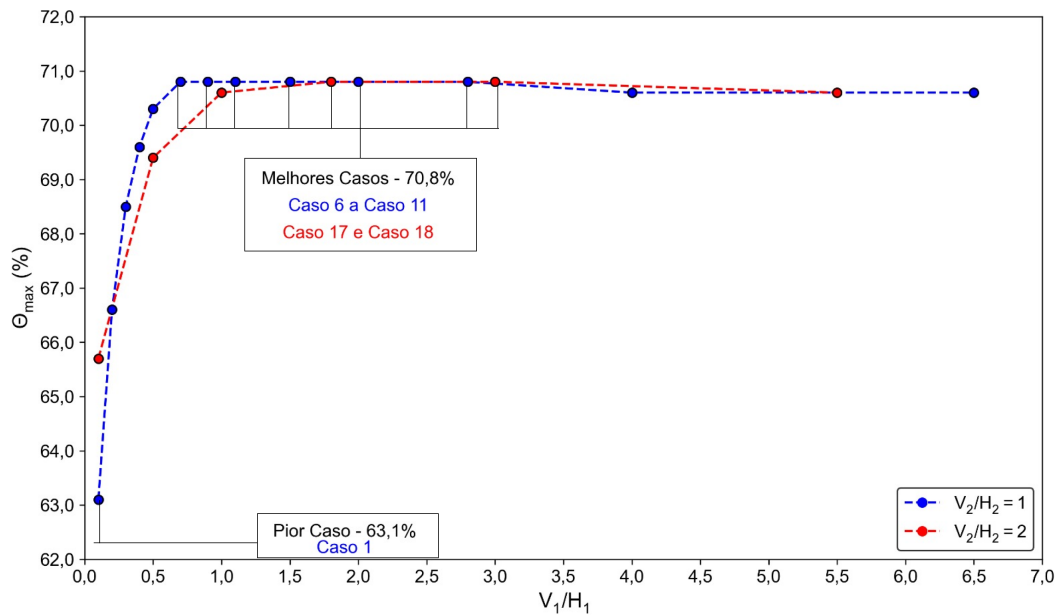
Fonte: A autora.

Figura 39: Potencial térmico médio mensal do TCSA para aquecimento e resfriamento em função de V_1/H_1 para $V_2/H_2 = 2$.

A Figura 40 apresenta uma comparação entre os resultados encontrados nas duas configurações na Forma em T. Essa comparação é feita através do indicador de desempenho θ_{max} , o qual representa a eficiência máxima anual, em função dos graus de liberdade V_1/H_1 e V_2/H_2 .

A Figura 40 reforça o que foi dito anteriormente sobre a profundidade de instalação ser um parâmetro importante no desempenho térmico do sistema mas não o único que deve ser levado em consideração, uma vez que θ_{max} melhora para valores de V_1/H_1 entre 0 e 1,5 e permanece praticamente invariável para valores de V_1/H_1 entre 1,5

e 6,5.



Fonte: A autora.

Figura 40: Avaliação da eficiência máxima anual (θ_{max}) em função do grau de liberdade V_1/H_1 para $V_2/H_2 = 1$ e $V_2/H_2 = 2$.

É possível perceber através da Figura 40 que 8 configurações geométricas conduziram à eficiência máxima anual duas vezes maximizada ($\theta_{max,2m} = 70,8\%$) entre todas as configurações na Forma em T. São eles: Caso 6 ($(V_2/H_2)_o = 1$ e $(V_1/H_1)_{2o} = 0,7$; Caso 7 ($(V_2/H_2)_o = 1$ e $(V_1/H_1)_{2o} = 0,9$; Caso 8 ($(V_2/H_2)_o = 1$ e $(V_1/H_1)_{2o} = 1,1$; Caso 9 ($(V_2/H_2)_o = 1$ e $(V_1/H_1)_{2o} = 1,5$; Caso 10 ($(V_2/H_2)_o = 1$ e $(V_1/H_1)_{2o} = 2,0$; Caso 11 ($(V_2/H_2)_o = 1$ e $(V_1/H_1)_{2o} = 2,8$; Caso 17 ($(V_2/H_2)_o = 2$ e $(V_1/H_1)_{2o} = 1,8$; Caso 18 ($(V_2/H_2)_o = 2$ e $(V_1/H_1)_{2o}^1 = 3,0$.

A pior eficiência ($\theta_{max} = 63,1\%$) é registrada no Caso 1 ($V_2/H_2 = 1$ e $V_1/H_1 = 0,1$), sendo este composto por 1 bloco na fileira vertical e 14 na horizontal e uma profundidade final de instalação z_f de apenas 2,095 m.

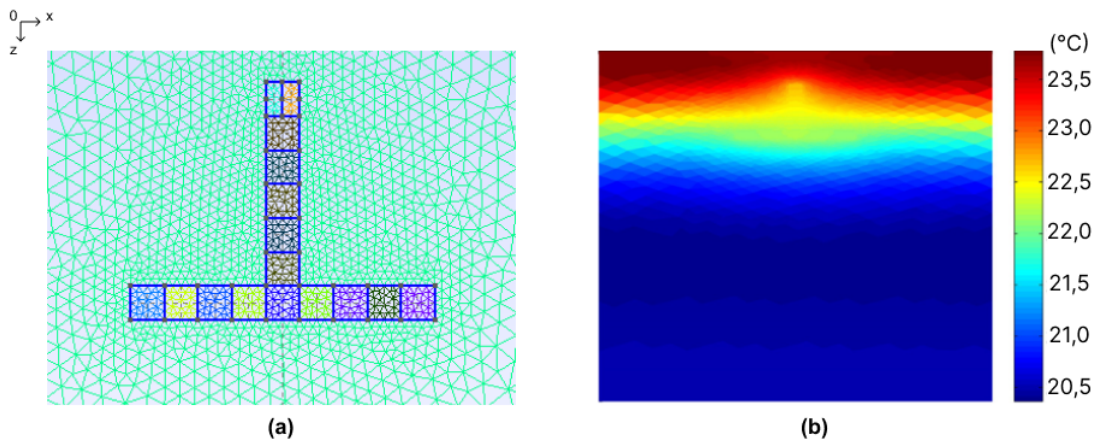
O comportamento térmico da Forma em T é fortemente influenciado pela profundidade de instalação e pela proporção entre os blocos horizontais e verticais. Observou-se que a maior profundidade do sistema melhora o desempenho térmico, devido a maior estabilidade térmica ao longo da profundidade.

Outro fator relevante é a distribuição do calor dentro da geometria. Configurações com V_1/H_1 baixos não aproveitam plenamente o potencial de troca térmica, enquanto valores muito elevados não geram ganhos adicionais significativos. Isso se explica pelo

¹As notações $(.)_o$ e $(.)_{2o}$ indicam a geometria uma vez otimizada e duas vezes otimizada, respectivamente.

fato de que, após certa profundidade, a transferência de calor estabiliza-se e o aumento da dimensão não resulta em melhorias consideráveis.

A Figura 41 apresenta o domínio computacional discretizado e o campo de temperaturas para uma das geometrias otimizadas, mais especificamente para o Caso 6.



Fonte: A autora.

