

**MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE PELOTAS
CENTRO DE ENGENHARIAS
CURSO DE ENGENHARIA GEOLÓGICA**

ELETRICIDADE E MAGNETISMO

Prof. Eng. Elet. Amilcar Barum

Sumário

CAPITULO I	12
MAGNETISMO	12
1.1- Falando da História	12
1.2 - O estudo do magnetismo	14
CAPITULO II	33
CARGA ELÉTRICA E CAMPO ELÉTRICO	33
2.1 CARGA E CAMPO ELÉTRICO.....	33
2.1.1 - Histórico	33
2.1.2 - Um pouco de conceitos	35
2.1.3 - O Conceito de Corpo Eletrizado	42
2.1.4 - Carga Elétrica	47
2.1.5 - Campo elétrico	48
2.1.6 - Lei de Coulomb	49
2.1.7 - Princípio da Superposição	50
2.1.8 - Comportamento de condutores e isolantes submetidos à um campo elétrico.....	53
2.1.9 - Distribuição contínua de carga	55
2.2 FLUXO ELÉTRICO.....	59
2.2.1 - O que é Fluxo Elétrico?.....	59
2.2.2 - Lei de Gauss.....	64
2.2.3 – A Lei de Gauss e as Distribuições Simétricas	68
2.2.4 – Condutores em equilíbrio eletrostático	73
2.2.5 – Comportamento da Carga e do Campo em um Condutor em Equilíbrio Eletrostático.	74
2.3 POTÊNCIAL, TRABALHO e ENERGIA POTÊNCIAL ELETROSTÁTICA	77
2.3.1 - Histórico	77
2.3.2 - Trabalho e energia	77
2.3.3 Diferença de potencial eletrostático	79
2.3.4 - Gradiente do potencial elétrico	82
2.3.5 - Linhas de campo e superfícies equipotenciais	85
2.3.6 - Como calcular o potencial elétrico?	88
2.3.7 - O comportamento do potencial e da carga em condutores. .	90
2.4 Discutindo o que foi visto.....	92
2.4.1- A lei de Coulomb e suas limitações	92

2.4.2 - Cálculo vetorial – Divergente	93
2.4.3 - Teorema de Ostrogradski - Gauss	96
2.4.4 – Rotacional	98
2.4.5 Teorema de Stokes e Equação de Poisson	100
Capítulo III.....	105
MATERIAIS ELÉTRICOS	105
3.1 COMPORTAMENTO DOS MATERIAIS ELÉTRICOS.....	105
3.1.1 – Materiais Elétricos	105
3.1.2 – Materiais Condutores	106
3.1.3 – Materiais Semicondutores	110
3.1.3 - Isolantes ou Dielétricos	113
3.1.4 – Materiais Magnéticos	114
3.2 RESISTÊNCIA ELÉTRICA.....	115
3.2.1 - Definição	115
3.2.2 - O modelo de Drude.....	117
3.2.3 - Efeito Joule e Potência Elétrica	120
3.3.4 - Tipos e usos dos Resistores	122
3.2.5 - Associação de Resistores	131
3.2.6 - Leis de Kirchhoff	136
Capítulo IV.....	139
CAPACITORES	139
4.1 CAPACITORES EM CORRENTE CONTÍNUA	139
4.1.1 - Definição e Histórico	139
4.1.2 - Processo de Carga dos Capacitores	141
4.1.3 – Reatância Capacitiva.....	144
4.1.3 - Associação de Capacitores.....	144
4.1.3 - Tipos de Capacitores	146
Capítulo V.....	154
CIRCUITOS ELÉTRICOS	154
.....	154
5.1 CIRCUITOS EM CORRENTE CONTÍNUA	154
5.1.1 Leis dos Circuitos.....	154
5.1.2 Circuitos com Capacitores.....	157
Capítulo VI.....	158
CORRENTE ALTERNADA	158

6.1 CORRENTE ALTERNADA	158
6.1.1 Fontes de Corrente Alternada	158
Capítulo VII	163
INDUTORES E INDUÇÃO ELETROMAGNÉTICA	163
7.1 INDUTORES	163
7.1.1 – Introdução	163
7.1.2 Indutância Mútua.....	165
7.1.3 Associação de Indutores.....	166
7.1.4 Auto indutância	166
7.1.5 Circuitos RL	168
7.1.6 Energia do Campo Magnético do Indutor	170
7.1.7 Circuito LC	171
7.1.8 Correntes de Foucault.....	172
7.1.9 Acoplamento Magnético.....	173
7.1.10 Coeficiente de Acoplamento	174
Capítulo VIII	176
CIRCUITOS OPERANDO EM	176
CORRENTE ALTERNADA	176
8.1 ANÁLISE DE CIRCUITOS MONOFÁSICOS	176
8.1.1 - Circuitos Puramente Resistivos.....	176
8.1.2 – Circuitos Puramente Indutivos.....	177
8.1.3 – Circuitos Puramente Capacitivos.....	178
8.1.4 – Circuitos RL em Corrente Alternada.	180
8.1.5 – Circuitos RC em Corrente Alternada.....	182
8.1.6 – Circuitos RLC Série em Corrente Contínua	185
8.1.7 – Circuitos RLC Paralelo em Corrente Alternada	187
8.1.8 – Observações sobre Análise de Circuitos em Corrente Alternada.....	189
8.2 – Potências Instantânea, Ativa, Reativa e Aparente	189
8.2.1 – Potência Instantânea	189
8.2.2 – Potência Ativa.....	190
8.2.3 – Potência Reativa.....	191
8.2.4 – Potência Aparente	192
8.2.5 - Fator de Potência	192
8.2.6 – Correção do Fator de Potência	193

8.3 Sistemas Trifásicos	197
8.3.1 - Vantagens dos Sistemas Trifásicos	197
8.3.2 – Geração Trifásica	197
8.3.3 – Sistemas Trifásicos Equilibrados	199
8.3.4 – Ligação Estrela	199
8.3.5 – Ligação Triângulo	202
8.3.6 – Potência em Sistemas Trifásicos	204
Capítulo IX.....	206
ELETRODINÂMICA	206
9.1 CORRENTE DE DESLOCAMENTO	206
9.2 EQUAÇÕES DE MAXWELL	208
9.3 TRANSFORMAÇÃO DE GALILEU DO CAMPO ELETROMAGNÉTICO	211
9.4 ENERGIA DO CAMPO ELETROMAGNÉTICO	216
9.5 POTÊNCIA VETORIAL	218
Capítulo X.....	222
ESTUDO DAS ONDAS ELETROMAGNÉTICAS.....	222
10.1 ONDAS ELETROMAGNÉTICAS	222
10.2 EQUAÇÃO DA ONDA ELETROMAGNÉTICA	224
10.3 ONDAS PLANAS	225
10.4 ONDAS HARMÔNICAS.....	229
10.5 ONDAS ESFÉRICAS.....	231
10.6 INTENSIDADE DAS ONDAS MAGNÉTICAS	234
10.7 ESPECTROS ELETROMAGNÉTICOS.....	236
10.8 ONDAS ELETROMAGNÉTICAS EM MEIOS MATERIAIS	239

INDICE DE FIGURAS

Figura 1 - Imã intacto (A); fracionamento do imã (B); Imãs resultantes (C)	15
Figura 2 - Surgimento da corrente induzida e do campo que se opõe	19
Figura 3 - Campo magnético cruzando um condutor	19
Figura 4 - Curva de relacionamento da susceptibilidade magnética em relação a temperatura.....	20
Figura 5 - Curva experimental do momento magnético em diversos materiais paramagnéticos.....	22
Figura 6 - Solução gráfica da $\tanh(x)$	28
Figura 7 - Magnetização correspondente a solução gráfica em função da temperatura	28
Figura 8 - Paramagnetismo (lei de Curie)	Figura 9 -
Ferromagnetismo (lei de Curie Weiss)	29
Figura 10 - Toróide	31
Figura 11 - Curva de histerese.....	31
Figura 12 - Processo de magnetização (1) sem aproximação do imã permanente (2) com aproximação do imã.....	32
Figura 13- Representação atômica de Dalton	36
Figura 14-Ampola de Geissler	36
Figura 15- Tubo de raios catódicos de Crookes.....	36
Figura 16 - Modelo atômico de Thomson	37
Figura 17 - Experimento de Rutherford.....	38
Figura 18 - Resultado da emissão alfa no experimento	39
Figura 19 - esquema do modelo de Rutherford	39
Figura 20 - Distribuição dos elétrons nas camadas de um átomo	40
Figura 21 - Diagrama de Pauling.....	41
Figura 22 - exemplo de eletrização por atrito - pente no cabelo.....	43
Figura 23 - Processo de eletrização por contato	44
Figura 24 - Processo de Eletrização por indução.....	46
Figura 25 - Eletrização por indução de um corpo dielétrico	46
Figura 26 - Processo de eletrização por indução.....	46
Figura 27 - Carga Pontual (positiva)	48
Figura 28 - Duas cargas pontuais de mesmo sinal	49
Figura 29 - Duas cargas pontuais de sinais diferentes.....	49
Figura 30 – Balança de Torção de Coulomb.....	50
Figura 31 – Representação esquemática do Princípio da Superposição e sua resolução vetorial	50
Figura 32 - (1) Condutor em equilíbrio eletrostático; (2) Condutor atravessado por campo elétrico externo; (3) Reorganização das cargas com surgimento de um campo contrário; (4) equilíbrio eletrostático atingido pela equiparação dos campos externo e interno.....	53
Figura 33 - Condutor atravessado por Campo Elétrico	55
Figura 34 - Isolante atravessado por Campo Elétrico	55
Figura 35 - Carga distribuída em uma região	55
Figura 36 - Carga distribuída em uma linha	56

Figura 37 - Carga distribuída em uma superfície	58
Figura 38 - Representação de duas superfícies perpendiculares às linhas de campo	60
Figura 39 - Tubo de fluxo e o fluxo é igual em todas as secções.....	60
Figura 40 - Versor normal \hat{n} (azul) a uma superfície e projeção da superfície no plano perpendicular às linhas de campo	61
Figura 41 - Campo elétrico e vetor infinitesimal de área numa superfície	62
Figura 42 - Superfícies fechadas escolhemos os vetores apontando para fora	62
Figura 43 - Superfície com dois vetores normais	62
Figura 44 - Superfície com domínio no retângulo T' do plano xy	63
Figura 45 - Carga pontual dentro (a) e fora (b) de uma superfície fechada.	65
Figura 46 - Campo elétrico com raio superior a superfície esférica	68
Figura 47 - Campo elétrico com raio inferior ao raio da superfície esférica	69
Figura 48 - Carga elétrica em uma esfera oca com carga uniforme $E_{int} = 0$	70
Figura 49 - Superfície gaussiana com raio superior ao raio da esfera oca.	70
Figura 50 - Superfície gaussiana com raio inferior ao raio da esfera oca.	71
Figura 51 - Linha de carga infinita envolvida por uma superfície gaussiana de simetria cilíndrica	71
Figura 52 - Superfície gaussiana cilíndrica trespassado um plano infinito de carga.....	72
Figura 53 - (a) Condutor isolado com carga; (b) Fluxo em superfícies internas e externas e a direita, linhas de campo	74
Figura 54 - Representação de uma pequena superfície gaussiana na superfície de um condutor isolado	76
Figura 55 - Representação do deslocamento de uma partícula em uma trajetória qualquer	80
Figura 56 - Percurso entre A e B separados por um deslocamento $\Delta \vec{r}$...	83
Figura 57 - projeção do deslocamento nos eixos x e y	83
Figura 58 - superfície equipotencial	86
Figura 59 - representação das superfícies equipotenciais em um sistema xyz	87
Figura 60 - Linhas equipotenciais e linhas de campo em um dipolo	87
Figura 61 - Campo elétrico produzido em 3 condutores diferentes, em função da distância	90
Figura 62 - Curva indicativa do comportamento da intensidade de campo elétrico em função da distância da superfície	91
Figura 63 - Representação da intensidade de campo na superfície de um automóvel	91
Figura 64 - linhas de força em uma carga elétrica livre no espaço.....	93

Figura 65 - linhas de força de uma carga elétrica colocada no interior de uma caixa metálica.....	93
Figura 66 - paralelepípedo para representação do gradiente.....	94
Figura 67 - Aproximação melhorada com a diminuição do volume dos paralelepípedos	97
Figura 68 - Regra da mão direita para rotacional.....	98
Figura 69 - Sistema de coordenadas retangulares	100
Figura 70 - Sistema de coordenadas cilíndricas	100
Figura 71 - Sistema de coordenadas esféricas	100
Figura 72 - Superfície fechada com os elementos quadrangulares de aproximação	101
Figura 73 - Divisão do caminho C em dois caminhos C_A e C_B	102
Figura 74 - Representação de estruturas de um material qualquer	106
Figura 75 - junção PN e barreira de potencial.....	110
Figura 76 - Cilindros de silício e discos de silício.	111
Figura 77 - Processo de preparação para confecção de uma junção PN	112
Figura 78 - Processo de conclusão do semicondutor	112
Figura 79 - Grafico com as relações entre Tensão, Corrente, Resistência e Potência	122
Figura 80 - Representações gráficas de um resistor	123
Figura 81 - Tipos de resistores	123
Figura 82 - Construção de resistor de fio.....	123
Figura 83 - Construção interna de um resistor de carbono	124
Figura 84 - Representação da disposição das cores em um resistor comum.	124
Figura 85 – Representação da disposição de cores de um resistor de precisão.....	125
Figura 86 - Tabela do código de cores para resistores comuns	125
Figura 87 - Tabela do código de cores para resistores de precisão.....	125
Figura 88 - Resistores de fio de várias potências.....	126
Figura 89 - Tamanhos padrão dos resistores e um dissipador de calor para esses componentes	126
Figura 90 - Esquema construtivo de um potenciômetro e vista externa.....	127
Figura 91 - Construção interna de um trimpot e duas formas construtivas	127
Figura 92 - NTC e simbologia para NTC e PTC	128
Figura 93 - Curva característica de um NTC	128
Figura 94 - Gráfico que relaciona a razão R_{25}/R_t de um NTC à temperatura ambiente de 25°C.....	129
Figura 95 - LDR e seus simbolos esquemáticos	130
Figura 96 - Curva de resistência pela luminosidade de um LDR.....	131
Figura 97 - Curva de resposta da sensibilidade do LDR pelo comprimento de onda.	131
Figura 98 - Associação série de resistores	132
Figura 99 - Circuito paralelo	134

