UNIVERSIDADE FEDERAL DE PELOTAS
Instituto de Física e Matemática
Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática

Dissertação

Dinâmica efetiva de barras e vigas de Euler-Bernoulli microperiódicas

Douglas Machado da Silva

Pelotas, 2024

Douglas Machado da Silva

Dinâmica efetiva de barras e vigas de Euler-Bernoulli microperiódicas

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática do Instituto de Física e Matemática da Universidade Federal de Pelotas, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Modelagem Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Leslie Darien Pérez Fernández
Coorientador: Prof. Dr. Alexandre Molter

Pelotas, 2024

Universidade Federal de Pelotas / Sistema de Bibliotecas
Catalogação da Publicação

S586d Silva, Douglas Machado da

Dinâmica efetiva de barras e vigas de Euler-Bernoulli microperiódicas [recurso eletrônico] / Douglas Machado da Silva ; Leslie Darien Pérez Fernández, orientador ; Alexandre Molter, coorientador. — Pelotas, 2024.
91 f. : il.

Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática, Instituto de Física e Matemática, Universidade Federal de Pelotas, 2024.

1. Barras e vigas de Euler-Bernoulli. 2. Meios microperiódicos. 3. Comportamento efetivo. 4. Problemas dinâmicos. 5. Coeficientes rapidamente oscilantes. I. Fernández, Leslie Darien Pérez, orient. II. Molter, Alexandre, coorient. III. Título.

CDD 511.8

Elaborada por Ubirajara Buddin Cruz CRB: 10/901

Douglas Machado da Silva

Dinâmica efetiva de barras e vigas de Euler-Bernoulli microperiódicas

Dissertação aprovada, como requisito parcial, para obtenção do grau de Mestre em Modelagem Matemática, Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática, Instituto de Física e Matemática, Universidade Federal de Pelotas.

Data da Defesa: 19 de Agosto de 2024

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Leslie Darien Pérez Fernández (orientador)
Doutor em Matemática pelo Instituto de Cibernética, Matemática e Física, Cuba.

Prof. Dr. Alexandre Molter (co-orientador)
Doutor em Engenharia Mecânica pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Prof. Dr. Alexandre Sacco de Athayde
Doutor em Engenharia Mecânica pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Prof. Dr. Claus Haetinger
Doutor em Matemática pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Prof. Dr. Jairo Valões de Alencar Ramalho
Doutor em Modelagem Computacional pelo Laboratório Nacional de Computação Científica.

Prof. Dr. Julián Bravo Castillero
Doutor em Matemática pela Universidade de Havana, Cuba.

Prof. Dr. Daniela Buske (suplente)
Doutora em Engenharia Mecânica pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Dedico este trabalho a minha namorada Camila Gimenes Nunes.

AGRADECIMENTOS

Chegar ao fim desta jornada não seria possível sem o apoio, carinho e incentivo de pessoas especiais que estiveram ao meu lado nos momentos de desafios e conquistas. A todas essas pessoas, minha eterna gratidão.

À minha namorada e futura esposa, Camila Gimenes Nunes, que, com seu amor e paciência, me deu força para enfrentar cada obstáculo. Seus conselhos, compreensão e carinho foram essenciais para que eu me mantivesse firme nos momentos mais difíceis. Obrigado por acreditar em mim, por ser minha fonte de inspiração e por estar sempre ao meu lado, em cada etapa deste caminho. Este trabalho é também fruto do seu apoio incondicional.

Aos meus orientadores, Prof. Dr. Leslie e Prof. Dr. Alexandre, que, com dedicação e sabedoria, me guiaram ao longo desta jornada acadêmica. Agradeço por cada conselho, pelas inúmeras reuniões e por me motivarem a buscar sempre o melhor. Seu compromisso com a pesquisa e sua paixão pelo conhecimento foram fundamentais para que eu pudesse concluir esta importante etapa.

Aos meus amigos, Alexandre Vargas Ilha, Milena Guidotti, Felipe Barbosa, Luana Kurz e Leonardo Kegles, que de diversas formas me apoiaram, seja nos momentos de lazer, nas conversas de incentivo ou nas palavras de conforto. Vocês foram fundamentais para me manter equilibrado ao longo do percurso. A amizade de vocês tornou essa caminhada mais leve e divertida.

A todos, o meu sincero agradecimento. Este trabalho é, em parte, resultado do apoio e da confiança que recebi de cada um de vocês.

RESUMO

SILVA, Douglas Machado da. **Dinâmica efetiva de barras e vigas de Euler-Bernoulli microperiódicas**. Orientador: Leslie Darien Pérez Fernández. 2024. 93 f. Dissertação (Mestrado em Modelagem Matemática) – Instituto de Física e Matemática, Universidade Federal de Pelotas, Pelotas, 2024.

O método de homogeneização assintótica (MHA) permite encontrar o comportamento efetivo de um meio micro-heterogêneo, periódico e caracterizado por rápidas variações nas suas propriedades constitutivas, mediante um meio homogêneo que é assintóticamente equivalente ao meio micro-heterogêneo. Matematicamente, isto se traduz em uma poderosa ferramenta para o encontro de soluções de equações diferencias que modelam o comportamento físico sobre um meio micro-heterogêneo. As etapas fundamentais do MHA incluem a construção de uma solução assintótica formal do problema original, o encontro do problema sobre o meio homogêneo equivalente e sua propriedade efetiva e o encontro dos problemas e soluções de funções locais, definidas em um porção que se repete periodicamente no meio, chamada célula de periodicidade. Para demonstrar a equivalência entre esses meios, provamos a proximidade entre as soluções sobre o meio micro-heterogêneo (problema original) e o meio homogêneo (problema homogeneizado) utilizando alguma norma correspondente. O presente trabalho propõe a aplicação deste método a meios micro-heterogêneos periódicos para o encontro de soluções assintóticas de ordens superiores para problemas dinâmicos e estáticos unidimensionais de segunda e quarta ordem, os quais modelam o comportamento mecânico de barras e vigas do tipo Euler-Bernoulli. Além disso, apresentar exemplos numéricos dos problemas tratados.

Palavras-chave: Barras e vigas de Euler-Bernoulli. Meios microperiódicos. Comportamento efetivo. Problemas dinâmicos. Coeficientes rapidamente oscilantes. Método de homogeneização assintótica.

ABSTRACT

SILVA, Douglas Machado da. **Effective dynamics of microperiodic bars and Euler-Bernoulli beams**. Advisor: Leslie Darien Pérez Fernández. 2024. 93 f. Dissertation (Master in Science in Mathematical Modeling) – Institute of Physics and Mathematics, Federal University of Pelotas, Pelotas, 2024.

The asymptotic homogenization method (AHM) allows finding the effective behavior of a periodic micro-heterogeneous medium, characterized by rapid variations in its constitutive properties, by means of a homogeneous medium, which is asymptotically equivalent to the micro-heterogeneous medium. Mathematically, this translates into a powerful tool for finding solutions to differential equations that model physical behavior in a micro-heterogeneous medium. The fundamental steps of AHM include the construction of a formal asymptotic solution of the original problem, finding the problem on the equivalent homogeneous medium and its effective property and finding the problems and solutions of local functions, defined in a portion that is repeats periodically in the middle, called the periodicity cell. To demonstrate the equivalence between these means, we prove the proximity between the solutions on the micro-heterogeneous environment (original problem) and the homogeneous environment (homogenized problem) using some corresponding standard. The present work proposes the application of this method to periodic micro-heterogeneous media for finding higher-order asymptotic solutions to one-dimensional dynamic and static problems of second and fourth order, which model the mechanical behavior of Euler-Bernoulli type bars and beams. In addition, to present numerical examples of the problems addressed.

Keywords: Bars and Euler-Bernoulli Beams. Microperiodic media. Effective behavior. Dynamic problems. Rapidly oscillating coefficients. Asymptotic homogenization method.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 Principais tipos de materiais heterogêneos. Fonte: O autor. 14
Figura 2 Separação de escalas estruturais. Fonte: O autor. 15
Figura 3 Compósitos bifásicos microperiódicos: (a) um laminado e (b)um arranjo quadrado de fibras ortoédricas em uma matriz. Fonte: O autor. 15
Figura 4 Hipótese de homogeneidade equivalente. Fonte: O autor. 16
Figura 5 Proximidade entre u^ε e u_0 quando $\varepsilon \to 0^+$. Fonte: O autor. 17
Figura 6 Representação gráfica da função $a\left(x/\varepsilon\right) = 1 + 0.25\cos\left(2\pi\dfrac{x}{\varepsilon}\right)$. Fonte: O autor. 24
Figura 7 Comportamento das soluções dos problemas original e homgeneizado, da SAF, o erro de aproximação para cada truncamento da SAF, e as soluções dos problemas locais para $\varepsilon = 1/2$. Fonte: O autor. 61
Figura 8 Comportamento das soluções dos problemas original e homgeneizado, da SAF, o erro de aproximação para cada truncamento da SAF, e as soluções dos problemas locais para $\varepsilon = 1/4$. Fonte: O autor. 62
Figura 9 Comportamento das soluções dos problemas original e homgeneizado, da SAF, o erro de aproximação para cada truncamento da SAF, e as soluções dos problemas locais para $\varepsilon = 1/8$. Fonte: O autor. 63
Figura 10 Comportamento das soluções dos problemas original e homgeneizado, da SAF, o erro de aproximação para cada truncamento da SAF, e as soluções dos problemas locais para $\varepsilon = 1/16$. Fonte: O autor. 64
Figura 11 Convergência da solução exata w^ε e a SAF $w^{(2)}$ para a solução homgeneizada w_0. Fonte: O autor. 84
Figura 12 Comportamento da solução local $N_2(x/\varepsilon)$. Fonte: O autor. 85

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

MHA	Método de Homogeneização Assintótica
SAF	Solução Assintótica Formal
ERV	Elemento Representativo de Volume
EA	Expansão Assintótica

LISTA DE SÍMBOLOS

ε	parâmetro geométrico pequeno
x	escala macroscópica, global ou lenta
y	escala microscópica, local ou rápida
λ	comprimento característico da microescala
Λ	comprimento caracterísitico da macroescala
u^ε	solução do problema original
$a^\varepsilon(x)$	coeficiente rapidamente oscilante e continuamente diferenciável
u_0	solução do problema homogeneizado
D	domínio em $\mathbb{R}$, um conjunto aberto e conexo
∂D	contorno do domínio D
B	espaço normado sobre D
B^*	espaço dual de B
B_ε	espaço normado sobre D, indexado por ε
$\|\|\cdot\|\|_B$	norma de um espaço B
L^ε	operador diferencial linear, indexado por ε
$\langle\cdot\rangle$	operador de valor médio $\left(\langle\cdot\rangle = \int_0^1(\cdot)dy\right)$
$\mathbb{N}$	conjunto dos números naturais
u^ε	solução exata
$u^{(\infty)}$	solução assintótica formal
$L^2(D)$	espaço das funções $u : D \to \mathbb{R}$ de quadrado integrável
$H^k(D)$	espaço das funções $u \in L^2(D)$ cujas derivadas até a ordem k também estão em $L^2(D)$
$H_0^k(D)$	espaço das funções em $H^k(D)$ que se anulam em ∂D

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 13
1.1 Motivação 13
1.2 Revisão bibliográfica 18
1.3 Objetivos 19
1.4 Estrutura 20
1.5 Produção 20

2 PRELIMINARES 23
2.1 Tratamento matemático de meios micro-heterogêneos com estrutura periódica e propriedades rapidamente oscilantes 23
2.2 Modelo de vigas do tipo Euler-Bernoulli 25
2.3 Conceitos básicos 27
2.4 Estimativas via princípios do máximo 29
2.5 Lemas e resultados acerca de funções periódicas 30
2.6 Definições e resultados da análise funcional 37

3 METODOLOGIA 41
3.1 Introdução 41
3.2 Modelos abordados e técnicas de resolução 41
3.3 Método de Homogeneização Assintótica 42

4 DESENVOLVIMENTO 44
4.1 MHA para um problema hiperbólico unidimensional de segunda ordem 44
4.1.1 Formulação do problema 44
4.1.2 O problema é bem-posto 44
4.1.3 Formalismo matemático do MHA 45
4.1.4 Justificativa matemática 56
4.1.5 Exemplo numérico 59
4.2 MHA para problemas unidimensionais de quarta ordem 65
4.2.1 Problema dinâmico 65
4.2.1.1 Formulação do problema 65
4.2.1.2 Formalismo matemático do MHA 65
4.2.2 Problema estático 79
4.2.2.1 Formulação do problema e aplicação do MHA 79
4.2.2.2 O problema é bem posto 80
4.2.2.3 Justificativa matemática 82
4.2.2.4 Exemplo numérico 83

5 CONCLUSÕES 86

REFERÊNCIAS 88

1 INTRODUÇÃO

1.1 Motivação

O estudo de modelos matemáticos é fundamental porque, por exemplo, eles representam a ocorrência de fenômenos físicos em um determinado meio ou material. No contexto desses estudos, os materiais são geralmente divididos em dois tipos: homogêneos e heterogêneos.

Um meio homogêneo pode ser definido como aquele formado por apenas um material em toda sua composição, de forma que suas propriedades físicas são constantes com relação à posição, sendo elas efetivas. Por outro lado, um meio heterogêneo tem propriedades físicas que variam em relação à posição, neste caso constitutivas (TORQUATO, 2002; SADD, 2021), e é formado por uma distribuição de domínios ocupados por diferentes materiais homogêneos (chamados de fases), como os compósitos (Figura 1(a)), cujas propriedades são constantes por partes, ou pelo mesmo meio, mas com características cristalográficas diferentes, como um policristal (TORQUATO, 2002), em que suas propriedades são localmente similares e globalmente diferentes (Figura 1(b)), ou ainda ser funcionalmente graduado (SADD, 2021), cuja composição induz uma variação contínua de suas propriedades (Figura 1(c)).

Meios heterogêneos são abundantes na natureza, como na atmosfera, no solo, em rochas, ossos, madeira, entre outros, ou podem ser produzidos de forma manufaturada, como géis, plásticos, compósitos, cerâmicas, etc. Esses materiais têm ampla aplicabilidade em diversos setores, como automobilístico, aeronáutico e da construção civil. Por estas razões, este trabalho tem seu foco direcionado para os meios heterogêneos.

Geralmente, os fenômenos físicos associados a essas propriedades ocorrem na microescala, que pode variar da ordem de nanômetros (no caso de géis) até a ordem de metros (em fenômenos geológicos). Para simplificar o estudo e analisar essas propriedades, é conveniente selecionar uma porção do meio que represente adequadamente todas as suas características físicas e geométricas. Esta porção é denominada elemento representativo de volume (ERV)(AURIAULT, 1991; ZEMAN, 1999).

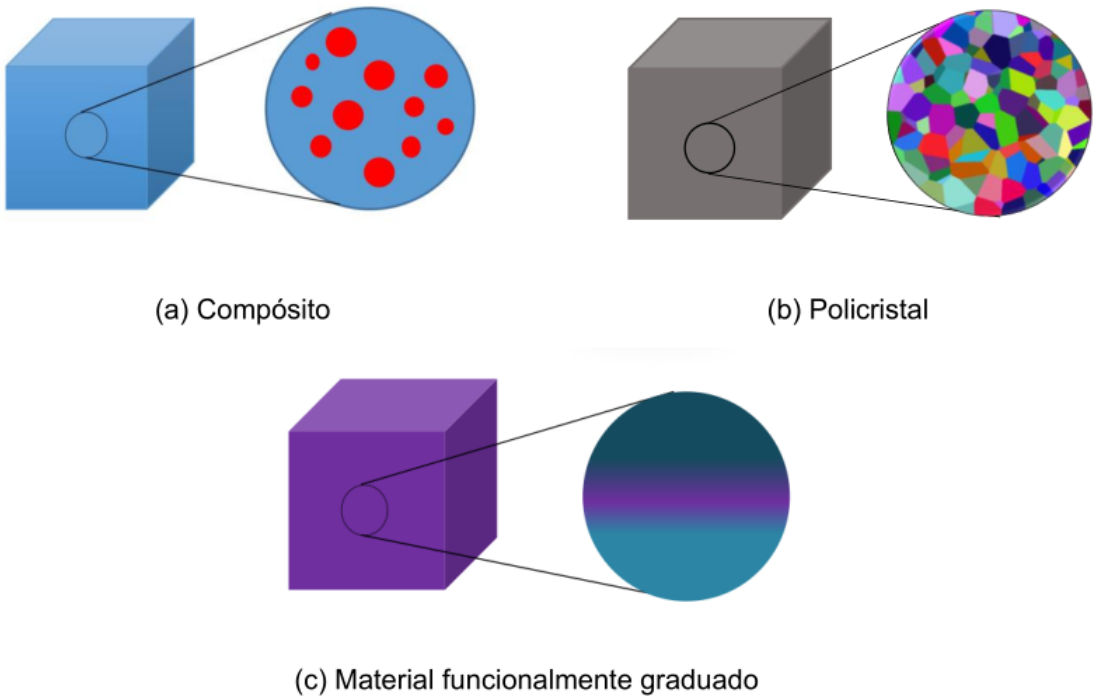

Figura 1 – Principais tipos de materiais heterogêneos.
Fonte: O autor.

Considerando que algumas estruturas heterogêneas podem ser periódicas, é possível conceber o meio como sendo composto pela repetição regular do Elemento Representativo de Volume (ERV) ao longo de todo o domínio, a qual nesse contexto é denominado célula básica ou de periodicidade.

Assim, seja λ o comprimento característico da microescala (aquela em que os domínios estão distribuídos, ou seja, em que ocorre a heterogeneidade)(LIMA, 2016). Assume-se que λ é muito maior que a escala atômica molecular, em que a matéria é discreta, mas muito menor que o comprimento caracterísitico Λ da macroescala, ou seja, $\lambda \ll \Lambda$. Logo, tais meios podem ser referidos como micro-heterogêneos. Nestas condições, diz-se que o meio micro-heterogêneo apresenta separação de escalas estruturais (Figura 2), o qual é caracterizada pelo parâmetro geométrico $\varepsilon = \lambda/\Lambda \ll 1$ (BAKHVALOV; PANASENKO, 1989). Esses materiais apresentam uma variação rápida nas suas propriedades constitutivas em relação à macroescala, graças à heterogeneidade da microestrutura.

Neste trabalho, serão considerados meios micro-heterogêneos com estrutura periódica, os quais são simplesmente referidos como meios microperiódicos. Dada a separação de escalas, define-se o parâmetro ε como sendo o tamanho característico relativo da célula básica. Na Figura 3, encontram-se alguns exemplos de materiais micro-heterogêneos que apresentam essa propriedade.

Vale ressaltar que nem sempre meios micro-heterogêneos são caracterizados como microperiódicos, no sentido apresentado anteriormente, dado que alguns compósitos manufaturados têm sua periodicidade perturbada devido a certas características do processo de produção ou a erros de fabricação, constituindo, assim, meios localmente periódicos (BAKHVALOV; PANASENKO, 1989). Nesse caso, diz-se que suas características geométricas mudam lentamente. Esse caso também será considerado nos estudos que se seguem.

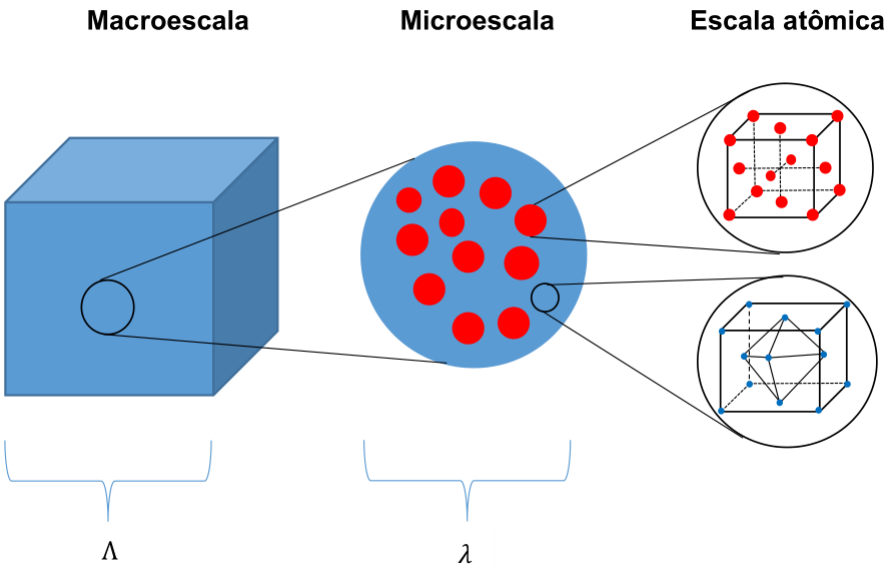

Figura 2 – Separação de escalas estruturais.
Fonte: O autor.

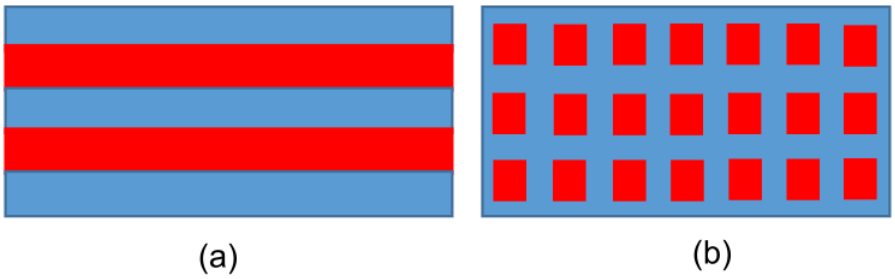

Figura 3 – Compósitos bifásicos microperiódicos: (a) um laminado e (b)um arranjo quadrado de fibras ortoédricas em uma matriz.
Fonte: O autor.

Além da separação de escalas estruturais, supõe-se que esses meios satisfaçam a hipótese do contínuo na microescala. Assim, pode-se considerar que esse tipo de meio pode ser visto como um objeto cuja matéria é continuamente distribuída por toda a região do espaço que ocupa (CHANDRASEKHARAIAH; DEBNATH, 1994).

Devido à rápida variação das propriedades em relação à macroescala, o processo de modelar o comportamento físico desses meios sob estímulos externos, que podem ser de natureza mecânica (carregamentos, trações), térmica (fontes de calor)

e eletromagnética (campos elétricos ou magnéticos aplicados), torna-se uma tarefa difícil. Isso se deve ao elevado custo computacional necessário para acompanhar essa rápida variação. Porém, com a separação de escalas estruturais e a hipótese do contínuo, cumpre-se, nesses meios, a hipótese de homogeneidade equivalente (AURIAULT, 1991), que estabelece que, na macroescala, o meio micro-heterogêneo é fisicamente equivalente a um certo meio homogêneo ideal (CHRISTENSEN, 2005). Assim, com a hipótese de homogeneidade equivalente, obtém-se uma equivalência entre as propriedades efetivas dos meios micro-heterogêneo e homogêneo, de maneira que as propriedades efetivas do primeiro são as propriedades do segundo (PANASENKO, 2008). O processo de obtenção do meio homogêneo equivalente é denominado "homogeneização"(Figura 4).

Figura 4 – Hipótese de homogeneidade equivalente.
Fonte: O autor.

Do ponto de vista matemático, a modelagem do comportamento físico destes meios micro-heterogêneos é feita por meio de equações diferenciais com coeficientes rapidamente oscilantes que representam suas propriedades constitutivas. A hipótese de homogeneidade equivalente garante a existência de um meio homogêneo equivalente ao micro-heterogêneo, cujas propriedades são modeladas através de equações diferenciais com coeficientes constantes, e suas propriedades efetivas representam as propriedades efetivas do meio micro-heterogêneo. Além disso, tais equações são complementadas por condições iniciais e/ou de contorno, definindo assim os chamados problemas original e homogeneizado, respectivamente.

Dessa forma, a homogeneidade equivalente significa que, dadas u^ε e u_0, soluções dos problemas original e homogeneizado, respectivamente, para alguma[1] norma do espaço de funções correspondentes, $||u^\varepsilon - u_0|| = \mathcal{O}(\varepsilon)$ (PANASENKO, 2008), a qual tende a zero à medida que $\varepsilon \to 0^+$ (Figura 5).

Portanto, podem-se identificar duas aplicações da teoria de homogeneização matemática: a obtenção de uma boa aproximação da solução de um problema de valores iniciais e/ou de contorno e a obtenção das propriedades efetivas de um meio heterogêneo. Neste trabalho, será enfatizada a primeira aplicação, que consiste no estudo

[1] No sentido de utilizar a norma correspondente a determinado espaço de funções, que, em geral, não precisam ser os mesmos.

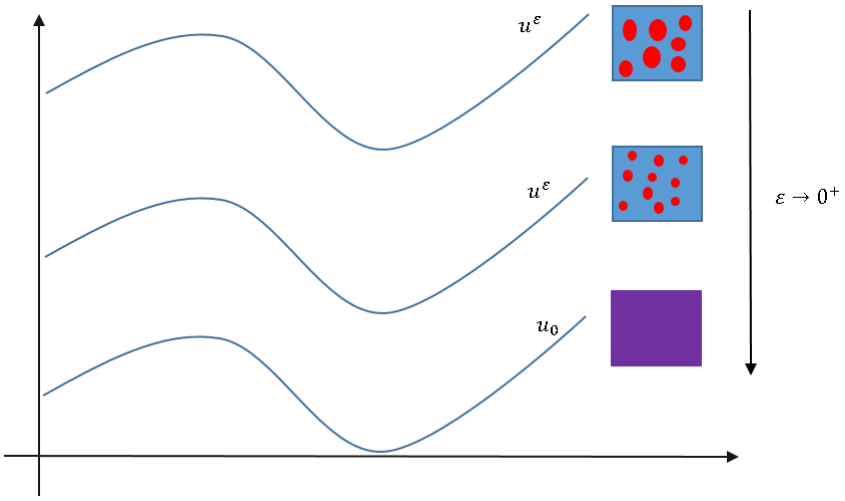

Figura 5 – Proximidade entre u^ε e u_0 quando $\varepsilon \to 0^+$.
Fonte: O autor.

da resposta do meio quando submetido a estímulos externos.

Dentre os vários métodos de homogeneização, destaca-se o método de homogeneização assintótica (MHA) (BAKHVALOV; PANASENKO, 1989; CIOURANESCU; DONATO, 1999; BENSOUSSAN; LIONS; PAPANICOLAU, 1978; OLEINIK, 1975; SANCHEZ-PALENCIA, 1970), dada sua relevância para meios com estrutura microperiódica. Esse método propõe a construção de uma solução assintótica formal (SAF) do problema original em duas escalas espaciais, na forma de uma série de potências do parâmetro pequeno ε, cujos coeficientes são funções incógnitas[2] que dependem da microescala e da macroescala. Ao substituir a SAF no problema original, obtém-se uma sequência recorrente de problemas, a partir dos quais se constrõem os chamados problemas locais sobre a célula de periodicidade, além do problema homogeneizado, cujas funções incógnitas são os coeficientes da SAF. Ainda, encontra-se o coeficiente efetivo do meio. Para completar a construção da SAF, consideram-se as condições iniciais e/ou de contorno do problema original, de forma a obter condições para o problema homogeneizado.

Tradicionalmente, utiliza-se a solução assintótica de primeira ordem (a série assintótica truncada na primeira potência de ε) para aproximar a solução exata do problema original, por esta também apresentar proximidade e incluir informação microscópica. No entanto, em alguns casos, essa assintótica não é suficiente para representar de forma satisfatória os detalhes na escala local da solução exata do problema, sendo necessária uma assintótica com mais termos ou de ordem superior (DÉCIO JUNIOR, 2019; SU et al., 2011a,b; LEITZKE, 2017; DONG; CAO, 2014).

Neste trabalho, pretende-se responder como se dá a interação entre o fenômeno de vibração em estruturas microperiódicas, a saber, barras e vigas, utilizando o mé-

[2] Funções desconhecidas a serem determinadas.

todo de homogeneização assintótica (MHA). Logo, busca-se aplicar o MHA em meios microperiódicos e localmente periódicos, unidimensionais e lineares, a fim de encontrar soluções assintóticas de ordens superiores para problemas de valores de contorno dinâmicos e estáticos. Esses problemas envolvem coeficientes que oscilam rapidamente e são continuamente diferenciáveis em equações diferenciais de segunda e quarta ordens. Além disso, para integrar e generalizar alguns resultados apresentados em LIMA (2016) e LUZ (2020), considera-se a modelagem do comportamento mecânico de uma barra vibrante unidimensional com estrutura localmente microperiódica. Também será abordada a modelagem do comportamento mecânico dinâmico e estático de uma viga do tipo Euler-Bernoulli com estrutura microperiódica funcionalmente graduada.

1.2 Revisão bibliográfica

Estudos acerca de materiais heterogêneos e suas propriedades mecânicas, eletromagnéticas e de transporte datam do início do século XIX e contam com contribuições de grandes cientistas como MAXWELL (1873), LORENZ (1880), RAYLEIGH (1892) e EINSTEIN (1906). No entanto, as primeiras formulações matemáticas do que se entende hoje por homogeneização matemática ocorreram com os trabalhos pioneiros de SANCHEZ-PALENCIA (1970; 1980), DE GIORGI; SPAGNOLO (1973), MARCHENKO; KHRUSLOV (1974), BAKHVALOV (1974; 1975a; 1975b), OLEINIK (1975), BERDICHEVSKY (1975), BABUSKA (1976a; 1976b; 1976c), BENSOUSSAN; LIONS; PAPANICOLAU (1978), CHRISTENSEN (2005) e BAKHVALOV; PANASENKO (1989).

Desde então, o estudo e a aplicação da homogeneização matemática para a obtenção das propriedades mecânicas de meios micro-heterogêneos resultaram em numerosas publicações, como, por exemplo, FRANCFORT; MURAT (1986), LEE; GHOSH (1999), KAMÍNSKI (2008) e PENTA; GERISCH (2017), nas quais o MHA é utilizado, inclusive, para diferentes geometrias e tipos de materiais. Dada a versatilidade e eficácia deste método, podem-se encontrar exemplos do uso da teoria de homogeneização em diversas áreas, como: otimização topológica (BENDSØE; SIGMUND, 2003; DA, 2019), projeto ótimo de materiais (TORQUATO, 2010; CIBLAC; MOREL, 2014), biomecânica do osso (PARNELL; GRIMAL, 2009), predição de falhas estruturais (PÉREZ-FERNÁNDEZ; BECK, 2014), propagação de ondas sísmicas (CAPDEVILLE; GUILLOT; MARIGO, 2010a,b), física de reatores nucleares (ALLAIRE; BAL, 1999; WESTON, 2007), transporte de uma espécie química (NG, 2006), mecânica dos fluidos (DIMITRIENKO, 1997), análise de estruturas com fraturas (DORMIEUX; KONDO, 2016), análise de fenômenos acoplados (AURIAULT; BOUTIN; GEINDREAU, 2009), medicina matemática (DESBRUN; DONALDSON; OWHADI, 2013) e dispersão de poluentes (COSTA; PÉREZ-FERNÁNDEZ; BRAVO-CASTILLERO, 2018).