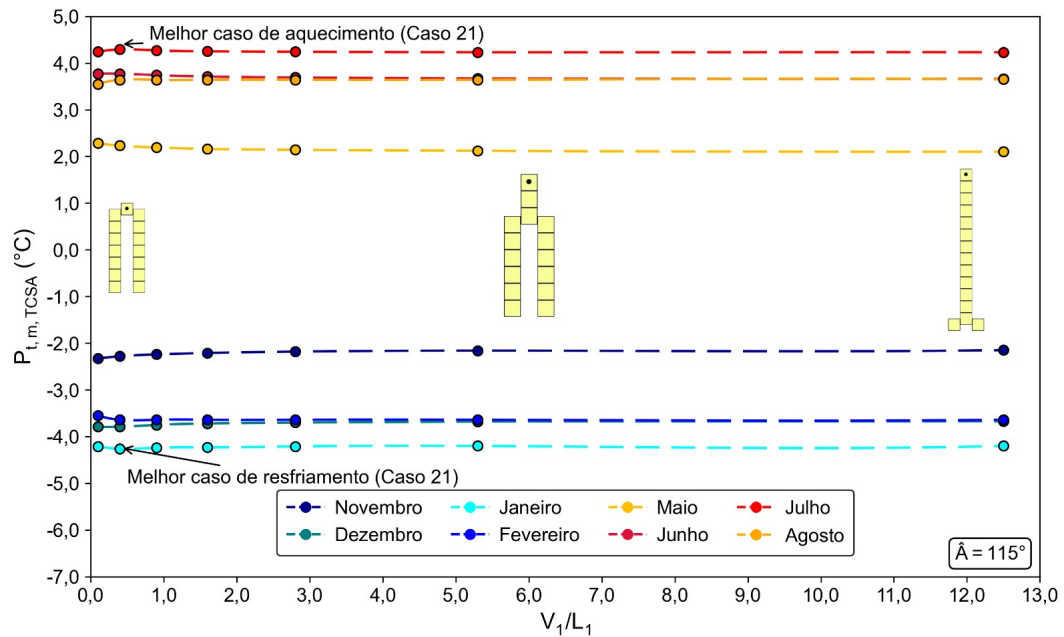
Figura 41: Domínio computacional discretizado (a) e campos de temperatura (b) para a geometria otimizada.

Observa-se que o material galvanizado utilizado no sistema proporciona uma boa condução térmica, promovendo a transferência de calor de forma uniforme dos blocos mais próximos à superfície aos blocos mais distantes. A maior concentração de temperaturas elevadas ocorre nas proximidades da região superior central, enquanto as temperaturas mais baixas se distribuem ao longo das áreas mais profundas, evidenciando a influência da profundidade e do isolamento natural do solo na estabilidade térmica do sistema (ver Figura 41).

4.4.2 Formas em Y

A Forma em Y é analisada em três configurações distintas. Na primeira, o grau de liberdade $\hat{A}$ manteve-se fixo igual a 115° , enquanto V_1/L_1 varia entre 0,1 e 12,5. Na segunda configuração, $\hat{A}$ é fixado em 140° e V_1/L_1 varia entre 0,1 e 5,1. Já na terceira, $\hat{A} = 180^\circ$ e V_1/L_1 varia entre 0,1 e 5,9.

A Figura 42 apresenta $P_{t,m,TCSA}$ para aquecimento e resfriamento nas configurações com $\hat{A} = 115^\circ$.



Fonte: A autora.

Figura 42: Potencial térmico médio mensal do TCSA para aquecimento e resfriamento em função de V_1/L_1 para $\hat{A} = 115^{\circ}$.

De acordo com a Figura 42 é possível observar que, já nos primeiros casos, $P_{t,m,TCSA}$ permanece quase constante na medida em que V_1/L_1 aumenta. Esse comportamento ocorre porque a configuração, desde os primeiros casos, já alcança uma profundidade satisfatória para a troca térmica eficiente.

O melhor desempenho térmico, tanto para aquecimento quanto para resfriamento, é registrado no Caso 21 ($V_1/L_1 = 0,4$), o qual é composto por 6 blocos em cada uma das ramificações e 3 blocos na fileira vertical, alcançando uma profundidade final z_f de 4,24 m.

O Caso 21 apresentou $P_{t,m,TCSA}$ de aquecimento igual a $4,29^{\circ}\text{C}$ e de resfriamento igual a $-4,26^{\circ}\text{C}$ atingidos, respectivamente, nos meses de janeiro e julho.

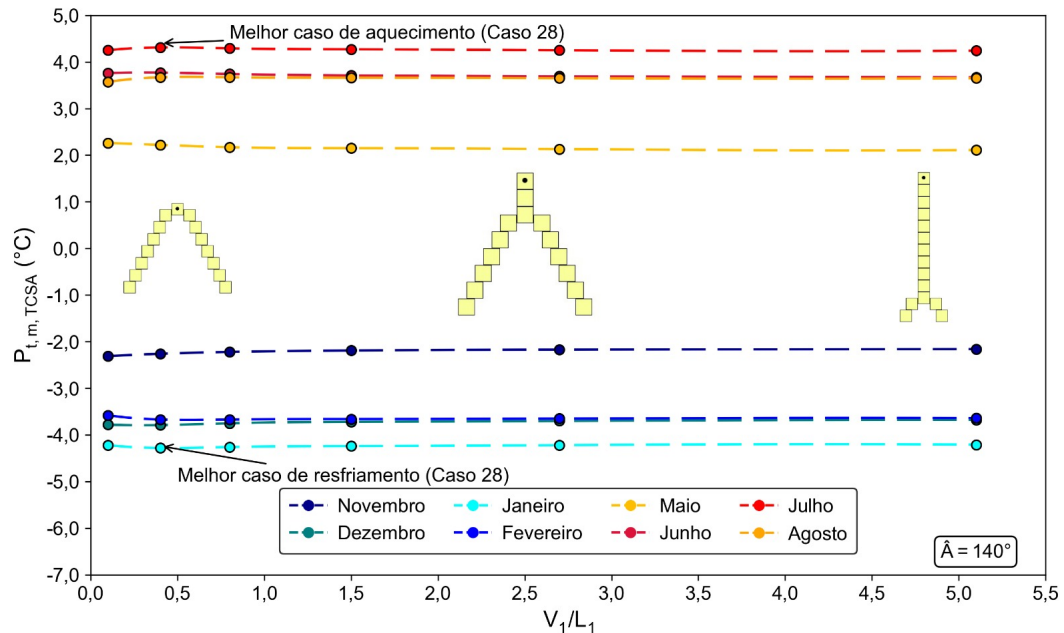
A Figura 43 apresenta o potencial térmico médio mensal para aquecimento e resfriamento nas configurações com $\hat{A} = 140^{\circ}$.

O melhor desempenho térmico é observado no Caso 28 ($V_1/L_1 = 0,4$), sendo este composto por 6 blocos em cada uma das ramificações e 3 blocos na fileira vertical, apresentando uma profundidade final z_f de 4,24 m.

O Caso 28 apresentou os maiores potenciais de aquecimento e resfriamento nos meses de julho e janeiro, respectivamente. O potencial térmico máximo mensal de aquecimento registrou $4,31^{\circ}\text{C}$ e o potencial de resfriamento atingiu $-4,28^{\circ}\text{C}$.

O mesmo comportamento que foi obtido para $\hat{A} = 115^{\circ}$ pode ser observado em $\hat{A} = 140^{\circ}$. $P_{t,m,TCSA}$ apresenta pouca melhora com o crescimento de V_1/L_1 e segue uma trajetória praticamente constante até os maiores valores de V_1/L_1 avaliados. Mais

uma vez, observa-se que a profundidade varia pouco entre o primeiro e o último caso analisado, o que pode ser um fator relevante. É importante destacar que a profundidade de instalação no Caso 28 (melhor desempenho) difere da do Caso 32 (último analisado) em apenas 1,32 m.



Fonte: A autora.