Figura 100 - associação mista de resistores	135
Figura 101 - Sequencia para encontrar o resistor equivalente do circuito da figura 80	136
Figura 102 - Representação de nós	137
Figura 103 - Representação de malha	137
Figura 104 - Experimento para mostrar o funcionamento do capacitor	139
Figura 105 - Esquema construtivo de um capacitor e sua simbologia ..	140
Figura 106 - Tabela das constantes dielétricas de alguns materiais	141
Figura 107 - (1) Capacitor descarregado; (2) Chave fechada, capacitor carregando; (3) Capacitor carregado; (4) Campo elétrico uniforme no interior do capacitor	142
Figura 108 - Circuito RC em corrente contínua	142
Figura 109 - Curva de carga e descarga de um capacitor.....	144
Figura 110 - Sequência das etapas de fabricação de um capacitor de cerâmica	146
Figura 111 - Código para identificação da tolerância	147
Figura 112 - Tabela de características dos capacitores do tipo "plate"	148
Figura 113 - Exemplos de capacitores tipo plate	148
Figura 114 - Estrutura de um capacitor multicamada	148
Figura 115 - Esquemas construtivos dos capacitores de filme plástico metalizado e não metalizado	149
Figura 116 - Tabela de cores para capacitores de filme plástico	150
Figura 117 - Aspectos construtivos de um capacitor eletrolítico	151
Figura 118 - Superfície rugosa que surge após a cauterização eletroquímica	151
Figura 119 - Capacitor Eletrolítico Polarizado Figura 120 - Capacitor Eletrolítico Não Polarizado	152
Figura 121 - Aspecto construtivo de um capacitor de tântalo	152
Figura 122 - Tipos de capacitores variáveis	153
Figura 123 - Representação de um diagrama de circuito.....	154
Figura 124 - Geração de um sinal alternado	159
Figura 125 - Gerador de Faraday	160
Figura 126 - Sistema de geração - transmissão - distribuição de energia	162
Figura 127 - Circuito RL com a representação da f_{cem}	167
Figura 128 - Curva característica da corrente durante o período de carga do indutor.....	168
Figura 129 - Curva característica de carga e descarga do indutor	168
Figura 130 - Circuito RL.....	168
Figura 131 - Circuito LC.....	171
Figura 132 - Correntes parasitas induzidas no material condutor	173
Figura 133 - Corrente parasita em material laminado	173
Figura 134 - Corrente parasita em material maciço	173
Figura 135 - Acoplamento Magnético	174

Figura 136 - Relação entre corrente e tensão em um circuito puramente resistivo	176
Figura 137 - Representação fasorial da relação entre corrente e tensão em um circuito puramente indutivo	177
Figura 138 - Representação gráfica temporal da defasagem entre tensão e corrente em um circuito puramente indutivo	178
Figura 139 - Diagrama fasorial da relação entre tensão e corrente em um circuito puramente capacitivo.....	179
Figura 140 - Grafico tensão corrente em um circuito puramente capacitivo.	179
Figura 141 - Circuito RL submetido a tensão alternada	180
Figura 142 - Diagrama fasorial de um circuito RL em corrente alternada	181
Figura 143 - Representação temporal da relação entre V_R , V_L e V	181
Figura 144 - Diagrama fasorial das impedâncias, reatâncias e resistências de um circuito RL	182
Figura 145 - Circuito RC em corrente alternada	182
Figura 146 - Diagrama Fasorial de um Circuito RC submetido à Corrente Alternada	183
Figura 147 - Diagrama de tempo da relação entre as tensões de um circuito RC em corrente alternada	183
Figura 148 - Diagrama fasorial das resistências, reatâncias e impedâncias em um circuito RC em corrente alternada	184
Figura 149 - Circuito RLC série em corrente alternada.....	185
Figura 150 - exemplo de resistências de chuveiro	185
Figura 151 - Diagrama fasorial das tensões em um circuito RLC série com $V_L > V_C$ (Indutivo)	186
Figura 152 - Diagrama fasorial das tensões em um circuito RLC série com $V_L < V_C$ (capacitivo)	186
Figura 153 - Circuito RLC paralelo.....	187
Figura 154 - Diagrama fasorial das correntes do circuito RLC paralelo	188
Figura 155 - Gráfico da Tensão, Corrente e Potência Instantânea	190
Figura 156 - Gráfico da Potência Reativa.....	191
Figura 157 - Diagrama Fasorial de Potências	192
Figura 158 - Circuito RL com capacitor de correção de fator de potência	194
Figura 159 - Diagrama Fasorial das Correntes	194
Figura 160 - Representação esquemática de um gerador trifásico.....	197
Figura 161 - Representação temporal das 3 fases	198
Figura 162 - Diagrama Fasorial Trifásico	198
Figura 163 - Vetores de corrente	199
Figura 164 - Ligação em Estrela	199
Figura 165 - Diagrama Fasorial com Carga Balanceada em Sistemas Estrela.	201
Figura 166 - Ligação Triângulo ou Delta	202

Figura 167 - Diagrama Fasorial para Carga Balanceada em um Sistema Triângulo.....	203
Figura 168 - Onda plana com propagação na direção positiva do eixo x	227
Figura 169 - Campo de ondas eletromagnéticas planas com propagação no eixo x e sentido positivo	228
Figura 170 - Campo elétrico de uma onda eletromagnética harmônica, plana e polarizada (a) em função do tempo e (b) em função da posição	230
Figura 171 - Função de onda esférica em três instantes de tempo diferentes.....	233
Figura 172 - Experimento de decomposição da luz visível	237
Figura 173 - Exemplos de fotometria de chama para alguns elementos (a) cloreto de sódio, (b) cloreto de estrôncio, (c) cloreto de magnésio, (d) cloreto de alumínio, (e) cloreto de cálcio, (f) cloreto de cobre, (g) cloreto de manganês, (h) cloreto de lítio	238
Figura 174 - Exemplos de emissão de espectro (a) cézio, (b) rubídio, (c) índio, (d) tálio, (e) lítio, (f) estrôncio, (g) cálcio, (h) sódio, (i) bário, (j) molibdênio, (k) boro, (l) fósforo, (m) zinco, (n) telúrio	239

CAPITULO I

MAGNETISMO

O universo é uma harmonia dos contrários

Pitágoras

1.1- Falando da História

O magnetismo é uma das áreas da Física mais fascinantes até mesmo para leigos. O simples fenômeno de uma bússola deixa as pessoas interessadas na “magia” que rege a agulha desse instrumento.

Na antiga Grécia os filósofos já falavam sobre “maravilhosas” propriedades de uma pedra que teria uma “alma” que seria de origem divina. A primeira referência sobre essa pedra diz que um pastor chamado Magnes, encontrou uma pedra que tinha essa “propriedade divina”. Daí vem a origem no nome desse mineral, Magnetita. Outros relatos refutam essa informação e dizem que, na verdade a primeira descoberta desse material foi feito em uma região da Turquia conhecida como Magnesia.

Qualquer que seja a verdade, na época da descoberta o conhecimento era domínio dos filósofos animistas¹ e, mais tarde pelos filósofos mecanicistas. Essas ideias (superstições metafísicas) formaram a base de quase todo pensamento científico até o renascimento. Mesmo assim, nessa época surgiu a primeira aplicação científica do material, a bússola. O relato sobre o surgimento da bússola tem várias fontes diferentes e seu surgimento vai desde textos que citam 1100 AC na China até textos que relatam o surgimento em 1637 DC na Espanha. A única coisa que podemos afirmar é que já no século XIV ela já era bastante usada.

Em 1600, William Gilbert escreveu o primeiro tratado sobre magnetismo, “*De Magnete*”. Essa publicação fez com que Gilbert seja considerado o pai do Magnetismo. Talvez o fato mais interessante registrado por ele seja a afirmação que a Terra é um grande magneto.

Descarte publicou a primeira teoria que eliminava a ideia de “efluvia”, que significa emanções e passou a atribuir o conceito de partes “enroscada” que penetram em “canais” existentes nos magnetos e na Terra, e esses vão de um polo ao outro. Essa é a origem da ideia de polos.

Até o período situado entre 1600 e 1700, o pensamento metafísico passou a ser substituído pela matemática e o método científico começou a surgir com Galileu, Newton dentre outros. Nesse mesmo período, mais especificamente em 1750, Coulomb estabelecia a teoria da Eletricidade.

¹ Os animistas eram membros de uma seita religiosa que acreditavam que animais, objetos inanimados, plantas e até mesmo fenômenos possuíam uma essência espiritual.

Pouco depois, já no início de 1800, Oersted apresenta os princípios da eletrodinâmica,

É nesse período que surgem também Biot, Savart, Arago, Weber e Ampere (introduziu o conceito de campo magnético) e seus estudos levaram a ideia de que o magnetismo era resultado de correntes microscópicas.

Ainda na contribuição para o progresso do estudo do eletromagnetismo, no final do século XIX, surgem dois grandes gênios, Faraday e Maxwell.

Faraday era um cientista teórico e foi o primeiro a utilizar o campo magnético além de ter feito várias contribuições, principalmente com a lei da indução e a caracterização dos materiais segundo seu comportamento magnético.

Todas essas deduções e definições foram feitas sem que Faraday tivesse escrito uma única equação.

Todo o equacionamento das descobertas de Faraday ficou a cargo do outro gênio, Maxwell. Além de equacionar os conceitos de Faraday, ele deu toda a base da eletrodinâmica.

Os estudos sobre eletromagnetismo seguiram progredindo e em seguida veio a descoberta de Thompson, o elétron e depois a descoberta do efeito Zeeman.

Todas essas descobertas começaram a evidenciar as inconsistências da física clássica.

Pierre Curie, baseado nos conhecimentos da termodinâmica, iniciou os seus estudos sobre as propriedades termodinâmicas das substâncias. A famosa lei de Curie pode ser explicada teoricamente por Langevin com modelos clássicos e a estatística de Maxwell-Boltzmann.

Com o surgimento da mecânica quântica, no século XX, tornou-se possível o entendimento do magnetismo. Atingindo esse entendimento, o desenvolvimento da mecânica estatística e da termodinâmica quântica, foram facilitados principalmente quanto aos fenômenos cooperativos.

Do ponto de vista clássico, duas importantes contribuições surgiram:

Primeiramente o surgimento da teoria moderna do magnetismo com o conceito de campo molecular de Weiss e a famosa lei de Curie-Weiss, que foi seguida pela maioria dos sistemas magnéticos, mesmo que o valor do campo molecular não tivesse explicação clássica.

Em segundo lugar veio o Teorema de Van Leeuwen que dizia *“Classicamente a qualquer temperatura, campos magnéticos e elétricos, a magnetização total de um conjunto de elétrons em equilíbrio térmico é identicamente nula”*, demonstrado e utilizando-se as equações de Maxwell e a estatística de Boltzmann. Isso significa que a física clássica não pode ser explicada pela física clássica mas sim pela física quântica.

A mecânica quântica antiga foi capaz de explicar a origem dos momentos magnéticos atômicos com o modelo de Bohr. Ela estabeleceu a unidade

fundamental do momento magnético, o magneton do Bohr que é dado pela equação:

$$\mu_B = \frac{eh}{2mc}$$

A nova Mecânica Quântica com as fórmulas de equação de Schrödinger e as fórmulas matriciais de Heisenberg e finalmente a formulação relativista de Dirac foram responsáveis por estabelecer uma base que teve uma aplicação de sucesso em sólidos e na mecânica estatística.

Baseados nesses conceitos, Pauli, Heisenberg e Dirac descreveram o spin do elétron com $g=2$, o ferromagnetismo e a origem do campo de Weiss com a interação de troca $S_i \cdot S_j$.

Transcorreram mais 4 anos e nesse tempo, Hartree, Fock, Heitler, London, Slater, Van Vleck e outros cientistas foram capazes de calcular a nível atômico e molecular e solucionar quase todos os problemas pendentes como dados espectroscópicos, as regras de Hund, os momentos magnéticos dos átomos e ions, o efeito Zeeman, e outras.

Em seus estudos, Weiss explicou, em nível macroscópico, o porquê do ferro não ser magnético no seu estado natural. Além disso, explicou a curva de histerese magnética utilizando o movimento das paredes de domínio que posteriormente foi confirmado na experiência realizada por Barkhausen.

1.2 - O estudo do magnetismo

O entendimento amplo do magnetismo passa por uma base sustentada em três pilares principais: é necessário conhecer a origem do magnetismo e a existência dos momentos magnéticos; em segundo lugar é preciso entender as interações entre os momentos e; conhecer a mecânica estatística, para poder entender e descrever as propriedades macroscópicas observáveis.

1.2.a – Conceitos

a) Polos magnéticos (m)

Assim como nas pilhas e baterias, os ímãs possuem dois polos, no caso, polo Norte e polo Sul. No caso específico dos ímãs, o nome oficial é monopólios magnéticos. O mais interessante dos polos magnéticos é o fato de que, apesar de todos os esforços da comunidade científica sua existência não é estabelecida de forma experimental. Os efeitos ocorrem sempre em pares, ou seja, se dividirmos um ímã em duas partes, essas

duas partes serão outros dois ímãs, com dois polos, exatamente como o ímã que deu origem aos demais.

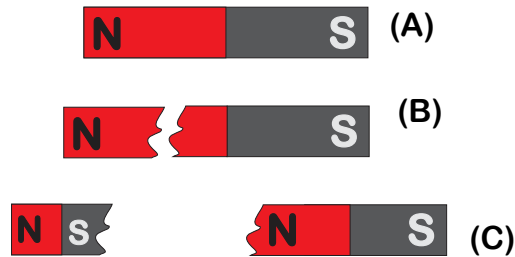


Figura 1 - Ímã intacto (A); fracionamento do ímã (B); Ímãs resultantes (C)

Apesar de não existirem, esse conceito é muito útil nos cálculos micro magnéticos. Cálculos micro magnéticos são os cálculos dos campos internos a amostra e de fenômenos relacionados com a estrutura do domínio.

Esse cálculo é definido a partir do equivalente da lei de Coulomb, que é feito pela força (F) entre dois polos m_1 e m_2 que ocorre entre dois magnetos cilíndricos.

$$F = \frac{k(m_1 m_2)}{r^2}$$

Um dos polos cria no seu entorno um campo magnético que será responsável por exercer uma força em um outro polo próximo. A principal característica dessa força é proporcionalidade dela com o campo magnético. Ou seja, quanto maior a força, maior será o campo magnético. A essa proporcionalidade denominamos Intensidade de Campo Magnético (\vec{H}).

$$\vec{F} = m\vec{H}$$

H – medido em A/m (ampère por metro) ou Oe (Oersteds)

b) Dipolos Magnéticos ou Momentos Magnéticos ($\vec{\mu}$)

Apesar de não vermos, os dipolos são reais e podem ser comparados com pares de polos, por exemplo, $+m$ e $-m$ que se situam nas extremidades de um corpo cilíndrico, que possui um comprimento ℓ e área A , considerando de o comprimento seja muito maior que o raio do cilindro ($\ell \gg r$).

$$\vec{\mu} = m \cdot \vec{\ell}$$

Podemos dizer que o momento magnético situado em um campo \vec{H} estará sujeito a um torque. Consequentemente podemos deduzir que a energia potencial associada será dada por:

$$E = -\vec{\mu}\vec{H}$$

Apesar de podermos calcular um momento magnético, na prática, como lidamos com amostras macroscópicas, trabalhamos com um agrupamento de momentos magnéticos. Com esse conceito é possível determinar a magnetização (\vec{M}) que será o resultado da soma de todos os momentos magnéticos elementares divididos pelo volume que ocupa.

$$\vec{M} = \sum \frac{\vec{\mu}_i}{V}$$

c) Campo Magnético (força magnetizante)

Produzida por solenoides é também conhecida como campo solenoidal. Para entendermos esse conceito, basta imaginar um solenoide de comprimento muito longo onde, no seu centro temos $H = \mu_0 nI$, onde n é a densidade linear de espiras e I é a corrente que passa pelas espiras. No sistema internacional, a unidade para Campo Magnético é ampère/m (A/m) e no sistema CGS² é o Oersted (Oe)³.