Em relação à aplicação do MHA em problemas modelados com equações diferenciais de ordens superiores (ordem maior ou igual a 3), há poucos trabalhos na área (salvo melhor conhecimento), sendo esse um dos motivos norteadores deste estudo. No caso de modelar o comportamento mecânico de uma viga do tipo Euler-Bernoulli com estrutura homogênea, podem ser encontrados trabalhos como RAO (2016), MEIROVITCH (2001) e GONÇALVES; BRENNAN; ELLIOT (2007), em que as técnicas utilizadas contam com separação de variáveis e integração direta. Em ABU-HILAL (2003), por exemplo, são consideradas vibrações forçadas, utilizando-se de funções de Green.

No contexto de meios heterogêneos, os trabalhos de LI (2008) e SANKAR (2001) tratam da modelagem do comportamento mecânico de uma viga do tipo Euler-Bernoulli com estrutura funcionalmente graduada, mas também com abordagens via teoria de vibrações. Quanto à aplicação do MHA em estruturas compósitas, destacam-se HUANG; XING; GAO (2020), que consideram uma SAF de ordem superior, e BUANNIC (2001), que aborda um meio heterogêneo 3D.

1.3 Objetivos

Objetivo geral: Desenvolver uma metodologia para encontrar uma solução aproximada analítica de problemas de valores de contorno e/ou iniciais para equações diferenciais parciais (EDPs) de segunda e quarta ordens, que apresentem coeficientes rapidamente oscilantes e que modelam o comportamento físico de barras e vigas do tipo Euler-Bernoulli com estruturas microperiódicas, por meio do método de homogeneização assintótica (MHA).

Objetivos específicos:

- Aplicar o método de homogeneização assintótica aos seguintes problemas: o comportamento dinâmico de uma barra vibrante unidimensional e de uma viga do tipo Euler-Bernoulli, além do comportamento estático de uma viga do tipo Euler-Bernoulli unidimensional. Para cada caso, determinar a sequência recorrente de problemas, as expressões dos termos da solução assintótica formal, os problemas locais, o problema homogeneizado e os coeficientes efetivos;
- Demonstrar a proximidade entre as soluções exata e homogeneizada para os modelos da barra vibrante e da viga estática;
- Apresentar exemplos numéricos para modelos da barra vibrante e a viga estática;
- Apresentar um material autossuficiente, salvo resultados clássicos da área.

1.4 Estrutura

O presente trabalho está organizado em cinco capítulos, incluindo a introdução e a conclusão. No Capítulo 2, é feita uma coleta de resultados e definições relevantes para o estudo que se segue, abrangendo resultados sobre o tratamento matemático de meios micro-heterogêneos e periódicos, funções 1-periódicas, definições da análise assintótica e análise funcional, e a caracterização do modelo de vigas do tipo Euler-Bernoulli. Além disso, são apresentados os lemas fundamentais que garantem a existência das soluções dos problemas.

No Capítulo 4, apresenta-se a aplicação do MHA a três tipos de problemas: um problema hiperbólico unidimensional dinâmico de segunda ordem, um problema unidimensional dinâmico de quarta ordem e um problema unidimensional estático de quarta ordem. Nesse capítulo, descrevem-se todas as etapas fundamentais do MHA, como a formulação dos problemas locais, o cálculo do coeficiente efetivo e a equação do problema homogeneizado. Também é apresentada a demonstração da proximidade entre a solução exata do problema original e a solução do problema homogeneizado para os problemas hiperbólico unidimensional dinâmico de segunda ordem e o unidimensional estático de quarta ordem. Além disso, são incluídos exemplos numéricos para os modelos de barra dinâmica e viga estática.

1.5 Produção

- *Análise de um problema de um problema de perturbação singular via método das expansões emparelhadas*

  Apresentado e publicado no XXIV encontro de pós-graduação- 17 à 21 de outubro de 2022, UFPEL - Pelotas/RS.

  Diponível em: https://cti.ufpel.edu.br/siepe/arquivos/2022/CE_03871.pdf

- *Análise de um problema para o oscilador harmônico linear regularmente perturbado via método de escalas múltiplas*

  Apresentado e publicado no XXV ENMC / XIII ECTM / 9º MCSul / IX SEMENGO - 19 à 21 de outubro de 2022, modalidade online.

  Disponível em: https://even3.blob.core.windows.net/anais/524208.pdf

- *Análise de um problema de perturbação singular via método das expansões emparelhadas*

  Publicado na Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática.

Disponivel em: https://periodicos.ufs.br/ReviSe/article/view/19473/15514

- *Estudo das condições de contorno para o MHA aplicado a um problema elíptico unidimensional*

  Apresentado e publicado no XXV encontro de pós-graduação- 17 à 21 de outubro de 2023, UFPEL - Pelotas/RS.

  Diponível em: https://cti.ufpel.edu.br/siepe/arquivos/2023/CE_04986.pdf

- *Homogeneização assintótica de um problema para uma equação de onda sobre um meio microperiódico*

  Apresentado e publicado no XI ERMAC-RS - 28 à 30 de junho, UFPEL - Pelotas/RS.

  Disponível em https://even3.blob.core.windows.net/anais/628280.pdf

- *Método de Homogeneização Assintótico aplicado ao modelo de vigas de Euler-Bernoulli estático*

  Apresentado e publicado no IV JMMA - 15 à 17 de novembro de 2023, UFSM-Santa Maria/RS.

- *O método de escalas múltiplas aplicado a um modelo do oscilador harmônico linear regularmente perturbado*

  Publicado na Revista Scientia plena.

  Disponivel em: https://www.scientiaplena.org.br/sp/article/view/7018/2640

- *Asymptotic homogenization of a problem for a wave equation on a microperiodic medium*

  Aceito para publicação na revista Ciência e Natura.

- *The Asymptotic Homogenization Method Applied to the Elastostatic Model of Functionally Graded Microperiodic Euler-Bernoulli Beams*

  Aceito para publicação na revista Ciência e Natura.

- *Asymptotic homogenization of a mechanical equilibrium problem of a functionally-graded Euler-Bernoulli beam with non-periodic microstructure*

  Aceito para apresentação no XLV CILAMCE

- *Homogeneização assintótica de um problema para uma equação elíptica com coeficiente continuamente diferenciável localmente microperiódico*

  Publicado no periódico da Sigmae.

  Disponivel em: https://publicacoes.unifal-mg.edu.br/revistas/index.php/sigmae/article/view/2298

2 PRELIMINARES

2.1 Tratamento matemático de meios micro-heterogêneos com estrutura periódica e propriedades rapidamente oscilantes

O presente trabalho aborda fenômenos em meios micro-heterogêneos periódicos unidimensionais, caracterizados pela variação rápida de suas propriedades em relação à posição. Seja ε, onde $0 < \varepsilon \ll 1$, o parâmetro pequeno geométrico que representa o comprimento característico da célula básica (ou de periodicidade), a qual se repete regularmente sobre a estrutura do meio. Assim, a célula básica destes meios é definida pelo intervalo $[0, \varepsilon]$.

Dado um meio unidimensional, este é idealizado como uma barra de comprimento unitário, representada pelo intervalo $[0, 1] \subset \mathbb{R}$. Portanto, a análise sobre o intervalo $[0, 1]$ é equivalente à análise sobre a célula básica. Seja $x \in [0, 1]$ a variável macroscópica, também chamada de variável global ou lenta. Com base na separação de escalas e no comportamento periódico do meio, define-se uma nova variável, $y = x/\varepsilon \in [0, \varepsilon^{-1}]$, onde y é a variável microscópica, chamada de variável local ou rápida.

Os fenômenos nesses meios são modelados por equações diferenciais com coeficientes que variam rapidamente em relação à posição, as quais são representados por $a^\varepsilon(x) = a\left(x/\varepsilon\right) = a(y)$. Esses coeficientes são obtidos a partir de relações constitutivas, condições de fechamento ou leis de conservação. Devido à ε-periodicidade da microestrutura, o coeficiente $a^\varepsilon(x)$ é ε-periódico, ou seja, $a^\varepsilon(x + \varepsilon) = a^\varepsilon(x)$ para todo $x \in [0, 1]$. A título de exemplo, a Figura 6 representa o comportamento rapidamente oscilante da função

$$a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = 1 + 0.25\cos\left(2\pi\frac{x}{\varepsilon}\right),$$

em que fica evidente sua rápida variação à medida que ε decresce.

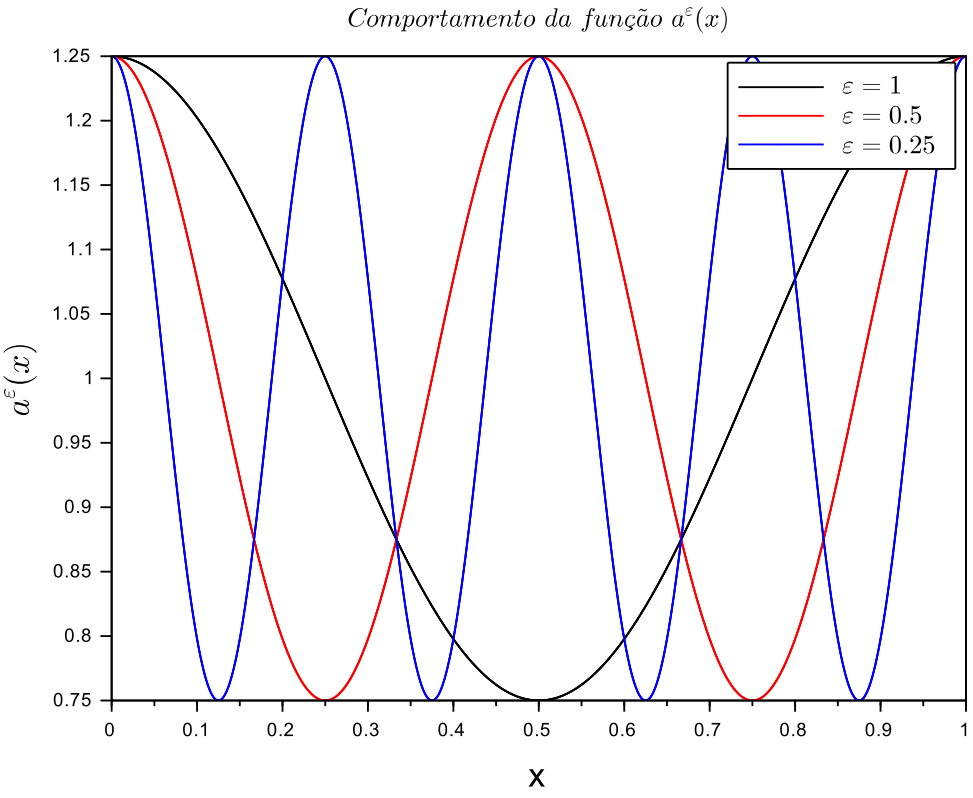

Figura 6 – Representação gráfica da função $a\left(x/\varepsilon\right) = 1 + 0.25\cos\left(2\pi\dfrac{x}{\varepsilon}\right)$.
Fonte: O autor.

Devido à periodicidade da microestrutura, conclui-se que o intervalo $[0,1]$ pode ser entendido como a repetição regular do intervalo $[0,\varepsilon]$, assumindo-se que há n repetições, com $n \in \mathbb{N}$. Assim, de forma natural, segue que $[0,1] = [0,n\varepsilon]$, para algum $n \in \mathbb{N}$, ou seja, $1 = n\varepsilon$, o que implica que $\varepsilon = 1/n$. Portanto, a variável local pode ser reescrita como $y = nx \in [0,n]$, para algum $n \in \mathbb{N}$. Além disso, pela ε-periodicidade da variável global $a^\varepsilon(x)$, conclui-se que, na variável local, $a(y)$ é 1-periódico. Com efeito

$$a(y+1) = a\left(\frac{x}{\varepsilon}+1\right) = a\left(\frac{x+\varepsilon}{\varepsilon}\right) = a^\varepsilon(x+\varepsilon) = a^\varepsilon(x) = a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = a(y)\,.$$

Assim, a modelagem do problema na escala local pode ser considerada em $y \in [0,1]$. Logo, em resumo, o problema tratado na variável global $x \in [0,1]$, pode ser considerado sobre $x \in [0,\varepsilon]$, dada a ε-periodicidade da estrutura e do coeficiente que representa as propriedades do meio. Em decorrência da natureza do problema e visando uma abordagem sobre a escala local, dada a heterogeneidade na escala global e a ε-periodicidade das propriedades do meio, é possível que a análise sobre a escala $y \in [0,n]$ seja feita de maneira equivalente sobre $y \in [0,1]$. Assim, no contexto do MHA, isto facilita o processo de determinação do meio homogêneo equivalente e

de suas propriedades efetivas.

No que diz respeito às propriedades do meio, o interesse em obter um valor médio para determinada propriedade ocorre de forma recorrente. De forma geral, para avaliar o valor médio de certa propriedade $a^\varepsilon(x)$ sobre a escala global $x \in [0, l]$, onde $l = n\varepsilon$, utiliza-se o operador de valor médio

$$\frac{1}{l}\int_0^l a^\varepsilon(x)\,dx = \frac{n}{n\varepsilon}\int_0^\varepsilon a^\varepsilon(x)\,dx = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon a^\varepsilon(x)\,dx\,, \tag{2.1.1}$$

ou seja, a média sobre todo o meio equivale a média sobre a célula básica.

Assim, ao realizar a mudança de variável em (2.1.1), com $y = x/\varepsilon$, a média sobre a célula básica se resume a

$$\int_0^1 a(y)\,dy. \tag{2.1.2}$$

2.2 Modelo de vigas do tipo Euler-Bernoulli

Também conhecida como Teoria Clássica de Vigas, a teoria de vigas de Euler-Bernoulli é uma ferramenta fundamental na engenharia estrutural para descrever o fenômeno da deflexão, que se refere ao estudo da resposta de vigas submetidas a diferentes tipos de carregamentos. A teoria recebe esse nome em homenagem a Leonhard Euler e Daniel Bernoulli, que fizeram contribuições significativas para o desenvolvimento da teoria de vigas, conforme pode ser verificado em Euler (1744).

Neste modelo, as vigas são tratadas como estruturas unidimensionais, nas quais as deformações transversais são negligenciadas em comparação com as deformações axiais. Isso implica que as seções transversais das vigas permanecem planas e perpendiculares ao eixo da viga antes e após a deformação.

Com base na literatura, como por exemplo Öchsner (2021), as principais características do modelo Euler-Bernoulli incluem:

Equação de Equilíbrio: O modelo é baseado na equação de equilíbrio da viga, que relaciona as forças externas aplicadas à viga com as reações nos apoios e as forças internas na viga.

Hipótese de Pequenas Deformações: Ele assume que as deformações são pequenas o suficiente para que o ângulo entre as fibras na seção transversal e o eixo da viga permaneça pequeno.

Relação Esforço-Deformação: O modelo descreve a relação entre os esforços internos (momento fletor e força cortante) e as deformações ao longo do comprimento da viga.

Equação da Linha Elástica: Uma das soluções fundamentais é a equação da linha elástica, que descreve a forma da viga sob carga, relacionando a deflexão da viga com as forças aplicadas.

Soluções Analíticas Simples: Devido à sua simplificação, o modelo Euler-Bernoulli permite soluções analíticas relativamente simples para uma variedade de problemas de engenharia civil e mecânica.

Apesar de suas simplificações, o modelo de vigas de Euler-Bernoulli é amplamente utilizado e fornece resultados precisos para muitas aplicações práticas, como o projeto estrutural de edifícios, pontes e máquinas. No entanto, é importante estar ciente de suas limitações, especialmente em situações em que as deformações transversais não podem ser negligenciadas, como em vigas muito curtas ou sob cargas extremas. Para esses casos, existem outras teorias, como, por exemplo, a teoria de vigas de Timoshenko.

A equação que rege o comportamento dinâmico da deflexão lateral de vigas sujeita a um carregamento é expressa por

$$\rho A(x)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = f(x,t)\,,$$

sendo que ρ é a densidade da viga, $A(x)$ é a área da seção transversal da viga, $f(x,t)$ o carregamento, $M(x,t)$ o momento fletor e $w(x,t)$ o deslocamento lateral (RAO, 2016).

Dada a relação entre momento fletor e deflexão

$$M(x,t) = EI(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},$$

em que $I(x)$ é o momento de inércia e E o módulo de Young, tem-se a equação do modelo de vigas do tipo Euler-Bernoulli

$$\rho A(x)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[EI(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right] = f(x,t). \tag{2.2.1}$$

A equação é complementada com condições de contorno, que dependem da configuração da viga, e também com condições iniciais, definindo assim o modelo de vigas do tipo Euler-Bernoulli. Considerando as configurações de vigas mais comuns (RAO, 2016), que se diferenciam de acordo com as condições de contorno, temos:

1) Extremidade livre:

$$\text{Momento fletor} = EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0\,;$$

$$\text{Força de cisalhamento} = \frac{\partial}{\partial x}\left(EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) = 0\,.$$

2) Extremidade simplesmente apoiada (pinada):

$$\text{Deflexão} = w = 0\,;$$

$$\text{Momento fletor} = EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0\,.$$

3) Extremidade fixada (engastada):

$$\text{Deflexão} = w = 0\,;$$

$$\text{Inclinação} = \frac{\partial w}{\partial x} = 0\,.$$

2.3 Conceitos básicos

Definição 2.3.1 *(Símbolo de ordem $\mathcal{O}$ grande): Sejam o domínio $D \subset \mathbb{R}$, e o conjunto $E \subset \mathbb{R}^*_+$ de valores do parâmetro ε, $0 < \varepsilon \ll 1$. Seja B_ε o espaço normado das funções $f : D \to \mathbb{R}$ com lei de formação $x \mapsto f(x,\varepsilon)$ e norma $||f(x,\varepsilon)||_{B_\varepsilon}$ definida para cada $\varepsilon \in E$. A notação $f(x,\varepsilon) = \mathcal{O}(\varepsilon^N)$, $N \in \mathbb{R}$, quando $\varepsilon \to 0^+$ na norma de B_ε é equivalente a afirmar que existem constantes $A, \varepsilon_0 \in \mathbb{R}^*_+$ tais que $||f(x,\varepsilon)||_{B_\varepsilon} \leq A\varepsilon^N$ para $0 < \varepsilon < \varepsilon_0 \ll 1$ (BAKHVALOV; PANASENKO, 1989).*

Isto significa que, para cada ε, a função $f(x,\varepsilon)$ se torna limitada por $A\varepsilon^N$. Como se considera $\varepsilon < \varepsilon_0$, segue que, para todo ε a função $f(x,\varepsilon)$ é limitada por $A\varepsilon_0^N$.

Definição 2.3.2 *(Expansão assintótica (EA)): Sejam $f, g_k : D \to \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$, funções do espaço normado B_ε para cada $\varepsilon \in E$. A série infinita $\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k g_k(x,\varepsilon)$ é uma expansão assintótica de $f(x,\varepsilon)$ se, e somente se, para qualquer $N \in \mathbb{N}$, existe um número M_0 tal que, se $m > M_0$, então*

$$f(x,\varepsilon) - \sum_{k=0}^{m} \varepsilon^k g_k(x,\varepsilon) = \mathcal{O}(\varepsilon^N)\,, \tag{2.3.1}$$

quando $\varepsilon \to 0^+$ na norma de B_ε(BAKHVALOV; PANASENKO, 1989).

Notação: $f(x,\varepsilon) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k g_k(x,\varepsilon)$.

Ou seja, uma EA de f é uma série tal que todos os seus truncamentos, a partir de um certo número de termos, são boas aproximações de f.

Definição 2.3.3 *(Solução assintótica formal (SAF)). Sejam os espaços normados $B_{1\varepsilon}$ e $B_{2\varepsilon}$, a função $f \in B_{2\varepsilon}$ e o operador $L^\varepsilon : B_{1\varepsilon} \to B_{2\varepsilon}$ para cada $\varepsilon \in E$. Seja $u^\varepsilon \in B_{1\varepsilon}$, $u^\varepsilon(x) = u(x,\varepsilon)$, a solução exata da equação*

$$L^\varepsilon u^\varepsilon = f. \tag{2.3.2}$$

Uma SAF de (2.3.2) é uma série infinita, não necessariamente convergente,

$$u^{(\infty)}(x,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u_k(x,\varepsilon), \quad u_k \in B_{1\varepsilon}, \tag{2.3.3}$$

tal que para qualquer $N \in \mathbb{R}_+$, existe $M(N) \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m > M(N)$ vale a relação

$$L^\varepsilon u^{(m)} - f = \mathcal{O}(\varepsilon^N), \tag{2.3.4}$$

em que

$$u^{(m)}(x,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{m} \varepsilon^k u_k(x,\varepsilon),$$

quando $\varepsilon \to 0^+$ na norma de $B_{2\varepsilon}$ (BAKHVALOV; PANASENKO, 1989).

Observa-se que a relação em (2.3.4) estabelece que, para $m \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, todo truncamento $u^{(m)}$ da SAF $u^{(\infty)}$ aproxima a solução exata u^ε de (2.3.2) com erro não maior que um múltiplo de ε^N. Ou seja, as imagens pelo operador L^ε de todo truncamento da SAF, a partir de um certo número de termos, são boas aproximações do termo independente f da equação diferencial. Embora as definições de EA e SAF sejam de certa forma semelhantes, as EA's aproximam funções independentemente do contexto em que ocorrem. Entretanto, as SAF's aproximam funções que são soluções de equações diferenciais, sem serem, em geral, EA's dessas funções. Ainda assim, sob certas condições, as expressões para EA e SAF podem coincidir.

Proposição 2.3.4 *(Condições para uma SAF ser EA da solução exata de $L^\varepsilon u^\varepsilon = f$). Seja L^ε o operador em (2.3.2). Se L^ε é linear e existem constantes $A_1 \in \mathbb{R}_+^*, A_2 \in \mathbb{R}^*$ independentes de ε, tais que $||u^\varepsilon||_{B_{1\varepsilon}} \leq A_1 \varepsilon^{A_2} ||f||_{B_{2\varepsilon}}$, então a SAF (2.3.3) é uma EA da solução exata u^ε.*

Demonstração:

Seja $u^{(\infty)}$ uma SAF de (2.3.2). Da definição 2.3.3 tem-se que para todo $N \in \mathbb{N}$ existe $M = M(N)$ tal que (2.3.4) é verdadeira para todo $m \geq M$ quando $\varepsilon \to 0^+$ na norma de B_2. Assim, de (2.3.4) segue que

$$L^\varepsilon u^{(m)} - f = \mathcal{O}(\varepsilon^N) \Longrightarrow L^\varepsilon u^{(m)} - L^\varepsilon u^\varepsilon + L^\varepsilon u^\varepsilon - f = \mathcal{O}(\varepsilon^N).$$

Portanto, de (2.3.2) e da linearidade do operador L^ε tem-se

$$L^\varepsilon (u^{(m)} - u^\varepsilon) = \mathcal{O}(\varepsilon^N). \tag{2.3.5}$$

Tomando $U^\varepsilon = u^{(m)} - u^\varepsilon$ e $F^\varepsilon = \mathcal{O}(\varepsilon^N)$, segue de (2.3.5) a seguinte expressão

$$L^\varepsilon U^\varepsilon = F^\varepsilon .$$

Aplicando a estimativa

$$\left|\left|U^{\varepsilon}\right|\right|_{B_{1\varepsilon}} \leq A_1 \varepsilon^{A_2} ||F^{\varepsilon}||_{B_{2\varepsilon}} ,$$

segue da definição 2.3.1 que existem constantes positivas A_3 e ε_0 tais que

$$\left|\left|U^{\varepsilon}\right|\right|_{B_{1\varepsilon}} \leq A_1 \varepsilon^{A_2} A_3 \varepsilon^{N} , \tag{2.3.6}$$

para todo ε, tal que $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$.

Considerando A uma constante independente de ε tal que $A \geq A_1 \varepsilon_0^{A_2} A_3$, segue de (2.3.6)

$$\left|\left|U^{\varepsilon}\right|\right|_{B_{1\varepsilon}} \leq A \varepsilon^{N} ,$$

ou seja,

$$\left|\left|u^{(m)} - u^{\varepsilon}\right|\right|_{B_{1\varepsilon}} \leq A \varepsilon^{N} , \tag{2.3.7}$$

para todo ε, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$.

Portanto, com base na definição 2.3.1 e (2.3.7), segue que $u^{\varepsilon} \sim u^{(\infty)}$. CQD

2.4 Estimativas via princípios do máximo

Teorema 2.4.1 *(Estimativa via princípio do máximo generalizado para problemas hiperbólicos:) Seja* $u \in H_0^1((0,1)^d \times (0,T))$, $(0,1)^d \subset \mathbb{R}^d$, $d \in \{1,2,3\}$, *a solução generalizada do problema*

$$\begin{cases} R(x,t)\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + S(x,t)\dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ij}(x)\dfrac{\partial u}{\partial x_j}\right) \\ + B_i(x,t)\dfrac{\partial u}{\partial x_i} + A(x,t)u = f(x,t) + \dfrac{\partial f_i(x,t)}{\partial x_i} \ , \ x \in (0,1)^d / \partial(0,1)^d \ , \ t \in (0,T) \\ u\big|_{\partial(0,1)^d} = 0 \ , \ t \in (0,T) \\ u(x,0) = \psi_1(x) \ , \ \psi_1(x) \in H_0^1((0,1)^d) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi_2(x) \ , \ \psi_2 \in L^2((0,1)^d) \end{cases} , \tag{2.4.1}$$

em que $R(x,t) \geq R_0 > 0$, $S(x,t) \geq S_0 > 0$, R_0 *e* S_0 *constantes. Os coeficientes* A_{ij} *satisfazem as condições de simetria* $A_{ij}(x) = A_{ji}(x)$ *e positividade* $A_{ij}\eta_i\eta_j \geq k\eta_i\eta_j$, $\forall \eta \in \mathbb{R}^d$, *com* $k > 0$ *constante. Para a solução* u, *vale a seguinte estimativa:*

$$\|u\|_{H_0^1((0,1)^d\times(0,T))} \leq c\Bigg(\|\psi_1(x)\|_{H_0^1((0,1)^d)} + \|\psi_2(x)\|_{L^2((0,1)^d)} + \|f\|_{L^2((0,1)^d\times(0,T))} + \sum_{i=1}^{s} \left(\left\| \frac{\partial f_i}{\partial t} \right\|_{L^2((0,1)^d\times(0,T))} + \max_{t\in(0,T)} \|f_i\|_{L^2((0,1)^d)} \right) \Bigg), \quad (2.4.2)$$

em que c depende de T (BAKHVALOV; PANASENKO, 1989).

2.5 Lemas e resultados acerca de funções periódicas

Proposição 2.5.1 *Se $f(x)$ é uma função integrável ε-periódica, então o valor I da integral definida*

$$I = \int_x^{x+\varepsilon} f(s)\, ds \quad (2.5.1)$$

não depende do valor de x.

Demonstração:

Seja $x = m\varepsilon + \eta$, $m \in \mathbb{N}$ e $\eta \in [0, \varepsilon)$. Assim, de (2.5.1)

$$I = \int_x^{x+\varepsilon} f(s)\, ds = \int_{m\varepsilon+\eta}^{(m+1)\varepsilon+\eta} f(s)\, ds = \int_{m\varepsilon+\eta}^{(m+1)\varepsilon} f(s)\, ds + \int_{(m+1)\varepsilon}^{(m+1)\varepsilon+\eta} f(s)\, ds$$

Fazendo a mudança de variáveis $s = m\varepsilon + \alpha$ e $s = (m+1)\varepsilon + \beta$, tem-se

$$I = \int_\eta^\varepsilon f(\alpha + m\varepsilon)\, d\alpha + \int_0^\eta f(\beta + (m+1)\varepsilon)\, d\beta \quad (2.5.2)$$

Utilizando a ε-periodicidade de $f(x)$, segue de (2.5.2)

$$I = \int_\eta^\varepsilon f(\alpha)\, d\alpha + \int_0^\eta f(\beta)\, d\beta = \int_0^\eta f(\beta)\, d\beta + \int_\eta^\varepsilon f(\alpha)\, d\alpha = \int_0^\varepsilon f(t)\, dt\,.$$

Portanto, segue o resultado. CQD

Proposição 2.5.2 *Dada uma função $f(x)$ 1-periódica, então para todo $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(x)$ é também 1-periódica.*

Demonstração:

Como a demonstração é feita sob as ordens das derivadas da função $f(y)$, a qual são números naturais, pode-se utilizar a técnica de indução finita. Para isso, supõe-se que $f(y) \in \mathcal{C}^n$, então se $f(y)$ é 1-periódica, segue da definição de derivada

$$f'(x+1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+1+h) - f(x+1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x).$$

Logo, $f'(x)$ é uma função 1-periódica.

Supondo então que $f^{(n)}(x)$ é 1-periódica, temos que

$$f^{(n+1)}(x+1) = (f^{(n)}(x+1))' = \lim_{h\to 0} \frac{f^{(n)}(x+1+h) - f^{(n)}(x+1)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{f^{(n)}(x+h) - f^{(n)}(x)}{h} = f^{(n+1)}(x).$$

Portanto, segue o resultado. CQD

Proposição 2.5.3 *Dada $f(x)$ integrável e 1-periódica, então uma condição necessária e suficiente para que suas antiderivadas sejam 1-periódicas é que $\langle f(x)\rangle = 0$. Além disso, existe uma antiderivada de $f(x)$ cuja média também é nula.*

Demonstração:

Condição necessária: Seja $F(x)$ uma antiderivada de $f(x)$. Então pela primeira parte do Teorema fundamental do Cálculo, tem-se

$$F(x) = \int_0^x f(s)\,ds + C\ . \tag{2.5.3}$$

Note que de (2.5.3) tem-se

$$F(x+1) - F(x) = \int_0^{x+1} f(s)\,ds - \int_0^x f(s)\,ds = \int_x^{x+1} f(s)\,ds = \int_0^1 f(s)\,ds = \langle f(x)\rangle = 0\ .$$

Logo, é garantida a 1-periodicidade de $F(x)$.

Condição suficiente: Seja $f(x)$ 1-periódica e $F(x)$ uma antiderivada de $f(x)$ também 1-periódica. Assim de (2.5.3) e da proposição 2.5.1

$$0 = F(y+1) - F(y) = \int_y^{y+1} f(s)\,ds = \int_0^1 f(s)\,ds = \langle f(y)\rangle$$

Então, $\langle f(y)\rangle = 0$.

Para completar a demonstração, note que (2.5.3) define uma família de antiderivadas, em que a unicidade destas depende da fixar a constante C. Assim, considerando

$$C = -\left\langle \int_0^y f(t)\,dt \right\rangle,$$

tem-se uma antiderivada de média nula. CQD

Lema 2.5.4 *(Condição necessária e suficiente para a existência e unicidade de solução 1-periódica de $\mathcal{L}N = F$ de segunda ordem)*

Sejam $F(y)$ e $a(y)$ funções 1-periódicas, com $a(y)$ diferenciável, estritamente positiva e limitada e $y \in (0, n)$. Uma condição necessária e suficiente para a existência de solução $N(y)$ 1-periódica da equação $\mathcal{L}N = F$, com $\mathcal{L} \equiv \dfrac{d}{dy}\left(a(y)\dfrac{d}{dy}\right)$, é que $\langle F(y)\rangle = 0$, em que $\langle\cdot\rangle \equiv \displaystyle\int_0^1 F(y)dy$ é o operador de valor médio. Tal solução 1-periódica é única salvo uma constante aditiva, ou seja, $N(y, C) = \tilde{N}(y) + C$ em que $\tilde{N}(0) = 0$ ou $\left\langle \tilde{N}(y)\right\rangle = 0$ (BAKHVALOV; PANASENKO, 1989).