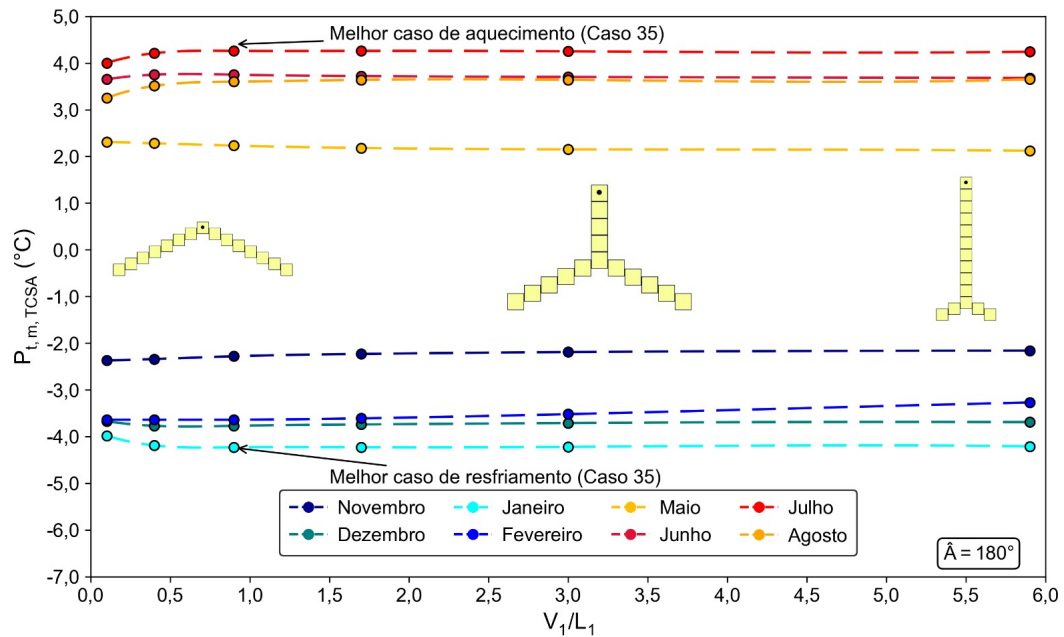
Figura 43: Potencial térmico médio mensal para aquecimento e resfriamento em função de V_1/L_1 para $\hat{A} = 140^\circ$.

A Figura 44 apresenta $P_{t,m,TCSA}$ para aquecimento e resfriamento nas configurações com $\hat{A} = 180^\circ$.

O melhor desempenho térmico é observado no Caso 35 ($V_1/L_1 = 0,9$), sendo este composto por 5 blocos em cada uma das ramificações e 5 blocos na fileira vertical, resultando em uma profundidade final z_f de 3,91 m.

O Caso 35 também apresentou o maior potencial térmico médio mensal de aquecimento e resfriamento nos meses de julho e janeiro, respectivamente. O potencial térmico médio mensal de aquecimento é de $4,26^\circ\text{C}$ enquanto o de resfriamento atingiu $-4,23^\circ\text{C}$.

Nesta configuração, $P_{t,m,TCSA}$ apresenta um aumento nos três primeiros casos à medida que V_1/L_1 cresce, atingindo seu pico no Caso 35. Em seguida, ocorre uma leve diminuição nos casos subsequentes, estabilizando-se em uma temperatura constante, comportamento semelhante ao observado nas análises anteriores.



Fonte: A autora.

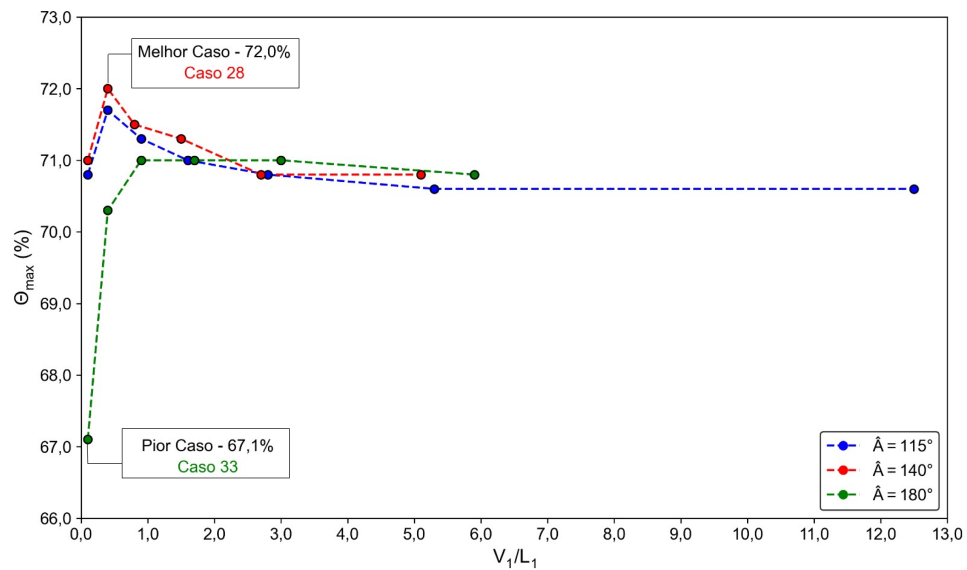
Figura 44: Potencial térmico médio mensal para aquecimento e resfriamento em função do grau de liberdade V_1/L_1 para $\hat{A} = 180^{\circ}$.

A Figura 45 apresenta uma comparação entre os resultados encontrados nas três configurações na Forma em Y. Essa comparação é feita através do indicador de desempenho θ_{max} , o qual representa a eficiência máxima média anual, em função do grau de liberdade V_1/L_1 .

Devido aos resultados analisados é possível concluir que a configuração geométrica que conduziu à melhor eficiência máxima anual ($\theta_{max_{2m}} = 72,0\%$) é a que possui os graus de liberdade $(\hat{A})_o = 140^{\circ}$ e $(V_1/L_1)_{2o} = 0,4$, sendo definida como Caso 28.

A pior eficiência ($\theta_{max} = 67,1\%$) é registrada no Caso 33 ($\hat{A} = 180^{\circ}$ e $V_1/L_1 = 0,1$), sendo este composto por 7 blocos em cada uma das ramificações e 1 na fileira vertical e uma profundidade final z_f de 3,91 m.

Destaca-se que as profundidades finais de instalação do material, combinadas com a geometria do sistema, resultaram em uma análise relevante, indicando que os melhores resultados foram obtidos em profundidades z_f entre 4,0 m e 5,0 m. Esta conclusão estabelece uma referência importante para futuras investigações.

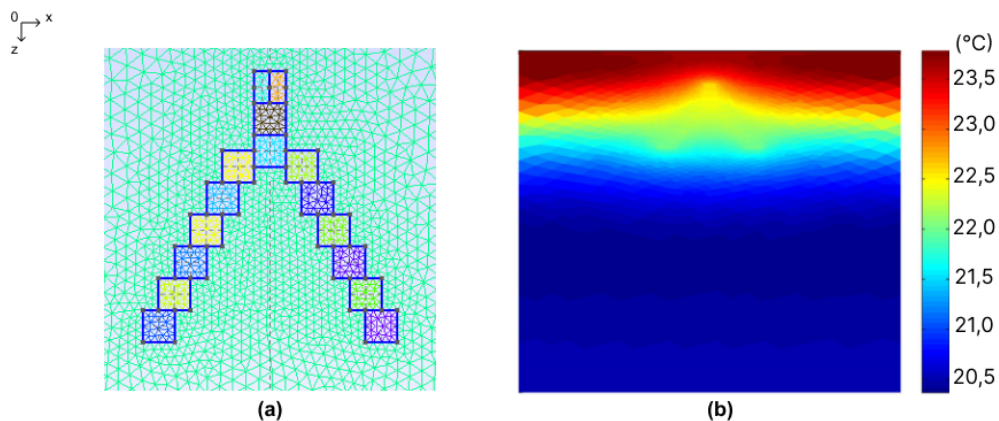


Fonte: A autora.

Figura 45: Avaliação da eficiência anual máxima (θ_{max}) em função do grau de liberdade V_1/L_1 para $\hat{A} = 115^\circ$, $\hat{A} = 140^\circ$ e $\hat{A} = 180^\circ$.

A Figura 46 apresenta o domínio computacional discretizado e o campo de temperaturas para a geometria otimizada (Caso 28).

O material galvanizado, por suas propriedades térmicas, contribui para uma condução eficiente do calor. A Forma em Y promove uma distribuição homogênea do calor ao longo de suas ramificações. Essa configuração favorece tanto o aquecimento quanto o resfriamento, dependendo do fluxo térmico imposto e das condições de contorno.