Existe um outro campo magnético que é representado pelas linhas de força de indução que é conhecido como Indução Magnética B . Essa indução magnética também recebe a denominação de densidade de fluxo. Isso ocorre porque é possível quantificar o número de linhas de força por unidade de área. Nos espaços vazios (ar ou vácuo)

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} \text{ (no CGS } \vec{B} = \vec{H})$$

No caso de materiais sólidos a indução magnética é dada por:

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$$

cuja unidade no SI é Weber/m² (G/m²) ou Tesla (T)⁴.

No sistema CGS

$$\vec{B} = \vec{H} + 4\pi\vec{M}$$

e a unidade é Gauss

² Sistema Centímetro, Grama, Segundo que precedeu o sistema MKS

³ 1 Oe = 80 A/m

⁴ 1 T = 10⁴ G

d) Permeabilidade Magnética (μ)

A permeabilidade magnética é a quantificação do “valor” magnético de um material, ou seja, ele indica o campo magnético no interior de um material. Esse campo magnético existe devido a associação de uma condição magnética pré-existente na região que envolve o material e a magnetização induzida no material por esse campo.

$$\mu = \frac{B}{H}$$

Essa é chamada de permeabilidade magnética absoluta.

e) Susceptibilidade Magnética (χ)

Materiais magnéticos respondem de formas diferentes quando submetidos a um campo magnético. Essa resposta diferenciada é conhecida como Susceptibilidade Magnética e ela pode ser estática, se for um campo de corrente contínua, ou dinâmica, se for gerada por um campo de corrente alternada. Em alguns casos os materiais apresentam uma resposta não linear. Desse modo devemos tomar o limite nulo da excitação (campo aplicado). Sendo assim:

$$\chi_{DC} = \lim_{H \rightarrow 0} \frac{M}{H} = \frac{\partial M}{\partial H}$$

Na prática costumamos utilizar campos estáticos pequenos o suficiente para obter-se uma boa relação sinal/ruído. Podemos também medir com pequenas excitações alternadas e utilizamos a detecção síncrona. Para esse caso podemos dizer que a susceptibilidade é alternada ou simplesmente é uma susceptibilidade.

Dependendo do material devemos tomar cuidado com a intensidade do campo de excitação. Para materiais moles ou doces, esse cuidado deve ser tomado.

Materiais moles ou doces são materiais ferromagnéticos que possuem uma característica conhecida como magnetização espontânea. Magnetização espontânea significa que esses materiais possuem uma magnetização não nula, mesmo sem estarem em presença de um campo externo. O que diferencia os materiais ferromagnéticos moles dos materiais ferromagnéticos duros é uma característica chamada de coercividade⁵. Normalmente os materiais doces possuem uma coercividade menor que os materiais duros. Apesar de não ser um valor absoluto é costume considerar que materiais com coercividade maior que 10^4 A/m são considerados materiais duros, enquanto valores de coercividade menores que 500 A/m são considerado materiais moles.

⁵ Define o campo necessário para levar a magnetização do material a zero.

Outro tipo de fenômenos ocorre quando há uma dissipação de energia e nesse caso a resposta dos momentos magnéticos elementares não é instantânea, isso significa porque ocorre um atraso temporal da magnetização em relação a excitação. Isso torna a susceptibilidade magnética uma grandeza complexa, ou seja, devemos escrever essa dependência temporal como uma consequência da função da frequência da excitação ω , além de depender da temperatura e do campo:

$$\chi_{ac} = \frac{\partial M}{\partial H} = \chi' - i\chi''$$

onde $\chi'(\omega, T, H)$ é a dispersão

$\chi''(\omega, T, H)$ é a absorção

A susceptibilidade magnética e a sua dependência da temperatura, do campo, e também sua dependência em relação a posição na amostra pode ainda depender da posição microscópica na amostra com a periodicidade da rede cristalina. Sendo assim pode ser expressa por um vetor de onde q da rede recíproca, estudo importante nas relações das refrações de nêutrons.

Os principais tipos de comportamentos magnéticos conhecido são listados na tabela abaixo:

Material	χ	μ
Diamagnético	<0	<1
Paramagnético	>0	>1
Ferromagnético	>>0	>>1
Ferrimagnético	>>0	>>1
Antiferromagnético	>0	>1

Existem outros tipos de comportamento magnético. Iremos citar esses comportamentos, mas não vamos nos fixar em nenhum deles: metamagnético, superparamagnético, vidro de spin, speromagnético, helimagnético, etc.

Para caracterizarmos os materiais magnéticos utilizamos uma série de técnicas experimentais. As duas principais técnicas são a Magnetização e a Susceptibilidade magnética.

A magnetização é medida em função do campo magnético aplicado ao material, a uma temperatura constante, chamadas de curvas ou isotermas de magnetização $(M \times H)_T$. Ainda controlando a temperatura podemos utilizar uma segunda técnica que é conhecida como susceptibilidade, normalmente em corrente alternada. É uma técnica simples e não necessita de campos magnéticos. Esse processo nos informa como a parte inicial da magnetização varia com a temperatura.

Entretanto, nem sempre é possível determinar o comportamento magnético, nesse caso, o microscópio e outras técnicas complementares são necessárias. Para esses casos podemos lançar mão de técnicas

como calor específico, difração de nêutrons, ressonância magnética, espectroscopia ótica e Mössbauer, resistividade e etc...

A propriedade conhecida como Diamagnetismo aparece em todos os materiais que possuam cargas em movimento que sofrem influência de um campo externo ou a sua variação. Sua principal característica é uma pequena suscetibilidade magnética negativa que é independente da temperatura. Isso significa que a qualquer magnetização induzida por um campo externo é proporcionalmente contrária ao campo.

Essa contraposição pode ser explicada através da reação das cargas em movimento que é capaz de cancelar qualquer variação no fluxo magnético, conforme a lei de Lenz, em um caminho fechado qualquer. O fenômeno ocorre em dois níveis. O primeiro é no nível atômico e ocorre sob a forma de um rearranjo das funções de onda de tal modo que aumenta a área efetiva a ser percorrida pelas orbitas atômicas. O segundo ocorre no nível macroscópico através das correntes induzidas, principalmente em materiais metálicos e semicondutores.

No caso macroscópico ocorre uma dependência da temperatura, que normalmente está relacionada a resistência do material e da forma geométrica da amostra que, nesse caso passa a ser importante para a resposta.

Lei de Lenz

Vamos fazer uma pausa para explicar a lei de Lenz que esclarecerá a explicação anterior.

Durante muito tempo Faraday realizou testes experimentais para chegar a uma conclusão sobre o comportamento da corrente induzida. Finalmente ele concluiu que *“quando o número de linhas de campo que atravessam um circuito varia, nesse circuito aparece uma corrente elétrica denominada corrente induzida”*.

Faraday explicou a condição de surgimento de uma corrente induzida. Entretanto ele não explicava como definir a orientação dessa corrente. Foi Heinrich Friedrich Lenz quem conseguiu explicar esse fenômeno.

Ele descobriu que *“O sentido da corrente induzida é tal que o campo magnético por ela produzido se opõe à mudança de fluxo que se originou.”*

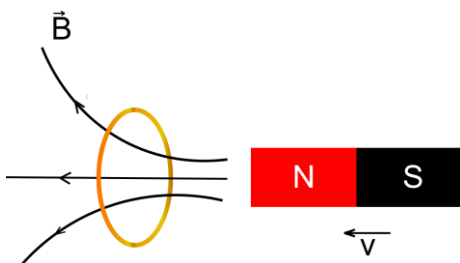


Figura 3 - Campo magnético cruzando um condutor

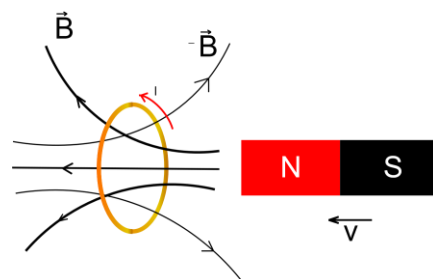


Figura 2 - Surgimento da corrente induzida e do campo que se opõe

Como mostram as figuras acima o campo gerado pelo ímã que se desloca em direção ao condutor produz uma variação no campo elétrico que

envolve o condutor provocando o surgimento de uma corrente I que produzirá um campo de igual intensidade e sentido contrário ao campo original.

Continuando a análise sobre Diamagnetismo se aplicarmos a lei de Lenz ao movimento orbital atômico pode ser representado tanto no aspecto clássico quanto na análise quântica:

$$\chi_D = -\mu_0 \frac{NZe^2}{6m} \langle r^2 \rangle$$

No caso de se utilizar o sistema cgs, divide-se o resultado por $\mu_0 c^2$. Nessa equação o elemento $\langle r^2 \rangle$ é o valor médio quadrático do raio da órbita atômica em questão.

Os supercondutores, que são diamagnéticos perfeitos⁶, quando são submetidos ao efeito Meissner⁷ temos:

$$\chi_c = -\frac{1}{4}\pi$$

A propriedade conhecida como paramagnetismo por uma pequena susceptibilidade positiva e pequena. Dependendo da origem, existe uma forte dependência com a temperatura.

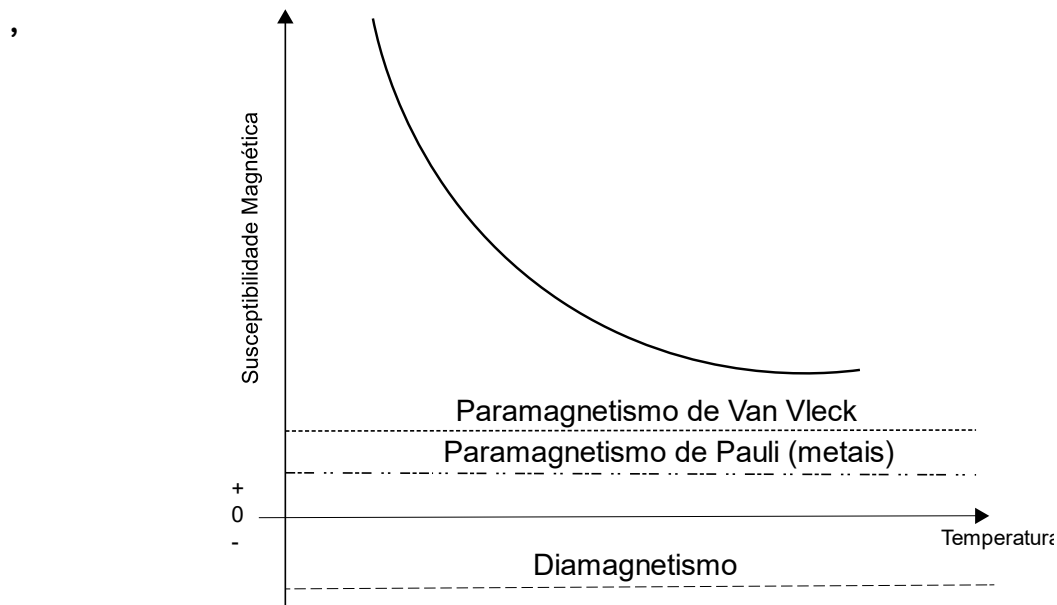


Figura 4 - Curva de relacionamento da susceptibilidade magnética em relação a temperatura

⁶ Os elementos diamagnéticos blindam perfeitamente o campo B em seu interior.

⁷ Nos supercondutores, em campos suficientemente pequenos, o valor do campo magnético no interior do material é zero, isto é, os supercondutores repelem o campo magnético

Para entendermos o paramagnetismo é preciso pressupor a existência de momentos magnéticos no material que podem ser de origem atômica ou molecular ($\vec{\mu}_j$) ou nuclear ($\vec{\mu}_i$). Quando o momento magnético faz parte dos elétrons ou ao Spin eletrônico \vec{S} teremos $\vec{\mu}_s$, assim como quando se refere ao momento angular \vec{L} dos orbitais teremos $\vec{\mu}_L$.

Em cada átomo todos esses momentos se adicionam formando o chamado, momento angular total atômico $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$. Mas isso serve para quando o campo magnético é pequeno.

Da mecânica quântica sabemos que $\mu_L = (L(L + 1))^{1/2}\mu_B$, onde $\mu_B = eh/2\pi m$, ou no sistema cgs, $\mu_B = eh/2\pi mc$. Essa é a unidade do momento magnético atômico, também conhecida como magneton de Bohr. Para o elétron, $\mu_S = 2(S(S + 1))^{1/2}$.

Se formos considerar o momento angular total, então teremos como resultado a equação $\mu_J = (J(J + 1))^{1/2}g\mu_B$. O “g” que aparece na equação é conhecido como Fator de Lande. Por definição esse fator é um termo multiplicativo que aparece na expressão dos níveis de energia de um átomo submetido a um campo magnético fraco. Ele é determinado por:

$$g = 1 + \frac{J(J + 1) + S(S + 1) - L(L + 1)}{2J(J + 1)}$$

O acoplamento LS deixa de funcionar quando o campo aplicado se torna muito grande. Quando isso acontece, os momentos angulares e de spin passam a ocorrer no campo, de forma independente um do outro.

É importante atentar para o fato de que no caso de átomos que possuem muitos elétrons, é necessário que se obedeça ao princípio de Pauli e a repulsão de Coulomb. Esses princípios são sintetizados pela regra de Hund e nos permite o estado fundamental do sistema analisado. A regra de Hund, também conhecida como Princípio da Máxima Multiplicidade, mostra que quanto maior o número de elétrons com spin paralelos em um orbital incompleto, menor será a energia.

No caso de átomos isolados que contém momentos magnéticos e são submetidos a um campo H, os estados $2J+1$ estão degenerados e são separados pelo efeito Zeeman. Esse efeito, conhecido por efeito Zeeman anormal ou efeito Zeeman anômalo ocorre em espectros na região visível do espectro eletromagnético e é o desdobramento de uma risca espectroscópica⁸ original (ou risca espectral original), em $2J+1$ raias diferentes. J é a projeção de um vetor momento angular quântico que ocorre sobre o eixo de quantização. Ele ocorre em campos fracos. Essa separação entre as raias espectrais varia. No caso de campos muito

⁸ Risca espectroscópica, raia espectral, risca espectral ou linha espectral é o resultado de uma transição quântica que pode ser observado macroscopicamente. Estas linhas se apresentam como revelações em algum tipo de material e são a maneira mais simples de se detectar as transições quânticas.

intensos, eles sobrepujam o campo eletromagnético inerente ao átomo e ocasionam o desdobramento das raiais em múltiplas seções de separação constante. Esse efeito é conhecido como Efeito Paschen-Back.

Existe também um efeito conhecido como efeito Zeeman normal, nesse caso o desdobramento da raia espectral ocorre de duas maneiras diferentes. Se a observação for feita ao longo da direção paralela ao vetor de indução magnética, a raia espectral original do espectro (com a ausência de campo magnético) se desdobra em duas raiais. Caso a observação seja feita em uma direção perpendicular ao vetor de indução magnética, então a raia original se desdobra em três raiais.