Demonstração:

Condição necessária: Seja a função $N(y)$ 1-periódica que é solução da equação $\mathcal{L}N = F$, ou seja,

$$\frac{d}{dy}\left(a(y)\frac{dN}{dy}\right) = F(y)\,, y \in (0, n)\,. \tag{2.5.4}$$

Integrando (2.5.4) em $[0, n]$, levando em conta que $\int_0^n g(y)\,dy = n\int_0^1 g(y)\,dy$ para qualquer função $g(y)$ 1-periódica em $[0, n]$, $n \in \mathbb{N}$, tem-se

$$\langle F(y)\rangle = \int_0^1 F(y)\,dy = \int_0^1 \frac{d}{dy}\left(a(y)\frac{dN}{dy}\right)\,dy = \left(a(y)\frac{dN}{dy}\right)\Bigg|_{y=0}^{y=1} = 0,$$

o qual segue da 1-periodicidade de dN/dy herdada de $N(y)$ pela Proposição 2.5.2, a 1-periodicidade de $a(y)$ por hipótese, e o fato de que o produto de funções 1-periódicas é também 1-periódica.

Portanto, uma condição necessária para que a equação $\mathcal{L}N = F$ tenha solução $N(y)$ 1-periódica é que

$$\langle F(y)\rangle = \int_0^1 F(y)\,dy = 0\,. \tag{2.5.5}$$

Condição suficiente: Seja a função $F(y)$ 1-periódica tal que $\langle F(y)\rangle = 0$. Assim, integrando (2.5.4) em $[0, y]$, tem-se

$$a(y)\frac{dN}{dy} = \int_0^y F(s)\,ds + C_1\,.$$

Como $a(y)$ é positiva e limitada, pode-se isolar $\dfrac{dN}{dy}$ e integrar para obter a solução geral de $\mathcal{L}N = F$ da forma

$$N(y, C_1, C_2) = \int_0^y \frac{1}{a(t)}\left(\int_0^t F(s)\,ds + C_1\right)\,dt + C_2\,. \tag{2.5.6}$$

Portanto, é necessário encontrar os valores de $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ tais que (2.5.6) é 1-periódica tendo-se (2.5.5) como hipótese. De fato, basta encontrar C_1, pois a condição de 1-periodicidade $N(y+1, C_1, C_2) - N(y, C_1, C_2) = 0$ não depende da escolha de C_2.

Impondo a 1-periodicidade à $N(y, C_1, C_2)$ tem-se que

$$0 = N(y+1, C_1, C_2) - N(y, C_1, C_2) = \int_y^{y+1} \frac{1}{a(t)} \left(\int_0^t F(s)\, ds + C_1 \right) dt\,,$$

em que o integrando é uma função 1-periódica, pois $a(y)$, $F(y)$ e C_1 são 1-periódicas e, com (2.5.5) como hipótese, $\int_0^y F(s)\, ds$ é 1-periódica. Com efeito,

$$\int_0^{y+1} F(s)\, ds - \int_0^y F(s)\, ds = \int_y^{y+1} F(s)\, ds = \int_0^1 F(s)\, ds = \langle F(y) \rangle = 0\,,$$

em que a segunda igualdade segue da Proposição 2.5.1.

Logo, utilizando a Proposição 2.5.1, tem-se que a condição de 1-periodicidade é

$$0 = N(y+1, C_1, C_2) - N(y, C_1, C_2) = \int_0^1 \frac{1}{a(t)} \left(\int_0^t F(s)\, ds + C_1 \right) dt.$$

De isolar C_1 tem-se

$$C_1 = -\left\langle a^{-1}(y) \right\rangle^{-1} \left\langle \frac{1}{a(y)} \int_0^y F(s)\, ds \right\rangle \equiv \tilde{C}_1\,,$$

para o qual (2.5.6) fornece a solução 1-periódica de $\mathcal{L}N = F$ com $\langle F(y) \rangle = 0$, única salvo uma constante aditiva $C \equiv C_2$, da forma

$$N(y, C) = \int_0^y \frac{1}{a(t)} \left(\int_0^t F(s)\, ds + \tilde{C}_1 \right) dt + C\,,\ y \in (0,1), \tag{2.5.7}$$

CQD.

Observação 2.5.5 *(Sobre a unicidade da solução e implicações)*

i) Sendo (2.5.7) única salvo uma constante aditiva, é necessário impor uma condição adicional para garantir sua unicidade. Seguindo princípios mecânicos, é usual impor, por exemplo, que $N(0) = 0$ ou $\langle N(y) \rangle = 0$;

ii) É possível expressar (2.5.7) como $N(y, C) = \tilde{N}(y) + C$, em que a função $\tilde{N}(y) \equiv N(y, 0)$ é uma solução 1-periódica de $\mathcal{L}N = F$ tal que $\tilde{N}(0) = 0$;

iii) É possível expressar (2.5.7) como $N(y, C) = \tilde{N}(y) + \tilde{C}$, em que $\tilde{N}(y)$ é uma solução 1-periódica de $\mathcal{L}N = F$ tal que $\left\langle \tilde{N}(y) \right\rangle = 0$ e $\tilde{C}$ é uma constante arbitrária. De fato, utilizando o item anterior pode-se tomar $\tilde{N}(y) = N(y, 0) - \langle N(y, 0) \rangle$ como solução 1-periódica de $\mathcal{L}N = F$ e $\tilde{C} = \langle N(y, 0) \rangle + C$;

iv) Com base na proposição 2.5.2, tem-se que garantida a 1-periodicidade de $N(y)$*, então* $\left\langle \dfrac{d^n N}{dy^n} \right\rangle = 0$*, para todo* $n \in \mathbb{N}$*.*

Lema 2.5.6 *(Condição necessária e suficiente para a existência e unicidade de solução 1-periódica de* $LN = F$ *de quarta ordem)*

Sejam $F(y)$ *e* $a(y)$ *funções 1-periódicas, com* $a(y)$ *duas vezes continuamente diferenciável, estritamente positiva e limitada e* $y \in (0, n)$*. Uma condição necessária e suficiente para a existência de solução* $N(y)$ *1-periódica da equação* $LN = F$*, com* $L \equiv \dfrac{d^2}{dy^2}\left(a(y)\dfrac{d^2}{dy^2}\right)$*, é que* $\langle F \rangle = 0$*. Tal solução 1-periódica é única salvo uma constante aditiva, ou seja,* $N(y, C) = \tilde{N}(y) + C$ *em que* $\left\langle \tilde{N}(y) \right\rangle = 0$*.*

Demonstração:

Condição necessária: Seja a função $N(y)$ 1-periódica que é solução da equação $LN = F$, ou seja,

$$\frac{d^2}{dy^2}\left(a(y)\frac{d^2N}{dy^2}\right) = F(y)\,, y \in (0, n)\,. \tag{2.5.8}$$

Integrando (2.5.8) em $[0, 1]$ temos

$$\int_0^1 F(y)\,dy = \int_0^1 \frac{d^2}{dy^2}\left(a(y)\frac{d^2N}{dy^2}\right)\,dy = \frac{d}{dy}\left(a(y)\frac{d^2N}{dy^2}\right)\Bigg|_{y=0}^{y=1} = 0,$$

o qual segue da 1-periodicidade de $N(y)$ e $a(y)$ por hipótese. Com efeito, da proposição 2.5.2 tem-se que $\dfrac{d^2N}{dy^2}$ é 1-periódica, e como o produto de funções periódicas é também uma função periódica, segue que $a(y)\dfrac{d^2N}{dy^2}$ é uma função 1-periódica. Assim, pela proposição 2.5.2 segue que $\dfrac{d}{dy}\left(a(y)\dfrac{d^2N}{dy^2}\right)$ é uma função 1-periódica. Portanto, uma condição necessária para que a equação $LN = F$ tenha solução $N(y)$ 1-periódica é que

$$\langle F(y) \rangle = \int_0^1 F(y)\,dy = 0\,. \tag{2.5.9}$$

Condição suficiente: Seja a função $F(y)$ 1-periódica tal que $\langle F(y) \rangle = 0$. Assim, integrando (2.5.8) em $[0, y]$, segue que

$$\frac{d}{dy}\left(a(y)\frac{d^2N}{dy^2}\right) = F_1(y)\,, \tag{2.5.10}$$

em que se define

$$F_1(y) \equiv \int_0^y F(s)\,ds + C_1\,. \tag{2.5.11}$$

Integrando (2.5.10) em $[0, y]$, tem-se

$$a(y)\frac{d^2N}{dy^2} = F_2(y)\,, \tag{2.5.12}$$

em que se define

$$F_2(y) \equiv \int_0^y F_1(s)\,ds + C_2\ . \tag{2.5.13}$$

Como $a(y)$ é uma função positiva e limitada, decorre de (2.5.12)

$$\frac{d^2N}{dy^2} = \frac{F_2(y)}{a(y)}\,, \tag{2.5.14}$$

Integrando (2.5.14) em $[0, y]$, $y \in (0, 1)$, segue que

$$\frac{dN}{dy} = F_3(y)\,, \tag{2.5.15}$$

em que se define

$$F_3(y) \equiv \int_0^y \frac{F_2(s)}{a(s)}\,ds + C_3\,. \tag{2.5.16}$$

Integrando (2.5.15) em $[0, y]$, $y \in (0, 1)$, tem-se

$$N(y) = \int_0^y F_3(s)\,ds + C_4\ . \tag{2.5.17}$$

Por conseguinte, devem-se encontrar os valores de C_1, C_2 e $C_3 \in \mathbb{R}$ tais que (2.5.17) é 1-periódica tendo-se (2.5.9) como hipótese, pois a 1-periodicidade não depende da escolha de C_4.

De (2.5.17) segue que $N(y)$ é uma antiderivada de $F_3(y)$. Então, garantindo que $F_3(y)$ seja 1-periódica e de média nula, pela proposição 2.5.3 segue a 1-periodicidade de $N(y)$. Logo, para que $\langle F_3(y)\rangle = 0$, tem-se de (2.5.16) que

$$C_3 = -\left\langle \int_0^y \frac{F_2(s)}{a(s)}\,ds \right\rangle\ . \tag{2.5.18}$$

Para garantir a 1-periodicidade de $F_3(y)$, note que de (2.5.16) segue que $F_3(y)$ é uma antiderivada de $\dfrac{F_2(y)}{a(y)}$. Então, garantindo que $\dfrac{F_2(y)}{a(y)}$ seja 1-periódica e de média nula, utilizando a proposição 2.5.3, segue a 1-periodicidade de $F_3(y)$.

Assim, note que para $\left\langle \dfrac{F_2(y)}{a(y)} \right\rangle = 0$, segue de (2.5.12) e (2.5.13) que

$$C_2 = -\left\langle a^{-1}(y)\right\rangle \left\langle a^{-1}(y) \int_0^y F_1(s)\,ds \right\rangle\ . \tag{2.5.19}$$

Para garantir a 1-periodicidade de $\dfrac{F_2(y)}{a(y)}$ basta provar a 1-periodicidade de $F_2(y)$, uma vez que $a(y)$ é 1-periódica por hipótese e a divisão de funções 1-periódicas é uma função 1-periódica. Assim, note que de (2.5.13) segue que $F_2(y)$ é uma antiderivada de $F_1(y)$. Então, garantindo que $F_1(y)$ seja 1-periódica e de média nula, utilizando a proposição 2.5.3, segue a 1-periodicidade de $F_2(y)$.

Então, para que $\langle F_1(y)\rangle = 0$ tem-se de (2.5.11)

$$C_1 = -\left\langle \int_0^y F(s)\,ds \right\rangle \ . \tag{2.5.20}$$

Segue de (2.5.11) que $F_1(y)$ é uma antiderivada de $F(y)$, que por hipótese é 1-periódica. Assim, com a condição (2.5.9), é garantida a 1-periodicidade de $F_1(y)$ pela proposição 2.5.3. Portanto, segue da 1-periodicidade de $F_1(y)$, $F_2(y)$ e $F_3(y)$ e as expressões em (2.5.18), (2.5.19) e (2.5.20) que $N(y)$ é 1-periódica. E tem-se de (2.5.17) tomando $C_4 \equiv C$ a seguinte expressão

$$N(y,C) = \int_0^y \left(\int_0^z \frac{1}{a(w)} \left[\int_0^w \left(\int_0^t F(s)\,ds + C_1 \right) dt + C_2 \right] dw + C_3 \right) dz + C\,, \tag{2.5.21}$$

em que C_1, C_2 e C_3 são dados em (2.5.18), (2.5.19) e (2.5.20), respectivamente. CQD.

Observação 2.5.7 *(Sobre a unicidade da solução e implicações)*

i) Sendo (2.5.21) única salvo uma constante aditiva, é necessário impor uma condição adicional para garantir sua unicidade. Neste contexto, a condição de unicidade será $\langle N(y)\rangle = 0$.

ii) É possível demonstrar o Lema com o auxílio do Lema 2.5.4 para o operador L *e isto é feito garantindo que a função* $\frac{dN}{dy}$ *é 1-periódica na equação (2.5.10). E feito isso, verifica-se que os valores das constantes que garantem a 1-periodicidade de* $N(y)$ *são as mesmas.*

iii) Como a proposição 2.5.3 apresenta uma condição necessária e suficiente para garantir a 1-periodicidade das antiderivadas de uma função 1-periódica, isso se traduz em dizer que essa condição é a única maneira de se obter tal resultado. E isso implica na fixação de três, das quatro constantes de integração da equação diferencial, no processo de encontrar condições que garantam a 1-periodicidade da solução da equação, sendo estas, as de média nula para as derivadas da solução.

iv) Vale ressaltar que este resultado é original (salvo melhor conhecimento).

2.6 Definições e resultados da análise funcional

Definição 2.6.1 *Seja $1 \leq p < \infty$ e um $f : D \to \mathbb{R}$ uma função mensurável no sentido de Lebesgue. Então a norma L^p é definida como*

$$||f||_{L^p(D)} = \begin{cases} \left(\int_D |f|^p dx \right)^{1/p}, \ 1 \leq p < \infty \\ ess \sup_D |f|, \ p = \infty \end{cases}, \tag{2.6.1}$$

em que $L^p(D)$ é o espaço das funções p-integráveis com norma

$$||f||_{L^p(D)} = \sqrt[p]{\int_D |f|^p dx},$$

e

$$ess \sup_D |f| = inf\{M \in \mathbb{R} | \mu(\{x \in \mathbb{R} | f(x) > M\}) = 0\},$$

sendo μ a medida de Lebesgue.

Definição 2.6.2 *(Espaço de Hilbert): Seja H um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$, com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \to \mathbb{K}$. Então H chama-se espaço de Hilbert se e somente se for completo com norma induzida pelo produto interno $|| \cdot ||_H \equiv \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$.*

Definição 2.6.3 *(Espaço de Sobolev) Sejam $p \in [1, \infty] \in \overline{\mathbb{R}}$ e um domínio limitado $D \in \mathbb{R}^n$. Um espaço de Sobolev é o espaço vetorial completo normado*

$$W^{k,p}(D) = \left\{ f : \frac{\partial^j f}{\partial x_i^j} \in L^p(D), \ i = \overline{1, ..., n}, \ j = \overline{0, ..., k} \right\},$$

em que as derivadas devem ser tomadas no sentido generalizado[1] *e norma*

$$||f||_{W^{k,p}(D)} = \sqrt[p]{||f||_{L^p(D)} + \sum_{(p,q)=(i,j)}^{(n,k)} \left|\left| \frac{\partial^j f}{\partial x_i^j} \right|\right|_{L^p(D)}}. \tag{2.6.2}$$

Para o estudo é conveniente definir o espaço $H^2(D)$, o qual é obtido tomando $k = p = 2$ em (2.6.2). Também defini-se o espaço $H_0^2(D)$, a qual é o conjunto das funções $f \in H^2(D)$ que tem suporte compacto em D, ou seja,

$$H_0^2(D) = \{ f : f \in H^2(D), f\big|_{\partial D} = 0 \},$$

em que $H_0^2(D)$ herda a norma e o produto interno de $H^2(D)$.

[1] Ou seja, a expressão que decorre de $\langle u', \phi \rangle = -\langle u, \nabla \phi \rangle$ em que ϕ é uma função de teste com suporte compacto em D e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é o produto interno do espaço trabalhado.

Proposição 2.6.4 *Seja $D \in \mathbb{R}$ um domínio. Então existe uma constante C_D tal que*

$$||w||_{L^2(D)} \leq C_D \left|\left|\frac{d^2w}{dx^2}\right|\right|_{L^2(D)}, \forall w \in H_0^2(D)\,. \tag{2.6.3}$$

Demonstração:

Seja $I \subset \mathbb{R}$ tal que $D \subset I$ e seja $w \in H_0^2(D)$ e $\hat{w}$ a extensão por zero de w para I. Tem-se de forma imediata que $\hat{w} \in H_0^2(D)$ e

$$\left|\left|\frac{d^n w}{dx^n}\right|\right|_{L^2(D)} = \left|\left|\frac{d^n w}{dx^n}\right|\right|_{L^2(I)}, \forall w \in H_0^2(D)\,,\ n = 0, 1, 2\,.$$

Sem perda de generalidade, pode-se supor que $D = (a, a+b)$. Então, pelo TFC1, segue

$$w(x) = \int_a^x \frac{dw}{dt} dt\,.$$

Assim,

$$|w(x)|^2 = \left|\int_a^x \frac{dw}{dt} dt\right|^2\,, \tag{2.6.4}$$

em que pela desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} |w(x)|^2 = \left|\int_a^x \frac{dw}{dt} dt\right|^2 &\leq \left[\left(\int_a^x dx\right)^{1/2} \left(\int_a^x \left|\frac{dw}{dt}\right|^2 dt\right)^{1/2}\right]^2 \leq |x-a| \int_a^x \left|\frac{dw}{dt}\right|^2 dt \\ &\leq b \int_a^x \left|\frac{dw}{dt}\right|^2 dt \Longrightarrow |w(x)|^2 \leq b \int_a^x \left|\frac{dw}{dt}\right|^2 dt\,. \end{aligned} \tag{2.6.5}$$

Integrando (2.6.5) em D, tem-se

$$\int_D |w(x)|^2 dx \leq b^2 \int_D \left|\frac{dw}{dx}\right|^2 dx\,.$$

De forma análoga, segue que

$$\int_D \left|\frac{dw}{dx}\right|^2 dx \leq b^2 \int_D \left|\frac{d^2w}{dx^2}\right|^2 dx\,,$$

de onde decorre

$$\int_D |w(x)|^2 dx \leq b^4 \int_D \left|\frac{d^2w}{dx^2}\right|^2 dx. \tag{2.6.6}$$

E de extrair a raíz de (2.6.6), segue o resultado

$$\sqrt{\int_D |w(x)|^2\,dx} \leq |b|^2\sqrt{\int_D \left|\frac{d^2w}{dx^2}\right|^2 dx} \Longrightarrow ||w||_{L^2(D)} \leq C_D \left|\left|\frac{dw}{dx}\right|\right|_{L^2(D)},$$

para todo $w \in H_0^1(D)$. CQD.

Definição 2.6.5 *(Funcional linear) Seja H um espaço de Hilbert. Considere o funcional $\varphi : H \to \mathbb{R}$ com lei $u \mapsto \varphi(u)$, então este chama-se linear sobre H se e somente se $\varphi(u+v) = \varphi(u) + \varphi(v)$ e $\varphi(cu) = c\varphi(u)$, para $u, v \in H$ e $c \in \mathbb{R}$.*

Definição 2.6.6 *(Funcional linear contínuo) Seja H um espaço de Hilbert. O funcional linear $\varphi : H \to \mathbb{R}$ com lei $u \mapsto \varphi(u)$ chama-se contínuo sobre H se e somente se $|\varphi(u)| \leq c\,||\varphi(u)||_H$, para todo $u \in H$ e $c \in \mathbb{R}$.*

Definição 2.6.7 *(Forma bilinear) Seja H um espaço de Hilbert. Considere a aplicação $a : H \times H \to \mathbb{R}$ com lei $(u, v) \mapsto a(u, v)$, então esta chama-se forma bilinear sobre H se e somente se é linear em cada um de seus argumentos.*

Definição 2.6.8 *(Espaço dual) Dado um espaço vetorial V sobre um corpo $\mathbb{K}$, o espaço dual V^* é o conjunto dos funcionais lineares contínuos $\varphi : V \to \mathbb{R}$.*

Definição 2.6.9 *O espaço $L^\infty(D, \mathbb{R})$ é o conjunto de todas as funções $f : D \to \mathbb{R}$ que são essencialmente limitadas, ou seja, $f \in L^\infty(D, \mathbb{R})$ se*

$$||f||_\infty = ess\sup_D |f| < \infty\,.$$

Definição 2.6.10 *(Pareamento entre espaços vetoriais) Seja um espaço vetorial V e V^* seu espaço dual, então um pareamento entre $u \in V$ e $\phi \in V^*$ é definido como a ação de ϕ em v, denotado por*

$$\langle \phi, v \rangle = \phi(v)\,.$$

Teorema 2.6.11 *(Lax-Milgram) Seja $a : H \times H \to \mathbb{R}$ uma forma bilinear e $f : H^* \to \mathbb{R}$ um funcional linear contínuo.*

Se a forma bilinear satisfizer as propriedades:

1) (Coercitividade) Existe uma constante $\alpha > 0$ tal que

$$a(w, w) \geq \alpha||w||_H^2\,,\ \forall w \in H\,.$$

2) (Continuidade) Existe uma constante $\beta > 0$ tal que

$$a(w, v) \leq \beta||w||_H \cdot ||v||_H\,,\ \forall w, v \in H\,.$$

Então existe uma única solução $u \in H$ *tal que*

$$a(w, v) = \langle f, v \rangle_{H^*,H} \ .$$

Demonstração:

A demonstração deste resultado pode ser encontrada em BACHMAN; NARICI (2012). CQD.

Tendo estabelecido os fundamentos sobre meios microperiódicos, além de todos os pré-requisitos requeridos para o estudo, é possível agora avançar para a metodologia específica que permitirá a análise de estruturas microperiódicas com propriedades rapidamente oscilantes. A partir deste ponto, os conceitos do Método de Homogeneização Assintótica (MHA) serão aplicados para derivar soluções aproximadas de problemas diferenciais dinâmicos e estáticos de segunda e quarta ordem. O MHA se destaca pela capacidade de transformar sistemas complexos com coeficientes oscilantes em problemas efetivos sobre um meio homogêneo equivalente, simplificando consideravelmente o estudo de vibrações e deformações.

No capítulo 3, a metodologia detalhará o MHA, apresentando os modelos e técnicas de resolução a serem aplicados. Em seguida, o capítulo 4 aplicará esta metodologia a problemas específicos de ordem superior, estabelecendo a relação entre a solução exata e a homogeneizada e analisando as propriedades e aproximações resultantes das soluções assintóticas para os casos de barra vibrante e viga estática. Esse desenvolvimento permitirá não apenas obter coeficientes efetivos e modelagens simplificadas, mas também ilustrará, através de exemplos numéricos, a aplicabilidade do MHA em contextos práticos.

3 METODOLOGIA

3.1 Introdução

Neste capítulo, descrevemos os métodos matemáticos empregados na pesquisa, com ênfase na homogeneização matemática. O objetivo é apresentar as abordagens teóricas e computacionais adotadas para resolver problemas relacionados a materiais heterogêneos e à passagem ao limite quando o parâmetro de heterogeneidade tende a zero. Esse método é especialmente útil para problemas de mecânica de estruturas com periodicidade ou heterogeneidades em escalas menores que a de interesse, como em materiais compostos ou estruturas com microestruturas periódicas, que são abordados neste trabalho.

Em relação ao tipo de pesquisa, este estudo combina dois enfoques: teórico e aplicado. O aspecto teórico envolve a apresentação e prova de resultados, como teoremas e lemas, incluindo contribuições originais. O aspecto aplicado utiliza esses resultados para resolver problemas reais nas áreas de engenharia, física e mecânica.

3.2 Modelos abordados e técnicas de resolução

Conforme mencionado, o objetivo é aplicar a teoria da homogeneização matemática, especificamente o método de homogeneização assintótica, aos modelos de uma barra vibrante e de uma viga de Euler-Bernoulli, tanto no contexto estático quanto no dinâmico.

O estudo de barras vibrantes é essencial para descrever o comportamento dinâmico de estruturas submetidas a excitações periódicas. A equação que governa as vibrações transversais de uma barra não-homogênea é:

$$\rho(x,t)A(x,t)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(E(x,t)A(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right) = f(x,t), \tag{3.2.1}$$

onde ρ é a densidade do material, A é a área da seção transversal, E é o módulo de elasticidade (modelo de Young), $f(x,t)$ a força de corpo e $u(x,t)$ é o deslocamento transversal da barra. Mas como pretende-se adotar uma estrutura microperidica, à todas as propriedades da barra, considera-se a forma $g^\varepsilon(x,t) = g(x, x/\varepsilon, t)$. Ainda, a equação em (3.2.1) é complementada com condições iniciais e de contorno, obtendo-

se assim, o modelo de barras vibrantes.

Para resolver os modelos, utiliza-se uma combinação de métodos analíticos e numéricos. Para o modelo original, emprega-se a abordagem numérica de diferenças finitas centradas (BURDEN; FAIRES, 2016), uma vez que a equação apresenta coeficientes variáveis. Após a aplicação do Método de Homogeneização Assintótica (MHA), obtém-se um modelo assintoticamente equivalente ao original, mas com coeficientes constantes, o modelo homogeneizado. A solução deste modelo é encontrada utilizando-se a técnica de separação de variáveis e o princípio de Duhamel.

Conforme apresentado na subseção sobre o modelo de vigas de Euler-Bernoulli, a equação que rege o comportamento de deflexão dessas estruturas é a equação em (2.2.1). Para obter o modelo completo, complementa-se essa equação com condições iniciais e de contorno, considerando-se, para estas últimas, uma configuração determinada. Além disso, como se consideram estruturas microperiódicas, as propriedades da viga também são expressas na forma $g^{\varepsilon}(x,t)$, conforme apresentado anteriormente.

Este tópico é dividido em duas partes: o modelo dinâmico e o estático. Os exemplos numéricos foram restritos ao caso estático, cujas metodologias para a obtenção das soluções do modelo original e homogeneizado foram, respectivamente, diferenças finitas centradas e integração direta.

Em relação aos exemplos numéricos, destaca-se que estes foram desenvolvidos pelo próprio autor e, quanto aos softwares utilizados, empregaram-se o Octave e o Matlab.

3.3 Método de Homogeneização Assintótica

Para aplicar o método aos modelos, considera-se que as propriedades do material variam periodicamente em relação a ε, ou seja, são ε-periódicas. Ainda, denotam-se por $a^{\varepsilon}(x,t)$ as funções $E^{\varepsilon}(x,t)A^{\varepsilon}(x,t)$ e $E^{\varepsilon}(x,t)I^{\varepsilon}(x,t)$, que representam a rigidez axial e rigidez flexural, para o caso da barra vibrante e da viga, respectivamente. Mantém-se a mesma notação, pois tratam-se de modelos diferentes. Essa função é considerada estritamente positiva e limitada, sendo sua motivação baseada no uso dos lemas da seção preliminares.

A abordagem geral consiste em encontrar uma SAF em duas escalas do problema original, da forma:

$$u^{\varepsilon}(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k} u_k(x,y,t)\,,\ y = x/\varepsilon\,,$$

em que de substituir esta expressão no problema original e garantindo-se a existência desta SAF, constrói-se uma sequência recorrente de equações diferenciais, cujas

funções incógnitas são os coeficientes da SAF.

Para garantir a existência desses coeficientes, utilizam-se os lemas e, além disso, se impõe que $u_0(x,t)$, ou seja, o primeiro termo da SAF, seja solução do problema homogeneizado. Este problema, nada mais é, do que a equação do modelo original, na qual aplicou-se o operador de valor médio em relação à variável local y, para cada coeficiente da equação. Assim, o método busca encontrar uma equação governante para $u_0(x,t)$, que descreve o comportamento da estrutura com propriedades médias efetivas.

4 DESENVOLVIMENTO

4.1 MHA para um problema hiperbólico unidimensional de segunda ordem

4.1.1 Formulação do problema

Seja o parâmetro ε, $0 < \varepsilon \ll 1$. Para cada ε, considere $a^\varepsilon \in C^1(\Omega)$, $b^\varepsilon, f^\varepsilon \in C(\Omega)$, com $\Omega = [0,1] \times \mathbb{R}_+$, $a^\varepsilon(x,t) = a(x, x/\varepsilon, t)$, $b^\varepsilon(x,t) = b(x, x/\varepsilon, t)$ e $f^\varepsilon(x,t) = f(x, x/\varepsilon, t)$ funções ε-periódicas na segunda componente. Ainda, a e b são funções estritamente positivas e limitadas. Assim, considera-se o problema de valores iniciais e de contorno para a equação da onda: para cada $\varepsilon > 0$, procura-se $u^\varepsilon \in C^2(\Omega_1) \cap C^1(\Omega)$, onde $u^\varepsilon = u^\varepsilon(x,t)$ e $\Omega_1 = (0,1) \times \mathbb{R}_+^*$, tal que

$$\begin{cases} \mathcal{L}^\varepsilon u^\varepsilon \equiv b^\varepsilon(x,t)\dfrac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2} - \dfrac{\partial}{\partial x}\left(a^\varepsilon(x,t)\dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial x}\right) = f^\varepsilon(x,t), \quad x \in (0,1),\ t > 0 \\ \qquad u^\varepsilon(0,t) = u^\varepsilon(1,t) = 0\ ,\ t > 0 \\ \qquad u^\varepsilon(x,0) = p(x)\ ,\ \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(x,0) = q(x)\ ,\ x \in (0,1) \end{cases}, \tag{4.1.1}$$

que modela o comportamento mecânico dinâmico de uma barra unidimensional com estrutura micro-heterogênea localmente periódica, onde assume-se que os extremos da barra estão fixos, sendo b^ε a densidade de massa, a^ε a rigidez axial, f a força de corpo e p e q os deslocamentos e velocidades iniciais. Ainda, impõe-se que as condições de compatibilidade $p(0) = p(1) = 0$ devem ser satisfeitas.

4.1.2 O problema é bem-posto

Sejam $\phi^\varepsilon(x,t)$ e $\varphi^\varepsilon(x,t)$ duas soluções de (4.1.1). Pela linearidade do operador $\mathcal{L}^\varepsilon$, é válido que $\theta^\varepsilon(x,t) = \phi^\varepsilon(x,t) - \varphi^\varepsilon(x,t)$ é solução de (4.1.1). De aplicar a estimativa (2.4.2), adequando-a para o caso unidimensional, segue que $||\theta^\varepsilon(x,t)||_{H((0,1)\times(0,T))} = 0$, ou seja, $\phi^\varepsilon(x,t) = \varphi^\varepsilon(x,t)$, provando assim a unicidade da solução de (4.1.1).