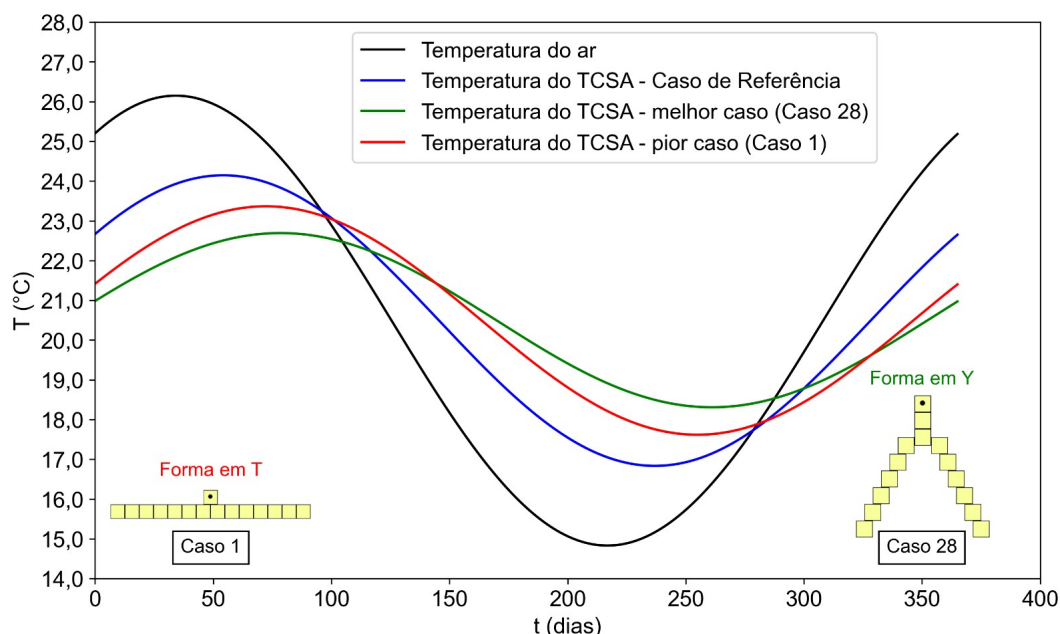


Fonte: A autora.

Figura 46: Domínio computacional discretizado (a) e campos de temperatura (b) para a geometria otimizada.

4.4.3 Comparação entre o Caso de Referência, a Forma em T e a Forma em Y

A Figura 47 apresenta as temperaturas na saída do TCSA para o Caso de Referência, o Caso 28 e o Caso 1, correspondendo, respectivamente, ao melhor e ao pior Caso analisados com base no método Construtal Design. Observa-se que, no Caso de Referência, a temperatura do TCSA é a mais próxima da temperatura do ar, caracterizando-o como o caso de menor desempenho térmico.

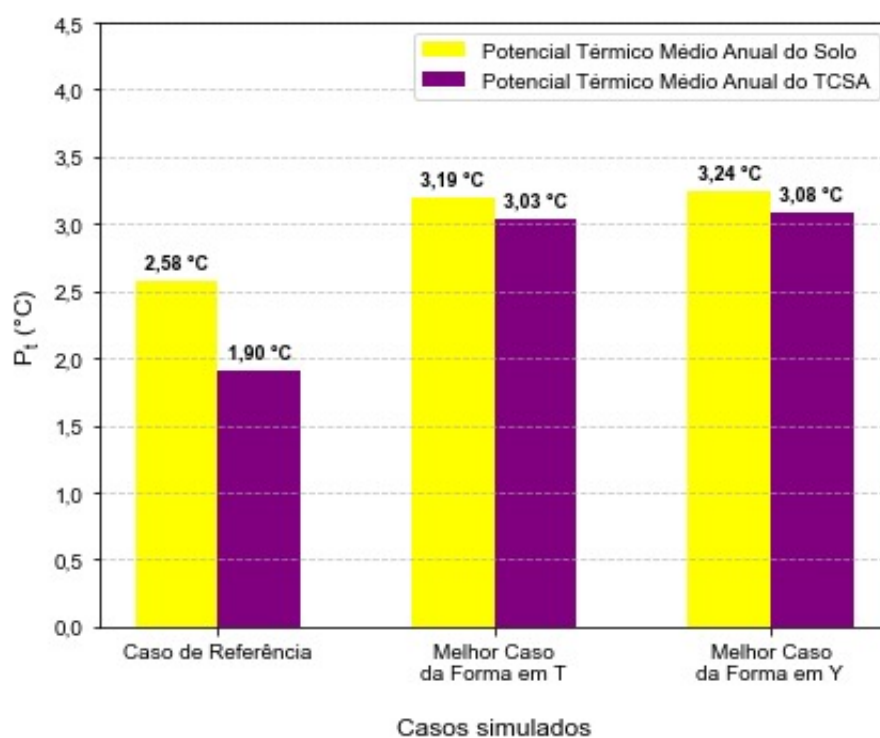


Fonte: A autora.

Figura 47: Comparação entre o melhor e o pior Caso da Forma em T e da Forma em Y e Caso de Referência.

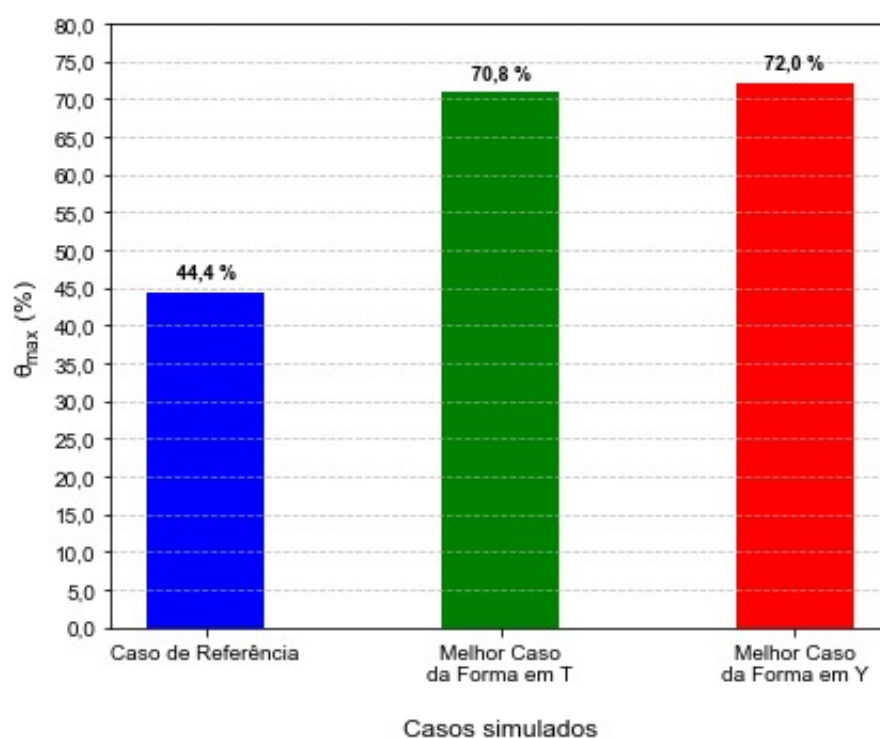
Na Figura 48, é possível visualizar o gráfico que compara $P_{t,TCSA}$ e $P_{t,s}$ para o Caso de Referência, um dos melhores Casos da Forma em T e o melhor Caso da Forma em Y. Nota-se que a diferença entre o $P_{t,TCSA}$ do melhor Caso (Caso 28, com a configuração em Y) e o Caso de Referência é de 1,18°C, evidenciando a superioridade da geometria otimizada em relação à configuração padrão.

Por fim, a Figura 49 ilustra um gráfico comparativo da eficiência máxima anual do sistema. Nesse contexto, destaca-se que o Caso 28 apresenta uma eficiência 1,2% superior à do melhor Caso da Forma em T e 27,6% superior à do Caso de Referência, reafirmando a vantagem significativa da Forma em Y otimizada para o desempenho térmico do sistema.



Fonte: A autora.