As energias que são separadas pelo efeito Zeeman são dadas pela equação:

$$E_j = m_j g \mu_B H$$

Se submetermos os átomos à uma variação de temperatura T , obtida através de um banho térmico, e utilizarmos a estatística de Boltzmann⁹ teremos:

$$M = N_0 J g \mu_B B_J(x)$$

Na equação $x = g J \mu_B H / kT$ e $B_J = ((2J + 1)/2J) \coth((2J + 1)x/2J) - (1/2J) \coth(x/2J)$

Essa segunda equação é conhecida como função de Brillouin.

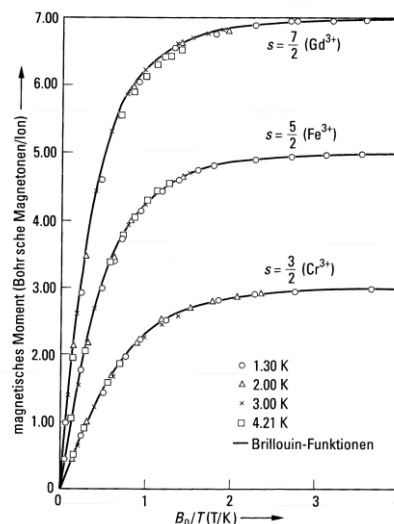


Figura 5 - Curva experimental do momento magnético em diversos materiais paramagnéticos

⁹ a estatística **Maxwell-Boltzmann** descreve a distribuição estatística de partículas materiais em vários estados de energia em equilíbrio térmico, quando a temperatura é alta o suficiente e a densidade é baixa suficiente para tornar os efeitos quânticos negligenciáveis. A estatística Maxwell-Boltzmann é consequentemente aplicável a quase qualquer fenômeno terrestre para os quais a temperatura está acima de poucas dezenas de kelvins.

Dois pontos importantes nessa curva são:

para $x \gg 1$, $B_J \rightarrow 1$, e $M = M_{\text{SAT}} = N_0 J g \mu_B$

e para $x \ll 1$, $B_J \rightarrow \frac{(J+1)x}{3J}$, donde

$$\chi_P = \frac{M}{H} = \frac{(N_0 J(J+1) g^2 \mu_B^2)}{3 k_B T} = \frac{C}{T}$$

Essa equação é conhecida como lei de Curie. Dessa equação podemos obter experimentalmente o momento efetivo dos átomos, ou o número efetivo de magnetons de Bohr.

O grande problema é que nem todos os sais tem um comportamento tão regular quanto esses 3 do exemplo acima. Esses três possuem um comportamento mais previsível pelo fato de que os íons magnéticos estão no estado S, ou seja, $L \neq 0$ o que garante funções de onda esfericamente simétricas. Em uma expressiva quantidade de sais, tais como os metais de transição, o momento que pode ser observado experimentalmente tem resultados diferentes dos que seriam esperados quando utilizamos a regra de Hund. Para isso utilizaremos $L=0$. Nesses casos, podemos dizer que o momento orbital é inibido pelo campo cristalino. Esse efeito do campo cristalino é capaz de quebrar o acoplamento Spin-orbita.

Sendo assim, a simetria das funções das ondas orbitais, no caso de um átomo isolado, não vai ser o mesmo que de um átomo em um estado cristalino em que ele esteja situado.

Para esses casos, onde a simetria é imposta pelo cristal temos que as autofunções do Hamiltoniano de campos cristalinos são resultado das combinações lineares dos orbitais atômicos. Geralmente ocorre uma quebra parcial da degenerescência que tem grande influência sobre o fenômeno paramagnético.

No caso dos materiais que são caracterizados por uma magnetização espontânea em uma temperatura abaixo de T_c , temos o que chamamos de ferromagnetismo. Isso só é possível quando existe algum tipo de interação entre os momentos magnéticos atômicos que são responsáveis pelo ordenamento direcional que resulta em um momento magnético total não nulo.

As principais interações possíveis nesse caso são:

O clássico Dipolo – Dipolo

Nesse caso há uma tendência para o alinhamento dos momentos que estão ao longo do eixo, paralelamente ou antiparalelamente, se os momentos magnéticos se situam em um plano perpendicular ao eixo.

$$H = \frac{(\vec{\mu}_i \vec{\mu}_j)}{r_{ij}^3} - 3 \frac{(\vec{\mu}_i r_{ij})(-\vec{\mu}_j r_{ij})}{r_{ij}^5}$$

O tratamento analítico dessa interação é difícil e complexo. A razão $1/r^3$, apesar de ser de longo alcance, possui uma intensidade muito fraca para ser capaz de explicar as altas temperaturas de ordenamento. Mesmo assim, nas temperaturas muito baixas, ela não deve ser desprezada.

Interação de troca direta

A teoria do Valência, também conhecida como teoria de Heitler-London descreve a ligação química em termos do enlace ou da sobreposição de orbitais de valência semipreenchidos dos átomos constituintes das moléculas em análise. Em alguns casos podemos ter a formação de uma ligação covalente dativa por superposição de um orbital totalmente preenchido de um átomo com o orbital vazio de outro átomo.

Essa teoria pode ser melhor entendida através da molécula de Hidrogênio. Quando aproximamos dois átomos de Hidrogênio começa a ocorrer uma superposição dos orbitais 1s de cada átomo e, nesse caso, os elétrons ficam sujeitos a atração simultânea dos dois núcleos. Assim, a distância internuclear de equilíbrio corresponderá a distância em que são maximizadas as atrações entre os dois elétrons e os dois núcleos e são minimizadas as repulsões eletrônicas e nucleares. Essa sobreposição dos orbitais atômicos 1s origina uma ligação sigma, que é uma ligação formada pela sobreposição do tipo topo a topo dos orbitais de valência onde o máximo de probabilidade de encontrar o elétron, situa-se abaixo do eixo internuclear.

Essa demonstração, para molécula de Hidrogênio, da teoria de Heitler-London demonstra de forma clara que a interação pode ser resumida como a repulsão coulombiana quando é feita a combinação linear dos orbitais atômicos localizados nos átomos situados na vizinhança, mais especificamente na região de recobrimento, considerando o princípio de Pauli.

Dependendo da paridade da função de onda espacial a energia poderá ser minimizada por duas configurações dos spins, singlete ou tripleto. Se o estado de energia mais baixo é singlete teremos uma interação do tipo Antiferromagnética. Já no caso de termos o estado de energia mais baixo ser tripleto, teremos uma interação ferromagnética. Sendo assim, o desdobramento dos níveis de energia singlete-triplete pode ser representado de forma conveniente pela Hamiltoniana de Heisenberg.

$$H = -2J_{ij}\vec{S}_i \vec{S}_j$$

Nessa equação J_{ij} é a integral de troca. Para o ferromagnetismo $J>0$ e o antiferromagnetismo $J<0$.

Interação de troca indireta ou de supertroca

Quando as funções de ondas atômicas não possuem recobrimento direto, fato que ocorre de forma comum nos óxidos, se houver algum átomo não magnético colocado entre os átomos magnéticos, este tem suas funções de onda com spin opostos, parcialmente polarizados pelas funções de onda dos átomos magnéticos. Como consequência disso os dois átomos magnéticos interagem entre si. Dependendo da orientação relativa do átomo não magnético e dos dois átomos magnéticos teremos um comportamento específico para a interação. Na maioria das vezes o átomo não magnético é o Oxigênio e o resultado da interação é antiferromagnética.

Interação de troca indireta do tipo RKKY

Essa denominação tem origem no nome dos seus descobridores, Ruderman, Kittel, Kasuya e Yosida. Esse tipo de interação ocorre sempre em metais onde existam átomos cujo seus momentos magnéticos estão bem localizados, como por exemplo, nas Terras Raras. Esses polarizam os elétrons do gás de elétrons quando nas proximidades destes existem outros átomos magnéticos que levam a “informação”. Nisso resulta uma interação de longo alcance que possui um valor oscilante. Dependendo da distância entre os vizinhos podemos ter interações Ferromagnéticas ou Antiferromagnéticas.

$$J_{RKKY} = \left(\frac{J_{SF}}{E_F} \right) \left(\frac{2k_F r \cos(2k_F r) - \sin(2k_F r)}{(2k_F r)^4} \right)$$

Interação de troca indireta em semicondutores (Bloembergen-Rowland)

Esse tipo de interação é análoga à interação RKKY e envolve elétrons e buracos nos semicondutores e são de alcance mais curto pois, além de oscilar e ter um termo em $1/r^3$, ela também é amortecida por um termo exponencial.

1.2.b – Campo Molecular Médio

Agora já temos condições de calcular as grandezas macroscópicas que são mensuráveis em laboratório. Essas grandezas podem ser a magnetização, o calor específico. Isso pode ser feito utilizando a física estatística nas resoluções desses problemas. Como já vimos, o caso do

paramagnetismo, como os momentos magnéticos são independentes, é fácil fazer essa análise.

O principal problema é quando os momentos magnéticos interagem entre si. No ano de 1907 P. Weiss formulou, pela primeira vez, uma teoria fenomenológica. Essa foi a primeira teoria para o ferromagnetismo, que até hoje é uma importante ferramenta para entender, de forma mais aproximada, o magnetismo e de outras áreas da física estatística. Muito antes do conhecimento da Mecânica Quântica, Weiss postulou a existência de um campo interno H_w proporcional a magnetização.

$$H_w = \lambda M$$

Essa equação mostra que um campo médio de origem molecular, dada por λM que é adicionada ao campo externo aplicado substitui a interação de cada momento magnético atômico com todos os vizinhos. No caso de temperaturas elevadas podemos substituir o campo externo por um campo total e utilizar os resultados do paramagnetismo que já conhecemos. Sendo assim teremos:

$$M = \chi_p (H + \lambda M) = \frac{C(H + \lambda M)}{T}$$

Logo, com $|\lambda M| \ll H$

$$\chi_{cw} = \frac{M}{W} = \frac{C}{(T - C\lambda)} = \frac{C}{T - T_c}$$

Essa é a equação da teoria de Curie-Weiss.

Weiss explicou a magnetização espontânea dos materiais ferromagnéticos através da hipótese de que cada dipolo magnético microscópico do material estaria sujeito ao campo produzido pelos dipolos vizinhos. Ele ainda considerou que haveria uma proporcionalidade entre o campo e a magnetização, de tal forma que esse campo total atuando sobre o dipolo, seria igual à soma do campo H com o campo médio molecular λm , considerando sempre o elemento λ como maior que zero(0).

Com essa consideração Weiss concluiu que, mesmo com a ausência de um campo H (aplicado) o dipolo estaria sujeito a um campo que ele denominou de campo molecular e que é o responsável pela orientação do dipolo. Considerando isso, podemos substituir H por $H + \lambda m$, na equação de estado de um sistema paramagnético ideal e, com isso, alcançamos a equação de estado de um sistema que sofre uma transição de ferromagnético para paramagnético.

Se considerarmos a equação da Teoria de Brillouin para magnetização, quando o dipolo magnético J , assume o valor $\frac{1}{2}$, teremos:

$$m = \mu \tanh \frac{\mu H}{RT}$$

Entretanto, para campos pequenos o processo de magnetização tem um comportamento linear com o campo e age de acordo com

$$m = \frac{\mu^2 H}{RT}$$

A susceptibilidade a um campo nulo esta de acordo com a lei de Curie onde:

$$X_0 = \frac{C}{T} \text{ e } C = \frac{\mu^2}{R}$$

Substituindo nessa equação o valor da equação de estado paramagnético ideal, teremos:

$$m = \mu \tanh \left(\frac{\mu}{RT} (H + \lambda m) \right)$$

Se o campo aplicado for nulo, $H=0$ e teremos

$$m = \mu \tanh \frac{\mu \lambda m}{RT}$$

Utilizaremos o método gráfico para confirmarmos que essa equação possui uma solução diferente de zero (não nula). Vamos lançar mão de uma variável auxiliar x , que será dada por

$$x = \frac{\lambda \mu m}{RT}$$

e vamos substitui-la na equação anterior. Assim teremos:

$$\frac{RT}{\lambda \mu^2} m = \tanh x$$

A função $\tanh x$ é representada na figura abaixo:

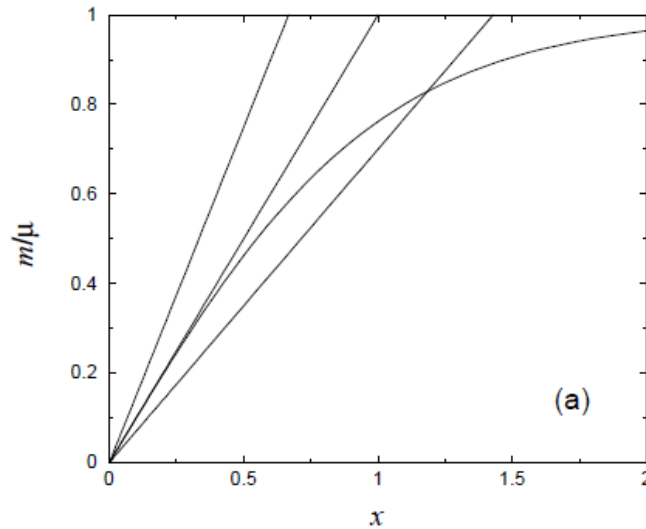


Figura 6 - Solução gráfica da $\tanh(x)$

Sobre esse gráfico traçamos a reta representada pelo elemento $(RT/\lambda\mu^2)x$. Observe que uma das soluções é em $x = 0$ e ela existe para qualquer valor de temperatura. Essa será uma solução única se a inclinação da reta for maior ou igual à inclinação da $\tanh x$ em $x = 0$, isto é, sempre que $RT/\lambda\mu^2 \geq 1$. Essa condição é válida em $T > T_c$ e, por sua vez T_c será dada por:

$$T_c = \frac{\lambda\mu^2}{R}$$

Já para o caso de $T < T_c$, teremos duas soluções não triviais que correspondem ao cruzamento da reta com a curva, conforme mostra a figura 6. Na figura 7, abaixo, vemos as soluções positivas para cada valor de temperatura.

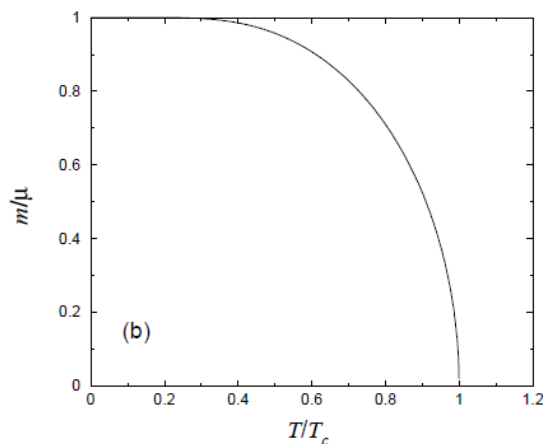


Figura 7 - Magnetização correspondente a solução gráfica em função da temperatura

Se utilizarmos a equação para cálculo de T_c para determinar o valor de λ . Mas isso só pode ser obtido se conhecermos o valor da magnetização de

saturação μ . No entanto, é mais interessante se obtivermos o valor do campo molecular de Weiss utilizando a equação

$$H_w = \lambda \mu = \frac{RT_c}{\mu}$$

Para fazer isso, vamos supor que μ seja de valor aproximado ao magneton de Bohr¹⁰ μ_b ($9,274\ 008\ 99(37) \cdot 10^{-24} \text{ J} \cdot \text{T}^{-1}$). Desse modo $H_w \approx RT_c / \mu_b$. Se utilizarmos a temperatura crítica do ferro, teremos que $H_w \approx 10^3 \text{ T}$.