Para provar a estabilidade, sejam $\phi^\varepsilon(x,t)$ e $\varphi^\varepsilon(x,t)$ soluções de (4.1.1), com o lado de direito de (4.1.1) sendo respectivamente $f^\varepsilon(x,t)$ e $g^\varepsilon(x,t)$. Assim, pela estimativa

(2.4.2), segue que

$$||\phi^{\varepsilon}(x,t) - \varphi^{\varepsilon}(x,t)||_{H((0,1)\times(0,T))} \leq C||f^{\varepsilon}(x,t) - g^{\varepsilon}(x,t)||_{H((0,1)\times(0,T))}, \tag{4.1.2}$$

o que mostra que pequenas variações dos dados iniciais geram pequenas alterações na solução do problema. Logo, o problema em (4.1.1) é também estável e, portanto, bem-posto.

4.1.3 Formalismo matemático do MHA

Consideram-se as variáveis globais e locais x e y, onde $y = x/\varepsilon$ com $\varepsilon = n^{-1}$, $n \in \mathbb{N}$. Assim, seja uma SAF de (4.1.1) em duas escalas da forma

$$u^{\varepsilon}(x,t) \sim u^{(2)}(x,t,\varepsilon) = u_0(x,y,t) + \varepsilon u_1(x,y,t) + \varepsilon^2 u_2(x,y,t)\,, \tag{4.1.3}$$

em que $u_k(x,y,t)$, $k \in \{0,1,2\}$, são funções duas vezes continuamente diferenciáveis em x, y e t, e também 1-periódicas em y. Note que com a introdução da variável y, segue que $a^{\varepsilon}(x,t) = a\,(x, x/\varepsilon, t) = a(x,y,t)$, onde da ε-periodicidade do coeficiente $a^{\varepsilon}(x,t)$, decorre a 1-periodicidade em y de $a(x,y,t)$. Com efeito

$$a(x,y+1,t) = a\left(x, \frac{x}{\varepsilon} + 1, t\right) = a\left(x, \frac{x+\varepsilon}{\varepsilon}, t\right) = a\left(x, \frac{x}{\varepsilon}, t\right) = a(x,y,t),$$

sendo que para as funções b e f o resultado é análogo.

Considerando que x e y são variáveis independentes, segue da regra da cadeia

$$\frac{\partial(\cdot)}{\partial x} = \frac{\partial(\cdot)}{\partial x} + \varepsilon^{-1}\frac{\partial(\cdot)}{\partial y}\,. \tag{4.1.4}$$

De aplicar (4.1.4) em (4.1.1), decorre que

$$\begin{aligned} 0 = \mathcal{L}^{\varepsilon}u^{\varepsilon} - f^{\varepsilon} &= b^{\varepsilon}(x,t)\frac{\partial^2 u^{\varepsilon}}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial}{\partial x} + \varepsilon^{-1}\frac{\partial}{\partial y}\right)\left[a^{\varepsilon}(x,t)\left(\frac{\partial}{\partial x} + \varepsilon^{-1}\frac{\partial}{\partial y}\right)\right]u^{\varepsilon} - f^{\varepsilon}(x,t) \\ &= \left(b(x,y,t)\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left[a(x,y,t)\frac{\partial}{\partial x}\right] - \varepsilon^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left[a(x,y,t)\frac{\partial}{\partial y}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[a(x,y,t)\frac{\partial}{\partial x}\right]\right)\right. \\ &\qquad \left. - \varepsilon^{-2}\frac{\partial}{\partial y}\left[a(x,y,t)\frac{\partial}{\partial y}\right]\right)u^{\varepsilon} - f(x,y,t), \end{aligned}$$

em que, definindo os operadores lineares

$$\mathcal{L}_{\alpha\beta} = \frac{\partial}{\partial\alpha}\left[a(x,y,t)\frac{\partial}{\partial\beta}\right],\ \alpha,\beta \in \{x,y\}, \tag{4.1.5}$$

tem-se

$$0 = \mathcal{L}^\varepsilon u^\varepsilon - f^\varepsilon = \left(b\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \mathcal{L}_{xx} - \varepsilon^{-1}\left(\mathcal{L}_{xy} + \mathcal{L}_{yx}\right) - \varepsilon^{-2}\mathcal{L}_{yy} \right) u^\varepsilon - f \ . \tag{4.1.6}$$

Substituindo (4.1.3) em (4.1.6) e agrupando os termos pelas potências de ε, segue

$$\begin{aligned} 0 \sim \mathcal{L}^\varepsilon u^{(2)} - f &= \left(b\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \mathcal{L}_{xx} - \varepsilon^{-1}\left[\mathcal{L}_{xy} + \mathcal{L}_{yx}\right] - \varepsilon^{-2}\mathcal{L}_{yy} \right) u^{(2)} - f \\ &= \left(b\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \mathcal{L}_{xx} - \varepsilon^{-1}\left[\mathcal{L}_{xy} + \mathcal{L}_{yx}\right] - \varepsilon^{-2}\mathcal{L}_{yy} \right) (u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2) - f \\ &= -\varepsilon^{-2}\mathcal{L}_{yy}u_0 - \varepsilon^{-1}(\mathcal{L}_{yy}u_1 + \mathcal{L}_{xy}u_0 + \mathcal{L}_{yx}u_0) \\ &\quad - \varepsilon^0 \left(-b\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + \mathcal{L}_{yy}u_2 + \mathcal{L}_{xy}u_1 + \mathcal{L}_{yx}u_1 + \mathcal{L}_{xx}u_0 + f \right) + \mathcal{O}(\varepsilon) \ , \end{aligned}$$

em que $\mathcal{O}(\varepsilon)$ representa a reunião dos termos que tendem a zero quando $\varepsilon \to 0^+$, ou seja, os termos que acompanham as potências positivas de ε.

Assim, para que a igualdade assintótica $\mathcal{L}^\varepsilon u^{(2)} - f^\varepsilon = \mathcal{O}(\varepsilon)$ seja verdadeira, ou seja, para se anularem os termos das potências não positivas de ε, deve-se garantir a existência de soluções u_k, $k \in \{0, 1, 2\}$, 1-periódicas em y da seguinte recorrência de equações diferenciais:

$$\begin{aligned} \varepsilon^{-2} &: \mathcal{L}_{yy}u_0 = 0 \\ \varepsilon^{-1} &: \mathcal{L}_{yy}u_1 = -\mathcal{L}_{xy}u_0 - \mathcal{L}_{yx}u_0 \\ \varepsilon^{0} &: \mathcal{L}_{yy}u_2 = b\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - \mathcal{L}_{xy}u_1 - \mathcal{L}_{yx}u_1 - \mathcal{L}_{xx}u_0 - f \end{aligned} \ . \tag{4.1.7}$$

Note que, para cada $x \in (0, 1)$ e $t > 0$ fixos, as equações em (4.1.7) são da forma $\mathcal{L}N = F$ com $F(y)$ e $a(x, y, t)$ 1-periódicas em y, onde notando que para x e t fixos, $\mathcal{L}_{yy} \equiv \mathcal{L}$, pode-se aplicar o Lema 2.5.4 a fim de garantir a existência de soluções 1-periódicas em y de (4.1.7).

Aplicando o Lema 2.5.4 para $(4.1.7)_1$ tem-se que $N \equiv u_0$ e $F \equiv 0$. Portanto, a condição de Lema se cumpre identicamente. Logo, para cada x e t fixos, existe $u_0(x, y, t)$ 1-periódica em y solução de $(4.1.7)_1$, a qual pode ser escrita como $u_0(x, y, t) = \tilde{u}_0(x, y, t) + C(x, t)$, em que $C(x, t)$ é uma constante e $\langle \tilde{u}_0(x, y, t) \rangle = 0$ ou $\tilde{u}_0(x, 0, t) = 0$.

De $(4.1.7)_1$ segue que

$$\mathcal{L}_{yy}u_0 = 0 \Longrightarrow \frac{\partial}{\partial y}\left[a(x, y, t)\frac{\partial u_0}{\partial y} \right] = 0, \tag{4.1.8}$$

do qual decorre

$$a(x,y,t)\frac{\partial u_0}{\partial y} = P(x,t) \Longrightarrow \frac{\partial u_0}{\partial y} = \frac{P(x,t)}{a(x,y,t)}\,, \tag{4.1.9}$$

dado que $a(x,y,t)$ é estritamente positiva.

Aplicando o operador de valor médio em (4.1.9) tem-se

$$\left\langle \frac{\partial u_0}{\partial y} \right\rangle = P(x,t)\left\langle \frac{1}{a(x,y,t)} \right\rangle. \tag{4.1.10}$$

Da 1-periodicidade de u_0 em y

$$\left\langle \frac{\partial u_0}{\partial y} \right\rangle = \int_0^1 \frac{\partial u_0}{\partial y}\,dy = u_0(x,y,t)\big|_{y=0}^{y=1} = u_0(x,1,t) - u_0(x,0,t) = 0.$$

Assim, de (4.1.10)

$$0 = P(x,t)\left\langle \frac{1}{a(x,y,t)} \right\rangle \Longrightarrow P(x,t) = 0,$$

dado que $a(x,y,t)$ é estritamente positiva e limitada.

Logo, de (4.1.9) segue que

$$\frac{\partial u_0}{\partial y} = 0\,, \tag{4.1.11}$$

do qual decorre

$$u_0(x,y,t) = u_0(x,t)\ . \tag{4.1.12}$$

Note que (4.1.12) satisfaz ambas as condições de unicidade impostas pelo Lema 2.5.4, pois neste caso $\tilde{u}_0(x,y,t) \equiv 0$ e $u_0(x,t) \equiv C(x,t)$.

De aplicar o Lema 2.5.4 em $(4.1.7)_2$ tem-se que $N \equiv u_1$ e $F \equiv -\mathcal{L}_{xy}u_0 - \mathcal{L}_{yx}u_0$. No entanto, de (4.1.12)

$$F = -\mathcal{L}_{xy}u_0 - \mathcal{L}_{yx}u_0 = \frac{\partial}{\partial x}\left[a(x,y,t)\frac{\partial u_0}{\partial y}\right] - \frac{\partial}{\partial y}\left[a(x,y,t)\frac{\partial u_0}{\partial x}\right] = -\frac{\partial a}{\partial y}\frac{\partial u_0}{\partial x}\ . \tag{4.1.13}$$

De aplicar o operador de valor médio em (4.1.13), segue da 1-periodicidade em y de $a(x,y,t)$ e da Proposição 2.5.2 tem-se

$$\langle F\rangle = -\left\langle \frac{\partial a}{\partial y} \right\rangle \frac{\partial u_0}{\partial x} = 0\,.$$

Portanto, para cada x e t fixos, o Lema 2.5.4 garante a existência de $u_1(x,y,t)$ solução 1-periódica em y de $(4.1.7)_2$, a qual pode ser escrita como $u_1(x,y,t) = \tilde{u}_1(x,y,t) + C(x,t)$, em que $C(x,t)$ é uma constante, e $\langle \tilde{u}_1(x,y,t)\rangle = 0$ ou $\tilde{u}_1(x,0,t) = 0$.

De (4.1.13) pode-se atualizar a equação $(4.1.7)_2$ para u_1, e esta será dada por

$$\mathcal{L}_{yy}u_1 = -\frac{\partial a}{\partial y}\frac{\partial u_0}{\partial x}\,. \tag{4.1.14}$$

Em virtude da estrutura de (4.1.14) e da linearidade do operador $\mathcal{L}_{yy}$, pode-se procurar $u_1(x,y,t)$ da seguinte forma

$$u_1(x,y,t) = N_1(x,y,t)\frac{\partial u_0}{\partial x}, \tag{4.1.15}$$

em que neste caso, $\tilde{u}_1(x,y,t) \equiv N_1(x,y,t)\dfrac{\partial u_0}{\partial x}$ e $C(x,t) \equiv 0$, cuja condição de unicidade será imposta para $N_1(x,y,t)$.

Substituindo (4.1.15) em (4.1.14) segue que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{yy}u_1 = -\frac{\partial a}{\partial y}\frac{\partial u_0}{\partial x} &\Longrightarrow \frac{\partial}{\partial y}\left[a(x,y,t)\frac{\partial}{\partial y}\left(N_1(x,y,t)\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)\right] = -\frac{\partial a}{\partial y}\frac{\partial u_0}{\partial x}\\
&\Longrightarrow \frac{\partial}{\partial y}\left[a(x,y,t)\frac{\partial N_1}{\partial y}\right]\frac{\partial u_0}{\partial x} = -\frac{\partial a}{\partial y}\frac{\partial u_0}{\partial x}\\
&\Longrightarrow \frac{\partial}{\partial y}\left(a(x,y,t) + a(x,y,t)\frac{\partial N_1}{\partial y}\right)\frac{\partial u_0}{\partial x} = 0\,.
\end{aligned}$$

Como em geral $\dfrac{\partial u_0}{\partial x} \neq 0$, $N_1(x,y,t)$ deve ser solução da equação do chamado *primeiro problema local* definida por

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(a(x,y,t) + a(x,y,t)\frac{\partial N_1}{\partial y}\right) = 0,\ \ y \in (0,1)\,. \tag{4.1.16}$$

Note que (4.1.16) pode ser escrita como $\mathcal{L}_{yy}N_1 = F$, com $F(y) = -\dfrac{\partial a}{\partial y}$, em que graças à 1-periodicidade em y de $a(x,y,t)$, $\langle F\rangle = 0$. Assim, para x e t fixos, o Lema 2.5.4 garante a existência de $N_1(x,y,t)$ 1-periódica em y solução de (4.1.16), em que $\langle N_1(x,y,t)\rangle = 0$ ou $N_1(x,0,t) = 0$.

Segue de (4.1.16)

$$a(x,y,t) + a(x,y,t)\frac{\partial N_1}{\partial y} = p(x,t) \Longrightarrow \frac{\partial N_1}{\partial y} = \frac{p(x,t)}{a(x,y,t)} - 1, \tag{4.1.17}$$

dado que $a(x,y,t)$ é uma função estritamente positiva.

Aplicando o operador de valor médio em (4.1.17) e utilizando a 1-periodicidade de $N_1(x,y,t)$ tem-se

$$0 = \left\langle \frac{\partial N_1}{\partial y}\right\rangle = p(x,t)\left\langle a^{-1}(x,y,t)\right\rangle - 1 \Longrightarrow p(x,t) = \left\langle a^{-1}(x,y,t)\right\rangle^{-1} \equiv \hat{a}(x,t), \tag{4.1.18}$$

em que $\hat{a}(x,t)$ em (4.1.18) recebe o nome de *coeficiente efetivo*.

Integrando (4.1.17) em $[0,y]$ e utilizando (4.1.18), tem-se

$$N_1(x,y,t) = \int_0^y \left(\frac{\hat{a}(x,t)}{a(x,\tau,t)} - 1 \right) d\tau + C_{10}(x,t)\,, \tag{4.1.19}$$

em que

$$C_{10}(x,t) = \begin{cases} 0 & \text{, se } N_1(x,0,t) = 0 \\ -\left\langle \displaystyle\int_0^y \left(\frac{\hat{a}(x,t)}{a(x,\tau,t)} - 1 \right) d\tau \right\rangle & \text{, se } \langle N_1(x,y,t\rangle = 0 \end{cases} . \tag{4.1.20}$$

Portanto, (4.1.19) fornece uma expressão analítica para $N_1(x,y,t)$, em $y \in (0,1)$. Agora para obter uma expressão válida para $y \in (0,n)$, basta extender $N_1(x,y,t)$ periodicamente.

Voltando para a construção da SAF, tem-se de aplicar o Lema 2.5.4 em $(4.1.7)_3$,em que $N \equiv u_2$ e $F \equiv -\mathcal{L}_{xy}u_1 - \mathcal{L}_{yx}u_1 - \mathcal{L}_{xx}u_0 - f$. No entanto, de (4.1.12) e (4.1.15), pode-se reescrever o termo F não homogêneo da equação, da seguinte forma

$$\begin{aligned}
F &= b\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - \mathcal{L}_{xy}u_1 - \mathcal{L}_{yx}u_1 - \mathcal{L}_{xx}u_0 - f \\
&= b(x,y,t)\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left[a(x,y,t)\frac{\partial}{\partial y}\left(N_1(x,y,t)\frac{\partial u_0}{\partial x} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial y}\left[a(x,y,t)\frac{\partial}{\partial x}\left(N_1(x,y,t)\frac{\partial u_0}{\partial x} \right) \right] \\
&\qquad - \frac{\partial}{\partial x}\left[a(x,y,t)\frac{\partial u_0}{\partial x} \right] - f(x,y,t) \\
&= b(x,y,t)\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left[a(x,y,t)\frac{\partial N_1}{\partial y}\frac{\partial u_0}{\partial x} \right] - \frac{\partial}{\partial y}\left[a(x,y,t)\frac{\partial}{\partial x}\left(N_1(x,y,t)\frac{\partial u_0}{\partial x} \right) \right] \\
&\qquad - \frac{\partial}{\partial x}\left[a(x,y,t)\frac{\partial u_0}{\partial x} \right] - f(x,y,t) \qquad (4.1.21) \\
&= b(x,y,t)\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left[\left(a(x,y,t) + a(x,y,t)\frac{\partial N_1}{\partial y} \right)\frac{\partial u_0}{\partial x} \right] - \frac{\partial}{\partial y}\left[a(x,y,t)\frac{\partial}{\partial x}\left(N_1(x,y,t)\frac{\partial u_0}{\partial x} \right) \right] \\
&\qquad - f(x,y,t) \\
&= b(x,y,t)\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left[\hat{a}(x,t)\frac{\partial u_0}{\partial x} \right] - \frac{\partial}{\partial y}\left[a(x,y,t)\frac{\partial}{\partial x}\left(N_1(x,y,t)\frac{\partial u_0}{\partial x} \right) \right] - f(x,y,t), \qquad (4.1.22)
\end{aligned}$$

em que a última igualdade decorre de (4.1.17) e (4.1.18).

De aplicar o operador de valor médio em (4.1.21) e utilizar a 1-periodicidade em y de $a(x,y,t)$ e $N_1(x,y,t)$ tem-se

$$\langle F \rangle = \hat{b}(x,t)\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left[\hat{a}(x,t)\frac{\partial u_0}{\partial x} \right] - \hat{f}(x,t)\,,$$

em que $\hat{b}(x,t) = \langle b(x,y,t)\rangle$ e $\hat{f}(x,t) = \langle f(x,y,t)\rangle$.

Assim, para que a existência de $u_2(x,y,t)$ 1-periodica em y solução de $(4.1.7)_3$ seja garantida pelo Lema 2.5.4, a função $u_0(x,t)$ deve satisfazer a *equação do problema homogeneizado*

$$\hat{b}(x,t)\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left[\hat{a}(x,t)\frac{\partial u_0}{\partial x}\right] = \hat{f}(x,t)\,, x \in (0,1)\,, t > 0. \tag{4.1.23}$$

Portanto, se $u_0(x,t)$ satisfizer (4.1.23), pode-se reescrever o termo F como

$$\begin{aligned} F = \hat{f}(x,t) - f(x,y,t) + (b(x,y,t) - \hat{b}(x,t))\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \\ - \frac{\partial}{\partial y}\left[a(x,y,t)\frac{\partial}{\partial x}\left(N_1(x,y,t)\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)\right], \end{aligned} \tag{4.1.24}$$

e a equação $(4.1.7)_3$ para $u_2(x,y,t)$ toma a forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{yy}u_2 = \hat{f}(x,t) - f(x,y,t) + (b(x,y,t) - \hat{b}(x,t))\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \\ - \frac{\partial}{\partial y}\left[a(x,y,t)\frac{\partial}{\partial x}\left(N_1(x,y,t)\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)\right]. \end{aligned} \tag{4.1.25}$$

De (4.1.25), segue que a existência de $u_2(x,y,t)$ 1-periódica em y é garantida pelo Lema 2.5.4, graças à 1-periodicidade em y das funções presentes na definição de $F(y)$ em (4.1.24). Portanto, para cada x e t fixos, o Lema 2.5.4 garante a existência de $u_2(x,y,t)$ solução 1-periódica em y de $(4.1.7)_3$, a qual pode ser escrita como $u_2(x,y,t) = \tilde{u}_2(x,y,t) + C(x,t)$, em que $C(x,t)$ é uma constante, e $\langle \tilde{u}_2(x,y,t)\rangle = 0$ ou $\tilde{u}_2(x,0,t) = 0$.

Expandindo o lado direito de (4.1.25) tem-se

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{yy}u_2 = \hat{f}(x,t) - f(x,y,t) + (b(x,y,t) - \hat{b}(x,t))\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial y}\left(a(x,y,t)\frac{\partial N_1}{\partial x}\right)\frac{\partial u_0}{\partial x} \\ - \frac{\partial}{\partial y}\left(a(x,y,t)N_1(x,y,t)\right)\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}. \end{aligned} \tag{4.1.26}$$

Da estrutura do lado direito de (4.1.26) e a linearidade do operador $\mathcal{L}_{yy}$, pode-se supor

$$u_2(x,y,t) = N_{200}(x,y,t) + N_{202}(x,y,t)\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + N_{21}(x,y,t)\frac{\partial u_0}{\partial x} + N_{22}(x,y,t)\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}, \tag{4.1.27}$$

em que

$$\tilde{u}_2(x,y,t) \equiv N_{200}(x,y,t) + N_{202}(x,y,t)\frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} + N_{21}(x,y,t)\frac{\partial u_0}{\partial x} + N_{22}(x,y,t)\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}\,,$$

e $C(x,t) \equiv 0$.

A condição de unicidade imposta pelo Lema 2.5.4 agora é imposta para as funções $N_{2k}(x,y,t)$, $k \in \{1,2\}$ e $N_{20i}(x,y,t)$, $i \in \{0,2\}$.

De substituir (4.1.27) em (4.1.26) tem-se da linearidade do operador $\mathcal{L}_{yy}$

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{L}_{yy}\left(N_{200}(x,y,t) + N_{202}(x,y,t)\frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} + N_{21}(x,y,t)\frac{\partial u_0}{\partial x} + N_{22}(x,y,t)\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}\right)\\
&= \hat{f}(x,t) - f(x,y,t) + (b(x,y,t) - \hat{b}(x,t))\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial y}\left(a(x,y,t)\frac{\partial N_1}{\partial x}\right)\frac{\partial u_0}{\partial x}\\
&\qquad - \frac{\partial}{\partial y}\left(a(x,y,t)N_1(x,y,t)\right)\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}\\
&\Longrightarrow \mathcal{L}_{yy}N_{200} + \mathcal{L}_{yy}N_{202}\frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} + \mathcal{L}_{yy}N_{21}\frac{\partial u_0}{\partial x} + \mathcal{L}_{yy}N_{22}\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} = \hat{f}(x,t) - f(x,y,t)\\
&\qquad + (b(x,y,t) - \hat{b}(x,t))\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial y}\left(a(x,y,t)\frac{\partial N_1}{\partial x}\right)\frac{\partial u_0}{\partial x}\\
&\qquad - \frac{\partial}{\partial y}\left(a(x,y,t)N_1(x,y,t)\right)\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}\,.
\end{aligned}
$$

De igualar os termos das derivadas de mesma ordem e tipo, tem-se as seguintes equações para as funções $N_{2k}(x,y,t)$ e $N_{20i}(x,y,t$, as quais definem as equações dos segundos problemas locais:

$$\mathcal{L}_{yy}N_{200} = \hat{f}(x,t) - f(x,y,t)\,,\ y \in (0,1)\,. \tag{4.1.28}$$

$$\mathcal{L}_{yy}N_{202} = b(x,y,t) - \hat{b}(x,t)\,,\ y \in (0,1)\,. \tag{4.1.29}$$

$$\mathcal{L}_{yy}N_{21} = -\frac{\partial}{\partial y}\left(a(x,y,t)\frac{\partial N_1}{\partial x}\right)\,,\ y \in (0,1). \tag{4.1.30}$$

$$\mathcal{L}_{yy}N_{22} = -\frac{\partial}{\partial y}\left(a(x,y,t)N_1(x,y,t)\right)\,,y \in (0,1). \tag{4.1.31}$$

Segue da 1-periodicidade em y de $a(x,y,t)$ e $N_1(x,y,t)$ que para x e t fixos, o Lema 2.5.4 garante a existência das soluções $N_{2k}(x,y,t)$ e $N_{20i}(x,y,t)$ 1-periódicas em y de (4.1.28), (4.1.30) e (4.1.31), respectivamente, em que $\langle N_{2k}(x,y,t)\rangle = 0$ ou $N_{2k}(x,0,t) = 0$ e $\langle N_{20i}(x,y,t)\rangle = 0$ ou $N_{20i}(x,0,t) = 0$.

De (4.1.28) segue que

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(a(x,y,t)\frac{\partial N_{200}}{\partial y}\right) = \hat{f}(x,t) - f(x,y,t)\,. \tag{4.1.32}$$

De integrar (4.1.32) em $[0, y]$, obtém-se

$$\begin{aligned} a(x,y,t)\frac{\partial N_{200}}{\partial y} &= \int_0^y \left(\hat{f}(x,t) - f(x,s,t)\right) ds + C_{200}(x,t) \\ \Longrightarrow \frac{\partial N_{200}}{\partial y} &= \frac{1}{a(x,y,t)} \left[\int_0^y \left(\hat{f}(x,t) - f(x,s,t)\right) ds + C_{200}(x,t)\right], \end{aligned} \tag{4.1.33}$$

dado que $a(x, y, t)$ é estritamente positiva.

Aplicando o operador de valor médio em (4.1.33), utilizando que $a(x, y, t)$ é estritamente positiva e limitada, tem-se

$$C_{200}(x,t) = -\hat{a}(x,t) \left\langle \frac{1}{a(x,y,t)} \left[\int_0^y \left(\hat{f}(x,t) - f(x,s,t)\right) ds\right] \right\rangle$$

Assim, de integrar (4.1.33) em $[0, y]$

$$N_{200}(x,y,t) = \int_0^y \left(\frac{1}{a(x,z,t)} \left[\int_0^z \left(\hat{f}(x,t) - f(x,s,t)\right) ds + C_{200}(x,t)\right] \right) dz + C_{201}(x,t)\,, \tag{4.1.34}$$

em que

$$C_{201}(x,t) = 0,$$

se $N_{200}(x, 0, t) = 0$, ou

$$C_{201}(x,t) = -\left\langle \int_0^y \left(\frac{1}{a(x,z,t)} \left[\int_0^z \left(\hat{f}(x,t) - f(x,s,t)\right) ds + C_{200}(x,t)\right] \right) dz \right\rangle \tag{4.1.35}$$

se $\langle N_{200}(x, y, t)\rangle = 0$.

De (4.1.29) segue que

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(a(x,y,t)\frac{\partial N_{202}}{\partial y}\right) = b(x,y,t) - \hat{b}(x,t)\,, \tag{4.1.36}$$

em que integrando em $[0, y]$

$$\begin{aligned} a(x,y,t)\frac{\partial N_{202}}{\partial y} &= \int_0^y \left(b(x,s,t) - \hat{b}(x,t)\right) ds + C_{202}(x,t) \\ \Longrightarrow \frac{\partial N_{202}}{\partial y} &= \frac{1}{a(x,y,t)} \left[\int_0^y \left(b(x,s,t) - \hat{b}(x,t)\right) ds + C_{202}(x,t)\right], \end{aligned} \tag{4.1.37}$$

dado que $a(x, y, t)$ é estritamente positiva.

Aplicando o operador de valor médio em (4.1.37), utilizando que $a(x,y,t)$ é estritamente positiva e limitada, decorre

$$C_{202}(x,t) = -\hat{a}(x,t)\left\langle \frac{1}{a(x,y,t)}\left[\int_0^y \left(b(x,s,t)-\hat{b}(x,t)\right)ds\right]\right\rangle$$

Logo, de integrar (4.1.37) em $[0,y]$, tem-se

$$N_{202}(x,y,t) = \int_0^y \left(\frac{1}{a(x,z,t)}\left[\int_0^z \left(b(x,s,t)-\hat{b}(x,t)\right)ds + C_{202}(x,t)\right]\right)dz + C_{203}(x,t)\,, \tag{4.1.38}$$

em que

$$C_{203}(x,t) = 0,$$

se $N_{202}(x,0,t) = 0$, ou

$$C_{203}(x,t) = -\left\langle \int_0^y \left(\frac{1}{a(x,z,t)}\left[\int_0^z \left(\hat{f}(x,t)-f(x,s,t)\right)ds + C_{21}(x,t)\right]\right)dz\right\rangle \tag{4.1.39}$$

se $\langle N_{202}(x,y,t)\rangle = 0$.

Procedendo de forma análoga à feita para as soluções locais $N_{200}(x,y,t)$ e $N_{202}(x,y,t)$, para os quais, utiliza-se da 1-periodicidade em y das funções $a(x,y,t)$ e $N_1(x,y,t)$, obtém-se

$$N_{21}(x,y,t) = \int_0^y \left(\frac{\hat{a}(x,t)}{a(x,s,t)}\left\langle\frac{\partial N_1}{\partial x}\right\rangle - \frac{\partial N_1}{\partial x}\right)ds + C_{22}(x,t)\,, \tag{4.1.40}$$

em que

$$C_{22}(x,t) = \begin{cases} 0 & ,\text{se } N_{21}(x,0,t) = 0 \\ -\left\langle \int_0^y \left(\frac{\hat{a}(x,t)}{a(x,s,t)}\left\langle\frac{\partial N_1}{\partial x}\right\rangle - \frac{\partial N_1}{\partial x}\right)ds\right\rangle & ,\text{se } \langle N_{21}(x,y,t\rangle = 0 \end{cases}, \tag{4.1.41}$$

e também

$$N_{22}(x,y) = \int_0^y \left(\frac{\hat{a}(x,t)}{a(x,s,t)}\left\langle N_1(x,y,t)\right\rangle - N_1(x,s,t)\right)ds + C_{23}(x,t)\,, \tag{4.1.42}$$

em que

$$C_{23}(x,t)=\begin{cases} 0 & ,\text{se } N_{22}(x,0,t)=0 \\ -\left\langle \int_0^y \left(\dfrac{\hat{a}(x,t)}{a(x,s,t)}\left\langle N_1(x,y,t)\right\rangle - N_1(x,s,t)\right) ds \right\rangle & ,\text{se } \langle N_{21}(x,y,t\rangle = 0 \end{cases}. \tag{4.1.43}$$

Assim, (4.1.34), (4.1.38), (4.1.40) e (4.1.42) fornecem expressões analíticas para $N_{200}(x,y,t)$, $N_{202}(x,y,t)$, $N_{21}(x,y,t)$ e $N_{22}(x,y,t)$ em $y\in(0,1)$. Para para ter expressões válidas em $y\in(0,n)$, basta extendê-las periódicamente. Portanto, de substituir (4.1.12), (4.1.15) e (4.1.27) em (4.1.3), obtém-se a SAF dada por

$$\begin{aligned} u^{(2)}(x,t,\varepsilon) = u_0(x,t) + \varepsilon N_1\left(x,\frac{x}{\varepsilon},t\right)\frac{\partial u_0}{\partial x} + \varepsilon^2\Bigg(N_{200}(x,\frac{x}{\varepsilon},t) + N_{202}\left(x,\frac{x}{\varepsilon},t\right)\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \\ + N_{21}\left(x,\frac{x}{\varepsilon},t\right)\frac{\partial u_0}{\partial x} + N_{22}\left(x,\frac{x}{\varepsilon},t\right)\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}\Bigg). \end{aligned} \tag{4.1.44}$$

Para completar a construção da SAF deve-se considerar as condições iniciais e de contorno em (4.1.1) na expressão em (4.1.44). Para as condições iniciais, segue de (4.1.44) que

$$\begin{aligned} u^{(2)}(x,0,\varepsilon) = u_0(x,0) + \varepsilon N_1\left(x,\frac{x}{\varepsilon},0\right)\frac{\partial u_0}{\partial x}\Big|_{t=0} + \varepsilon^2\Bigg(N_{200}(x,\frac{x}{\varepsilon},0) + N_{202}\left(x,\frac{x}{\varepsilon},0\right)\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}\Big|_{t=0} \\ + N_{21}\left(x,\frac{x}{\varepsilon},0\right)\frac{\partial u_0}{\partial x}\Big|_{t=0} + N_{22}\left(x,\frac{x}{\varepsilon},0\right)\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}\Big|_{t=0}\Bigg). \end{aligned}$$

Observe que em geral, a SAF em (4.1.44) não satisfaz a condição de deslocamento inicial, cumprindo apenas no limite quando $\varepsilon\to 0^+$, dado que nenhuma condição adicional à respeito de $t=0$ foi atribuida às soluções dos problemas locais. O mesmo vale para a condição de velocidade inicial.