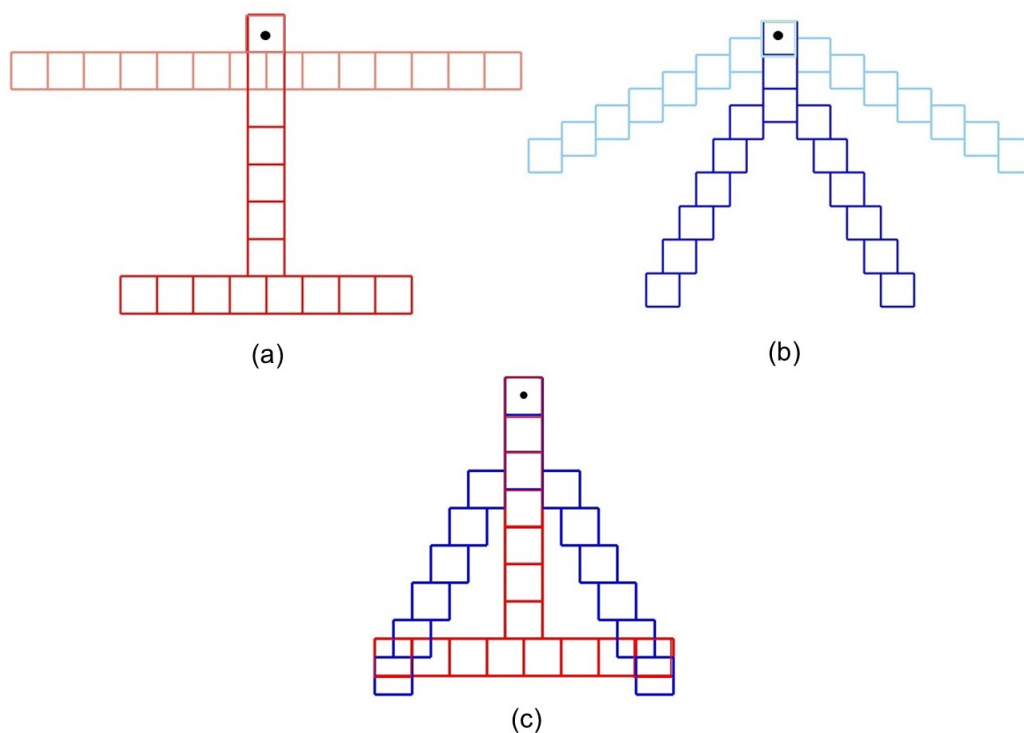
Figura 48: Comparação entre o melhores Casos da Forma em T e da Forma em Y e Caso de Referência.



Fonte: A autora.

Figura 49: Comparação entre o melhores Casos da Forma em T e da Forma em Y e Caso de Referência.

A Figura 50 apresenta uma comparação entre o melhor e o pior caso da Forma em T (a), o melhor e o pior Caso da Forma em Y (b), o melhor Caso da Forma em T e o melhor Caso da Forma em Y (c).



Fonte: A autora.

Figura 50: Ilustração em escala para comparação entre o melhor e o pior caso da Forma em T (a), o melhor e o pior Caso da Forma em Y (b), o melhor Caso da Forma em T e o melhor Caso da Forma em Y (c).

A partir das Figuras 50(a) e 50(b), observa-se que a profundidade final de instalação do material influencia significativamente nos níveis do potencial térmico do TCSA, sendo que os melhores resultados ocorrem em profundidades entre 4m e 5m.

No entanto, a Figura 50 (c) revela que a profundidade final de instalação não é o único fator determinante para o desempenho térmico. Apesar de ambas as formas apresentarem profundidades finais similares, a Forma em Y obteve um desempenho superior. Esse resultado ocorre porque suas ramificações permitem um melhor aproveitamento da região de troca térmica abaixo do duto, aumentando a eficiência térmica do sistema.

Fazendo a conexão entre a melhor geometria encontrada e o método Construtal utilizado para identificá-la, observa-se que a Teoria Construtal postula que formas mais eficientes emergem naturalmente para minimizar perdas de energia e otimizar a funcionalidade dos sistemas, desde redes de transporte de fluidos e escoamentos até padrões arquitetônicos e biológicos. Nesse contexto, a melhor geometria expressa um

princípio fundamental da evolução dos fluxos, no qual a redução de imperfeições ocorre por meio da adaptação progressiva da estrutura ao longo do tempo (BEJAN; LORENTE, 2008). Em particular, a geometria em forma de Y, encontrada no Caso 28 por meio do método Construtal, demonstrou uma capacidade superior de lidar com as imperfeições do sistema. A presença da bifurcação característica do formato em Y permitiu um equilíbrio dinâmico entre a profundidade e a necessidade de alargamento da estrutura, maximizando a troca térmica com o solo circundante e, assim, aprimorando a eficiência global do sistema.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

5.1 Conclusões

Neste estudo, um TCSA é simulado por meio de uma metodologia analítico-numérica.

Optou-se por acoplar uma região galvanizada de alta condutividade térmica ao redor do duto, permitindo um melhor aproveitamento do potencial térmico oferecido pelo solo. Neste sentido, o estudo é dividido em duas partes: a primeira aborda a análise paramétrica de diferentes configurações com estruturas galvanizadas, enquanto a segunda emprega o método Design Construtal para encontrar a geometria mais eficiente.

Na análise paramétrica, foram testadas cinco configurações distintas: circular, elipsoidal, semicircular-parabólica com simetria próxima ao eixo, semicircular-trapezoidal e semicircular-parabólica com simetria distante do eixo. Já na etapa de análise através método Design Construtal, foram testadas mais duas geometrias: Forma em T e Forma em Y.

Os itens a seguir apresentam as principais conclusões deste estudo:

- A abordagem analítico-numérica proposta é validada por meio de dados experimentais e verificada com base em resultados disponíveis na literatura. Os resultados demonstraram compatibilidade, evidenciando concordância entre os dados obtidos neste estudo e aqueles reportados na literatura.
- O modelo GAEA, um modelo analítico descrito na literatura, é utilizado para a simulação com o TCSA. Os resultados indicam que, dentro do escopo pretendido, o modelo é adequado para uma simulação precisa e bem conduzida. No entanto, é importante ressaltar que, caso seja necessário considerar mais fatores, como a influência da umidade, ou se houver a necessidade de um modelo mais abrangente, o GAEA pode não ser suficiente.
- Realizaram-se simulações levando-se em consideração diversas regiões galvanizadas ao redor do duto, as quais indicaram que a inclusão destas estruturas

pode ser benéfica, porém a escolha da geometria dessa região impacta significativamente no desempenho térmico do sistema;

- As geometrias que apresentaram os melhores resultados na análise paramétrica foram a Semicircular-Parabólica com Simetria Distante do Eixo e a Semicircular-Trapezoidal. Em ambas, a condição ideal é obtida a uma profundidade de $z_f = 3,6$ m, resultando em $P_{t,s}$ e $P_{t,TCSA}$ de $3,15^\circ\text{C}$ e $2,99^\circ\text{C}$, respectivamente;
- Já na análise empregando o Design Construtal, o Caso 28 (Forma em Y) apresentou os melhores resultados entre todas as simulações, alcançando uma eficiência máxima anual de $72,0\%$ e $P_{t,s}$ e $P_{t,TCSA}$ de $3,24^\circ\text{C}$ e $3,08^\circ\text{C}$, respectivamente. Destaca-se, ainda, que a profundidade final do material galvanizado é de $4,24$ m, indicando que o aumento do desempenho térmico do sistema ocorreu sem a necessidade de aumentos significativos na profundidade de instalação em relação aos melhores resultados da análise paramétrica.

5.2 Contribuições do Estudo

Este estudo contribui para o avanço do estado da arte em sistemas TCSAs nos seguintes aspectos:

- Simulações de um TCSA com a inclusão de um material galvanizado;
- Avançou-se em práticas construtivas (de projetos) onde envolve o design do sistema estudado (TCSA com material galvanizado); configurações geométricas do material; estudo de profundidade;
- Abordagem conjunta entre a escolha da geometria para a região galvanizada e o método Design Construtal.

5.3 Sugestões para Trabalhos Futuros

O desenvolvimento de dispositivos de aquecimento e resfriamento mais sustentáveis é um campo em constante evolução. À medida que cresce a necessidade de minimizar os impactos ambientais, torna-se fundamental buscar novas soluções e aprimoramentos. Dessa forma, algumas sugestões para trabalhos futuros são apresentadas a seguir:

- Exploração de novas geometrias utilizando o método Design Construtal, além da investigação de diferentes materiais para a região ao redor do duto, com o objetivo de otimizar ainda mais a transferência de calor;

- Desenvolvimento de um modelo mais abrangente para o TCSA, considerando fatores adicionais como a influência da umidade do solo e outras variáveis relevantes, tornando a simulação mais representativa das condições reais de operação.