Agora vamos comparar H_w com o campo H_d que é criado por um dipolo magnético, também da ordem do magneton de Bohr, situado a uma distância a que corresponde ao espaçamento entre os átomos

magnéticos em um sólido. Esse campo $H_d = 10^{-7} \mu_B^2 / N_a^2 a^3$. Agora vamos

supor que a assumo o valor de $2 \cdot 10^{-10} \text{ m}$, nesse caso, H_d terá um valor aproximado de $H_d \approx 10^{-1} \text{ T}$. Com esse resultado é possível constatar que H_d é muitas vezes menor que H_w . Isso significa que em um material ferromagnético a interação entre os dipolos magnéticos não tem como ter origem magnética, desse modo só podemos concluir que o ferromagnetismo ocorre por uma interação não magnética entre os átomos magnéticos.

Essa interação tem origem quântica e tem por base o princípio de exclusão de Pauli.

Concluindo, para valores de $\lambda > 0$ teremos o ferromagnetismo, caracterizado pelo deslocamento da lei de Curie em um gráfico $\chi \times T$ para a direita, e isso é contrário para o antiferromagnetismo. Isso pode ser observado nos gráficos abaixo.

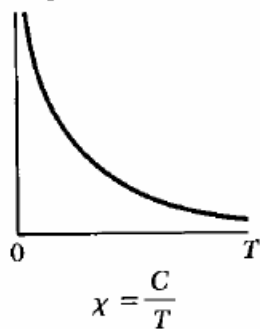


Figura 8 - Paramagnetismo (lei de Curie Weiss)

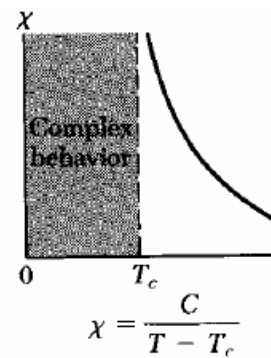
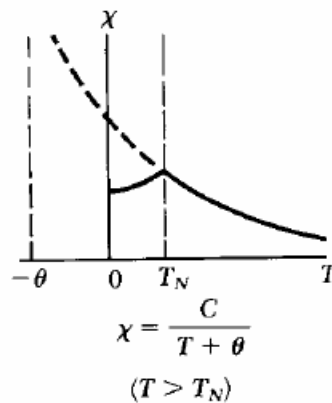


Figura 9 - Ferromagnetismo (lei de Curie Weiss)
($T > T_c$)

¹⁰ é uma constante física relacionada com o momento magnético que recebe seu nome do físico Niels Bohr. Pode ser expresso em termos de outras constantes elementares como $\mu_b = \frac{e\hbar}{2m_e}$



em um ponto que se situa a uma distância \underline{a} que é o espaçamento entre os átomos magnéticos em um sólido. Esse campo vale $10^{-7} \frac{\mu_B^2}{N_A^2 a^3}$. Agora imaginemos que \underline{a} vale $2 \cdot 10^{-10}$ m. Nesse caso, podemos avaliar que H_d será aproximadamente 10^{-1} T. É fácil observar que H_d é muitas vezes menor que H_w . Isso significa que em um material ferromagnético a interação entre os dipolos magnéticos não é de origem magnética, na verdade é originado por uma interação não magnética que ocorre entre os átomos magnéticos. Esse processo é uma interação de origem quântica e tem por base o princípio de exclusão de Pauli.

Como uma primeira aproximação (aproximação qualitativa), a teoria do campo médio serve como uma boa forma para descrever esse comportamento dos materiais. No entanto, uma análise quantitativa ainda apresenta resultados muito simplificados. Se observarmos a curva de magnetização em função da temperatura, veremos que há uma discrepância no limite das baixas temperaturas. Isso ocorre também quando $T \rightarrow T_c$, M tenderá a zero suavemente, ou seja, sem nenhuma descontinuidade, o que caracteriza a transição da fase ferromagnético para a fase paramagnética de segunda ordem. Isso está em desacordo com os resultados experimentais como susceptibilidade e de calor específico.

No entanto, essa aproximação é razoavelmente seguida para os materiais ferromagnéticos não metálicos, tais como o CrBr_3 , EuO_2 e EuS . Para o restante os ferromagnéticos metálicos vamos necessitar de um modelo alternativo, onde os momentos magnéticos não são mais localizados. Nesse caso são momentos magnéticos itinerantes.

1.2.c - Processos de Magnetização

O processo de magnetização envolve mudanças na chamada estrutura de domínios – movimento das paredes que separam os domínios – e na direção da magnetização de cada domínio – rotação de domínio. Quando analisamos um material ferromagnético, pelo ponto de vista

macroscópico, fazemos a partir das curvas de magnetização ($M \times H$) ou as curvas de Indução ($B \times H$). Essas curvas apresentam uma histerese, isso faz com que essas curvas recebam o nome de curvas de histerese. A figura abaixo mostra uma figura dessas.

Essas duas curvas, a de magnetização e a de indução, apresentam uma pequena diferença entre elas. No caso da curva de magnetização ($M \times H$), pode acontecer da amostra se alinhar completamente, nesse caso, todos os momentos magnéticos estarão alinhados e isso faz com que o material atinja a magnetização de saturação M_{sat} . É importante observar que não se trata da magnetização espontânea, que é aquela que aparece em um campo nulo e não podemos confundi-la com a magnetização de saturação que ocorre em um campo aplicado alto. Partindo de uma amostra desmagnetizada, a curva inicial de magnetização tem um formato em S com uma determinada inclinação inicial, essa é chamada de susceptibilidade inicial. No caso da curva de indução, é chamado de permeabilidade inicial. Existem três regimes diferentes que caracterizam a magnetização.

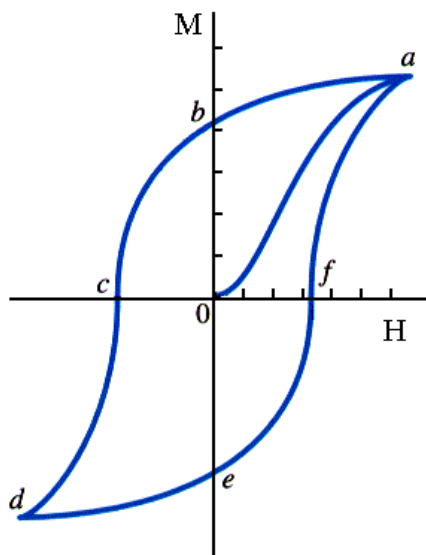


Figura 11 - Curva de histerese

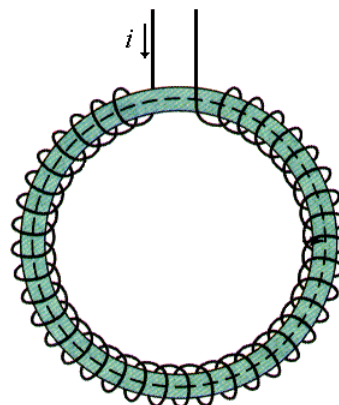


Figura 10 - Toróide

Para entendermos o processo de magnetização, vamos imaginar um toróide circulado por um fio, conforme mostra a figura.

Assumindo que o material ferromagnético esteja inicialmente desmagnetizado, e portanto $H = M = 0$. Conforme aumentamos o valor de H , aumentando a corrente através da bobina e a intensidade magnética cresce a partir do ponto O. Os momentos magnéticos irão se alinhar como o campo, e causam um aumento de M . Esse aumento, em princípio, é quase linear com H , mas tende a saturar quando o alinhamento magnético total é atingido.

A magnetização irá se processar ao longo da trajetória Oa. Se a magnetização fosse mais carregada, uma magnetização $M = n\mu_m$ seria

quase atingida correspondendo ao alinhamento de todos os dipolos atômicos da amostra no sentido de H.

Mas vamos imaginar que paramos o processo no ponto a e começamos a reduzir gradualmente o campo de H novamente. O problema é que a magnetização do material não retrocede na curva *Oa*. Ao invés disso, ele assume a trajetória *ab*. No instante em que H é reduzido a zero, a curva atinge o ponto b.

Ao atingir esse ponto, apesar da intensidade magnética do material ser zero, uma grande proporção dos dipolos atômicos retém seu primeiro alinhamento e, portanto, teremos uma magnetização substancial M_r , que é denominada *magnetização remanescente*. Com isso teremos um ímã permanente que possui uma magnetização capaz de produzir seu próprio campo B, mesmo não havendo corrente.

A partir desse momento, vamos inverter o sentido da corrente e, conseqüentemente, iremos inverter o sentido da intensidade magnética H. Com isso o alinhamento magnético irá ser destruído. No ponto c, quando é atingido um certo valor negativo H_c , a magnetização será completamente removida e, novamente a amostra está desmagnetizada. Conforme seguimos aumentando o valor negativo de H, a magnetização irá se tornando negativa ao longo da curva *cd*, até atingir o ponto d. Nesse ponto, o campo H tem a mesma intensidade mas com sinal oposto em relação ao que se tinha no ponto a.

Aumentando o valor de H, teremos o traçado da curva *defa*, até que, finalmente, o campo atinge novamente o campo H em seu primeiro valor máximo e o ponto a é recuperado.

Com isso, podemos perceber que a magnetização não depende exclusivamente da intensidade magnética, mas também da “história magnética” anterior do material. Esse efeito, como já mencionamos, é conhecido como histerese magnética e existe em algum grau, em todas as substâncias ferromagnéticas.

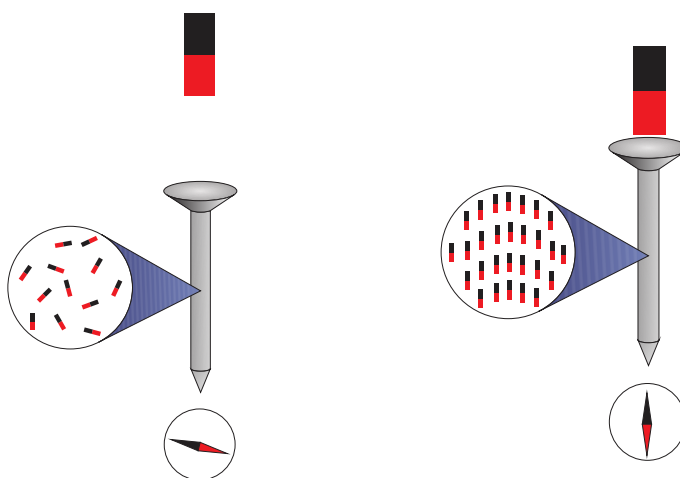


Figura 12 - Processo de magnetização (1) sem aproximação do ímã permanente (2) com aproximação do ímã

CAPITULO II

CARGA ELÉTRICA E CAMPO ELÉTRICO

*A ausência da evidência não significa
evidência da ausência.
Carl Segan*

2.1 CARGA E CAMPO ELÉTRICO

2.1.1 - Histórico

O conhecimento de carga elétrica não é tão novo quanto se imagina. Entre os anos de 640 e 540 antes da nossa era¹¹, Tales de Mileto¹² verificou que quando ele esfregava um pedaço de âmbar¹³ em pele de carneiro, esse âmbar atraía lascas de madeira, fundamento básico da eletrostática. Posteriormente, em seus estudos verificou que pequenos pedaços de um tipo especial de pedra, tinham a capacidade de atrair materiais com ferro e também eram atraídos por esses materiais, dando origem aos estudos sobre magnetismo.

No século XVI, Willian Guilbert¹⁴, demonstrou que outros materiais além do âmbar, quando atritados, apresentavam as mesmas propriedades de atrair objetos. Descobriu também o comportamento da agulha de uma bússola e foi capaz de distinguir exatamente a diferença entre atração magnética e atração elétrica. Descobriu a eletrização por indução, que ocorre de forma preferencial entre os materiais metálicos. Além disso foi o primeiro a caracterizar as diferenças entre condutores e isolantes.

Já na primeira metade do século XVIII, Stephen Gray¹⁵ realizava trabalhos que o levaram à descoberta da possibilidade de transferir para outros corpos a eletricidade obtida no atrito do vidro.

Ainda na primeira metade XVIII Charles François du Fay¹⁶ foi o descobridor das cargas positiva e negativa, aos quais denominou,

¹¹ Nova forma de se referir aos períodos de Antes e Depois de Cristo

¹² Pensador grego pré socrático, considerado “pai da Ciência” e “pai da Filosofia Ocidental”. Suas idéias ajudaram a expandir os horizontes teóricos da astronomia, matemática e filosofia.

¹³ Resina fossilizada, não se trata de um mineral apesar de ser utilizado varias vezes como gema preciosa.

¹⁴ Físico e médico inglês, pertencia a corte da rainha Elizabete I e James I e foi o autor do trabalho sobre magnetismo intitulado *De magnet, magneticisque corporibus, et magno magnete tellure* (Sobre os imãs, os corpos magnéticos e o grande imã terrestre.

¹⁵ Tintureiro inglês que tinha como hobby o estudo de Física e Astronomia. Recebeu duas vezes a medalha Copley, prêmio dado no domínio das Ciências e a mais alta e mais antiga distinção oferecida pela Real Sociedade de Londres para o Melhoramento do Conhecimento Natural.

¹⁶ Químico francês descobridor das cargas positiva e negativa o qual utilizou para explicar pela primeira vez os fenômenos de atração e repulsão.

respectivamente de *vítreas* e *resinosa*, que se separavam quando atritadas e se tornavam neutras quando combinavam.

Já na metade do século XVIII, Benjamin Franklin¹⁷ propôs o modelo de um só fluido para os fenômenos elétricos, o conceito de que todos os corpos são eletricamente estáveis e, com o atrito perdem ou adquirem cargas elétricas se desequilibrando. Dessa forma fundamentou o conceito de conservação da carga elétrica, evidenciando que as cargas não são criadas e sim transferidas pelo atrito. Explicou que a perda de cargas torna o corpo positivo e o acréscimo de cargas o torna negativo.

Na mesma época dessas descobertas, Franklin, ao notar que bolinhas de cortiça, colocadas no interior de um vaso metálico, não eram afetadas pela eletricidade, por esse motivo pediu a Joseph Priestley¹⁸ que investigasse o fato. Priestley chegou a conclusão de que a força entre duas cargas variava de acordo com o inverso do quadrado da distância entre elas e provou não haver eletricidade no interior de um vaso metálico oco, com exceção da região próxima a borda.

Poucos anos depois das descobertas de Priestley, Charles Augustin Coulomb¹⁹, aprofundando as descobertas do outro cientista chegou a equação para calcular a força de atração ou repulsão entre duas cargas elétricas, conhecida como Lei de Coulomb.

Posteriormente, já no final do século XVIII e início do século XIX, Hans Christian Oersted²⁰ realizou um experimento que mudou a maneira como os fenômenos elétricos e magnéticos eram observados. Até os experimentos de Oersted, fenômenos elétricos e fenômenos magnéticos eram desassociados, considerados efeitos independentes. Ao fazer circular uma corrente elétrica em um condutor e observar que isso provocava uma mudança de direção na agulha de uma bússola, ele provou a existência da interação entre fenômenos elétricos e magnéticos, dando origem aos estudos de eletromagnetismo.