No entanto, como se busca uma SAF válida inclusive sobre o meio homogêneo equivalente, ou seja quando $\varepsilon\to 0^+$, é possível obter as seguintes condições iniciais para a função $u_0(x,t)$:

$$u_0(x,0)=p(x)\ ,\ \frac{\partial u_0}{\partial t}(x,0)=q(x). \tag{4.1.45}$$

Para as condições de contorno, utilizando como condição de unicidade para as soluções locais, a condição imposta pelo Lema 2.5.4 de que $N_1(0,0,t)-0$, $N_{2k}(0,0,t)=0$ e $N_{20i}(0,0,t)=0$, tem-se de (4.1.44)

$$0 = u^{(2)}(0,t,\varepsilon) = u_0(0,t) + \varepsilon N_1(0,0,t)\frac{\partial u_0}{\partial x}\Big|_{x=0} + \varepsilon^2\Bigg(N_{200}(0,0,t) + N_{202}(0,0,t)\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}\Big|_{x=0} + N_{21}(0,0,t)\frac{\partial u_0}{\partial x}\Big|_{x=0} + N_{22}(0,0,t)\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}\Big|_{x=0}\Bigg) = u_0(0,t). \tag{4.1.46}$$

Da 1-periodicidade das soluções locais, obtém-se a segunda condição de contorno para $u_0(x,t)$

$$u_0(1,t) = 0. \tag{4.1.47}$$

Vale ressaltar que ao considerar como condição de unicidade para as soluções locais, a condição de que $\langle N_1(x,y,t)\rangle = 0$, $\langle N_{20i}(x,y,t)\rangle = 0$ e $\langle N_{2k}(x,y,t)\rangle = 0$, então o deslocamento médio na escala global, coincide com o deslocamento médio sobre a escala local. Com efeito

$$\begin{aligned}\langle u^\varepsilon(x,t)\rangle \sim \langle u^{(2)}(x,t,\varepsilon)\rangle &= u_0(x,t) + \varepsilon\left\langle N_1\left(x,\frac{x}{\varepsilon},t\right)\right\rangle\frac{\partial u_0}{\partial x} + \varepsilon^2\Bigg(\left\langle N_{200}(x,\frac{x}{\varepsilon},t)\right\rangle \\ &+ \left\langle N_{202}\left(x,\frac{x}{\varepsilon},t\right)\right\rangle\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + \left\langle N_{21}\left(x,\frac{x}{\varepsilon},t\right)\right\rangle\frac{\partial u_0}{\partial x} + \left\langle N_{22}\left(x,\frac{x}{\varepsilon},t\right)\right\rangle\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}\Bigg) \\ &= u_0(x,t)\,.\end{aligned}$$

Ao contrário da condição de $N_1(0,0,t) = 0$, $N_{2k}(0,0,t) = 0$ e $N_{20i}(0,0,t) = 0$, a condição de valor médio nulo para as soluções locais implicam também no descumprimento das condições de contorno do problema original para a SAF em (4.1.44), as quais nestas circunstâncias, são válidas apenas no interior do domínio, uma vez que em geral as funções $C_{10}(x,t)$, $C_{201}(x,t)$, $C_{203}(x,t)$, $C_{22}(x,t)$e $C_{23}(x,t)$ dadas em (4.1.20), (4.1.35), (4.1.39), (4.1.41) e (4.1.43), não são nulas.

Assim, da equação do problema homogeneizado em (4.1.23) e as condições em (4.1.46), (4.1.47), (4.1.45) e (4.1.45), segue que a existência da SAF em (4.1.44) é garantida se $u_0(x,t)$ satisfizer o problema homogeneizado definido por

$$\begin{cases} \mathcal{L}^0 u_0 \equiv \hat{b}(x,t)\dfrac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - \dfrac{\partial}{\partial x}\left[\hat{a}(x,t)\dfrac{\partial u_0}{\partial x}\right] = \hat{f}(x,t), \quad x \in (0,1),\ t > 0 \\ u_0(0,t) = u_0(1,t) = 0\ ,\ t > 0 \\ u_0(x,0) = p(x)\,,\ \dfrac{\partial u_0}{\partial t}(x,0) = q(x)\ ,\ x \in (0,1) \end{cases}, \tag{4.1.48}$$

4.1.4 Justificativa matemática

Para demonstrar a proximidade entre as soluções $u^\varepsilon(x,t)$ do problema original e $u_0(x,t)$ do problema homogeneizado, que constitui a justificativa matemática do MHA, utiliza-se a estimativa baseada no princípio do máximo em (2.4.2). No entanto, não se pode considerar tal estimativa de imediato, pois os problemas foram definidos em termos de operadores distintos, a saber $\mathcal{L}^\varepsilon$ e $\mathcal{L}^0$, conforme apresentados em (4.1.1) e (4.1.48). Para contornar isso, considera-se um problema auxiliar partindo da SAF

$$u^{(1)}(x,t,\varepsilon) = u_0(x,t) + \varepsilon N_1\left(x, x/\varepsilon, t\right) \frac{\partial u_0}{\partial x} \ , \tag{4.1.49}$$

obtida da SAF em (4.1.3) tomando $u_2(x,y,t) \equiv 0$.

De considerar (4.1.49) como solução de (4.1.1), a condição de unicidade $N_1(0,0,t) = 0$ e as condições para $u_0(x,t)$ em (4.1.48) tem-se o seguinte problema:

$$\begin{cases} \mathcal{L}^\varepsilon u^{(1)} - f^\varepsilon(x,t) = F^\varepsilon(x,t), \ \ x \in (0,1),\, t > 0 \\ u^{(1)}(0,t,\varepsilon) = u^{(1)}(1,t,\varepsilon) = 0 \ , \ t > 0 \\ u^{(1)}(x,0,\varepsilon) = p(x) \, , \ \dfrac{\partial u^{(1)}}{\partial t}(x,0,\varepsilon) = q(x) \ , \ x \in (0,1) \end{cases} , \tag{4.1.50}$$

em que F^ε é o erro obtido ao assumir (4.1.49) como solução de (4.1.1).

Subtraindo (4.1.1) em (4.1.50), obtém-se o seguinte problema para a SAF $u^{(1)}$ em termos do operador do problema original:

$$\begin{cases} \mathcal{L}^\varepsilon(u^\varepsilon - u^{(1)}) = -F^\varepsilon(x,t), \quad x \in (0,1)\,,\, t > 0 \\ u^\varepsilon(0,t) - u^{(1)}(0,t,\varepsilon) = u^\varepsilon(1,t) - u^{(1)}(1,t,\varepsilon) = 0 \\ u^\varepsilon(x,0) - u^{(1)}(x,0,\varepsilon) = 0, \quad \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(x,0) - \dfrac{\partial u^{(1)}}{\partial t}(x,0,\varepsilon) = 0 \end{cases} . \tag{4.1.51}$$

Aplicando a estimativa (2.4.2) no em (4.1.51), é válida a seguinte desigualdade:

$$\|u^\varepsilon - u^{(1)}\|_{H_0^1((0,1)\times(0,T))} \leq c(T) \|F^\varepsilon\|_{L^2((0,1)\times(0,T))} \, , \tag{4.1.52}$$

para algum T suficientemente grande.

Assim, uma expressão para $F^\varepsilon(x,t)$ é necessária. Então de (4.1.50), tem-se, considerando, (4.1.18), (4.1.23) e (4.1.49) com x e $y = x/\varepsilon$, que

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}^\varepsilon u^{(1)} - f^\varepsilon &= b^\varepsilon(x,t)\frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(a^\varepsilon(x,t)\frac{\partial u^{(1)}}{\partial x}\right) - f^\varepsilon(x,t) \\
&= b(x,y,t)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(u_0(x,t) + \varepsilon N_1(x,y,t)\frac{\partial u_0}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(a(x,y,t)\frac{\partial}{\partial x}\left(u_0(x,t) + \varepsilon N_1(x,y,t)\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)\right) \\
&\qquad - f(x,y,t) \\
&= b(x,y,t)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(u_0(x,t) + \varepsilon N_1(x,y,t)\frac{\partial u_0}{\partial x}\right) \\
&\qquad - \frac{\partial}{\partial x}\left(a(x,y,t)\frac{\partial u_0}{\partial x} + \varepsilon a(x,y,t)\left(\left[\frac{\partial N_1}{\partial x} + \varepsilon^{-1}\frac{\partial N_1}{\partial y}\right]\frac{\partial u_0}{\partial x} + N_1(x,y,t)\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}\right)\right) \\
&\qquad - f(x,y,t) \\
&= b(x,y,t)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(u_0(x,t) + \varepsilon N_1(x,y,t)\frac{\partial u_0}{\partial x}\right) \\
&\qquad - \frac{\partial}{\partial x}\left(\left[a(x,y,t) + a(x,y,t)\frac{\partial N_1}{\partial y}\right]\frac{\partial u_0}{\partial x} + \varepsilon a(x,y,t)\left(\frac{\partial N_1}{\partial x}\frac{\partial u_0}{\partial x} + N_1(x,y,t)\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}\right)\right) \\
&\qquad - f(x,y,t)\,.
\end{aligned}
$$

Utilizando da equação do primeiro problema local em (4.1.17)

$$
\begin{aligned}
&b(x,y,t)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(u_0(x,t) + \varepsilon N_1(x,y,t)\frac{\partial u_0}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left[\hat{a}(x,t)\frac{\partial u_0}{\partial x}\right] \\
&\qquad - \varepsilon\frac{\partial}{\partial x}\left(a(x,y,t)\left[\frac{\partial N_1}{\partial x}\frac{\partial u_0}{\partial x} + N_1(x,y,t)\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}\right]\right) - f(x,y,t) \\
&= b(x,y,t)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(u_0(x,t) + \varepsilon N_1(x,y,t)\frac{\partial u_0}{\partial x}\right) + \hat{f}(x,t) - \hat{b}(x,t)\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \\
&\qquad - \varepsilon\frac{\partial}{\partial x}\left(a(x,y,t)\left[\frac{\partial N_1}{\partial x}\frac{\partial u_0}{\partial x} + N_1(x,y,t)\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}\right]\right) - f(x,y,t) \\
&= \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}\left(b(x,y,t) - \hat{b}(x,t)\right) + \varepsilon\left(b(x,y,t)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[N_1(x,y,t)\frac{\partial u_0}{\partial x}\right]\right. \\
&\qquad \left. - \frac{\partial}{\partial x}\left(a(x,y,t)\left[\frac{\partial N_1}{\partial x}\frac{\partial u_0}{\partial x} + N_1(x,y,t)\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}\right]\right)\right) + \hat{f}(x,t) - f(x,y,t)\,. \qquad (4.1.53)
\end{aligned}
$$

Como $u_2(x,y,t) \equiv 0$, segue de (4.1.26)

$$
\hat{f}(x,t) - f(x,y,t) + (b(x,y,t) - \hat{b}(x,t))\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left[a(x,y,t)\frac{\partial}{\partial x}\left(N_1(x,y,t)\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)\right]. \qquad (4.1.54)
$$

Portanto, substituindo (4.1.54) em (4.1.53), tem-se

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^\varepsilon u^{(1)} - f^\varepsilon &= \varepsilon\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[N_1(x,y,t)\frac{\partial u_0}{\partial x}\right] - \frac{\partial}{\partial x}\left(a(x,y,t)\frac{\partial N_1}{\partial x}\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)\right)\\ &= \varepsilon\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[N_1^\varepsilon(x,t)\frac{\partial u_0}{\partial x}\right] - \frac{\partial}{\partial x}\left(a^\varepsilon(x,t)\frac{\partial N_1}{\partial x}\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)\right) \equiv F^\varepsilon(x,t), \qquad (4.1.55)\end{aligned}$$

em que $N_1^\varepsilon(x,t) = N_1(x, x/\varepsilon, t) = N_1(x,y,t)$.

Assim, de (4.1.55), como utiliza-se a norma do espaço $L^2((0,1)\times(0,T))$, então

$$\|F^\varepsilon\|^2_{L^2((0,1)\times(0,T))} = \varepsilon^2 \int_0^T \int_0^1 \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[N_1^\varepsilon(x,t)\frac{\partial u_0}{\partial x}\right] - \frac{\partial}{\partial x}\left(a^\varepsilon(x,t)\frac{\partial N_1}{\partial x}\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)\right)^2 dx\,dt\ . \qquad (4.1.56)$$

Ainda

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[N_1^\varepsilon(x,t)\frac{\partial u_0}{\partial x}\right] - \frac{\partial}{\partial x}\left(a^\varepsilon(x,t)\frac{\partial N_1}{\partial x}\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)\right)^2\\ &= \left|\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[N_1^\varepsilon(x,t)\frac{\partial u_0}{\partial x}\right] - \frac{\partial}{\partial x}\left(a^\varepsilon(x,t)\frac{\partial N_1}{\partial x}\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)\right|^2\\ &\le \left(\left|\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[N_1^\varepsilon(x,t)\frac{\partial u_0}{\partial x}\right]\right| + \left|\frac{\partial}{\partial x}\left(a^\varepsilon(x,t)\frac{\partial N_1}{\partial x}\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)\right|\right)^2\ . \qquad (4.1.57)\end{aligned}$$

Supondo que $u_0(x,t)$, $a^\varepsilon(x,t)$ e $N_1^\varepsilon(x,t)$ sejam suficientemente continuamente diferenciáveis em x e t, então pelo Teorema de Weierstrass (LIMA, 2018) é garantida a existência de constantes $A_1, A_2 > 0$, tais que

$$\left|\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[N_1^\varepsilon(x,t)\frac{\partial u_0}{\partial x}\right]\right| \le A_1\ ,\ \left|\frac{\partial}{\partial x}\left(a^\varepsilon(x,t)\frac{\partial N_1}{\partial x}\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)\right| \le A_2\ .$$

Assim,

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[N_1^\varepsilon(x,t)\frac{\partial u_0}{\partial x}\right] - \frac{\partial}{\partial x}\left(a^\varepsilon(x,t)\frac{\partial N_1}{\partial x}\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)\right)^2 \le (A_1+A_2)^2 = A^2\,, \qquad (4.1.58)$$

De (4.1.57) e (4.1.58), decorre

$$\|F^\varepsilon\|^2_{L^2((0,1)\times(0,T))} \le \varepsilon^2 \int_0^T \int_0^1 A^2 dx\,dt = \varepsilon^2 A^2 T\,. \qquad (4.1.59)$$

Assim, de (4.1.59) segue que

$$\|F^\varepsilon\|_{L^2((0,1)\times(0,T))} \le \sqrt{T}\varepsilon A\ . \qquad (4.1.60)$$

Definindo $c(T) = \sqrt{T}$ para algum $T > 0$, segue de (4.1.52) e (4.1.60) que

$$\|u^\varepsilon - u^{(1)}\|_{H_0^1((0,1)\times(0,T))} \leq \varepsilon A^2 \Longrightarrow \|u^\varepsilon - u^{(1)}\|_{H_0^1((0,1)\times(0,T))} = \mathcal{O}(\varepsilon) \ . \tag{4.1.61}$$

De forma análoga, mostra-se que

$$\|u^{(1)} - u_0\|_{H_0^1((0,1)\times(0,T))} = \mathcal{O}(\varepsilon) \ . \tag{4.1.62}$$

Assim, de (4.1.61) e (4.1.62) tem-se

$$\begin{aligned} \|u^\varepsilon - u_0\|_{H_0^1((0,1)\times(0,T))} &= \|u^\varepsilon - u^{(1)} + u^{(1)} - u_0\|_{H_0^1((0,1)\times(0,T))} \\ &\leq \|u^\varepsilon - u^{(1)}\|_{H_0^1((0,1)\times(0,T))} + \|u^{(1)} - u_0\|_{H_0^1((0,1)\times(0,T))} \\ &= \mathcal{O}(\varepsilon) + \mathcal{O}(\varepsilon) = \mathcal{O}(\varepsilon) \ . \end{aligned} \tag{4.1.63}$$

Observação 4.1.1 *No enunciado da estimativa via princípio do máximo para problemas hiperbólicos em (2.4.1) considera-se a função $S(x,t) > 0$, a qual não aparece para o problema em (4.1.51). Porém, desprezando o atrito da barra com o meio em que ela se encontra, pode-se desprezar o termo $S(x,t)\dfrac{\partial u}{\partial t}$, já que neste caso, assume-se que $\left|S(x,t)\dfrac{\partial u}{\partial t}\right| \ll 1$, para todo x e t.*

4.1.5 Exemplo numérico

Para ilustrar os resultados obtidos anteriormente de forma teórica, propõe-se o seguinte exemplo numérico: considere o modelo em (4.1.1), onde $b^\varepsilon(x,t) = 1$, $a^\varepsilon(x,t) = 1 + 0.25\cos(2\pi x/\varepsilon)$, $f^\varepsilon(x,t) = e^{-t}$ e $p(x) = q(x) = 0$.

Assim, tem-se o seguinte problema de valores iniciais e de contorno

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2} - \hat{a}\dfrac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial x^2} = e^{-t}, \ \ x \in (0,1),\ t > 0 \\ u^\varepsilon(0,t) = u^\varepsilon(1,t) = 0 \ , \ t > 0 \\ u^\varepsilon(x,0) = 0 \, , \ \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(x,0) = 0 \ , \ x \in (0,1) \end{cases} ,$$

Segue que esta escolha de coeficientes atende todas às hipóteses da formulação do problema, onde o carácter rapidamente oscilante do coeficiente $a(x,y,t) \equiv a(y)$ está representado na figura 6.

Vale ressaltar que com esta escolha de coeficiente, a estrutura da assintótica em (4.1.44) se torna mais simples, dado que a não dependência em x do coeficiente (após o desacoplamento das variáveis local e global) implica no cancelamento de vários termos no desenvolvimento geral para o encontro da SAF. Assim, para este caso, a SAF toma a forma

$$u^{(2)}(x,t,\varepsilon) = u_0(x,t) + \varepsilon N_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial u_0}{\partial x} + \varepsilon^2 N_2\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}. \tag{4.1.64}$$

Os resultados como as soluções das funções locais, o coeficiente efetivo e a solução exata do problema foram obtidas computacionalmente via integração numérica e diferenças finitas centradas. E para o coeficiente efetivo, encontrou-se o seguinte resultado: $\hat{a} = \sqrt{15}/4$.

Para o encontro da solução do problema homogeneizado, dada a natureza do coeficiente efetivo (a não dependência em x e t), foi possível obter uma expressão analítica via separação de variáveis, a qual é dada por

$$u_0(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{\sqrt{\hat{a}}((2n-1)\pi)^2}\sin\left((2n-1)\pi x\right)\left[\sqrt{\hat{a}}(2n-1)\pi\left(e^{-t}\cos\left(\sqrt{\hat{a}}(2n-1)\pi t\right)\right)\right] + \frac{\sin(\sqrt{\hat{a}}(2n-1)\pi t)}{(1+\hat{a}((2n-1)\pi)^2}\right). \tag{4.1.65}$$

Assim, segue abaixo a representação gráfica do comportamento das soluções locais $N_1(y)$ e $N_2(y)$, as soluções dos problemas original e homogeneizado e a representação do erro obtido de se tentar aproximar a solução do problema original por cada truncamento da SAF em (4.1.64) para valores decrescentes do parâmetro pequeno ε.

Observe que é possível visualizar a proximidade entre as soluções dos problemas, significando que, à medida que $\varepsilon \to 0^+$, a solução do problema original converge para a solução do problema homogeneizado. Além disso, também é possível observar que quanto maior o número de termos da SAF, melhor é a proximidade com a solução do problema original.

Com uma análise mais detalhada, é nítido que as soluções dos problemas original e homogeneizado podem ser aproximadas com qualquer precisão, uma vez que, na prática, é possível considerar o parãmetro ε cada vez menor. No entanto, conforme apresentado na figura 10, os erros de aproximação já atingem a escala de 10^{-4}, o que, em termos práticos, já se mostra eficiente em diversos contextos.

Além disso, a utilização da SAF de um termo, $u_0(x,t)$, demonstra-se eficiente, dado que a magnitude dos erros obtidos em comparação com a solução exata diminui à medida que o parâmetro pequeno decresce. Essa abordagem é útil devido à sua simplicidade em relação a outras SAFs.

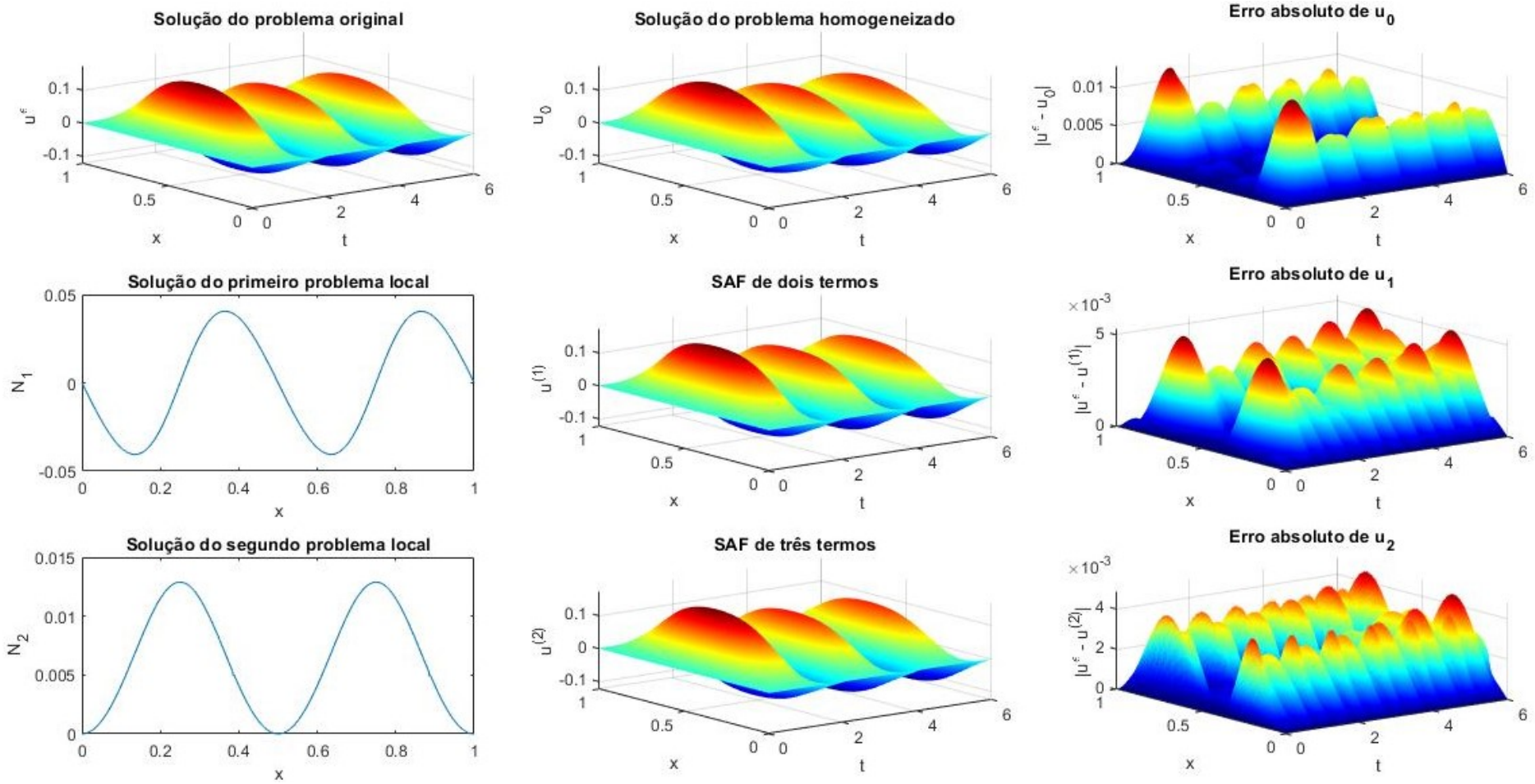

Figura 7 – Comportamento das soluções dos problemas original e homgeneizado, da SAF, o erro de aproximação para cada truncamento da SAF, e as soluções dos problemas locais para $\varepsilon = 1/2$.
Fonte: O autor.

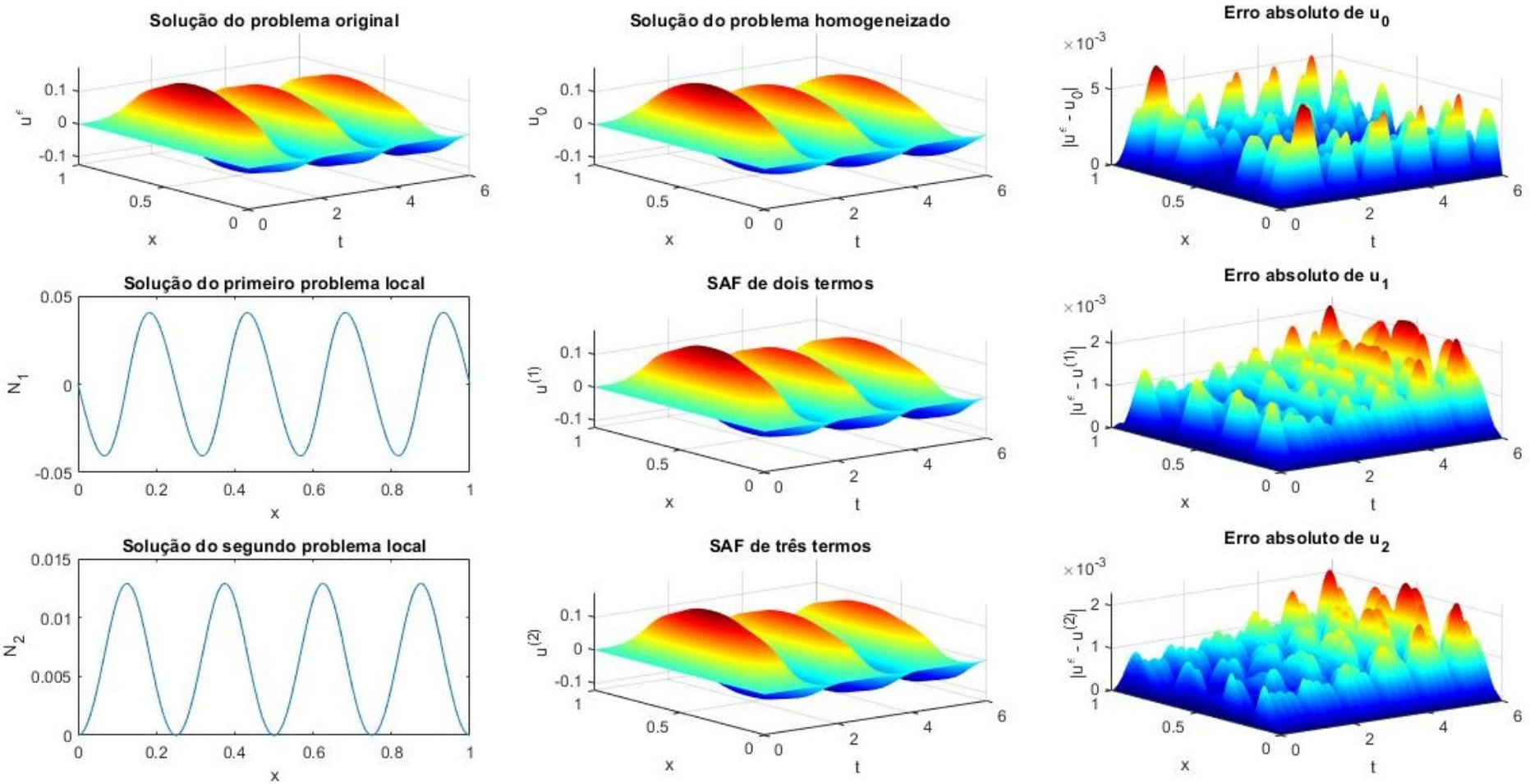

Figura 8 – Comportamento das soluções dos problemas original e homgeneizado, da SAF, o erro de aproximação para cada truncamento da SAF, e as soluções dos problemas locais para $\varepsilon = 1/4$.
Fonte: O autor.

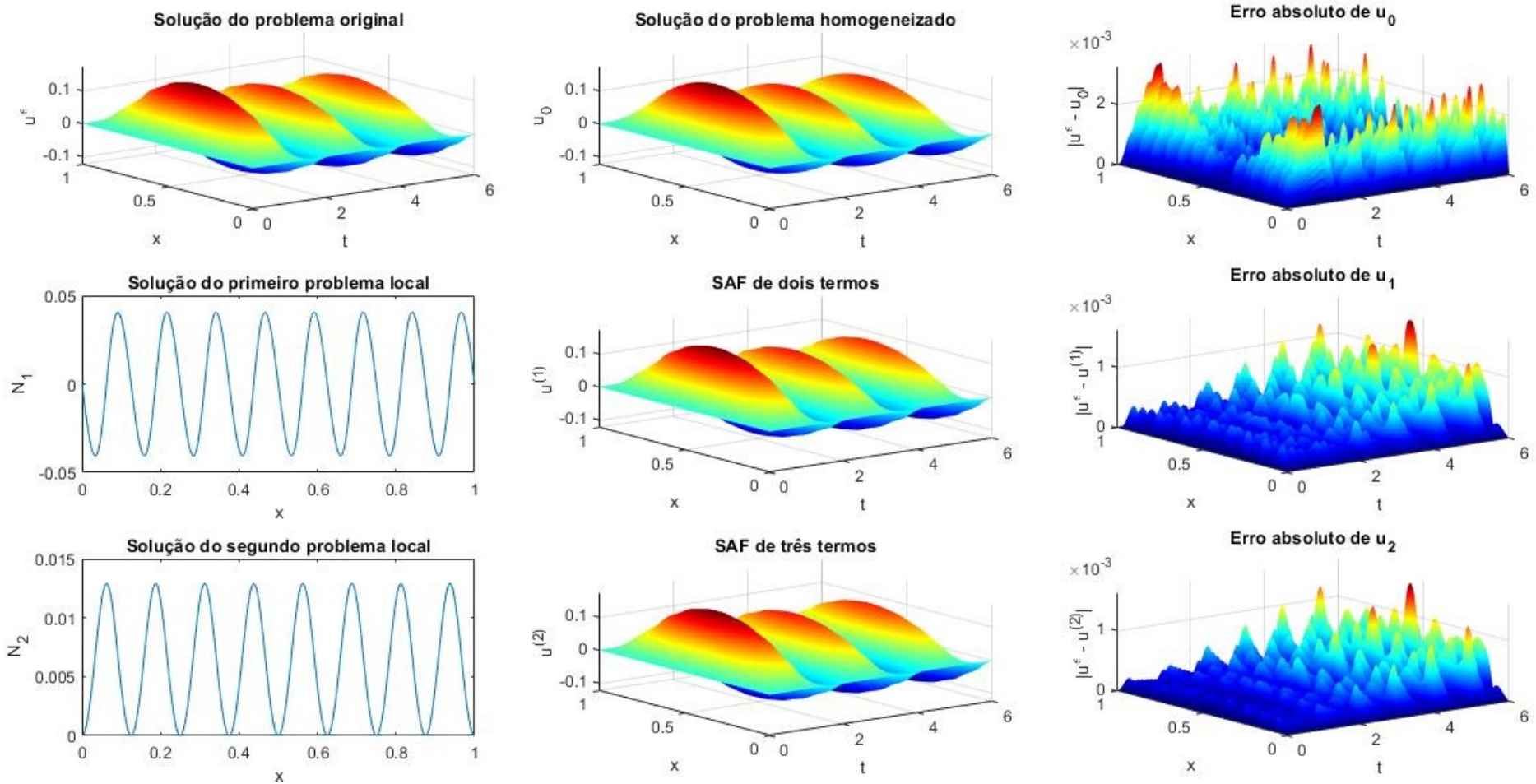

Figura 9 – Comportamento das soluções dos problemas original e homgeneizado, da SAF, o erro de aproximação para cada truncamento da SAF, e as soluções dos problemas locais para $\varepsilon = 1/8$.
Fonte: O autor.