Essas direções futuras poderão contribuir significativamente para o estudo de TCSAs, tornando-os ainda mais eficientes e sustentáveis.

REFERÊNCIAS

- AGRAWAL, K. K. et al. A review on effect of geometrical, flow and soil properties on the performance of earth air tunnel heat exchanger. **Energy and Buildings**, Elsevier, v. 176, p. 120–138, 2018.
- AKBARPOOR, A. M.; POSHTIRI, A. H.; BIGLARI, F. Performance analysis of domed roof integrated with earth-to-air heat exchanger system to meet thermal comfort conditions in buildings. **Renewable Energy**, Elsevier, v. 168, p. 1265–1293, 2021.
- ALI, H.; KURJAK, Z.; BEKE, J. Investigation of earth air heat exchangers functioning in arid locations using matlab/simulink. **Renewable Energy**, Elsevier, v. 209, p. 632–643, 2023.
- ANACONDA. **Anaconda Documentation**. <https://www.anaconda.com/docs/main>: Anaconda Inc., 2025.
- ANDRADE, I. R. de et al. Multi-objective numerical analysis of horizontal rectilinear earth–air heat exchangers with elliptical cross section using constructal design and topsis. **Fluids**, MDPI, v. 9, p. 1–19, 2024.
- ANGULO, A. et al. Algorithms for bidding strategies in local energy markets: Exhaustive search through parallel computing and metaheuristic optimization. **Algorithms**, MDPI, v. 14, p. 1–16, 2021.
- ASCIONE, F.; BELLIA, L.; MINICHIELLO, F. Earth-to-air heat exchangers for italian climates. **Renewable Energy**, Elsevier, v. 36, p. 2177–2188, 2011.
- AVILA, L. B. et al. Corrosão pelo solo de aço galvanizado na região da campanha - rs. **XII Congresso Brasileiro de Engenharia Química em Iniciação Científica**, UFSCar, São Paulo, 2017.
- BAZÁN, A.; PEREIRA, A. F.; FERNANDEZ, C. S. **Introdução aos espaços de Banach**. Rio de Janeiro: Editora do IMPA, 2023.
- BEJAN, A. Constructal-theory network of conducting paths for cooling a heat generating volume. **International Journal of Heat and Mass Transfer**, doi.org/10.1016/0017-9310(96)00175-5, v. 40, p. 799–816, 1996.
- BEJAN, A. **Convection heat transfer**. Hoboken: John Wiley & Sons, 2013.

BEJAN, A. The principle underlying all evolution, biological, geophysical, social and technological. **Philosophical Transactions A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences**, Royal Society, v. 381, p. 1–24, 2023.

BEJAN, A.; LORENTE, S. **Design with constructal theory**. Hoboken: John Wiley & Sons, 2008.

BEJAN, A.; ZANE, J. **Design in Nature: How the Constructal Law Governs Evolution in Biology, Physics, Technology, and Social Organization**. Estados Unidos: Anchor, 2012.

BELLO-OCHEDE, T. et al. Constructal conjugate heat transfer in three-dimensional cooling channels. **Journal of Enhanced Heat Transfer**, Begell House Digital Library, v. 14, p. 279–293, 2007.

BELLOUFI, Y. et al. Transient assessment of an earth air heat exchanger in warm climatic conditions. **Geothermics**, Elsevier, v. 104, 2022.

BENKERT, S.; HEIDT, F. D.; SCHÖLER, D. Calculation tool for earth heat exchangers: Gaea. In: IBPSA. **Proceedings of the 5th International IBPSA Conference: Building Simulation**. Siegen, Germany: IBPSA, 1997. v. 1, n. 1, p. 1–8.

BRUM, R. S. **Modelagem computacional de trocadores de calor solo-ar**. Dissertação (Mestrado) — Programa de pós-graduação em modelagem computacional-FURG, Rio Grande, Rio Grande do Sul, Brasil, 2013.

BRUM, R. S. et al. Design evaluation of earth-air heat exchangers with multiple ducts. **Renewable Energy**, Elsevier, v. 135, p. 1371–1385, 2019.

CALLISTER, W. D.; RETHWISCH, D. G. **Materials Science and Engineering: AN INTRODUCTION**. Hoboken: John Wiley & Sons, 2018.

CAMPOLONGO, F.; CARIBONI, J.; SALTELLI, A. An effective screening design for sensitivity analysis of large models. **Environmental Modelling Software**, Elsevier, v. 22, p. 1509–1518, 2007.

CRESWELL, J. W.; CRESWELL, J. D. **Research Design: Qualitative, Quantitative, and Mixed Methods Approaches**. 5. ed. Thousand Oaks: SAGE Publications, 2018.

DAUTRAY, R.; LIONS, J. **Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology**. Springer-Verlag: Evolution Problems I, 1992.

DOMINGUES, A. M. B. et al. Parameter analysis of earth-air heat exchangers over multi-layered soils in south brazil. **Geothermics**, Elsevier, v. 93, p. 1–14, 2021.

DOMINGUES, A. M. B.; RAMALHO, J. V. A.; FERNANDO, J. H. Maximizing efficiency of earth-air heat exchangers with galvanized blocks. **Defect and Diffusion Forum**, Scientific.Net, v. 427, p. 75–84, 2023.

EVANS, L. **Partial Differential Equations**. 2. ed. Providence: American Mathematical Society, 2010.

FOX, R. W.; MCDONALD, A. T.; PRITCHARD, P. J. **Introdução à Mecânica dos Fluidos**. Hoboken: Editora LTC, 2014.

GEUZAIN, C.; REMACLE, J. F. **Gmsh Reference Manual**. <https://gmsh.info>: GNU General Public License (GPL), 2025.

GIL, A. C. **Métodos e Técnicas de Pesquisa Social**. 6. ed. São Paulo: Atlas, 2019.

HASSANZADEH, R.; DARVISHYADEGARI, M.; ARMAN, S. A new idea for improving the horizontal straight ground source heat exchangers performance. **Sustainable Energy Technologies and Assessments**, Elsevier, v. 25, p. 138–145, 2018.

HEGAZI, A. A.; ABDELREHIM, O.; KHATER, A. Parametric optimization of earth-air heat exchangers (eahes) for central air conditioning. **International Journal of Refrigeration**, Elsevier, v. 129, p. 278–289, 2021.

HERMES, V. F. et al. Further realistic annual simulations of earth-air heat exchangers installations in a coastal city. **Sustainable Energy Technologies and Assessments**, Elsevier, v. 37, 2020.

HUANG, K. et al. Experimental and numerical research on the thermal performance of a vertical earth-to-air heat exchanger system. **Geothermics**, Elsevier, v. 125, p. 103–182, 2025.

HUGHES, T. J. R. **The finite element method (Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis)**. New Jersey: Prentice Hall, INC., 1987.

INCROPERA, F. P. et al. **Fundamentos de Transferencia de Calor e Massa**. Rio de Janeiro: LTC - Livros Técnicos e científicos Editorial Ltda, 2008.

KUFNER, A.; JOHN, O.; FUCIK, S. **Function Spaces**. Prague: Academia, 1977.

LI, J. et al. Evaluating the energy-saving potential of earth-air heat exchanger (eahx) for passivhaus standard buildings in different climates in china. **Energy Buildings**, Elsevier, v. 288, p. 1–17, 2023.

LONG, T. et al. Benefits of integrating phase-change material with solar chimney and earth-to-air heat exchanger system for passive ventilation and cooling in summer. **Journal of Energy Storage**, Elsevier, v. 48, n. 104037, 2022.

LOTTI, L. B. et al. Substituição dos aparelhos de ar-condicionado por resfriadores evaporativos na faculdade de engenharia mecânica da unicamp. **Revista Ciências do Ambiente on-line**, UNICAMP, v. 2, n. 2, p. 1–6, 2006.