Ainda no século XIX, Michael Faraday²¹ lança um livro intitulado *A Rotação Eletromagnética*, base para o entendimento do princípio de funcionamento dos motores elétricos.

¹⁷ Diplomata, escritor, jornalista, filósofo e cientista norte-americano. Foi um dos signatários da Declaração da Independência dos Estados Unidos, do Tratado de Paris e da Constituição Americana. Fundou uma Academia na Filadélfia que, mais tarde, se tornou a Universidade da Pensilvânia.

¹⁸ Cientista, filósofo, teólogo, educador e político inglês, descobridor do oxigênio, inventor da água carbonatada.

¹⁹ Foi um físico francês que iniciou seus estudos de eletricidade e magnetismo para participar de um concurso aberto da Académie des Sciences de Paris sobre a fabricação de agulhas imantadas. O resultado desses estudos foram a chamada Lei de Coulomb.

²⁰ Farmacêutico dinamarquês, posteriormente professor de Física e Química na Universidade de Copenhague e secretário vitalício da Academia de Ciências de Copenhague, fundador da Sociedade para o Desenvolvimento do Estudo da Ciência e da Escola Politécnica.

²¹ Físico e químico inglês, realizou trabalhos na área de eletroquímica e consolidou os conceitos para a construção de motores elétricos

Contemporâneo de Faraday, James Clerk Maxwell²² foi o cientista que deu forma a moderna teoria eletromagnética que envolve eletricidade, magnetismo e ótica.

No início do século XX, Robert Millikan²³ descobriu que a carga elétrica possui uma unidade fundamental e que os valores de cargas dos corpos são sempre múltiplos inteiros dessa unidade.

2.1.2 - Um pouco de conceitos

Todos os corpos são constituídos de átomos. Na Grécia antiga, filósofos gregos, dentre eles Demócrito, passaram a imaginar qual o resultado de sucessivos desmembramentos de qualquer tipo de matéria e concluíram que após inúmeros processos de divisão, restaria um elemento indivisível que denominaram átomo.

A palavra átomo tem origem na palavra grega *átomos*, que tem como significado: indivisível.

A primeira proposta concreta para um modelo de átomo, foi proposto por John Dalton, químico inglês que chegou a sua teoria à partir de experimentos que, infelizmente, não conseguiram revelar claramente a natureza do átomo. Sua natureza era capaz de gerar uma série de postulados sem que fossem possíveis comprovações.

A teoria proposta por Dalton propunha que:

- Os átomos eram maciços com a forma esférica;
- Eram indivisíveis e indestrutíveis;
- Um conjunto de átomos com as mesmas propriedades (tamanho e massa) compunham um elemento químico;
- Os átomos de diferentes elementos químicos, apresentam propriedades diferentes;
- Podemos utilizar o peso de dois átomos diferentes para diferenciá-los
- Todas as substâncias químicas compostas são formadas por diferentes tipos de átomos;

Dalton nomeou esse modelo como bola de bilhar e criou um sistema de simbologia especial para os elementos conhecidos da época.

²² Físico e matemático escocês, responsável pela redação final dos conceitos da moderna teoria do eletromagnetismo que une eletricidade, magnetismo e ótica.

²³ Físico experimental estadunidense trabalhou com cargas elétricas fundamentais e efeito fotoelétrico.

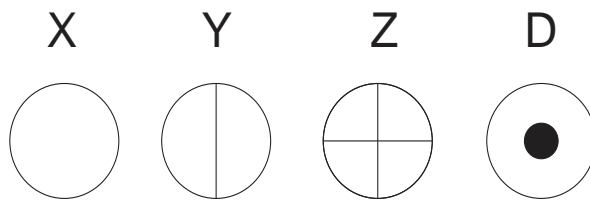


Figura 13- Representação atômica de Dalton

Em 1898, o físico inglês Joseph John Thomson apresentou uma nova teoria para explicar a estrutura do átomo. Seu novo modelo teve como base as descobertas feitas por Geissler e Crookes em seu experimento do tubo de raios catódicos.

O experimento de Geissler consistia de um tubo de vidro contendo um gás em baixa pressão e dois eletrodos circulares nas extremidades. Quando esses dois eletrodos eram energizados provocavam uma descarga no gás. Essa descarga, ao invés de produzir um ruído característico, fazia com que o gás ficasse iluminado. Posteriormente, Crookes colocou gases mais rarefeitos dentro da ampola de vidro e viu a produção dos raios catódicos.

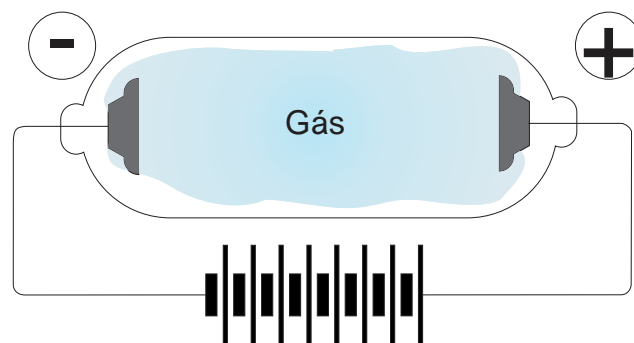


Figura 14-Ampola de Geissler

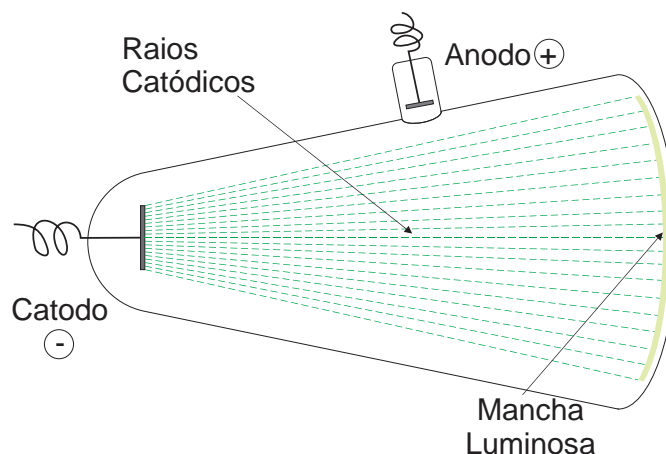


Figura 15- Tubo de raios catódicos de Crookes

Quando esses raios eram submetidos a um campo, se desviavam, comprovando sua natureza negativa.

A partir daí Thomson propôs um modelo com a existência de elétrons, ou seja, o átomo possuía partículas subatômicas.

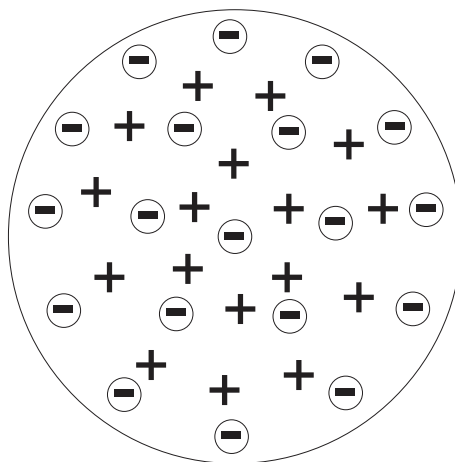


Figura 16 - Modelo atômico de Thomson

Dessa forma Thomson propôs que átomo era uma esfera. No entanto não era maciça como era proposto no modelo atômico de Jonh Dalton. Dizia também que o átomo era neutro, já que toda matéria também era neutra. Sendo assim, ele concluiu que como o átomo apresenta elétrons, que possuem cargas negativas, então, deve apresentar também deveria ter partículas positivas para que a carga final fosse nula. Ele ainda afirmava que os elétrons não estavam fixos ou presos no átomo, e desse modo podiam ser transferidos para outro átomo em determinadas condições. Além disso, o átomo poderia ser considerado como um fluido contínuo de cargas positivas onde estariam distribuídos os elétrons, que possuem carga negativa. Ele comparou o seu modelo a um pudim de passas onde essas passas representam os elétrons. Por fim, ele explicava que como os elétrons que estão espalhados apresentam a mesma carga, existe entre eles uma repulsão mútua, o que faz com que estejam uniformemente distribuídos na esfera.

A principal influência da proposta de Thomson foi adicionar alguns conceitos sobre átomos que ainda não haviam sido considerados. O primeiro conceito novo era a natureza elétrica da matéria pois com o entendimento da existência de cargas negativas e positivas o que adicionava essa característica elétrica a todas as matérias.

O segundo conceito era o da possibilidade da divisão do átomo, já que o mesmo possuía partículas subatômicas o que associava o terceiro conceito que diz respeito a presença de pequenas partículas nos átomos. No ano de 1911, Ernest Rutherford, cientista neozelandês, propôs um novo modelo para o átomo. Esse novo modelo, também conhecido como modelo solar foi considerado o modelo que estimulou toda a evolução da ciência que estudava o elemento fundamental de toda a matéria, o átomo.

A proposição de Rutherford teve início a partir das propriedades do raio X e das emissões radioativas.

O experimento de Rutherford era constituído de três elementos: o primeiro era um emissor de radiação alfa, no caso o polônio, que era colocado em um bloco de chumbo que possuía um pequeno orifício pelo qual escapava a radiação. O segundo elemento era uma lâmina de ouro, extremamente fina posicionada à frente da caixa de chumbo. Finalmente o terceiro elemento que era uma placa metálica coberta com material fluorescente (no experimento ele utilizou sulfeto de zinco) posicionada atrás, ao lado e um pouco à frente da lâmina de ouro.

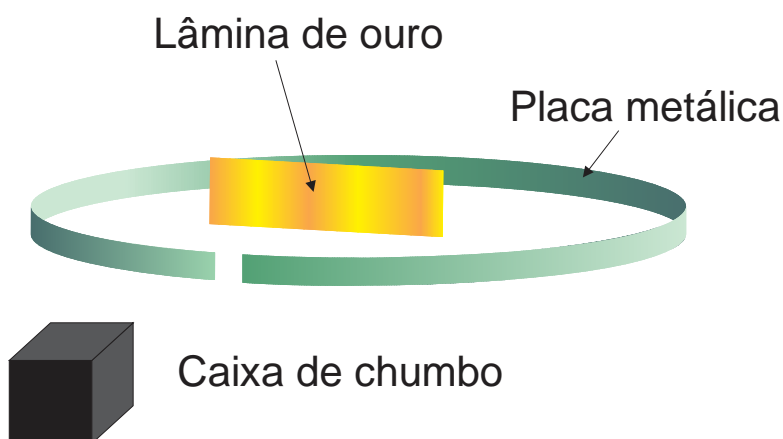


Figura 17 - Experimento de Rutherford

A radiação emitida pelo polônio se propagou em direção a placa de ouro, passando, em grande parte, pela lâmina e atingindo a placa metálica no outro lado, evidenciando que boa parte da radiação alfa atravessou o ouro sem sofrer desvios consideráveis. Uma fração da radiação foi dispersada atrás da lâmina de ouro indo refletir na placa metálica o que evidenciou que parte da radiação havia sido desviada pela placa de ouro. Finalmente, uma pequena fração da radiação foi refletida pela placa de ouro revelando que parte dessa radiação foi refletida pela placa.

A partir desses resultados, Rutherford concluiu que o fato de boa parte da radiação ter passado pela lâmina de ouro significava que os átomos possuem grandes espaços vazios (eletrosfera), isto é, regiões incapazes de oferecer obstáculos as partículas da radiação alfa. O desvio de parte da radiação, que provocou uma difusão na parte posterior da placa metálica, ocorreu porque uma pequena quantidade de radiação passou próximo a região positiva (núcleo) que foi o responsável por esse desvio. Quanto a porção que foi refletida, certamente seria resultado de uma parcela da radiação que se chocou com uma área extremamente pequena no interior do átomo, o núcleo.

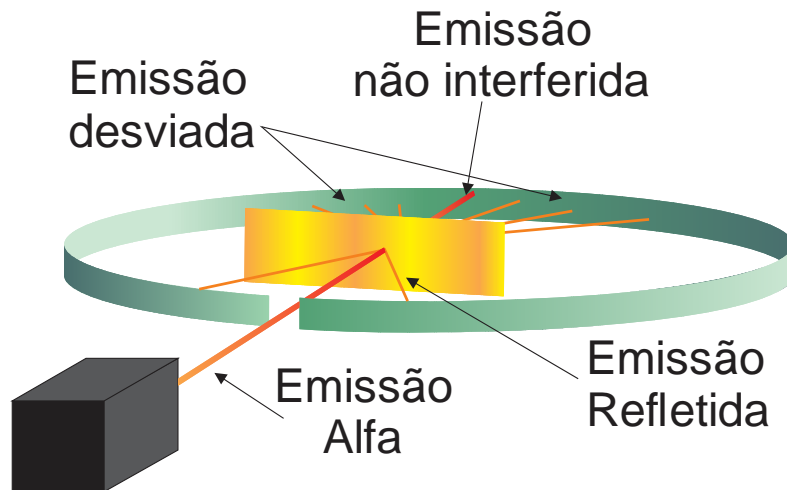


Figura 18 - Resultado da emissão alfa no experimento

Baseado nessas conclusões Rutherford propõe uma estrutura para o átomo. A denominação dada ao novo modelo apresentado por ele, teve origem na ideia que o átomo possuía uma região central, o núcleo, onde, em torno dele, orbitam os elétrons. Analogamente, o núcleo seria como o sol no sistema solar e os planetas seriam os elétrons.

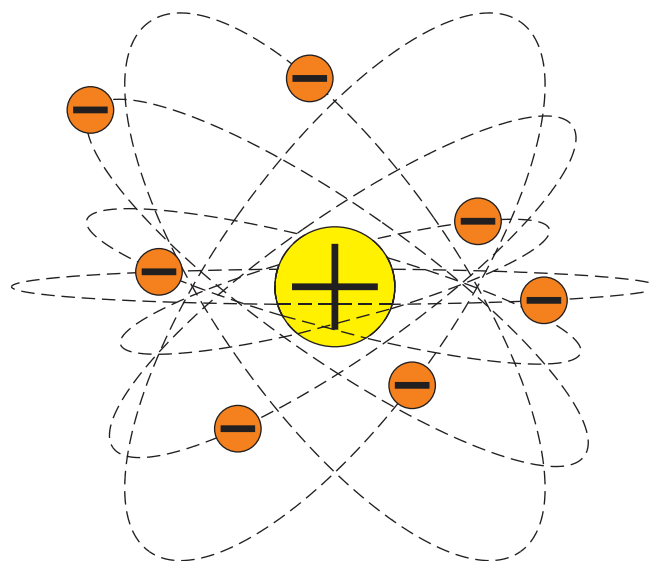


Figura 19 - esquema do modelo de Rutherford

Dando continuidade ao trabalho de Rutherford, o físico dinamarquês Niels Bohr tentou explicar alguns erros no modelo anterior. Para isso ele sugeriu que o átomo possuía uma energia quantizada, ou seja, cada elétron só pode ter determinada quantidade de energia. Para explicar isso o modelo de Bohr representava níveis de energia para os elétrons. Nesse caso, o modelo onde cada elétron possui a sua própria órbita e com quantidades de energia já determinadas.