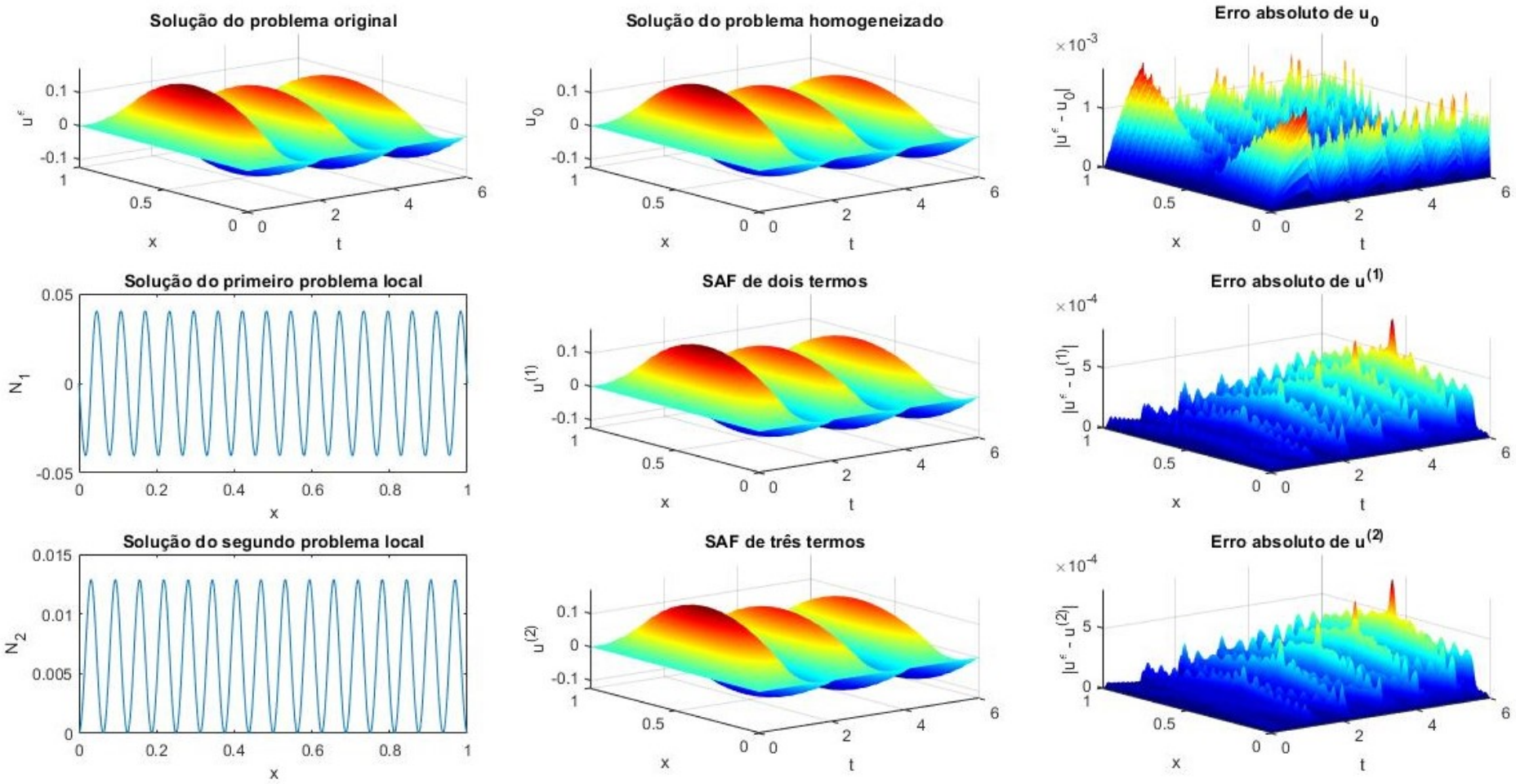

Figura 10 – Comportamento das soluções dos problemas original e homgeneizado, da SAF, o erro de aproximação para cada truncamento da SAF, e as soluções dos problemas locais para $\varepsilon = 1/16$.
Fonte: O autor.

4.2 MHA para problemas unidimensionais de quarta ordem

4.2.1 Problema dinâmico

4.2.1.1 Formulação do problema

Seja o parâmetro ε, $0 < \varepsilon \ll 1$. Para cada ε, considere $a^\varepsilon \in C^2(\Omega)$, $b^\varepsilon, f^\varepsilon \in C(\Omega)$, com Ω e Ω_1 definidos na seção 4.1, $a^\varepsilon(x,t) = a(x, x/\varepsilon, t)$, $b^\varepsilon(x,t) = b(x, x/\varepsilon, t)$ e $f^\varepsilon(x,t) = f(x, x/\varepsilon, t)$ funções ε-periódicas na segunda componente. Ainda, a e b são funções estritamente positivas e limitadas. Assim, considera-se o problema de valores iniciais e de contorno para o modelo de Euler Bernoulli: para cada $\varepsilon > 0$, procura-se $w^\varepsilon \in C^4(\Omega_1) \cap C^1(\Omega)$, em que $w^\varepsilon = w^\varepsilon(x,t)$ tal que

$$\begin{cases} L^\varepsilon w^\varepsilon \equiv b^\varepsilon(x,t)\dfrac{\partial^2 w^\varepsilon}{\partial t^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\left(a^\varepsilon(x,t)\dfrac{\partial^2 w^\varepsilon}{\partial x^2}\right) = f^\varepsilon(x,t), \;\; x \in (0,1),\, t > 0 \\ \qquad w^\varepsilon(x,t) = 0\,,\;\; \dfrac{\partial w^\varepsilon}{\partial x} = 0\,,\; x \in \{0,1\}\,, t > 0 \\ \qquad w^\varepsilon(x,0) = p(x)\,,\;\; \dfrac{\partial w^\varepsilon}{\partial t}(x,0) = q(x)\;,\; x \in (0,1) \end{cases}, \tag{4.2.1}$$

que modela o comportamento mecânico dinâmico unidimensional de uma viga do tipo Euler-Bernoulli esgastada em ambas as extremidades com estrutura micro-heterogênea localmente periódica, em que f^ε representa um carregamento, b^ε a densidade de massa e a^ε a rigidez flexural.

4.2.1.2 Formalismo matemático do MHA

Consideram-se as variáveis globais e locais x e y, onde $y = x/\varepsilon$ com $\varepsilon = n^{-1}$, $n \in \mathbb{N}$. Assim, seja uma SAF de (4.2.1) em duas escalas da forma

$$w^\varepsilon(x,t) \sim w^{(4)}(x,t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{4} \varepsilon^k w_k(x,y,t)\,, \tag{4.2.2}$$

em que $w_k(x,y,t)$, $k \in \{0,1,2,3,4\}$, são funções quatro vezes continuamente diferenciáveis em x e y, 1-periódicas em y e duas vezes continuamente diferenciáveis em t. Note que neste caso $a^\varepsilon(x,t) = a\,(x, x/\varepsilon, t) = a(x,y,t)$, onde segue que $a(x,y,t)$ é 1-periódica em seu segundo argumento, dada a ε-periodicidade do coeficiente $a^\varepsilon(x,t)$. Com efeito

$$a(x,y+1,t) = a\left(x, \frac{x}{\varepsilon} + 1, t\right) = a\left(x, \frac{x+\varepsilon}{\varepsilon}, t\right) = a\left(x, \frac{x}{\varepsilon}, t\right) = a(x,y,t)\,.$$

Para as funções b e f o resultado é análogo.

Considerando que x e y são variáveis independentes, tem-se utilizando a regra da cadeia

$$\frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x^2} + 2\varepsilon^{-1}\frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x \partial y} + \varepsilon^{-2}\frac{\partial^2(\cdot)}{\partial y^2}. \tag{4.2.3}$$

De aplicar (4.2.3) em (4.2.1), tem-se

$$\begin{aligned}
0 = L^\varepsilon w^\varepsilon - f^\varepsilon &= b^\varepsilon(x,t)\frac{\partial^2 w^\varepsilon}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(a^\varepsilon(x,t)\frac{\partial^2 w^\varepsilon}{\partial x^2}\right) - f^\varepsilon(x,t) = b(x,y,t)\frac{\partial^2 w^\varepsilon}{\partial t^2} \\
&+ \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2\varepsilon^{-1}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} + \varepsilon^{-2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right]\left(a(x,y,t)\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2\varepsilon^{-1}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} + \varepsilon^{-2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right]u^\varepsilon\right) - f(x,y,t) \\
&= b(x,y,t)\frac{\partial^2 w^\varepsilon}{\partial t^2} + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[a(x,y,t)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right] + 2\varepsilon^{-1}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[a(x,y,t)\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\right] + \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left[a(x,y,t)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]\right)\right. \\
&+ \varepsilon^{-2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[a(x,y,t)\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right] + 4\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left[a(x,y,t)\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\right] + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[a(x,y,t)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]\right) \\
&+ 2\varepsilon^{-3}\left(\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left[a(x,y,t)\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right] + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[a(x,y,t)\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\right]\right) + \varepsilon^{-4}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[a(x,y,t)\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right]\Bigg)w^\varepsilon \\
&- f(x,y,t)\,,
\end{aligned}$$

em que definindo os operadores

$$L^{\gamma\varphi}_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta}\left[a(x,y,t)\frac{\partial^2}{\partial\gamma\partial\varphi}\right],\ \alpha,\beta,\gamma,\varphi \in \{x,y\},$$

segue

$$\begin{aligned}
0 = L^\varepsilon w^\varepsilon - f^\varepsilon = \Bigg[b\frac{\partial^2}{\partial t^2} &+ L^{xx}_{xx} + (2L^{xy}_{xx} + 2L^{xx}_{xy})\varepsilon^{-1} + (L^{yy}_{xx} + 4L^{xy}_{xy} + L^{xx}_{yy})\varepsilon^{-2} \\
&+ (2L^{yy}_{xy} + 2L^{xy}_{yy})\varepsilon^{-3} + L^{yy}_{yy}\varepsilon^{-4}\Bigg]w^\varepsilon - f.
\end{aligned} \tag{4.2.4}$$

De Substituir (4.2.2) em (4.2.4) e agrupar os termos pelas potências de ε, decorre que

$$\begin{aligned}
0 \sim L^\varepsilon w^{(4)} - f = {} & L^{yy}_{yy}w_0\varepsilon^{-4} + \left(L^{yy}_{yy}w_1 + 2L^{yy}_{xy}w_0 + 2L^{xy}_{yy}w_0\right)\varepsilon^{-3} \\
&+ \left(L^{yy}_{yy}w_2 + 2L^{yy}_{xy}w_1 + 2L^{xy}_{yy}w_1 + L^{yy}_{xx}w_0 + 4L^{xy}_{xy}w_0 + L^{xx}_{yy}w_0\right)\varepsilon^{-2} \\
&+ \left(L^{yy}_{yy}w_3 + 2L^{yy}_{xy}w_2 + 2L^{xy}_{yy}w_2 + L^{yy}_{xx}w_1 + 4L^{xy}_{xy}w_1 + L^{xx}_{yy}w_1 + 2L^{xy}_{xx}w_0 + 2L^{xx}_{xy}w_0\right)\varepsilon^{-1} \\
&+ \Bigg(b\frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} + L^{yy}_{yy}w_4 + 2L^{yy}_{xy}w_3 + 2L^{xy}_{yy}w_3 + L^{yy}_{xx}w_2 + 4L^{xy}_{xy}w_2 + L^{xx}_{yy}w_2 + 2L^{xy}_{xx}w_1 + 2L^{xx}_{xy}w_1 \\
&+ L^{xx}_{xx}w_0 - f\Bigg)\varepsilon^0 + \mathcal{O}(\varepsilon)\,,
\end{aligned}$$

em que $\mathcal{O}(\varepsilon)$ representa a reunião dos termos que tendem a zero quando $\varepsilon \to 0^+$, ou seja, os termos que acompanham as potências positivas de ε.

Assim, para que a igualdade assintótica $L^\varepsilon w^{(4)} - f^\varepsilon = \mathcal{O}(\varepsilon)$ seja verdadeira, ou seja, para se anularem os termos das potências não positivas de ε, deve-se garantir a existência de soluções w_k, $k \in \{0,1,2,3,4\}$, 1-periódicas em y da seguinte recorrência de equações diferenciais:

$$
\begin{aligned}
\varepsilon^{-4} &: L^{yy}_{yy} w_0 = 0 \\
\varepsilon^{-3} &: L^{yy}_{yy} w_1 = -2L^{yy}_{xy} w_0 - 2L^{xy}_{yy} w_0 \\
\varepsilon^{-2} &: L^{yy}_{yy} w_2 = -2L^{yy}_{xy} w_1 - 2L^{xy}_{yy} w_1 - L^{yy}_{xx} w_0 - 4L^{xy}_{xy} w_0 - L^{xx}_{yy} w_0 \\
\varepsilon^{-1} &: L^{yy}_{yy} w_3 = -2L^{yy}_{xy} w_2 - 2L^{xy}_{yy} w_2 - L^{yy}_{xx} w_1 - 4L^{xy}_{xy} w_1 - L^{xx}_{yy} w_1 - 2L^{xy}_{xx} w_0 - 2L^{xx}_{xy} w_0 \\
\varepsilon^{0} &: L^{yy}_{yy} w_4 = -b\frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} - 2L^{yy}_{xy} w_3 - 2L^{xy}_{yy} w_3 - L^{yy}_{xx} w_2 - 4L^{xy}_{xy} w_2 - L^{xx}_{yy} w_2 - 2L^{xy}_{xx} w_1 - 2L^{xx}_{xy} w_1 \\
&\qquad - L^{xx}_{xx} w_0 + f\,.
\end{aligned}
\tag{4.2.5}
$$

Note que, para cada $x \in (0,1)$ e $t > 0$ fixos, as equações em (4.2.5) são da forma $LN = F$ com $F(y)$ e $a(x,y,t)$ 1-periódicas em y, onde notando que para x e t fixos, $L^{yy}_{yy} \equiv L$, pode-se aplicar o Lema 2.5.6 a fim de garantir a existência de soluções 1-periódicas em y de (4.2.5).

Aplicando o Lema 2.5.6 para $(4.2.5)_1$ tem-se que $N \equiv u_0$ e $F \equiv 0$. Portanto, a condição do Lema se cumpre identicamente. Logo, para cada x e t fixos, existe $w_0(x,y,t)$ 1-periódica em y solução de $(4.2.5)_1$, a qual pode ser escrita como $w_0(x,y,t) = \tilde{w}_0(x,y,t) + C(x,t)$, em que $C(x,t)$ é uma constante e $\langle \tilde{w}_0(x,y,t) \rangle = 0$.

De $(4.2.5)_1$ segue que

$$
L^{yy}_{yy} w_0 = 0 \Longrightarrow \frac{\partial}{\partial y}\left[a(x,y,t)\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\right] = P(x,t) \tag{4.2.6}
$$

De aplicar o operador média em (4.2.6) tem-se

$$
0 = \left\langle \frac{\partial}{\partial y}\left[a(x,y,t)\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\right] \right\rangle = \langle P(x,t) \rangle = P(x,t) \Longrightarrow P(x,t) = 0,
$$

pela 1-periodicidade em y de $a(x,y,t)$ e $w_0(x,y,t)$. Logo,

$$
\frac{\partial}{\partial y}\left[a(x,y,t)\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\right] = 0 \Longrightarrow a(x,y,t)\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} = R(x,t) \Longrightarrow \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} = \frac{R(x,t)}{a(x,y,t)}, \tag{4.2.7}
$$

já que $a(x,y,t)$ é estritamente positiva.

Aplicando o operador de valor médio em (4.2.7) e utilizando da 1-periodicidade em y de $w_0(x,y,t)$, obtém-se que

$$R(x,t)\left\langle a^{-1}(x,y,t)\right\rangle = 0,$$

do que segue que $R(x,t)=0$, uma vez que $a(x,y,t)$ é estritamente positiva e limitada.

Logo, de (4.2.7) segue que

$$\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} = 0 \Longrightarrow \frac{\partial w_0}{\partial y} = Q(x,t),$$

onde de aplicar o operador valor médio e utilizar da 1-periodicidade em y de $w_0(x,y,t)$, concluí-se que $Q(x,t)=0$ e, portanto,

$$w_0(x,y,t) = w_0(x,t)\,. \tag{4.2.8}$$

Note que neste caso, (4.2.8) satisfaz a condição de unicidade imposta pelo Lema 2.5.6, pois desta forma $\tilde{w}_0(x,y,t)\equiv 0$ e $w_0(x,t)\equiv C(x,t)$.

Levando em consideração (4.2.8), atualiza-se a equação para $w_1(x,y,t)$ em $(4.2.5)_2$ e obtém-se

$$L^{yy}_{yy} w_1 = 0\ . \tag{4.2.9}$$

Assim, de (4.2.9) segue que $N\equiv w_1$ e $F\equiv 0$. Portanto, a condição do Lema 2.5.6 se cumpre identicamente. Logo, para cada x e t fixos, existe $w_1(x,y,t)$ 1-periódica em y solução de $(4.2.5)_2$, a qual pode ser escrita como $w_1(x,y,t) = \tilde{w}_1(x,y,t) + C(x,t)$, em que $C(x,t)$ é uma constante e $\langle \tilde{w}_1(x,y,t)\rangle = 0$.

De forma análoga à feita para $w_0(x,t)$, segue de (4.2.9) que w_1 também não depende de y, ou seja,

$$w_1(x,y,t) = w_1(x,t)\,.$$

Considerando que (4.2.2) vale sobre o meio homogêneo equivalente, segue que a não dependência em y em w_1, implica que

$$w_1(x,t) = 0\,, \tag{4.2.10}$$

já que o responsável por representar o comportamento global na assintótica é $w_0(x,t)$. Caso contrário, o deslocamento médio macroscópico seria $w_0+\varepsilon w_1$, ou seja, dependente da microescala.

Note que neste caso, (4.2.10) satisfaz identicamente a condição de unicidade imposta pelo Lema 2.5.6.

Assim, atualizando o problema para $w_2(x,y,t)$ em $(4.2.5)_3$, com base em (4.2.8) e (4.2.10) tem-se

$$L_{yy}^{yy} w_2 = -\frac{\partial^2 a}{\partial y^2}\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}, \tag{4.2.11}$$

em que, neste caso $N \equiv w_2$ e $F \equiv -\dfrac{\partial^2 a}{\partial y^2}\dfrac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}$.

Temos que o Lema garante a existência da solução $w_2(x,y,t)$ 1-periódica em y, já que $\langle F\rangle = 0$, pela 1-periodicidade em y da função $a(x,y,t)$. Logo, para cada x e t fixos, existe $w_2(x,y,t)$ 1-periódica em y solução de $(4.2.5)_3$, a qual pode ser escrita como $w_2(x,y,t) = \tilde{w}_2(x,y,t) + C(x,t)$, em que $C(x,t)$ é uma constante e $\langle \tilde{w}_2(x,y,t)\rangle = 0$.

Em virtude da estrutura do lado direito de (4.2.11) e da linearidade do operador L_{yy}^{yy}, considera-se

$$w_2(x,y,t) = N_2(x,y,t)\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\,, \tag{4.2.12}$$

em que neste caso $\tilde{w}_2(x,y,t) \equiv N_2(x,y,t)\dfrac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}$ e $C(x,t) \equiv 0$, onde a condição de unicidade do Lema 2.5.6 será imposta para $N_2(x,y,t)$.

Substituindo (4.2.12) em (4.2.11) segue que

$$\begin{aligned} L_{yy}^{yy} w_2 = -\frac{\partial^2 a}{\partial y^2}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} &\Longrightarrow \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[a(x,y,t)\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(N_2(x,y,t)\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right)\right] = -\frac{\partial^2 a}{\partial y^2}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ &\Longrightarrow \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[a(x,y,t)\frac{\partial^2 N_2}{\partial y^2}\right]\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 a}{\partial y^2}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ &\Longrightarrow \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(a(x,y,t) + a(x,y,t)\frac{\partial^2 N_2}{\partial y^2}\right)\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} = 0\,. \end{aligned}$$

Como em geral $\dfrac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \neq 0$, segue que $N_2(x,y,t)$ é solução da equação do chamado *primeiro problema local* definida por

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(a(x,y,t) + a(x,y,t)\frac{\partial^2 N_2}{\partial y^2}\right) = 0\,, y \in (0,1)\,. \tag{4.2.13}$$

Note que (4.2.13) pode ser escrita como $LN_2 = F$, com $F(y) = -\dfrac{\partial^2 a}{\partial y^2}$, em que graças à 1-periodicidade de $a(x,y,t)$, $\langle F\rangle = 0$. Assim, para x e t fixos, o Lema 2.5.6 garante a existência de $N_2(x,y,t)$ 1-periódica em y solução de (4.2.13), em que $\langle N_2(x,y,t)\rangle = 0$.

Integrando (4.2.13) em $[0,y]$ obtém-se

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(a(x,y,t) + a(x,y,t)\frac{\partial^2 N_2}{\partial y^2}\right) = C_1(x,t), \tag{4.2.14}$$

da onde aplicar o operador de valor médio em (4.2.14) e utilizar a 1-periodicidade de

$a(x,y,t)$ e $N_2(x,y,t)$ e suas derivadas, segue que

$$0 = \left\langle \frac{\partial}{\partial y}\left(a(x,y,t) + a(x,y,t)\frac{\partial^2 N_2}{\partial y^2}\right)\right\rangle = C_1(x,t).$$

Logo,

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(a(x,y,t) + a(x,y,t)\frac{\partial^2 N_2}{\partial y^2}\right) = 0. \tag{4.2.15}$$

Integrando (4.2.15) em $[0,y]$, segue que

$$a(x,y,t) + a(x,y,t)\frac{\partial^2 N_2}{\partial y^2} = C_2(x,t) \Longrightarrow \frac{\partial^2 N_2}{\partial y^2} = \frac{C_2(x,t)}{a(x,y,t)} - 1, \tag{4.2.16}$$

já que $a(x,y,t)$ é estritamente positiva.

Aplicando o operador de valor médio médio em (4.2.16) e utilizando a 1-periodicidade de $\dfrac{\partial^2 N_2}{\partial y^2}$ herdada de $N_2(x,y,t)$ (proposição 2.5.1) tem-se que

$$0 = \left\langle \frac{\partial^2 N_2}{\partial y^2}\right\rangle = C_2(x,t)\left\langle a^{-1}(x,y,t)\right\rangle - 1 \Longrightarrow C_2(x,t) = \left\langle a^{-1}(x,y,t)\right\rangle^{-1} \equiv \hat{a}(x,t)\,,$$

ou seja, C_2 é o coeficiente efetivo $\hat{a}$.

Logo, utilizando que $C_2 = \hat{a}$ e integrando (4.2.16) em $[0,y]$, obtém-se

$$\frac{\partial N_2}{\partial y} = \int_0^y \left(\frac{\hat{a}(x,t)}{a(x,s,t)} - 1\right) ds + C_3\,. \tag{4.2.17}$$

Aplicando o operador de valor médio em (4.2.17) e utilizando a 1-periodicidade em y de $N_2(x,y,t)$, tem-se

$$\begin{aligned} 0 = \left\langle \frac{\partial N_2}{\partial y}\right\rangle &= \left\langle \int_0^y \left(\frac{\hat{a}(x,t)}{a(x,s,t)} - 1\right) ds\right\rangle + C_3 \\ \Longrightarrow C_3 &= -\left\langle \int_0^y \left(\frac{\hat{a}(x,t)}{a(x,s,t)} - 1\right) ds\right\rangle . \end{aligned} \tag{4.2.18}$$

Portanto, integrando (4.2.17) em $[0,y]$

$$N_2(x,y,t) = \int_0^y \int_0^r \left(\frac{\widehat{a}(x,t)}{a(x,s,t)} - 1\right) dsdr + C_3 y + C_4\,. \tag{4.2.19}$$

Para determinar C_4 utiliza-se a condição de unicidade $\langle N_2(x,y,t)\rangle = 0$ imposta pelo Lema 2.5.6. Assim, aplicando o operador de valor médio em (4.2.19) e utilizando da 1-periodicidade de $N_2(x,y,t)$, segue que

$$C_4 = -\left\langle \int_0^y \int_0^r \left(\frac{\widehat{a}(x,t)}{a(x,s,t)} - 1 \right) dsdt + C_3 y \right\rangle$$
$$= \left\langle \int_0^y \int_0^t \left(\frac{\widehat{a}(x,t)}{a(x,s,t)} - 1 \right) dsdr \right\rangle - \frac{C_3}{2}. \tag{4.2.20}$$

Portanto, (4.2.19) com (4.2.18) e (4.2.20) fornecem uma expressão analítica para $N_2(x,y,t)$ em $y \in (0,1)$. Para obter uma expressão para $N_2(x,y,t)$ válida para todo $y \in (0,n)$, basta extendê-la periodicamente.

Voltando à construção da SAF, segue de (4.2.8), (4.2.10) e (4.2.12) que a equação para $w_3(x,y,t)$ em $(4.2.5)_4$ pode ser atualizada como

$$L_{yy}^{yy} w_3 = -2\mathcal{L}_{xy}^{yy} w_2 - 2\mathcal{L}_{yy}^{xy} w_2 - 2\mathcal{L}_{xy}^{xx} w_0$$

em que neste caso $N \equiv w_3$ e $F \equiv -2\mathcal{L}_{xy}^{yy} w_2 - 2\mathcal{L}_{yy}^{xy} w_2 - 2\mathcal{L}_{xy}^{xx} w_0$.

Mas note que de (4.2.12) e (4.2.15) segue que

$$\begin{aligned}
F &= -2\left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left[a(x,y,t)\frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2}\right] + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[a(x,y,t)\frac{\partial^2 w_2}{\partial x \partial y}\right] + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left[a(x,y,t)\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right]\right) \\
&= -2\Bigg(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left[a(x,y,t)\frac{\partial^2 N_2}{\partial y^2}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right] + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[a(x,y,t)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial N_2}{\partial y}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right)\right] \\
&\quad + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left[a(x,y,t)\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right]\Bigg) \\
&= -2\left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left[\left(a(x,y,t)\frac{\partial^2 N_2}{\partial y^2} + a(x,y,t)\right)\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right] + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[a(x,y,t)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial N_2}{\partial y}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right)\right]\right) \\
&= -2\left(\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(a(x,y,t)\frac{\partial^2 N_2}{\partial y^2} + a(x,y,t)\right)\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right] + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[a(x,y,t)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial N_2}{\partial y}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right)\right]\right) \\
&= -2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[a(x,y,t)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial N_2}{\partial y}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right)\right].
\end{aligned}$$

Logo, o problema para $w_3(x,y,t)$ é da forma

$$\begin{aligned}
L_{yy}^{yy} w_3 &= -2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[a(x,y,t)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial N_2}{\partial y}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right)\right] \\
&= -2\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[a(x,y,t)\frac{\partial^2 N_2}{\partial y \partial x}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right] + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[a(x,y,t)\frac{\partial N_2}{\partial y}\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3}\right]\right) \\
&= -2\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[a(x,y,t)\frac{\partial^2 N_2}{\partial y \partial x}\right]\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[a(x,y,t)\frac{\partial N_2}{\partial y}\right]\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3}\right).
\end{aligned} \tag{4.2.21}$$

Assim, da 1-periodicidade em y de $a(x,y,t)$ e $N_2(x,y,t)$, segue que $\langle F \rangle = 0$. Portanto, o Lema 2.5.6 garante a existência da solução $w_3(x,y,t)$ 1-periódica em y de $(4.2.5)_4$, a qual pode ser escrita como $w_3(x,y,t) = \tilde{w}_3(x,y,t) + C(x,t)$, em que $C(x,t)$ é uma constante para cada x e t fixos e $\langle \tilde{w}_3(x,y,t) \rangle = 0$.

Levando em conta a estrutura do lado direito de (4.2.21) e a linearidade do operador L^{yy}_{yy}, considera-se

$$w_3(x,y,t) = N_{31}(x,y,t)\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + N_{32}(x,y,t)\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3}\ , \tag{4.2.22}$$

em que $\tilde{w}_3(x,y,t) \equiv N_{31}(x,y,t)\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + N_{32}(x,y,t)\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3}$ e $C(x,t) \equiv 0$. E a condição de unicidade imposta pelo Lema 2.5.6 agora é imposta para as funções $N_{3k}(x,y,t)$, $k \in \{1,2\}$.

Substituindo (4.2.22) em (4.2.21), tem-se

$$\begin{aligned} L^{yy}_{yy}w_3 &= -2\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[a(x,y,t)\frac{\partial^2 N_2}{\partial y \partial x}\right]\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[a(x,y,t)\frac{\partial N_2}{\partial y}\right]\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3}\right) \\ &\Longrightarrow \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[a(x,y,t)\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(N_{31}(x,y,t)\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + N_{32}(x,y,t)\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3}\right)\right] \\ &= -2\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[a(x,y,t)\frac{\partial^2 N_2}{\partial y \partial x}\right]\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[a(x,y,t)\frac{\partial N_2}{\partial y}\right]\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3}\right) \end{aligned}$$

De igualar os termos que acompanham as respectivas derivadas em relação à x da função $w_0(x,t)$, obtemos os seguintes *segundos problemas locais*:

$$L^{yy}_{yy}N_{31} = -2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[a(x,y,t)\frac{\partial^2 N_2}{\partial y \partial x}\right]\ , y \in (0,1); \tag{4.2.23}$$

$$L^{yy}_{yy}N_{32} = -2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[a(x,y,t)\frac{\partial N_2}{\partial y}\right]\ , y \in (0,1). \tag{4.2.24}$$

Segue da 1-periodicidade em y das funções $a(x,y,t)$ e $N_2(x,y,t)$ que o Lema 2.5.6 garante a existência das soluções $N_{3k}(x,y,t)$, $k \in \{1,2\}$, dos segundos problemas locais, 1-periódicas em y em que $\langle N_{3k}(x,y,t)\rangle = 0$.