MATLAB. **MATLAB Documentation**. Natick, Massachusetts: The MathWorks Inc., 2010.

MAYTORENA, V. M. et al. Thermal performance analysis of a passive hybrid earth-to-air heat exchanger for cooling rooms at mexican desert climate. **Case Studies in Thermal Engineering**, Elsevier, v. 41, p. 1–21, 2023.

MICHAELLO, R. S. et al. Perfis perfurados submetidos à flambagem térmica e mecânica. **Perspectivas Online: Ciências Exatas & Engenharias**, Revista Científica, v. 8, n. 20, p. 116–126, 2018.

MIHALAKAKOU, G. et al. Applications of earth-to-air heat exchangers: A holistic review. **Renewable and Sustainable Energy Reviews**, Elsevier, v. 155, 2022.

- MINAEI, A.; SAFIKHANI, H. A new transient analytical model for heat transfer of earth-to-air heat exchangers. **Journal of Building Engineering**, Elsevier, v. 33, p. 1–48, 2021.
- MOLINA-RODEA, R. et al. Experimental evaluation of a “u” type earth-to-air heat exchanger planned for narrow installation space in warm climatic conditions. **Energy and Built Environment**, Elsevier, v. 5, p. 772–786, 2024.
- MONTGOMERY, D. C. **Design and Analysis of Experiments**. 8. ed. New York: John Wiley & Sons, 2013.
- MUDHAFAR, H. H.; FIRAS, A. The effect of soil depth on the performance of earth air heat exchanger for climatic condition of baghdad, iraq: Mathematical and numerical study. **Renewable Energy Research and Applications**, Shahrood University of Technology, v. 6, n. 1, p. 151–163, 2025.
- NEMATI, N.; OMIDVAR, A.; ROSTI, B. Performance evaluation of a novel hybrid cooling system combining indirect evaporative cooler and earth-air heat exchanger. **Energy**, Elsevier, v. 215, p. 1–36, 2021.
- NUNES, B. R. et al. Numerical-analytical study of earth-air heat exchangers with complex geometries guided by constructal design. **International Journal of Energy Research**, Wiley Online Library, v. 45, p. 20970–20987, 2021.
- OLIVERA, M. R. B. **Análise paramétrica de trocadores de calor solo-ar acoplados a estruturas galvanizadas**. Dissertação (Mestrado) — Programa de pós-graduação em modelagem matemática - UFPel, Pelotas, Rio Grande do Sul, Brasil, 2022.
- OZGENER, O.; OZGENER, L.; TESTER, J. W. A practical approach to predict soil temperature variations for geothermal (ground) heat exchangers applications. **International Journal of Heat and Mass Transfer**, Elsevier, v. 62, p. 473–480, 2013.
- ÖZISIK, M. N. **Heat Conduction**. New York: John Wiley & Sons, 1993.
- PAPAKOSTAS, T.; TSAMITROS, A.; MARTINOPOULOS, G. Validation of modified one-dimensional models simulating the thermal behavior of earth-to-air heat exchangers-comparative analysis of modelling and experimental results. **Geothermics**, Elsevier, v. 82, p. 1–6, 2019.
- PASTOR, N. R. N. **Análise de desempenho de trocadores de calor solo-ar aletados**. Dissertação (Mestrado) — Programa de pós-graduação em modelagem matemática - UFPel, Pelotas, Rio Grande do Sul, Brasil, 2022.
- PESARAN, M. et al. Optimal sizing and siting of distributed generators by exhaustive search. **Distributed Generation Alternative Energy Journal**, Taylor Francis Online, v. 30, n. 3, p. 29–56, 2015.
- QASIM, H. H.; ALSHARA, A. K.; ABOOD, F. A. Simulation of the effect of soil temperature on earth - air heat exchanger behavior. **Basrah Journal for Engineering Sciences**, University of Basrah, v. 24, p. 12–23, 2024.

RAMALHO, J. V. A. et al. Accessing the thermal performance of earth-air heat exchangers surrounded by galvanized structures. **Journal Sustainable Energy Technologies and Assessments**, Elsevier, v. 54, p. 1–11, 2022.

RIAZ, M. U. B. et al. Investigation of ground heat exchange under winter conditions in desert climate. **International Journal of Environmental Science and Technology**, Springer Nature, v. 22, p. 863—878, 2025.

ROCHA, L. A. O.; LORENTE, S.; BEJAN, A. Constructal theory in heat transfer. In: **Handbook of Thermal Science and Engineering**. Cham: Springer International Publishing, 2017. p. 1–32.

RODRIGUES, G. C. et al. Constructal design applied to the geometric evaluation of a t-shaped earth-air heat exchanger. **International Journal of Sustainable Development and Planning**, Canada, v. 16, n. 2, p. 207–217, 2021.

RODRIGUES, M. K. **Modelagem computacional aplicada à melhoria do desempenho térmico de trocador de calor solo-ar através do Método Constructal Design**. Dissertação (Mestrado) — Programa de pós-graduação em modelagem computacional-FURG, Rio Grande, Rio Grande do Sul, Brasil, 2014.

RODRIGUES, M. K. **Análise numérica de Trocadores de Calor Solo-Ar em forma de “Y” através do Método Design Construtal e de um novo indicador de desempenho energético (IDE) empregando modelo computacional aprimorado**. Tese (Doutorado) — Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional, Universidade Federal do Rio Grande (FURG), Rio Grande, Brasil, 2019.

RODRIGUES, M. K. et al. A full approach to earth-air heat exchanger employing computational modeling, performance analysis and geometric evaluation. **Renewable Energy**, Elsevier, v. 191, p. 535–556, 2022.

RODRIGUES, P. M. **Avaliação Geométrica de Três Aletas Inseridas em uma Cavidade Aplicando Design Construtal e o Método Superfície de Resposta**. Tese (Doutorado) — Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade do Vale do Rio dos Sinus - UNISINUS, Rio Grande, Brasil, 2024.

SAEIDI, R. et al. A comprehensive study of fin-assisted horizontal ground heat exchanger for enhancing the heat transfer performance. **Energy Conversion and Management: X**, Elsevier, v. 18, p. 1–15, 2023.

SANDRES, C. A. **Contaminação dos solos e águas subterrâneas provocada por vazamentos de gasolina nos postos de combustíveis devido à corrosão em tanques enterrados**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal Fluminense, Niterói, Rio de Janeiro, 2004.

SANTOS, E. D. dos et al. The constructal design applied to renewable energy systems. In: **Sustainable Energy Technologies**. Taylor & Francis Group: CRS Press, 2017. p. 45–62.

SHAHSAVAR, A.; TALEBIZADEHSARDARI, P.; ARICI, M. Comparative energy, exergy, environmental, exergoeconomic, and enviroeconomic analysis of building integrated photovoltaic/thermal, earth-air heat exchanger, and hybrid systems. **Journal of Cleaner Production**, Elsevier, v. 362, n. 132510, 2022.

TREFETHEN, L. N.; BAU, D. **Numerical Linear Algebra**. Philadelphia: SIAM, 1997.

VAZ, J. **Estudo experimental e numérico sobre o uso do solo como reservatório de energia para o aquecimento e resfriamento de ambientes edificadas**. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), Porto Alegre, Brasil, 2011.

WEI, H. et al. Field experiments on the effects of an earth-to-air heat exchanger on the indoor thermal environment in summer and winter for a typical hot-summer and cold-winter region. **Renewable Energy**, Elsevier, v. 167, p. 530–541, 2021.

XIAO, J. et al. An earth-air heat exchanger integrated with a greenhouse in cold-winter and hot-summer regions of northern china: Modeling and experimental analysis. **Applied Thermal Engineering**, Elsevier, v. 232, n. 120939, p. 1–17, 2023–a.

XIE, G. et al. optimization of pin-fins for a heat exchanger by entropy generation minimization and constructal law. **Journal of Heat Transfer**, Elsevier, v. 381, 2015.

ZHANG, C. et al. A review of renewable energy assessment methods in green building and green neighborhood rating systems. **Energy & Buildings**, Elsevier, v. 195, 2019.