O grande problema é que as leis da Física Clássica não conseguem explicar esse modelo. Esse ocorre porque quando um elétron salta de um nível menor para um nível mais elevado, ocorre uma absorção de energia e, quando esse elétron retorna para um nível menor, ocorre uma emissão de radiação em forma de luz.

Bohr organizou os elétrons em camadas, também conhecidos como níveis de energia. Cada camada recebeu um nome e só pode ter um número máximo de elétrons. No modelo de Bohr existem sete camadas ao redor do núcleo: K,L,M,N,O,P,Q.

A tabela abaixo apresenta o nome das camadas, seu número quântico e o número máximo de elétrons em cada uma destas camadas.

	Nº QUÂNTICO	N ° MÁXIMO DE é
K	1	2
L	2	8
M	3	18
N	4	32
O	5	32
P	6	18
Q	7	2

Tabela 1 - Camadas, número quântico e número máximo de elétrons em cada camada.

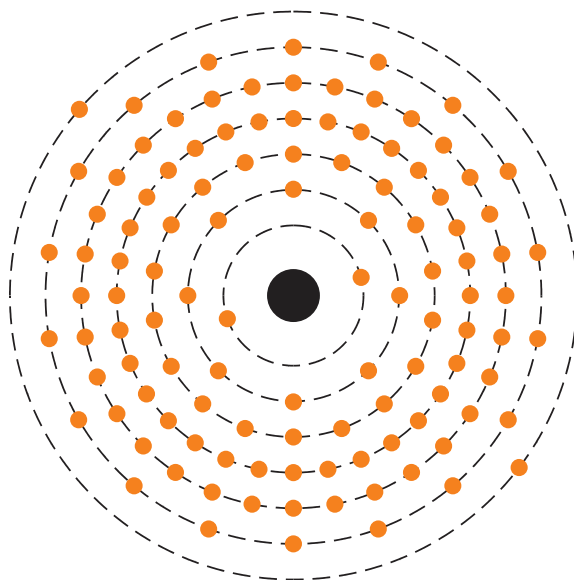


Figura 20 - Distribuição dos elétrons nas camadas de um átomo

A última camada de um átomo é conhecida como camada de valência. A camada de valência recebe elétrons no nível de maior número quântico

principal ou secundário na distribuição eletrônica. São os elétrons contidos nas camadas de valência que participam das ligações químicas. Na primeira metade do século XX, o cientista norte americano, Linus Pauling, aprofundou a ideia da distribuição dos elétrons no átomo, apresentou o conceito da distribuição eletrônica de Linus Pauling. Esse método especifica como ocorre a distribuição dos elétrons na eletrosfera. Na verdade, o método foi desenvolvido pelo físico alemão Erwin Madelung que provou experimentalmente que os elétrons são dispostos nos átomos em ordem crescente de energia. Ele baseou seus estudos nos conceitos apresentados por Rutherford e Bohr.

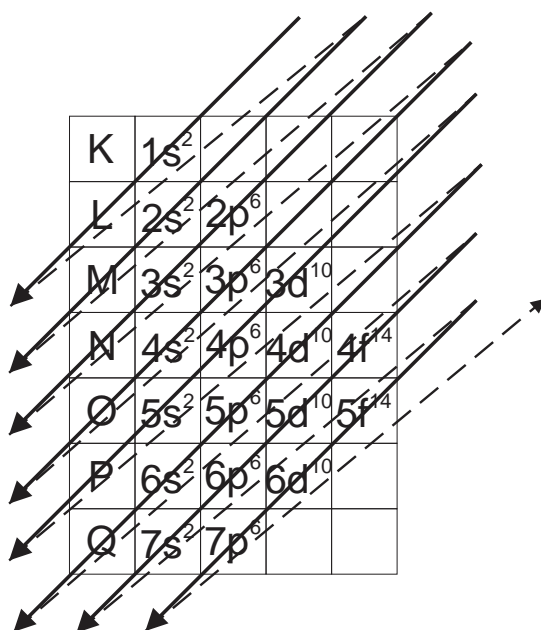


Figura 21 - Diagrama de Pauling

$1s^2 \ 2s^2 \ 2p^6 \ 3s^2 \ 3p^6 \ 4s^2 \ 3d^{10} \ 4p^6 \ 5s^2 \ 4d^{10} \ 5p^6 \ 6s^2 \ 4f^{14} \ 5d^{10} \ 6p^6 \ 7s^2 \ 5f^{14} \ 6d^{10} \ 7s^6$

Ordem crescente de energia

$1s^2$ ← Número quântico principal
 ← Quantidade de elétrons no número quântico azimuthal
 ← Número quântico azimuthal

Uma das utilizações da camada de valência é a determinação de um material é condutor, semicondutor ou isolante.

Os materiais condutores possuem um excedente de elétrons em sua camada de valência. Nesse caso, os elétrons se encontram nas camadas de valência mais distantes do núcleo e, portanto, necessitam de uma energia menor para que sejam retirados dessa camada. Essa facilidade

de retirada dos elétrons faz com que eles sejam chamados de elétrons livres. Materiais metálicos normalmente são bons condutores.

No caso dos materiais isolantes, ou dielétricos, os elétrons da camada de valência sofrem forte influência de atração do núcleo, sendo muito difícil a extração de elétrons dessas camadas.

No caso dos elementos semicondutores o comportamento de condução ou resistência será ditado pelas condições físicas aos quais o material é submetido.

Todos os materiais isolantes possuem uma característica chamada **RIGIDEZ DIELÉTRICA**, ou seja, o valor máximo de campo elétrico que elas podem suportar sem perder sua característica de isolante. Essa rigidez dielétrica é dada em Kv/mm (quilo volts²⁴ por milímetro).

Partícula	Massa (grama)	Massa relativa	Carga elétrica (Coulomb)	Carga líquida
Próton (+)	$1,7 \cdot 10^{-24}$	1	$+1,6 \cdot 10^{-19}$	+1
Nêutron (0)	$1,7 \cdot 10^{-24}$	1	0	0
Elétron (-)	$9,1 \cdot 10^{-28}$	1/1840	$-1,6 \cdot 10^{-19}$	-1

Tabela 2 - Tabela de caracterização dos elementos componentes de um átomo

2.1.3 - O Conceito de Corpo Eletrizado

2.1.3.a - Eletrização por atrito

Como já vimos, todos os materiais são compostos de átomos e, por sua vez, esses átomos possuem um núcleo com prótons e nêutrons e uma coroa, com elétrons que circundam em torno do núcleo.

Na natureza, todos esses corpos possuem em seus átomos o mesmo número de prótons e de elétrons, sendo assim, dizemos que esses corpos estão em equilíbrio eletrostático ou com carga elétrica nula.

Como já vimos também, Tales de Mileto, observou que o âmbar atritado com a pele de carneiro, passava a ter a propriedade de atrair pequenos materiais. Mas o que ocorria durante o processo de atrito para que isso pudesse acontecer?

Se pegarmos dois materiais quaisquer, mesmo que isolantes, e começarmos um processo de atrito entre os dois, verificaremos que os elétrons dos átomos mais externos trocam cargas elétricas. Esse fenômeno recebe o nome de triboelétrico. No caso de atritarmos vidro em um pedaço de lã, veremos que o vidro irá adquirir uma carga positiva enquanto a lã adquire uma carga negativa.

²⁴ 1 Kv equivale a 1000 volts



Figura 22 - exemplo de eletrização por atrito - pente no cabelo

No exemplo acima, o atrito de um pente de plástico com o cabelo produz a eletrização dos dois e o pente passa a atrair pequenos pedaços de papel colocados sobre uma superfície qualquer.

Além da eletrização por atrito, outras formas são, eletrização por contato e eletrização por indução.

O processo de eletrização por atrito foi melhor explicado a partir dos estudos de Enrico Fermi. Ele mostrou que durante o atrito ocorre uma variação de temperatura que modifica a distribuição de energia dos elétrons o qual, a partir do qual ocorre a alteração do potencial de contato.

2.1.3.b Eletrização por contato

Na eletrização por contato, um corpo é carregado com cargas negativas, a partir de um processo qualquer de eletrização. Estando esse corpo carregado, ao encostarmos o mesmo em um segundo corpo, imediatamente cargas contidas no primeiro elemento irão migrar para o segundo tornando-o também carregado com cargas negativas, conforme mostra o esquema da figura 11. Esse processo foi entendido a partir das experiências de Alexandre Volta que verificou que quando dois metais condutores diferentes se unem surge uma pequena diferença de potencial elétrico denominado potencial de contato.

Uma análise mais aprofundada, já migrando para a área da física quântica podemos verificar que essa diferença de potencial que surge entre os dois materiais é inerente ao tipo de material que se une e a temperatura que envolve essa união. Isso ocorre porque a diferença de potencial que irá surgir está relacionada com o potencial químico de cada um dos materiais, ou seja, depende do número de elétrons que cada um dos elementos possui em sua camada de valência. Nesse caso, quando dois materiais diferentes são unidos, um deles irá ceder elétrons e o outro irá receber esses elétrons provocando uma diferença de potencial entre os dois materiais.

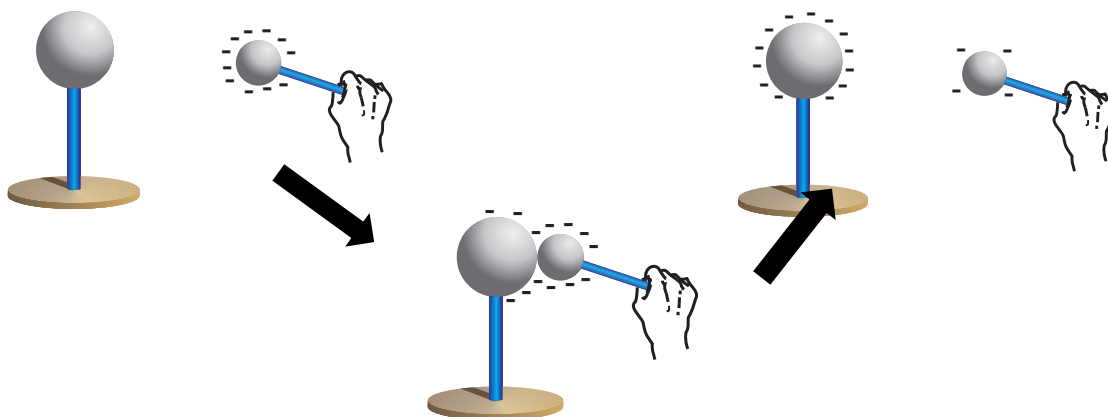


Figura 23 - Processo de eletrização por contato

O experimento de Alexandre Volta provou essa particularidade e ordenou, pela primeira vez, uma sequência ordenada de metais, onde cada um era caracterizado por um valor denominado valor galvânico. Entretanto, foi a teoria de Enrico Fermi, que possibilitou um melhor ordenamento dos materiais em níveis de energia e que possibilitou estabelecer as relações entre esses materiais metálicos para determinar a capacidade de geração de um potencial de junção para cada tipo de combinação metálica.

	Metal	Potencial do Eletrodo	
MENOS NOBRES	Magnésio	- 2,340	ANÓDICOS
	Alumínio	- 1,670	
	Zinco	- 0,762	
	Cromo	- 0,710	
	Ferro	- 0,440	
	Cádmio	- 0,402	
	Níquel	- 0,250	
	Estanho	- 0,135	
	Chumbo	- 0,126	
MAIS NOBRES	Cobre	+ 0,345	CATÓDICOS
	Prata	+ 0,800	
	Ouro	+ 1,680	

Tabela 3 - Série Galvânica dos Metais

2.1.3.c Entendendo a série triboelétrica

Foi Benjamin Franklin, em seus estudos sobre eletricidade, mais especificamente nos estudos sobre a “produção” de cargas elétricas por atrito e seguindo a convenção de sinais de cargas, por ele mesmo proposto, que mostrou que, ao se friccionar vidro com seda, alguns elétrons do vidro passam para a seda, deixando-a negativa enquanto o vidro fica positivo. Da mesma forma, ao atritarmos uma pele de coelho ou

seda com âmbar, este ficará negativo, enquanto a pele ou a seda ficarão positivos.

O estudo da interação entre variados materiais levou ao estabelecimento de uma lista ordenada desses materiais, sejam eles, condutores ou isolantes. Essa lista, como já comentamos, é conhecida como série triboelétrica.

A palavra triboelétrica tem origem grega, pois tribo em grego significa atrito.

A tabela abaixo apresenta esta série.

Pele humana seca	— ↑	Alumínio	— ↑	Isopor	+ ↓
Amianto		Papel		Filme de PVC	
Couro		Algodão	Neutros	Estanho	
Pele de Coelho		Aço		Prata	
Vidro		Madeira	+ ↓	Borracha sintética	
Cabelo humano		Âmbar		Poliuretano	
Nylon		Borracha dura		Polietileno	
Lã		Níquel e Cobre		PVC	
Chumbo		Latão e Prata		Teflon	
Pele de gato		Ouro e Platina		Borracha de silicone	
Seda		Poliéster			

Tabela 4 - Série Triboelétrica

2.1.3.d Eletrização por Indução

Chamamos de eletrização por indução o processo em que atribuímos carga elétrica a um objeto a partir de um segundo objeto que está carregado. Esse processo ocorre baseado no conceito de atração e repulsão de cargas elétricas.

O corpo que está inicialmente carregado recebe o nome de indutor enquanto o corpo que irá receber a carga é denominado de induzido. O processo ocorre em 4 etapas.

A primeira etapa consiste em aproximar o corpo carregado (indutor) do corpo que se pretende carregar (induzido). Ao aproximarmos um corpo do outro, pelo princípio de atração e repulsão das cargas elétricas, a carga existente no indutor, começa a repelir as cargas iguais e atrair as cargas diferentes existentes no corpo. Lembre-se que todos os corpos em equilíbrio possuem um igual número de prótons e elétrons.

Na segunda etapa, ligamos o induzido à terra, mantendo-o aproximado do indutor. Nessa etapa, a ligação terra irá complementar a carga total do induzido.

Na terceira etapa desligamos e fio de aterramento e, posteriormente, afastamos o indutor do induzido.

Na etapa final teremos o corpo induzido completamente carregado.

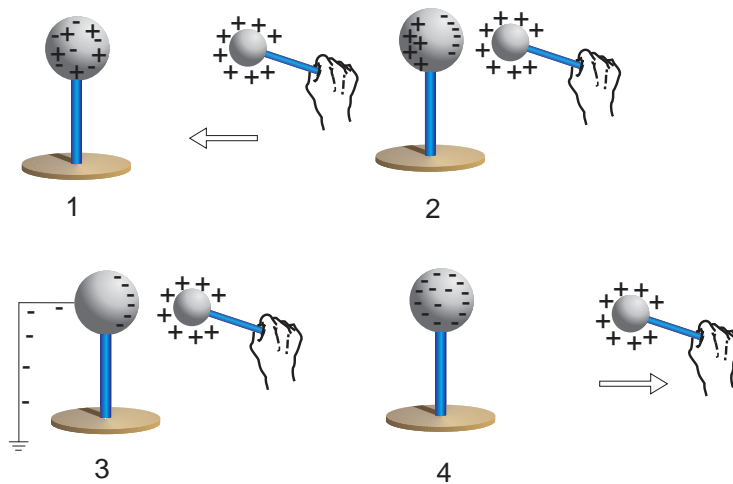


Figura 24 - Processo de Eletrização por indução

O processo de eletrização por indução, no caso de um corpo dielétrico, o máximo que irá acontecer será uma reorientação dos dipolos elétricos. Entretanto, não há um deslocamento de cargas ao longo da rede de átomos quem compõe o corpo. Na figura 12 podemos ver o que isso acontece.