Procedendo de forma análoga à feita para o encontro da solução local $N_2(x,y,t)$ desta seção, a qual utiliza-se de todas as propriedades de $a(x,y,t)$, o fato de que $\langle N_2(x,y,t)\rangle = 0$, além da 1-periodicidade em y destas funções, tem-se as seguintes expressões analíticas para as soluções $N_{3k}(x,y,t)$, $k \in \{1,2\}$:

$$N_{31}(x,y,t) = -2\int_0^y \frac{\partial N_2}{\partial x}ds + C_5 y + C_6\,, \tag{4.2.25}$$

em que

$$C_5 = 2\left\langle \frac{\partial N_2}{\partial x}\right\rangle\ ,\ C_6 = 2\left\langle \int_0^y \frac{\partial N_2}{\partial x}ds\right\rangle - \frac{C_5}{2}\,. \tag{4.2.26}$$

E também

$$N_{32}(x,y,t) = -2\int_0^y N_2(x,s,t)\,ds + C_7\,, \tag{4.2.27}$$

onde

$$C_7 = 2\left\langle \int_0^y N_2(x,s,t)\,ds \right\rangle\,. \tag{4.2.28}$$

Assim, (4.2.27) e (4.2.28) fornecem expressões analíticas para as soluções $N_{3k}(x,y,t)$ válidas em $y \in (0,1)$. Para obter expressões válidas para $y \in (0,n)$, basta extender as soluções $N_{3k}(x,y,t)$ periodicamente.

Aplicando o Lema 2.5.6 no problema para $w_4(x,y,t)$ em $(4.2.5)_5$, utilizando novamente a independência de w_0 e w_1 em relação a y e levando em conta (4.2.12) e (4.2.22), pode-se reescrever a equação para $w_4(x,y,t)$ em $(4.2.5)_5$ da forma

$$L^{yy}_{yy}w_4 = -b\frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} - 2\mathcal{L}^{yy}_{xy}w_3 - 2\mathcal{L}^{xy}_{yy}w_3 - \mathcal{L}^{yy}_{xx}w_2 - 4\mathcal{L}^{xy}_{xy}w_2 - \mathcal{L}^{xx}_{yy}w_2 - \mathcal{L}^{xx}_{xx}w_0 + f,$$

em que $N \equiv w_4$ e

$$F \equiv -b\frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} - 2\mathcal{L}^{yy}_{xy}w_3 - 2\mathcal{L}^{xy}_{yy}w_3 - \mathcal{L}^{yy}_{xx}w_2 - 4\mathcal{L}^{xy}_{xy}w_2 - \mathcal{L}^{xx}_{yy}w_2 - \mathcal{L}^{xx}_{xx}w_0 + f.$$

Expandindo os operadores e agrupando os termos semelhantes, tem-se

$$\begin{aligned} F = -b(x,y,t)\frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} - 2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\Bigg[a(x,y,t)\frac{\partial^2 N_{31}}{\partial y^2}\frac{\partial w_0}{\partial x^2} + a(x,y,t)\frac{\partial^2 N_{32}}{\partial y^2}\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} \\ + 2a(x,y,t)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial N_2}{\partial y}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\Bigg] - 2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Bigg[a(x,y,t)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial N_{31}}{\partial y}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right) \\ + a(x,y,t)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial N_{32}}{\partial y}\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3}\right) + \frac{1}{2}a(x,y,t)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(N_2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right)\Bigg] \\ - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(a(x,y,t)\frac{\partial^2 N_2}{\partial y^2}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + a(x,y,t)\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right) + f(x,y,t), \end{aligned}$$

a qual utilizando das expressões analíticas de $N_{31}(x,y,t)$ e $N_{32}(x,y,t)$ em (4.2.25) e (4.2.27), além da equação para o coeficiente efetivo em (4.2.16), obtém-se

$$\begin{aligned} F = -b(x,y,t)\frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} - 2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Bigg[a(x,y,t)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial N_{31}}{\partial y}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right) + a(x,y,t)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial N_{32}}{\partial y}\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3}\right) \\ + \frac{1}{2}a(x,y,t)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(N_2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right)\Bigg] - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\hat{a}(x,t)\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right) + f(x,y,t), \end{aligned}$$

em que de aplicar o operador valor médio em F e utilizar da 1-periodicidade em y de $a(x,y,t)$, $N_2(x,y,t)$, $N_{31}(x,y,t)$ e $N_{32}(x,y,t)$, segue que a condição para a existência de solução $w_4(x,y,t)$ 1-periódica em y de $(4.2.5)_5$ é que $w_0(x,y,t)$ seja a solução

da chamada equação homogeneizada

$$\hat{b}(x,t)\frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\widehat{a}(x,t)\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right)=\hat{f}(x,t)\,,\ x\in(0,1)\,,\ t>0\,. \tag{4.2.29}$$

Portanto, sendo w_0 a solução de (4.2.29), de maneira que se transforma em uma identidade, segue que o problema para $w_4(x,y,t)$ pode ser reescrito como

$$\begin{aligned}L^{yy}_{yy}w_4 = f(x,y,t)-\hat{f}(x,t)+(\hat{b}(x,t)-b(x,y,t))\frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}+3\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[a(x,y,t)\frac{\partial^2 N_2}{\partial x^2}\right]\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\\ -2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[a(x,y,t)\left(C_5-4\frac{\partial N_2}{\partial x}\right)\right]\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3}+3\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[a(x,y,t)N_2\right]\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4}\,.\end{aligned} \tag{4.2.30}$$

É evidente que $\langle F\rangle=0$, graças à 1-periodicidade em y das funções na definição de F. Logo, para cada $x\in(0,1)$ e $t>0$ fixos, existe $w_4(x,y,t)$ 1-periódica em y solução de $(4.2.5)_5$, a qual pode ser escrita como $w_4(x,y,t)=\tilde{w}_4(x,y,t)+C(x,t)$, em que $C(x,t)$ é uma constante e $\langle\tilde{w}_4(x,y,t)\rangle=0$.

Levando em conta a estrutura do lado direito de (4.2.30) e da linearidade do operador L^{yy}_{yy}, considera-se

$$\begin{aligned}w_4(x,y,t)=N_{40}(x,y,t)+N_{41}(x,y,t)\frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}+N_{42}(x,y,t)\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}+N_{43}(x,y,t)\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3}\\ +N_{44}(x,y,t)\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4},\end{aligned} \tag{4.2.31}$$

em que $\tilde{w}_4(x,y,t)\equiv N_{40}(x,y,t)+N_{41}(x,y,t)\frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}+\sum_{k=2}^{4}N_{4k}(\partial^k w_0/\partial x^k)$ e $C(x,t)\equiv 0$. A condição de unicidade imposta pelo Lema 2.5.6 agora é imposta para as funções $N_{4k}(x,y,t)$, $k\in\{0,1,2,3,4\}$.

Procedendo de forma análoga à feita anteriormente, de substituir (4.2.31) em (4.2.30) e igualar os termos que acompanham as derivadas de mesma ordem e natureza, tem-se as equações dos *terceiros problemas locais*:

$$L^{yy}_{yy}N_{40}=f(x,y,t)-\hat{f}(x,t)\,,\ y\in(0,1);$$

$$L^{yy}_{yy}N_{41}=\hat{b}(x,t)-b(x,y,t)\,,\ y\in(0,1);$$

$$L^{yy}_{yy}N_{42}=3\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[a(x,y,t)\frac{\partial^2 N_2}{\partial x^2}\right]\,,\ y\in(0,1);$$

$$L^{yy}_{yy}N_{43}=-2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[a(x,y,t)\left(C_5-4\frac{\partial N_2}{\partial x}\right)\right]\,,\ y\in(0,1);$$

$$L^{yy}_{yy}N_{44}=3\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[a(x,y,t)N_2\right]\,,\ y\in(0,1),$$

a qual, também é evidente que para $x \in (0,1)$ e $t > 0$ fixos, o Lema 2.5.6 garante a existência das soluções $N_{4k}(x,y,t)$, $k \in \{0,1,2,3,4\}$ 1-periódicas em y em que $\langle N_{4k}(x,y,t)\rangle = 0$.

E das equações dos terceiros problemas locais, segue para a solução local $N_{40}(x,y,t)$:

$$N_{40}(x,y,t) = \int_0^y \left(I_3(x,\xi,t) + C_{10}\right) d\xi + C_{11}\,, \tag{4.2.32}$$

em que

$$\begin{array}{ll} C_{11} = -\left\langle \int_0^y \left(I_3(x,\xi,t) + C_{10}\right) d\xi \right\rangle\,, & C_{10} = -\langle I_3\rangle \\ I_3 = \int_0^y a^{-1}(x,w,t)\left(I_2(x,w,t) + C_9\right) dw\,, & C_9 = -\hat{a}(x,t)\langle I_2\rangle \\ I_2 = \int_0^y \left(I_1(x,z,t) + C_8\right) dz\,, & C_8 = -\langle I_1\rangle \\ I_1 = \int_0^y \left(f(x,s,t) - f(x,t)\right) ds & \end{array} \tag{4.2.33}$$

Para a solução local $N_{41}(x,y,t)$, tem-se

$$N_{41}(x,y,t) = \int_0^y \left(I_6(x,\xi,t) + C_{14}\right) d\xi + C_{15}\,, \tag{4.2.34}$$

em que

$$\begin{array}{ll} C_{15} = -\left\langle \int_0^y \left(I_6(x,\xi,t) + C_{14}\right) d\xi \right\rangle\,, & C_{14} = -\langle I_6\rangle \\ I_6 = \int_0^y a^{-1}(x,w,t)\left(I_5(x,w,t) + C_{13}\right) dw\,, & C_{13} = -\hat{a}(x,t)\langle I_5\rangle \\ I_5 = \int_0^y \left(I_4(x,z,t) + C_{12}\right) dz\,, & C_{12} = -\langle I_4\rangle \\ I_4 = \int_0^y \left(\hat{b}(x,t) - b(x,s,t)\right) ds & \end{array} \tag{4.2.35}$$

Para a solução local $N_{42}(x,y,t)$, segue que

$$N_{42}(x,y,t) = \int_0^y \left(\int_0^z \left(3\frac{\partial^2 N_2}{\partial x^2} + \frac{C_{16}}{a(x,s,t)}\right) ds + C_{17}\right) dz + C_{18}\,, \tag{4.2.36}$$

onde

$$\begin{aligned} C_{16} &= -3\hat{a}(x,t)\left\langle \frac{\partial^2 N_2}{\partial x^2}\right\rangle \\ C_{17} &= -\left\langle \int_0^y \left(3\frac{\partial^2 N_2}{\partial x^2} + \frac{C_{16}}{a(x,s,t)}\right) ds \right\rangle \\ C_{18} &= -\left\langle \int_0^y \left(\int_0^z \left(3\frac{\partial^2 N_2}{\partial x^2} + \frac{C_{16}}{a(x,s,t)}\right) ds + C_{17}\right) dz \right\rangle \end{aligned} \tag{4.2.37}$$

E para a solução local $N_{43}(x,y,t)$, tem-se

$$N_{43}(x,y,t) = -2\int_0^y \left(\int_0^z \left[C_5 - 4\frac{\partial N_2}{\partial x} - \frac{C_{19}}{2a(x,s,t)}\right] ds - \frac{C_{20}}{2}\right) dz + C_{21}\,, \tag{4.2.38}$$

em que

$$
\begin{aligned}
C_{19} &= 2\hat{a}(x,t)\left\langle C_5 - 4\frac{\partial N_2}{\partial x}\right\rangle, \\
C_{20} &= 2\left\langle \int_0^y \left[C_5 - 4\frac{\partial N_2}{\partial x} - \frac{C_{19}}{2a(x,s,t)}\right] ds \right\rangle, \\
C_{20} &= -\left\langle 2\int_0^y \left(\int_0^z \left[C_5 - 4\frac{\partial N_2}{\partial x} - \frac{C_{19}}{2a(x,s,t)}\right] ds - \frac{C_{20}}{2}\right) dz \right\rangle .
\end{aligned} \tag{4.2.39}
$$

Por fim, para a solução local $N_{44}(x,y,t)$, segue da condição de que $\langle N_2(x,y,t)\rangle = 0$

$$
N_{44}(x,y,t) = 3\int_0^y \left(\int_0^z N_2(x,s,t)ds + \frac{C_{22}}{3}\right) dz + C_{23}\,, \tag{4.2.40}
$$

onde

$$
\begin{aligned}
C_{22} &= -3\left\langle \int_0^y N_2(x,s,t)ds \right\rangle, \\
C_{23} &= -3\left\langle \int_0^y \left(\int_0^z N_2(x,s,t)ds + \frac{C_{22}}{3}\right) dz \right\rangle .
\end{aligned} \tag{4.2.41}
$$

Assim, (4.2.32), (4.2.34), (4.2.36), (4.2.38) e (4.2.40) fornecem expressões analíticas para as soluções $N_{4k}(x,y,t)$ válidas em $y \in (0,1)$. Para obter expressões válidas para $y \in (0,n)$, basta extender as soluções $N_{4k}(x,y,t)$ periodicamente.

Portanto, substituindo (4.2.8), (4.2.10), (4.2.12), (4.2.22) e (4.2.31) em (4.2.2), tem-se a seguinte expressão para a SAF, voltando à variável original

$$
\begin{aligned}
w^{(4)}(x,\varepsilon,t) = w_0(x,t) &+ \varepsilon^2 N_2\left(x,\frac{x}{\varepsilon},t\right)\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\
&+ \varepsilon^3\left(N_{31}\left(x,\frac{x}{\varepsilon},t\right)\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + N_{32}\left(x,\frac{x}{\varepsilon},t\right)\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3}\right) \\
&+ \varepsilon^4\left(N_{40}\left(x,\frac{x}{\varepsilon},t\right) + N_{41}\left(x,\frac{x}{\varepsilon},t\right)\frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} + N_{42}\left(x,\frac{x}{\varepsilon},t\right)\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right. \\
&\left. + N_{43}\left(x,\frac{x}{\varepsilon},t\right)\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} + N_{44}\left(x,\frac{x}{\varepsilon},t\right)\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4}\right).
\end{aligned} \tag{4.2.42}
$$

Para completarmos a construção da SAF, consideram-se as condições iniciais e de contorno em (4.2.1) para a SAF em (4.2.42).

Para as condições iniciais, de forma análoga ao caso da barra vibrante, em geral a SAF em (4.2.42) também não satisfaz as condições de deslocamento e velocidade inicial, cumprindo apenas no limite quando $\varepsilon \to 0^+$, dado que novamente nenhuma condição adicional à respeito de $t = 0$ foi atribuida às soluções dos problemas locais.

Como se busca uma SAF válida inclusive sobre o meio homogêneo equivalente, tem-se as seguintes condições iniciais para a função $w_0(x,t)$:

$$w_0(x,0) = p(x)\ ,\ \frac{\partial w_0}{\partial t}(x,0) = q(x). \tag{4.2.43}$$

Para as condições de Dirichlet, tem-se das expressões das soluções dos problemas locais que

$$w^{(4)}(0,\varepsilon,t) = w_0(0,t) + \varepsilon^2 C_4 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\bigg|_{x=0} + \varepsilon^3 \left(C_6 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\bigg|_{x=0} + C_7 \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3}\bigg|_{x=0} \right) + \varepsilon^4 \left(C_{11} + C_{15} \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}\bigg|_{x=0} + C_{18} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\bigg|_{x=0} + C_{21} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3}\bigg|_{x=0} + C_{23} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4}\bigg|_{x=0} \right),$$

em que C_4, C_5, C_7, C_{11}, C_{15}, C_{18}, C_{21} e C_{23} são dados, respectivamente, em (4.2.20), (4.2.26), (4.2.28), (4.2.33), (4.2.35), (4.2.37), (4.2.39) e (4.2.41).

Como em geral as constantes de integração (na verdade, neste caso são funções de x e t) não são nulas, segue que a SAF em (4.2.42) também não satisfaz as condições de Dirichlet em (4.2.1), a qual o não cumprimento no contorno $x = 1$ segue da 1-periodicidade destas funções.

Pelos mesmos argumentos utilizados para construir as condições iniciais em (4.2.43), tem-se as seguintes condições de Dirichlet para a função $w_0(x,t)$:

$$w_0(x,t) = 0\,, x \in \{0,1\}. \tag{4.2.44}$$

Considerando agora as condições de Neumann, primeiramente observe que derivando $w^{(4)}(x,y,t)$ em relação à x, onde utilza-sea regra da cadeia, tem-se

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w^{(4)}}{\partial x} = \frac{\partial w_0}{\partial x} &+ \varepsilon \frac{\partial N_2}{\partial y}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \varepsilon^2 \left[\left(C_5 - \frac{\partial N_2}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - 2N_2 \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} \right] \\
&+ \varepsilon^3 \left[\left(\frac{\partial N_{31}}{\partial x} + \frac{\partial N_{42}}{\partial y} \right) \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \left(2N_{31} - C_5 y - C_6 + \frac{\partial N_{43}}{\partial y} \right) \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} \right. \\
&\left. + \left(N_{32} + \frac{\partial N_{44}}{\partial y} \right) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + \frac{\partial N_{40}}{\partial t} + \frac{\partial N_{41}}{\partial y}\frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \right] \\
&+ \varepsilon^4 \left[\frac{\partial N_{40}}{\partial x} + \frac{\partial N_{41}}{\partial x}\frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} + N_{41}\frac{\partial^3 w_0}{\partial t^2 \partial x} + \frac{\partial N_{42}}{\partial x}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \left(N_{42} + \frac{\partial N_{43}}{\partial x} \right) \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} \right. \\
&\left. + \left(N_{43} + \frac{\partial N_{44}}{\partial x} \right) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + N_{44}\frac{\partial^5 w_0}{\partial x^5} \right],
\end{aligned}$$

onde de aplicar a condição no contorno $x = 0$ na expressão acima, segue que

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial w^{(4)}}{\partial x}\right|_{x=0} &= \left.\frac{\partial w_0}{\partial x}\right|_{x=0} + \varepsilon C_3 \left.\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right|_{x=0} + \varepsilon^2 \left[(C_5 - C_4\partial x) \left.\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right|_{x=0} - 2C_4 \left.\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3}\right|_{x=0} \right] \\ &+ \varepsilon^3 \left[(C_6 - 2N_2(0,0,t)) \left.\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right|_{x=0} + C_7 \left.\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4}\right|_{x=0} + \left.\frac{\partial N_{40}}{\partial t}\right|_{x=0} \right] \\ &+ \varepsilon^4 \left[\left.\frac{\partial N_{40}}{\partial x}\right|_{x=0} + C_{15} \left.\frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}\right|_{x=0} + C_{15} \left.\frac{\partial^3 w_0}{\partial t^2 \partial x}\right|_{x=0} + C_{18} \left.\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right|_{x=0} + (C_{18} + C_{21}) \left.\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3}\right|_{x=0} \right. \\ &\left. + (C_{21} + C_{23}) \left.\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4}\right|_{x=0} + C_{23} \left.\frac{\partial^5 w_0}{\partial x^5}\right|_{x=0} \right] . \end{aligned} \tag{4.2.45}$$

Conforme dito anteriormente, as constantes de integração obtidas durante o processo de encontro das expressões analíticas das soluções locais são, em geral, não nulas. Portanto, com base em (4.2.45), pode-se afirmar que

$$\left.\frac{\partial w^{(4)}}{\partial x}\right|_{x=0} \neq 0 ,$$

ou seja, a SAF não satisfaz a condição de Neumann no contorno $x = 0$. E dada a 1-periodicidade das funções locais, o mesmo vale para o contorno $x = 1$.

Mas da necessidade de uma SAF válida inclusive sobre o meio homogêneo equivalente, decorre as seguintes condições de Neumann para a função $w_0(x,t)$:

$$\frac{\partial w_0}{\partial x} = 0 \, , \; x \in \{0,1\} . \tag{4.2.46}$$

Assim, da equação do problema homogeneizado em (4.2.29) e as condições em (4.2.43), (4.2.44) e (4.2.46), segue que a existência da SAF em (4.2.42) é garantida se $w_0(x,t)$ satisfizer o problema homogeneizado definido por

$$\begin{cases} \hat{b}(x,t)\dfrac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\hat{a}(x,t)\dfrac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right] = \hat{f}(x,t), \;\; x \in (0,1), \; t > 0 \\ w_0(x,t) = 0 \; , \;\; \dfrac{\partial w_0}{\partial x} = 0 \, , \; x \in \{0,1\} \, , t > 0 \\ w_0(x,0) = p(x) \, , \;\; \dfrac{\partial w_0}{\partial t}(x,0) = q(x) \; , \; x \in (0,1) \end{cases} , \tag{4.2.47}$$

Observação 4.2.1 *Note de diferentemente da seção 4.1, a SAF construída em (4.2.42) não satisfaz as condições de contorno, dado que nem sempre as constantes de integração oriundas das expressões analíticas das soluções locais serão nulas. E como mesmo com as condições $N_k(0,0,t) = 0$, a SAF em (4.2.42) também não satisfaz as condições de contorno, esta foi uma das motivações para as quais não se considerou esta condição no Lema 2.5.6 para as soluções locais obtidas nesta seção, dado que a motivação para o uso desta condição é se obter uma SAF que cumpra*

as condições de contorno. Por outro lado, a condição de que $\langle N_k(x,y,t)\rangle = 0$*, possui motivações de natureza mecânica, dado que esta se traduz em garantir que o deslocamento médio na macroescala coincida com o deslocamento médio na microescala.*

4.2.2 Problema estático

4.2.2.1 Formulação do problema e aplicação do MHA

Considerando que o modelo (4.2.1) atingiu seu estado estacionário ou de equilíbrio, após a viga não apresentar o fenômeno de vibração, tem-se que tanto a solução do modelo quanto os seus coeficientes não dependem mais da variável temporal, de onde decorre o modelo estacionário

$$\begin{cases} \dfrac{d^2}{dx^2}\left(a^\varepsilon(x)\dfrac{d^2w^\varepsilon}{dx^2}\right) = f^\varepsilon(x), \;\; x\in(0,1), \\ w^\varepsilon(x) = 0\;,\;\; \dfrac{dw^\varepsilon}{dx} = 0\;,\; x\in\{0,1\}. \end{cases}, \tag{4.2.48}$$

que modela o comportamento estacionário de uma viga do tipo Euler-Bernoulli engastada em ambas as extremidades, em que agora $a^\varepsilon(x) = a\left(x, x/\varepsilon\right)$ e $f^\varepsilon(x) = f\left(x, x/\varepsilon\right)$.

Neste caso apresentar uma expressão analítica fechada para o modelo em (4.2.48) é uma tarefa simples, dado que a mesma é obtida via integração direta. Assim, tem-se

$$w^\varepsilon(x) = \int_0^x \left(C_1^\varepsilon I_2^\varepsilon(w) + C_2^\varepsilon I_1^\varepsilon(w) + I_3^\varepsilon(w)\right) dw, \tag{4.2.49}$$

onde

$$\begin{aligned} &C_1^\varepsilon = \frac{1}{\Delta^\varepsilon}\int_0^1 \left(I_1^\varepsilon(1)I_3^\varepsilon(w) - I_3^\varepsilon(1)I_1^\varepsilon(w)\right) dw, \quad C_2^\varepsilon = \frac{1}{\Delta^\varepsilon}\int_0^1 \left(I_3^\varepsilon(1)I_2^\varepsilon(w) - I_2^\varepsilon(1)I_3^\varepsilon(w)\right) dw, \\ &\Delta^\varepsilon = \int_0^1 \left(I_2^\varepsilon(1)I_1^\varepsilon(w) - I_1^\varepsilon(1)I_2^\varepsilon(w)\right) dw, \\ &I_1^\varepsilon(w) = \int_0^w \frac{dr}{a^\varepsilon(r)}, \quad I_2^\varepsilon(w) = \int_0^w \frac{rdr}{a^\varepsilon(r)}, \quad I_3^\varepsilon(w) = \int_0^w \frac{1}{a^\varepsilon(r)}\int_0^r\int_0^s f^\varepsilon(t)dtdsdr. \end{aligned} \tag{4.2.50}$$

Mas mesmo que se tenha uma expressão fechada para $w^\varepsilon(x)$, a implementação desta se torna muito complicada e custosa computacionalmente, sendo assim, a abordagem da homogeneização é uma proposta interessante para se encontrar uma boa aproximação de $w^\varepsilon(x)$, dado que a estrutura do problema homogeneizado é mais simples.

Se tratando da homogeneização, segue que como o modelo em (4.2.49) é um caso particular de (4.2.1), então todas as considerações obtidas na construção da SAF $w^{(4)}$ para o caso dinâmico são válidas para o caso estático, em que apenas desconsidera-se a dependência em t das funções trabalhadas. Assim, uma SAF para (4.2.48) é da forma

$$
\begin{aligned}
w^{(4)}(x,\varepsilon) = w_0(x) &+ \varepsilon^2 N_2\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{d^2w_0}{dx^2} \\
&+ \varepsilon^3\left(N_{31}\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{d^2w_0}{dx^2} + N_{32}\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{d^3w_0}{dx^3}\right) \\
&+ \varepsilon^4\left(N_{40}\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right) + N_{42}\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{d^2w_0}{dx^2}\right. \\
&\left. + N_{43}\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{d^3w_0}{dx^3} + N_{44}\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{d^4w_0}{dx^4}\right), \qquad (4.2.51)
\end{aligned}
$$

em que sua existência é garantida se $w_0(x)$ satisfizer o problema homogeneizado

$$
\begin{cases}
\dfrac{d^2}{dx^2}\left[\hat{a}(x)\dfrac{d^2w_0}{dx^2}\right] = \hat{f}(x), \;\; x \in (0,1), \\
w_0(x) = 0\ , \;\; \dfrac{dw_0}{dx} = 0\ , \; x \in \{0,1\}\,.
\end{cases} \qquad (4.2.52)
$$

Vale ressaltar que para o caso estático, a SAF também não satisfaz as condições de contorno, em que isto decorre do caso dinâmico.

4.2.2.2 O problema é bem posto

Primeiramente será demonstrado que existe solução para o modelo em (4.2.48) e que ela é única. Mas para isso, se faz necessário algumas considerações.

Observe que a função $a^\varepsilon(x) \in L^\infty(D,\mathbb{R})$, em que neste caso, $D = [0,1]$. Isto decorre do fato de que toda função limitada é essencialmente limitada. Sendo assim, seja $\phi, \varphi \in H_0^2(D)$, então defini-se a forma bilinear

$$
a[\phi,\varphi] = \int_D \left\langle a^\varepsilon(x)\frac{d^2\phi}{dx^2}, \frac{d^2\varphi}{dx^2}\right\rangle dx = \left(a^\varepsilon(x)\frac{d^2\phi}{dx^2}, \frac{d^2\varphi}{dx^2}\right), \qquad (4.2.53)
$$

em que $(\cdot,\cdot) = (\cdot,\cdot)_{L^2(D)}$ e $\langle\cdot,\cdot\rangle = \langle\cdot,\cdot\rangle_{H^{-2}}$, H_0^2 é o pareamento de H_0^2 e seu dual H^{-2}. Ou seja, $a[\phi,\varphi]$ calcula o produto interno dos pareamentos entre funções de H_0^2 e H^{-2}.

Seja agora $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ com $0 < \alpha \leq \beta < \infty$, então defini-se o espaço $M^\varepsilon(\alpha,\beta,D)$, a qual é definido como o espaço, em que para qualquer $\xi \in \mathbb{R}$ e $x \in D$, tem-se

1) $\langle \xi, a^\varepsilon(x)\xi\rangle \geq \alpha|\xi|^2$;

2) $|a^\varepsilon(x)\xi| \leq \beta|\xi|$.

Assim, $M^\varepsilon(\alpha,\beta,D)$ é o conjunto dos pareamento entre as funções $a^\varepsilon(x)$ e ξ, as quais satisfazem as condições acima. Estas se traduzem em garantir que $a^\varepsilon(x)$ seja estritamente positiva e limitada, mesmo que já se tenha isso por hipótese[1].

[1] De fato, poderíamos dizer que tais condições decorrem das hipóteses feitas para o coeficiente $a^\varepsilon(x)$.

Assim, considere o seguinte Teorema

Teorema 4.2.2 *O problema em (4.2.48) tem uma única solução* $w \in H_0^2(D)$*, tal que*

$$A[w,v] = \langle f, v\rangle_{L^2,H_0^2}\ ,\ \forall v \in H_0^2(D)\,. \tag{4.2.54}$$

Além disso, vale a estimativa

$$||w||_{H_0^2(D)} \leq \frac{C_D}{\alpha}||f||_{L^2(D)}\,. \tag{4.2.55}$$

Demonstração:

Primeiramente, observe que pode-se escrever o problema em (4.2.48), em termos da forma bilinear $a[\phi,\varphi]$. Com efeito, pelo processo de integração por partes e supondo $w \in H_0^2(D)$, tem-se para cada ε

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2}{dx^2}\left(a^\varepsilon(x)\frac{d^2w^\varepsilon}{dx^2}\right)dx = f^\varepsilon(x) \Longrightarrow \int_D \frac{d^2}{dx^2}\left(a^\varepsilon(x)\frac{d^2w^\varepsilon}{dx^2}\right)w^\varepsilon dx = \int_D fw^\varepsilon dx\\
&\Longrightarrow -\left[\frac{d}{x}\left(a^\varepsilon(x)\frac{d^2w^\varepsilon}{dx^2}\right)w^\varepsilon\right]\Bigg|_{\partial D} + \int_D \frac{d^2}{dx^2}\left(a^\varepsilon(x)\frac{d^2w^\varepsilon}{dx^2}\right)w^\varepsilon dx = \int_D fw^\varepsilon dx\\
&\Longrightarrow -\int_D \frac{d}{dx}\left(a^\varepsilon(x)\frac{d^2w^\varepsilon}{dx^2}\right)\frac{dw^\varepsilon}{dx}dx = \int_D fw^\varepsilon dx\\
&\Longrightarrow -\int_D \frac{d}{dx}\left(a^\varepsilon(x)\frac{d^2w^\varepsilon}{dx^2}\right)\frac{dw^\varepsilon}{dx}dx + \left(\left[a^\varepsilon(x)\frac{d^2w^\varepsilon}{dx^2}\right]\frac{dw^\varepsilon}{dx}\right)\Bigg|_{\partial D} = \int_D fw^\varepsilon dx\\
&\Longrightarrow \int_D \left[a^\varepsilon(x)\frac{d^2w^\varepsilon}{dx^2}\right]\frac{d^2w^\varepsilon}{dx^2}dx = \int_{\partial D} fw^\varepsilon dx \Longrightarrow A[w,w] = \langle f, w\rangle_{L^2,H_0^2}\ .
\end{aligned} \tag{4.2.56}$$

Assim, o problema em (4.2.48) é obtido considerando-se $v = w^\varepsilon$ em (4.2.54). Antes de prosseguir,observe que o Teorema garante a existência de uma solução em $H_0^2(D)$, mas formalmente, a equação diferencial é de quarta ordem. No entanto, isto é suficiente pois na prática o que foi feito em (4.2.56) foi a obtenção da formulação fraca do problema em (4.2.48), em que a solução $w\varepsilon$ atua neste contexto como uma função de teste.