ZHANG, D. et al. Performance measurement and configuration optimization based on orthogonal simulation method of earth-to-air heat exchange system in cold-arid climate. **Energy and Buildings**, Elsevier, v. 308, 2024.

APÊNDICE A RESULTADOS DA FORMA ELIPSOIDAL

As tabelas a seguir apresentam todos os resultados obtidos para a Forma Elipsoidal, considerando a variação da fração de área ψ e das dimensões dos semieixos a e b .

Tabela 9: Resultados obtidos para a fração de área de 0,1%.

Caso	a (m)	b (m)	z_f (m)	$P_{t,s}$ ($^{\circ}C$)	$P_{t,TCSA}$ ($^{\circ}C$)	θ_{max} (%)
8	0,29	0,16	1,71	2,52	2,41	56,3
9	0,27	0,17	1,73	2,53	2,42	56,5
10	0,26	0,19	1,75	2,54	2,43	56,8
11	0,24	0,20	1,78	2,55	2,44	57,0
12	0,23	0,21	1,80	2,57	2,45	57,2
13	0,21	0,23	1,84	2,58	2,47	57,7
14	0,19	0,26	1,87	2,60	2,48	57,9
15	0,18	0,27	1,92	2,62	2,50	58,4
16	0,16	0,29	1,97	2,64	2,52	58,9
17	0,15	0,33	2,04	2,67	2,55	59,6
18	0,13	0,37	2,12	2,70	2,56	59,8

Fonte: A autora.

Tabela 10: Resultados obtidos para a fração de área de 0,2%.

Caso	a (m)	b (m)	z_f (m)	$P_{t,s}$ ($^{\circ}C$)	$P_{t,TCSA}$ ($^{\circ}C$)	θ_{max} (%)
19	0,45	0,21	1,72	2,47	2,36	55,1
20	0,42	0,23	1,75	2,49	2,38	55,6
21	0,39	0,25	1,78	2,50	2,39	55,8
22	0,36	0,27	1,83	2,53	2,41	56,3
23	0,33	0,29	1,88	2,55	2,44	57,0
24	0,30	0,32	1,94	2,58	2,46	57,5
25	0,26	0,36	2,01	2,61	2,50	58,4
26	0,23	0,41	2,11	2,65	2,53	59,1
27	0,20	0,47	2,24	2,70	2,58	60,3
28	0,17	0,56	2,41	2,76	2,63	61,4
29	0,14	0,68	2,66	2,83	2,70	63,1

Fonte: A autora.

Tabela 11: Resultados obtidos para a fração de área de 0,3%.

Caso	a (m)	b (m)	z_f (m)	$P_{t,s}$ ($^{\circ}C$)	$P_{t,TCSA}$ ($^{\circ}C$)	θ_{max} (%)
30	0,58	0,25	1,72	2,42	2,32	54,2
31	0,54	0,27	1,76	2,45	2,34	54,7
32	0,49	0,29	1,80	2,47	2,36	55,1
33	0,45	0,32	1,86	2,50	2,39	55,8
34	0,40	0,35	1,93	2,53	2,42	56,5
35	0,36	0,40	2,02	2,57	2,46	57,5
36	0,32	0,45	2,13	2,62	2,50	58,4
37	0,27	0,53	2,27	2,68	2,56	59,8
38	0,23	0,63	2,48	2,75	2,63	61,4
39	0,18	0,78	2,78	2,84	2,70	63,1
40	0,14	1,02	3,27	2,92	2,79	65,2

Fonte: A autora.

Tabela 12: Resultados obtidos para a fração de área de 0,4%.

Caso	a (m)	b (m)	z_f (m)	$P_{t,s}$ ($^{\circ}C$)	$P_{t,TCSA}$ ($^{\circ}C$)	θ_{max} (%)
41	0,70	0,27	1,71	2,38	2,28	53,3
42	0,65	0,30	1,76	2,41	2,30	53,7
43	0,59	0,32	1,81	2,44	2,33	54,4
44	0,54	0,36	1,88	2,47	2,36	55,1
45	0,48	0,40	1,96	2,51	2,40	56,1
46	0,43	0,45	2,06	2,56	2,44	57,0
47	0,37	0,52	2,20	2,62	2,50	58,4
48	0,32	0,61	2,38	2,69	2,56	59,8
49	0,26	0,73	2,63	2,77	2,64	61,7
50	0,21	0,93	3,03	2,87	2,74	64,0
51	0,15	1,27	3,71	2,96	2,82	65,9

Fonte: A autora.

Tabela 13: Resultados obtidos para a fração de área de 0,5%.

Caso	a (m)	b (m)	z_f (m)	$P_{t,s}$ ($^{\circ}C$)	$P_{t,TCSA}$ ($^{\circ}C$)	θ_{max} (%)
52	0,76	0,31	1,74	2,36	2,26	52,8
53	0,70	0,34	1,79	2,39	2,28	53,3
54	0,64	0,37	1,86	2,42	2,32	54,2
55	0,58	0,41	1,93	2,46	2,35	54,9
56	0,52	0,46	2,03	2,51	2,40	56,1
57	0,46	0,52	2,15	2,56	2,45	57,2
58	0,40	0,60	2,31	2,63	2,51	58,6
59	0,34	0,70	2,52	2,71	2,58	60,3
60	0,28	0,85	2,82	2,80	2,67	62,4
61	0,22	1,09	3,28	2,91	2,77	64,7
62	0,16	1,50	4,11	2,99	2,84	66,4

Fonte: A autora.

Tabela 14: Resultados obtidos para a fração de área de 1,0%.

Caso	a (m)	b (m)	z_f (m)	$P_{t,s}$ ($^{\circ}C$)	$P_{t,TCSA}$ ($^{\circ}C$)	θ_{max} (%)
63	1,10	0,43	1,78	2,22	2,13	49,8
64	1,00	0,48	1,86	2,27	2,17	50,7
65	0,90	0,53	1,97	2,32	2,22	51,9
66	0,80	0,60	2,10	2,39	2,28	53,3
67	0,70	0,68	2,27	2,47	2,36	55,1
68	0,60	0,80	2,50	2,57	2,45	57,2
69	0,50	0,95	2,82	2,68	2,56	59,8
70	0,40	1,19	3,30	2,82	2,69	62,9
71	0,30	1,59	4,09	2,95	2,81	65,7
72	0,20	2,39	5,68	3,00	2,85	66,6

Fonte: A autora.

Tabela 15: Resultados obtidos para a fração de área de 2,0%.

Caso	a (m)	b (m)	z_f (m)	$P_{t,s}$ ($^{\circ}C$)	$P_{t,TCSA}$ ($^{\circ}C$)	θ_{max} (%)
73	1,70	0,56	1,75	1,91	1,83	42,8
74	1,55	0,62	1,85	1,97	1,89	44,2
75	1,40	0,68	1,99	2,04	1,96	45,8
76	1,25	0,76	2,15	2,13	2,04	47,7
77	1,10	0,87	2,36	2,23	2,13	49,8
78	0,95	1,01	2,63	2,35	2,25	52,6
79	0,80	1,19	3,01	2,50	2,39	55,8
80	0,65	1,47	3,56	2,67	2,55	59,6
81	0,50	1,91	4,44	2,85	2,72	63,6
82	0,45	2,12	4,87	2,90	2,76	64,5
83	0,40	2,39	5,40	2,93	2,79	65,2
84	0,35	2,73	6,08	2,94	2,80	65,4
85	0,30	3,18	6,99	2,93	2,79	65,2
86	0,25	3,82	8,26	2,87	2,73	63,8
87	0,20	4,77	10,17	2,80	2,67	62,4

Fonte: A autora.

Estudo Analítico-Numérico e Geométrico de Estruturas Galvanizadas para Trocadores de Calor Solo-Ar –
Ana Maria Bersch Domingues



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PELOTAS

Instituto de Física e Matemática

Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática



Dissertação

Estudo Analítico-Numérico e Geométrico de Estruturas Galvanizadas para Trocadores de Calor Solo-Ar

ANA MARIA BERSCH DOMINGUES

Pelotas, 2025