A estratégia a seguir é utilizar o Teorema de Lax-Milgram em 2.6.11. Assim, observando que $A[w,v] = a[w,v]$ e utilizando do fato de que $a^\varepsilon(x) \in M^\varepsilon(\alpha,\beta,D)$, segue, escolhendo $v = w^\varepsilon$ e $w = w^\varepsilon$

$$A[w^\varepsilon,w^\varepsilon] = \int_D \left\langle a^\varepsilon(x)\frac{d^2w^\varepsilon}{dx^2}, \frac{d^2w^\varepsilon}{dx^2}dx\right\rangle \geq \alpha\int_D \left|\frac{d^2w^\varepsilon}{dx^2}\right|^2 dx = \alpha||w^\varepsilon||^2_{H_0^2(D)}\,,$$

em que se utilizou da propriedade (1) das funções em $M^\varepsilon(\alpha,\beta,D)$ e a desigualdade de Poincaré[2].

[2] $||u||_{L^2(D)} \leq C||du/dx||_{L^2(D)}$.

Segue que $A[w,v]$ é coercitiva.

Por outro lado, note que pela desigualdade de Cauchy-Schwarz[3] e pela segunda propriedade das funções em $M^\varepsilon(\alpha,\beta,D)$

$$\begin{aligned}A[w^\varepsilon,v] &= \int_D \left\langle a^\varepsilon(x)\frac{d^2w^\varepsilon}{dx^2},\frac{d^2v}{dx^2}\right\rangle dx = \int_D \left(a^\varepsilon(x)\frac{d^2w^\varepsilon}{dx^2}\frac{d^2v}{dx^2}\right)dx \leq \int_{\partial D}\left|a^\varepsilon(x)\frac{d^2w^\varepsilon}{dx^2}\right|\cdot\left|\frac{d^2v}{dx^2}\right|dx \\ &\leq \beta\int_{\partial D}\left|\frac{d^2w^\varepsilon}{dx^2}\right|\cdot\left|\frac{d^2v}{dx^2}\right|dx \leq \beta\left(\int_{\partial D}\left|\frac{d^2w^\varepsilon}{dx^2}\right|^2\right)^{1/2}\left(\int_{\partial D}\left|\frac{d^2v}{dx^2}\right|^2\right)^{1/2} \\ &= \beta||w^\varepsilon||_{H_0^2(D)}||v||_{H_0^2(D)},\end{aligned}$$

que mostra a continuidade da forma bilinear $A[w,v]$.

Pelo Teorema de Lax-Milgram o problema em (4.2.48) possui uma única solução em $H_0^2(D)$.

Para a estimativa em (4.2.55), segue da coercitividade de $A[w^\varepsilon,v]$, a desigualdade de Cauchy-Schwarz e da desigualdade da proposição 2.6.4

$$\begin{aligned}\alpha||w^\varepsilon||^2_{H_0^2(D)} \leq A[w^\varepsilon,w^\varepsilon] =< f,w^\varepsilon >\leq ||f||_{L^2(D)}\cdot||w||_{L^2(D)} \leq C_D||f||_{L^2(D)}\cdot||w^\varepsilon||_{H_0^2(D)} \\ \Longrightarrow ||w||_{H_0^2(D)} \leq \frac{C_D}{\alpha}||f||_{L^2(D)}\,.\end{aligned}$$

CQD.

Observe que com a estimativa em (4.2.55), de supor duas soluções $w^\varepsilon(x)$ e $h^\varepsilon(x)$ para o modelo em (4.2.48) com dados $f^\varepsilon(x)$ e $g^\varepsilon(x)$, então construindo a função $\varphi^\varepsilon(x) = w^\varepsilon(x) - h^\varepsilon(x)$, segue da linearidade do operador diferencial que φ^ε é solução de (4.2.48). E de aplicar a estimativa (4.2.55) para $\varphi^\varepsilon(x)$ tem-se

$$||w^\varepsilon(x) - h^\varepsilon(x)||_{H_0^2(D)} \leq \frac{C_D}{\alpha}||f^\varepsilon(x) - g^\varepsilon(x)||_{L^2(D)},$$

o que mostra que o problema em (4.2.48) é também estável e , portanto, bem-posto.

4.2.2.3 Justificativa matemática

Para demonstrar teoricamente a proximidade entre as soluções dos problemas original e homogeneizado, $w^\varepsilon(x)$ e $w_0(x)$, procede-se de forma semelhante à feita no problema da barra vibrante. Aplica-se o operador do problema original à SAF em (4.2.51), restringindo-se a dois termos, obtendo-se assim um erro ao utilizar essa SAF como solução. Em seguida, constrói-se um problema em termos da SAF de dois termos, no qual se considera um problema com solução $w^\varepsilon(x) - w_0(x)$, com condições de contorno homogêneas e termo não homogêneo, sendo este o erro ao considerar a SAF

[3] $|< u,v >| \leq ||u||\cdot||v||\,.$

de dois termos como solução. Posteriormente, busca-se uma expressão para esse erro, que deve apresentar uma dependência explícita de uma potência de ε. Por fim, com o auxílio do Teorema de Weierstrass e a desigualdade em (4.2.55), demonstra-se o resultado.

4.2.2.4 Exemplo numérico

Para ilustrar os resultados, propõe-se o seguinte exemplo numérico: considere o modelo em (4.2.48), onde, $a^\varepsilon(x) = 1 + 0.25\cos(2\pi x/\varepsilon)$ e $f^\varepsilon(x) = 1$. Com esta escolha de coeficiente, a estrutura da assintótica em (4.2.51) se torna mais simples, dado que a não dependência em x do coeficiente (após o desacoplamento das variáveis local e global) implica no cancelamento de vários termos no desenvolvimento geral para o encontro da SAF. Assim, tem-se que para este caso, a SAF toma a forma

$$w^{(4)}(x,\varepsilon) = w_0(x) + \varepsilon^2 N_2\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{d^2w_0}{dx^2} + \varepsilon^3 N_{32}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{d^3w_0}{dx^3} + \varepsilon^4 N_{44}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{d^4w_0}{dx^4}. \tag{4.2.57}$$

Para o encontro da solução do problema homogeneizado, obtém-se via integração direta a seguinte expressão

$$w_0(x) = \frac{\sqrt{15}}{90}\left(x^4 - 2x^3 + x^2\right). \tag{4.2.58}$$

Assim, com a solução exata em (4.2.49), a solução do problema homogeneizada em (4.2.58) e considerando o truncamento $w^{(2)}$ de dois termos da SAF em (4.2.57), tem-se a seguinte representação gráfica para valores decrescentes de ε.

Note que com base na figura 11 fica evidente a convergência da solução exata $w^\varepsilon(x)$ e a SAF $w^{(2)}(x,\varepsilon)$ para a solução homogeneizada $w_0(x)$, o que ilustra a eficácia do método para o caso da viga estática, mesmo que não demonstrado teoricamente.

Tem-se que o cálculo da solução exata, o coeficiente efetivo e a solução local $N_2(x/\varepsilon)$ foram obtidos de forma numérica em que, em particular, $\hat{a} = \sqrt{15}/4$, a qual é o mesmo obtido na seção 3.1.5 e o comportamento da solução local $N_2(x/\varepsilon)$ é representada pela figura 12.

É importante frisar que a decisão de não apresentar a SAF completa em (4.2.52) se deu por conta de que à medida que o parâmetro pequeno ε se torna cada vez menor, a diferença entre a SAF e seus truncamentos se torna ínfima. Isto decorre do fato de que os outros termos são da ordem de ε^3 e ε^4, o que implica numa contribuição insignificamente à SAF, na medida que o parâmetro pequeno ε se torna menor.

Assim, a escolha de utilizar a SAF $w^{(2)}$ é justificada por ser uma boa aproximação da solução exata do problema em que além disso, se consta informações tanto locais quanto globais da estrutura do problema.

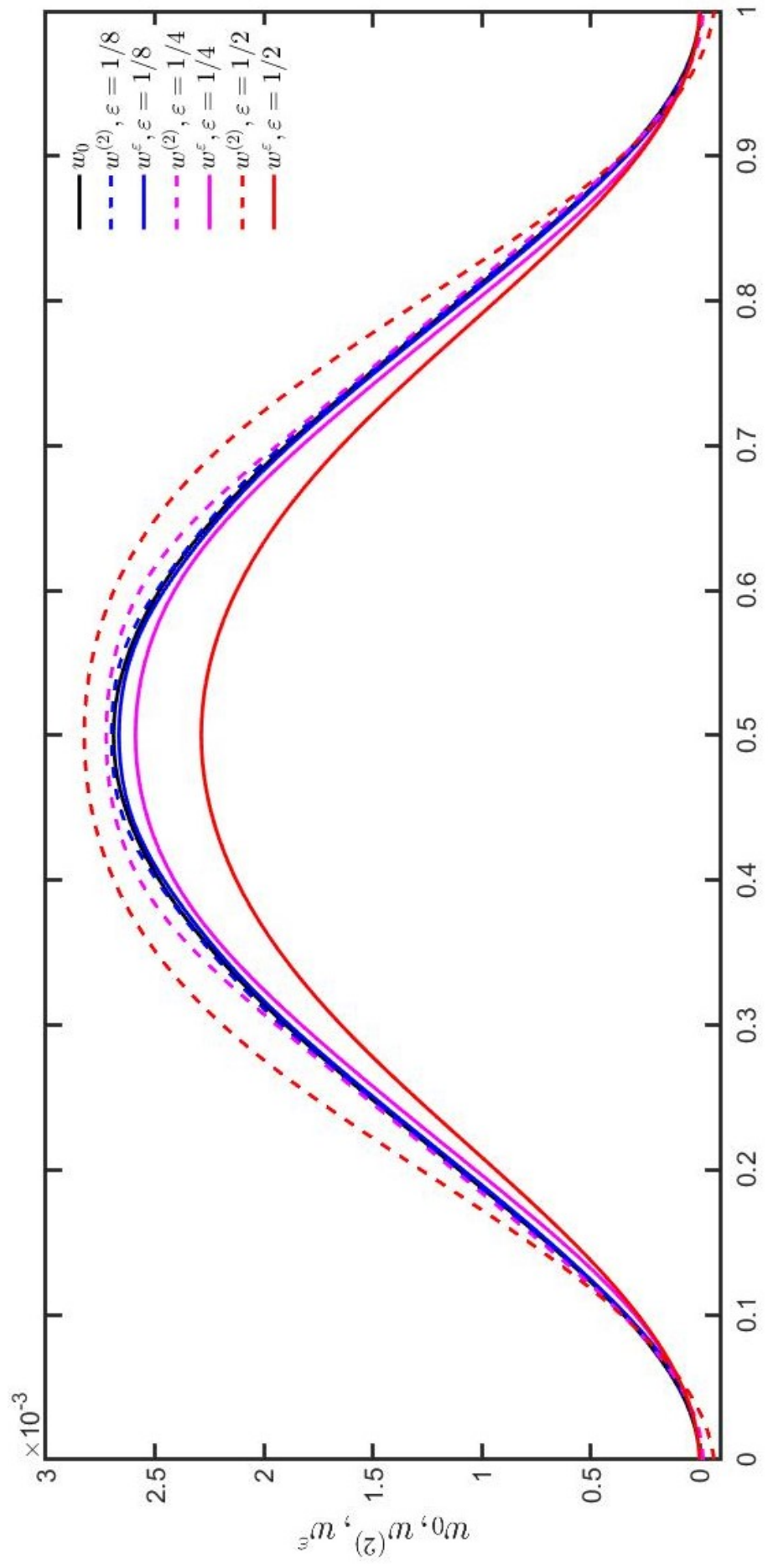

Figura 11 – Convergência da solução exata w^{ε} e a SAF $w^{(2)}$ para a solução homgeneizada w_0.
Fonte: O autor.

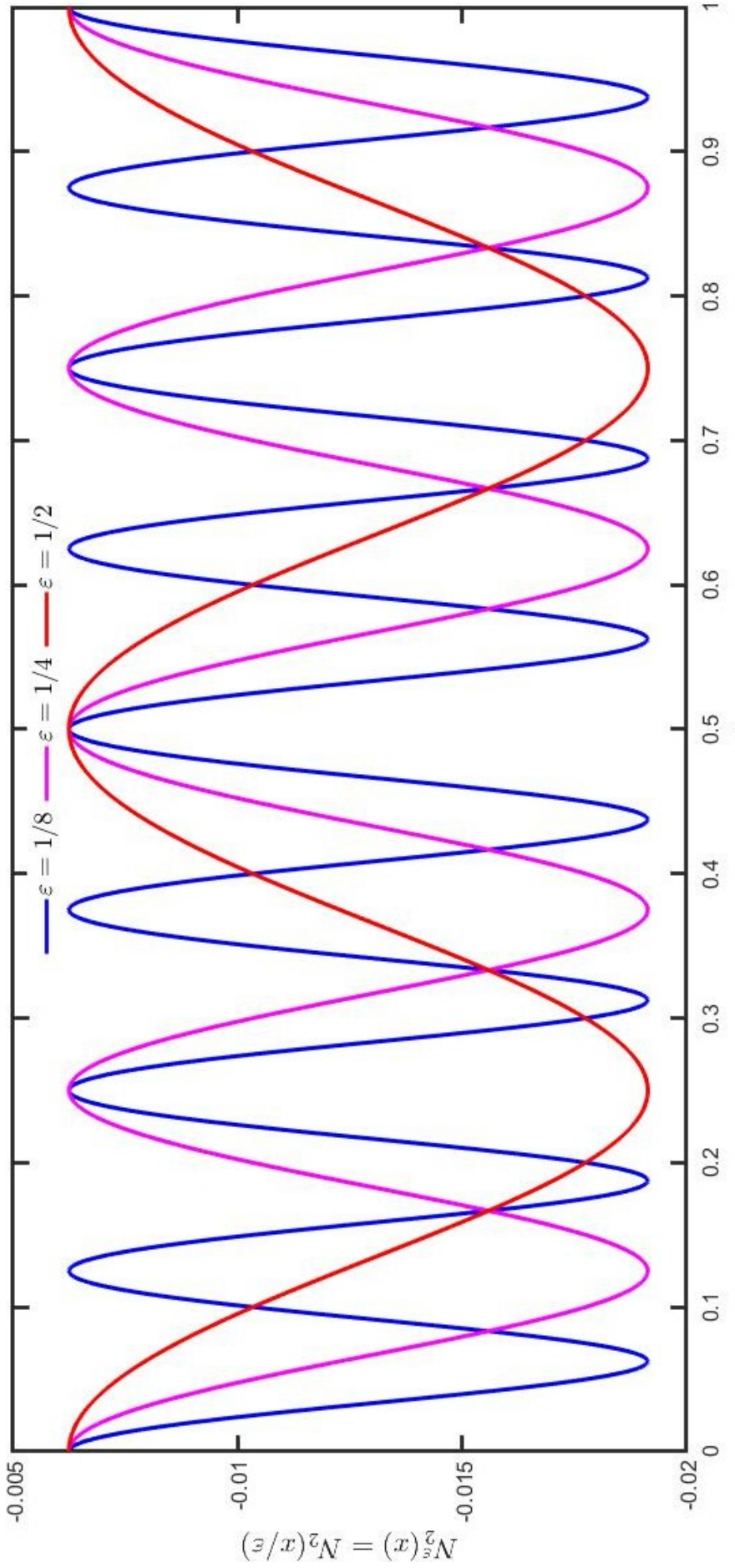

Figura 12 – Comportamento da solução local $N_2(x/\varepsilon)$.
Fonte: O autor.

5 CONCLUSÕES

Em resumo foram apresentados os seguintes resultados:

- Na Seção 3.1, foi aplicado o MHA a um problema hiperbólico unidimensional, linear, dinâmico e com coeficiente continuamente diferenciável. Demonstrou-se, utilizando o princípio do máximo generalizado para problemas hiperbólicos, que o problema é bem posto, assim como a proximidade entre as soluções dos problemas original e homogeneizado. Além disso, foi apresentado um exemplo numérico via diferenças finitas, no qual se mostrou o comportamento da solução exata, da solução homogeneizada, das SAF's de dois e três termos, bem como os erros obtidos em cada aproximação da solução exata.

- Na Seção 3.2, foi aplicado o MHA a dois problemas unidimensionais, lineares e com coeficientes continuamente diferenciáveis, sendo um dinâmico e outro estático. Para o caso estático, demonstrou-se que o problema é bem posto via Teorema de Lax-Milgram, e foi apresentado um exemplo numérico utilizando diferenças finitas, no qual se mostrou o comportamento das soluções exata e homogeneizada, assim como a SAF.

Com base na análise e nos resultados apresentados ao longo desta dissertação, foi possível demonstrar a eficácia do Método de Homogeneização Assintótica (MHA) na solução de problemas com coeficientes rapidamente oscilantes. Aplicado a diferentes contextos, como o comportamento dinâmico de uma barra vibrante unidimensional e a análise estática de uma viga tipo Euler-Bernoulli, o MHA se mostrou uma ferramenta robusta para a obtenção de soluções aproximadas para equações diferenciais.

Ao aplicar o MHA, foi possível obter soluções homogeneizadas e compará-las com as soluções exatas, demonstrando a proximidade entre ambas, para a maioria dos casos. A eficácia do método ficou evidente, tanto na formulação dos problemas locais quanto na determinação dos coeficientes efetivos que modelam adequadamente as propriedades físicas das estruturas analisadas. Além disso, os exemplos numéricos forneceram uma visualização clara da convergência entre as soluções exatas e homogeneizadas.

Em conclusão, o MHA, juntamente com as ferramentas matemáticas empregadas nesta dissertação, representa uma abordagem promissora para o tratamento de problemas com estrutura microperiódica, permitindo uma modelagem precisa e eficiente

de fenômenos que envolvem escalas múltiplas. O método não apenas aproxima soluções de difícil obtenção, tanto numericamente quanto analiticamente, mas também fornece uma alternativa analítica eficaz para esse propósito.

No entanto, a pesquisa também identificou aspectos que necessitam de investigações adicionais, as quais serão abordadas em estudos futuros. Estes são:

- De fato não foi demonstrado que a solução para o problema hiperbólico existe, conforme feito para o problema elíptico estático. Então pretende-se fazer isso com o auxílio da forma fraca do problema;
- Pretende-se apresentar um exemplo numérico via diferenças finitas para o problema dinâmico de quarta ordem;
- Para o problema estático de quarta ordem, pretende-se demonstrar a proximidade entre as soluções exata e homogeneizada. Na literatura encontram-se algumas alternativas para esta finalidade como em (HUANG; XING; GAO, 2020), em que demonstra-se a proximidade via convergência em dois espaços. Outra abordagem pode ser encontrada em (PASTUKHOVA, 2017), a qual demonstra-se a proximidade utilizando da teoria de homogeneização de operadores diferenciais de quarta ordem, o que foge do escopo desse trabalho, mas uma adaptação dos resultados pode ser feita.

REFERÊNCIAS

ABU-HILAL, M. Forced vibration of Euler–Bernoulli beams by means of dynamic Green functions. **Journal of Sound and Vibration**, [S.l.], v.267, n.2, p.191–207, 2003.

ALLAIRE, G.; BAL, G. Homogenization of the criticality spectral equation in neutron transport. **Mathematical Modelling and Numerical Analysis**, [S.l.], v.33, n.4, p.721–746, 1999.

AURIAULT, J. Heterogeneous medium. Is an equivalent macroscopic description possible? **Iinternational Journal of Engineering Structures**, [S.l.], v.29, n.7, p.785–795, 1991.

AURIAULT, J.; BOUTIN, C.; GEINDREAU, C. **Homogenization of Coupled Phenomena in Heterogenous Media**. Hoboken: Wiley, 2009.

BABUSKA, I. Solutions of interface problems by homogenization, Part 1. **SIAM Journal of Mathematical Analysis**, [S.l.], v.7, n.5, p.603–634, 1976a.

BABUSKA, I. Solutions of interface problems by homogenization, Part 2. **SIAM Journal of Mathematical Analysis**, [S.l.], v.7, n.5, p.635–645, 1976b.

BABUSKA, I. Solutions of interface problems by homogenization, Part 3. **SIAM Journal of Mathematical Analysis**, [S.l.], v.8, n.6, p.923–937, 1976c.

BACHMAN, G.; NARICI, L. **Functional Analysis**. New York: Dover Publications, 2012.

BAKHVALOV, N.; PANASENKO, G. **Homogenisation**: Averaging Processes in Periodic Media: Mathematical Problems in the Mechanics of Composite Materials. Dordrecht: Springer Netherlands, 1989.

BAKHVALOV, N. S. Averaged characteristics of bodies with periodic structure. **Doklady Akademii Nauk SSSR**, [S.l.], v.218, n.5, p.1046–1048, 1974.

BAKHVALOV, N. S. Averaging of partial differential equations with rapidly oscillating coefficients. **Doklady Akademii Nauk SSSR**, [S.l.], v.224, n.2, p.351–355, 1975a.

BAKHVALOV, N. S. Averaging of nonlinear partial differential equations with rapidly oscillating coefficients. **Doklady Akademii Nauk SSSR**, [S.l.], v.225, n.2, p.249–252, 1975b.

BENDSØE, M. P.; SIGMUND, O. **Topology Optimization**: Theory, Methods and Applications. New York: Springer-Verlag, 2003.

BENSOUSSAN, A.; LIONS, J.; PAPANICOLAU, G. **Asymptotic Analysis for Periodic Structures**. New York: North Holland, 1978.

BERDICHEVSKY, V. L. Spacial homogenization of periodic structures. **Doklady Akademii Nauk SSSR**, [S.l.], v.222, n.3, p.565–567, 1975.

BUANNIC, N.; CARTRAUD, P. Higher-order effective modeling of periodic heterogeneous beams. I. Asymptotic expansion method. **International Journal of Solids and Structures**, [S.l.], v.38, n.40, p.7139–7161, 2001.

BURDEN, R.; FAIRES, D. **Análise numérica**. 3.ed. São Paulo: Cengage Learning, 2016.

CAPDEVILLE, Y.; GUILLOT, L.; MARIGO, J. J. 1-D non-periodic homogenization for the seismic wave equation. **Geophysical Journal International**, [S.l.], v.181, p.897–910, 2010a.

CAPDEVILLE, Y.; GUILLOT, L.; MARIGO, J. J. 2-D non-periodic homogenization to upscale elastic media for P-SV waves. **Geophysical Journal International**, [S.l.], v.182, p.903–922, 2010b.

CHANDRASEKHARAIAH, D.; DEBNATH, L. **Continuum Mechanics**. San Diego: Academic Press, 1994.

CHRISTENSEN, R. **Mechanics of Composite Materials**. New York: Dover, 2005.

CIBLAC, T.; MOREL, J. **Sustainable Masonry**. Hoboken: Wiley, 2014.

CIOURANESCU, D.; DONATO, P. **An Introduction to Homogenization**. New York: Oxford University Press, 1999.

COSTA, C.; PÉREZ-FERNÁNDEZ, L. D.; BRAVO-CASTILLERO, J. **Towards Mathematics, Computers and Environment**: A Disasters Perspective. São Paulo: Springer, 2018.

DA, D. **Topology Optimization Design of Heterogeneous Materials and Structures**. Hoboken: Wiley, 2019.

DE GIORGI, E.; SPAGNOLO, S. Sulla convergenza degli integrali dell'energia par operatori ellittici del secondo ordine. **Bollettino dell'Unione Matematica Italiana**, [S.l.], v.8, p.391–411, 1973.

DESBRUN, M.; DONALDSON, R. ; OWHADI, H. **Multiscale Analysis and Nonlinear Dynamics**. Weinheim: Wiley, 2013.

DIMITRIENKO, Y. Heat mass transport and thermal stresses in porous charring materials. **Transport in Porous Media**, [S.l.], v.27, p.143–170, 1997.

DONG, Q.; CAO, L. Multiscale Asymptotic Expansions Methods and Numerical Algorithms for the Wave Equations in Perforated Domains. **Applied Mathematics and Computation**, [S.l.], v.232, p.872–887, 2014.

DORMIEUX, L.; KONDO, D. **Micromechanics of Fracture and Damage**. Hoboken: Wiley, 2016.

DÉCIO JUNIOR, R. **Homogeneização Matemática deMmeios Unidimensionais Microperiódicos Lineares e Não Lineares**. 2019. 146p. Dissertação de Mestrado — PPGMMat/UFPEL, Pelotas/RS.

EINSTEIN, A. Eine neue Bestimmung der Moleküldimensionen. **Annalen der Physik**, [S.l.], v.19, p.289–306, 1906.

EULER, L. **De Curvis Elasticis, Additamentum I to his Methodus Inveniendi Lineas, Curvas Maximi Minimive Proprietate Gaudentes**. Lausanne and Geneva: Springer Science and Business Media, 1744.

FRANCFORT, G. A.; MURAT, F. Homogenization and optimal bounds in linear elasticity. **Rational Mechanics and Analysis**, [S.l.], v.94, n.4, p.307–334, 1986.

GONÇALVES P.J.P. BRENNAN, M.; ELLIOT, S. Numerical evaluation of high-order modes of vibration in uniform Euler–Bernoulli beams. **Journal of Sound and Vibration**, [S.l.], v.301, n.3, p.1035–1039, 2007.

HUANG, Z.; XING, Y.; GAO, Y. A two-scale asymptotic expansion method for periodic composite Euler beams. **Composite Structures**, [S.l.], v.241, p.112033, 2020.

KAMÍNSKI, M. Determination of sensitivity coefficients of the elastic effective properties for periodic fiber-reinforced composites using the response function method. **Computational Materials Science**, [S.l.], v.43, p.829–841, 2008.

LEE, K.; GHOSH, S. A microstructure based numerical method for constitutive modeling of composite and porous materials. **Materials Science and Engineering**, [S.l.], v.272, p.120–133, 1999.

LEITZKE, B. **Soluções Assintóticas Formais de Segunda Ordem na Homogeneização Assintótica de Meios Microperiódicos**. 2017. 130p. Dissertação de Mestrado — PPGMMat/UFPEL, Pelotas/RS.

LI, X. A unified approach for analyzing static and dynamic behaviors of functionally graded Timoshenko and Euler–Bernoulli beams. **Journal of Sound and Vibration**, [S.l.], v.318, n.4, p.1210–1229, 2008.

LIMA, E. **Análise real**: Funções de uma variável. Rio de Janeiro: IMPA, 2018.

LIMA, M. **Homogeneização matemática de meios micro-heterogêneos com estrutura periódica**. 2016. 142p. Dissertação de Mestrado — PPGMMat/UFPEL, Pelotas/RS.

LORD RAYLEIGH. On the Influence of obstacles arranged in a rectangular order upon the properties of medium. **Philosophical Magazine**, [S.l.], v.34, p.481–502, 1892.

LORENZ, L. Uber die Refractionskonstante. **Annalen der Physik**, [S.l.], v.247, p.70–103, 1880.

LUZ, L. **Homogeneização assintótica de meios microperiódicos unidimensionais com diferentes condições de contato**. 2020. 95p. Dissertação de Mestrado — PPGMMat/UFPEL, Pelotas/RS.

MARCHENKO, V. A.; KHRUSLOV, E. Y. **Boundary Value Problems in Domains with Fine-Grained Boundary**. Kiev: Naukova Dumba, 1974.

MAXWELL, J. **Treatise on Electricity and Magnetism**. Oxford: Clarendon, 1873.

MEIROVITCH, L. **Fundamentals of vibrations**. New York: McGraw-Hill, 2001.

NG, C. Dispersion in steady and oscillatory flows through a tube with reversible and irreversible wall reactions. **Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences**, [S.l.], v.462, n.2066, p.481–515, 2006.

OLEINIK, O. A. On convergence of solutions of elliptic and parabolic equations when coefficients weakly converge. **Uspekhi Matematcheskikh Nauk**, [S.l.], v.30, n.4, p.257–258, 1975.

PANASENKO, G. Homogenization for Periodic Media: from Microscale to Macros- cale. **Physics of Atomic Nuclei**, Saint-Étienne, v.71, n.4, p.681–694, 2008.

PARNELL, W. J.; GRIMAL, Q. The influence of mesoscale porosity on cortical bone anisotropy. **Journal of the Royal Society Interface**, [S.l.], v.6, p.97–109, 2009.

PASTUKHOVA, S. Operator error estimates for homogenization of fourth order elliptic equations. **St. Petersburg Mathematical Journal**, [S.l.], v.28, p.1, 02 2017.

PENTA, R.; GERISCH, A. The asymptotic homogenization elasticity tensor properties for composites with material discontinuities. **Continuum Mechanics and Thermodynimics**, [S.l.], v.29, p.187–206, 2017.

PÉREZ-FERNÁNDEZ, L. D.; BECK, A. T. Failure detection in umbilical cables via electroactive elements - a mathematical homogenization approach. **International Journal of Modeling and Simulation for the Petroleum Industry**, [S.l.], v.8, p.34–39, 2014.

RAO, S. **Mechanical Vibrations**. 6.ed. Malaysia: Pearson, 2016.

SADD, M. **Elasticity**: Theory, Applications, and Numerics. Oxford: Elsevier, 2021.

SANCHEZ-PALENCIA, E. Solutions périodiques par rapport aux variables d'espace et applications. **Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Academie des Sciences Série A - Sciences Mathématiques**, [S.l.], v.271, p.1129–1132, 1970.

SANCHEZ-PALENCIA, E. **Nonhomegeneous Media and Vibration Theory**. New York: Springer-Verlag, 1980.

SANKAR, B. An elasticity solution for functionally graded beams. **Composites Science and Technology**, [S.l.], v.61, n.5, p.689–696, 2001.

SU, F.; XU, Z.; DONG, Q.; JIANG, H. Multi-scale Method for The Quasi-Periodic Structures of Composite Materials. **Applied Mathematics and Computation**, [S.l.], v.217, n.12, p.5847–5842, 2011a.

SU, F.; XU, Z.; DONG, Q.; JIANG, H. Multiscale Computation Method for Parabolic Problems of Composite Materials. **Applied Mathematics and Computation**, [S.l.], v.217, n.21, p.8337–8342, 2011b.

Torquato, S. **Random Heterogeneus Materials**: Microstructure and Macroscopic properties. New York: Springer-Verlag, 2002.

TORQUATO, S. Optimal design of heterogeneous materials. **Annual Review of Materials Research**, [S.l.], v.40, p.101–129, 2010.

WESTON, M. **Nuclear Reactor Physics**. Weinheim: Wiley, 2007.

ZEMAN, J. **Analysis of Mechanical Properties of Fiber-reinforced Composites with Random Microstructure**. 1999. 106p. Tese de Doutorado — Faculty of Civil Engineering/Czech Technical University, Praga/República Checa.

ÖCHSNER, A. **Classical Beam Theories of Structural Mechanics**. Switzerland: Springer Cham, 2021.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PELOTAS
Instituto de Física e Matemática
Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática

Dissertação

Dinâmica efetiva de barras e vigas de Euler-Bernoulli microperiódicas

DOUGLAS MACHADO DA SILVA

Pelotas, 2024