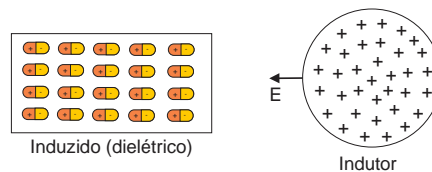


Figura 25 - Eletrização por indução de um corpo dielétrico

No caso do corpo induzido ser um material condutor, o corpo eletrizado, ao se aproximar do induzido, começa a atrair as cargas de valor contrário e irá repelir as cargas de valor igual. Nesse momento ligamos o induzido à terra que irá anular as cargas que foram repelidas pelo indutor. Quando o sistema atinge o equilíbrio eletrostático (momento em que as cargas param de se movimentar pelo fio que está ligado à terra).

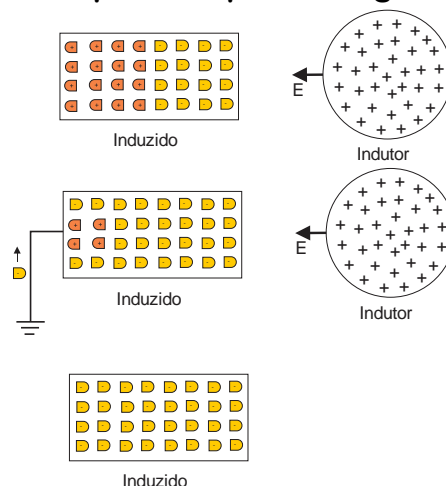


Figura 26 - Processo de eletrização por indução

2.1.4 - Carga Elétrica

Com tudo o que já vimos, vamos tratar então sobre o elemento fundamental da eletricidade, o elétron, mais especificamente a carga elétrica.

Mas o que é carga elétrica?

A carga elétrica é a propriedade física da matéria. Essa carga pode ser positiva ou negativa. Pela teoria mais utilizada na maior parte dos estudos de Física, as menores partículas portadoras de carga elétrica são os prótons e os elétrons. Isso faz com que a carga elétrica possua um valor mínimo (carga de 1 elétron), sendo assim, a carga de um corpo é um múltiplo da carga do elétron. Desse modo dizemos que a quantidade de carga elétrica de um corpo é quantizada. Considerando a lei de Lavoisier, *“na natureza nada se cria, nada se destrói, tudo se transforma”*, sabemos que as cargas elétricas não surgem e nem são destruídas e, portanto, se conserva.

As partículas, que podem ser eletricamente carregadas, são conhecidas como portadoras de cargas elétricas. Nos elementos metálicos sólidos, o portador de carga elétrica negativa é o elétron. No caso dos fluídos, o portador de carga elétrica positiva é o cátion (íons que excesso de prótons). A física moderna mostrou que, ao contrário do elétron, o próton não é uma partícula elementar pois eles são compostos de quarks.

Partícula	Massa (grama)	Massa relativa	Carga elétrica (Coulomb)	Carga líquida
Próton (+)	$1,7 \cdot 10^{-24}$	1	$+1,6 \cdot 10^{-19}$	+1
Nêutron (0)	$1,7 \cdot 10^{-24}$	1	0	0
Elétron (-)	$9,1 \cdot 10^{-28}$	1/1840	$-1,6 \cdot 10^{-19}$	-1

Tabela 5 - Dados das partículas do átomo

Quando um corpo está carregado eletricamente, seja positiva ou negativamente, dizemos que esse corpo está ionizado. Ou seja, o equilíbrio do átomo é quebrado. Quando um átomo está em equilíbrio, o número de prótons e número de elétrons é o mesmo. Entretanto, quando um processo qualquer de eletrização retira ou cede um elétron para um corpo ou uma partícula, é gerado um processo de desequilíbrio elétrico. Como já dissemos existe uma quantidade mínima de carga que é dada pelo valor da carga do elétron: e

Qualquer carga “q” deve ser um valor inteiro de cargas elementares:

$$q = \pm ne, n = 1, 2, 3, \dots$$

$$e = 1,60 \times 10^{-19} \text{C}$$

2.1.5 - Campo elétrico

Sempre que temos uma carga elétrica ou uma variação, no tempo, de um campo magnético, estaremos na presença de um campo elétrico.

Analisando os casos estáticos (referentes a cargas elétricas estacionárias), veremos que na presença de um campo elétrico formado por um conjunto de cargas estacionárias, qualquer carga que seja aproximada desse campo sofrerá a ação do mesmo através da força elétrica.

A intensidade dessa força elétrica (ou vetor força elétrica) é dado pela equação:

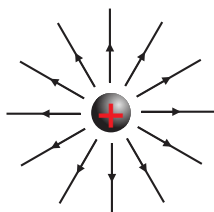
$$\vec{F} = \vec{E} \cdot q$$

onde : F – é o vetor FORÇA ELÉTRICA; q – carga elétrica de prova
E – é o vetor CAMPO ELÉTRICO;

Carga elétrica de prova é um corpo com carga muito pequena. Esse valor deve ser muito pequeno para garantir que o campo elétrico gerado por essa carga, não influencie de forma significativa a distribuição de carga que cria o campo elétrico que está sendo analisado.

A partir dessa carga de prova, é possível determinar a característica do campo analisado. Ou seja, se aproximamos de um campo uma carga de prova positiva e essa sofre uma força de repulsão, é possível dizer que estamos na presença de um campo elétrico positivo. Se ela for atraída, podemos afirmar que se trata de um campo elétrico negativo. Não esquecer que cargas de mesmo sinal se repele e de sinais contrários se atraem.

O campo elétrico é composto por um conjunto de linhas de força que tem origem no polo positivo e se deslocam até o polo negativo. Uma forma simplificada de representação dessas linhas de campo para possibilitar a visualização da direção e do sentido desse campo. Essa representação, obedecendo uma convenção, permite determinar de forma comparativa a diferença de intensidade de dois campos diferentes. Pela convenção, campos mais intensos possuem um número maior de linhas de campo e essas linhas ficam mais próximas umas das outras. Campos menos intensos, possuem menos linhas e mais distantes umas das outras.



Nas cargas pontuais, as linhas de campo se estendem até o infinito (cargas positivas), ou se originam no infinito (cargas negativas).

Figura 27 - Carga Pontual (positiva)

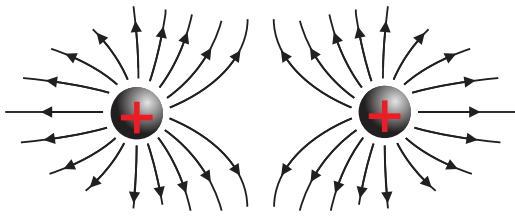


Figura 28 - Duas cargas pontuais de mesmo sinal

Nesse caso as linhas de campo, mostram a repulsão das duas cargas. Nas áreas em branco o campo elétrico é nulo.

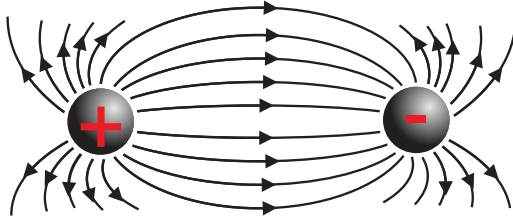


Figura 29 - Duas cargas pontuais de sinais diferentes

As cargas de sinais opostos se atraem, portanto as linhas de campo partem da carga positiva para a carga negativa.

Para melhor entender o comportamento das cargas elétricas Coulomb passou a estudar e experimentar as reações de corpos carregado eletricamente.

2.1.6 - Lei de Coulomb

Entre 1785 e 1791, Charles Augustin de Coulomb, pesquisou as interações entre cargas elétricas. Ele utilizou um equipamento chamado balança de torção.

Balança de torção é um equipamento, construído por Coulomb e podia fazer medições da força de atração ou repulsão entre duas esferas eletricamente carregadas.

A balança consiste de uma haste suspensa por um fio tendo em cada uma das extremidades uma esfera. Uma terceira esfera presa em uma haste e também eletrizada é aproximada das outras duas. Devido a força elétrica que ocorre pela interação entre as esferas carregadas, a haste gira e provoca uma torção no fio. Quando medimos o ângulo de giro, Coulomb conseguia determinar a força entre as esferas.

Coulomb repetiu diversas vezes o experimento e acabou concluindo que a força elétrica é inversamente proporcional ao quadrado da distância entre as duas esferas. Ele também concluiu que a força elétrica era proporcional ao produto das cargas elétricas das duas esferas.

Com isso, ele determinou a equação da força elétrica exercida pela interação entre duas esferas carregadas.

$$F = k \frac{|q_1 q_2|}{r^2}$$

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

Constante eletrostática

$$8,99 \times 10^9 \text{ N.m}^2/\text{C}^2$$

$$\epsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2}$$

Permissividade do vácuo

$$8,854 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N.m}^2$$

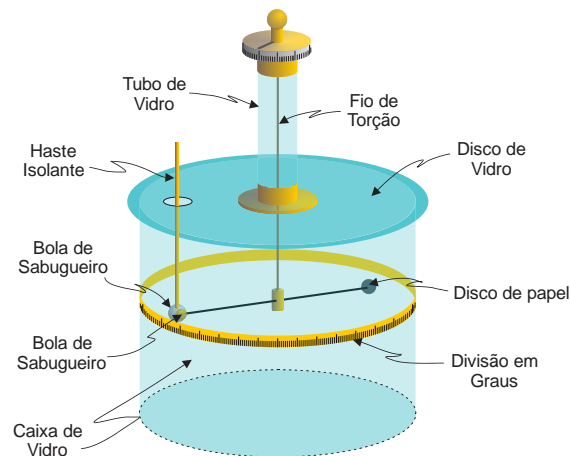


Figura 30 – Balança de Torção de Coulomb

2.1.7 - Princípio da Superposição

Até agora analisamos a interação entre duas cargas elétricas. A partir de agora vamos analisar o que ocorre quando mais de duas cargas interagem.

Quando duas cargas interagem, surge um par conjugado de forças. Sendo assim, quando várias cargas interagem um conjunto de forças atua sobre a carga de prova e, conseqüentemente o deslocamento dessa carga terá a intensidade e a direção da força resultante desse conjunto.

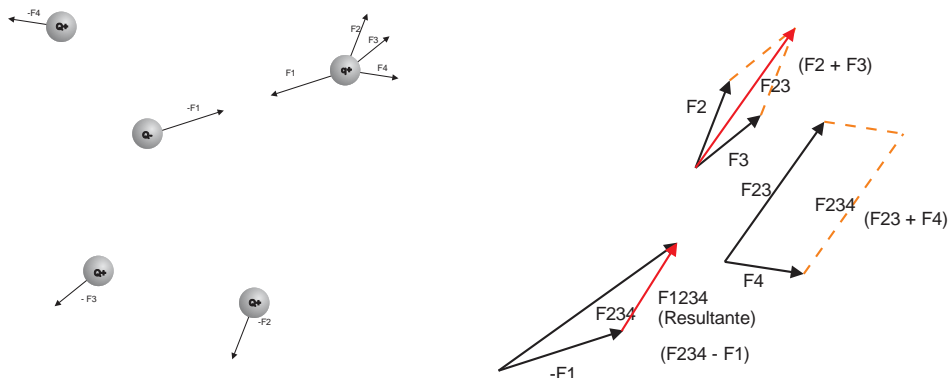


Figura 31 – Representação esquemática do Princípio da Superposição e sua resolução vetorial

O princípio da superposição diz que a força resultante em uma partícula que está submetida a ação de um número N de outras partículas é o somatório das forças que surgem entre cada uma das partículas do conjunto, sobre a partícula que está sendo analisada.

Desse modo:

$$F_{1234} = \sum_{n=1}^4 F_n \rightarrow F_{1234} = (-F_1) + F_2 + F_3 + F_4 \quad (1)$$

Não podemos esquecer que essas forças são vetores, sendo assim, possuem modulo e direção. Sendo assim, e sabendo que a força elétrica é dada pela equação:

$$F = K_0 \frac{Q_1 Q_2}{d^2} \quad (2)$$

Então podemos escrever a equação geral do princípio da superposição como:

$$\begin{aligned} & K_0 \frac{Q_1 Q_5}{d_{15}^2} + K_0 \frac{Q_2 Q_5}{d_{25}^2} + K_0 \frac{Q_3 Q_5}{d_{35}^2} + K_0 \frac{Q_4 Q_5}{d_{45}^2} \\ & K_0 \left(\frac{Q_1 Q_5}{d_{15}^2} + \frac{Q_2 Q_5}{d_{25}^2} + \frac{Q_3 Q_5}{d_{35}^2} + \frac{Q_4 Q_5}{d_{45}^2} \right) \\ & K_0 Q_5 \left(\frac{Q_1}{d_{15}^2} + \frac{Q_2}{d_{25}^2} + \frac{Q_3}{d_{35}^2} + \frac{Q_4}{d_{45}^2} \right) \end{aligned}$$

Se substituirmos os índices 1,2,3 e 4, por “j” e o índice 5 por “i” podemos escrever a equação como:

$$K_0 Q_i \sum_{i \neq j \rightarrow j=1}^n \frac{Q_j}{d_{ji}^2}$$

Mas K_0 , a constante eletrostática do meio é dada por

$$K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

Sendo assim, podemos escrever a equação do princípio da superposição como:

$$F_{res} = \frac{Q_i}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i \neq j \rightarrow j=1}^n \frac{Q_j}{d_{ji}^2}$$

O entendimento do princípio da superposição é muito importante para o entendimento dos processos eletromagnéticos que iremos estudar mais adiante.

Em eletricidade, o ente “carga elétrica” é o elemento fundamental. Entretanto, com exceção de análises teóricas, ele não é analisado individualmente. Normalmente, o comportamento do fluxo de cargas elétricas é analisado em condutores e componentes elétricos e eletrônicos.

Vamos analisar o comportamento do campo elétrico no principal elemento utilizado em eletricidade, o condutor.

Qualquer material condutor é caracterizado por ter um chamado “elétron livre” que nada mais é que um elétron na última camada de valência.

No caso, dos átomos que compõe o material condutor, os elétrons situados na última camada de valência necessitam pouca energia para serem retiradas do átomo.

Um condutor em equilíbrio eletrostático quando não há um movimento organizado de cargas. Isso pode ocorrer mesmo quando o condutor está submetido a um campo elétrico externo.

Em um condutor em equilíbrio eletrostático, tem em seu interior, um campo elétrico nulo.

A existência de um campo elétrico no interior de um condutor significa a existência de um fluxo organizado de cargas. Esse fluxo organizado de cargas surge com a finalidade de anular o campo elétrico interno.

Um condutor submetido a um campo elétrico externo, tem suas cargas livres reorganizadas de tal forma a anular o campo elétrico que surge no interior do condutor.

Por sua vez, a orientação dessas cargas, faz surgir um campo elétrico de intensidade igual e sentido oposto ao campo elétrico externo.

Utilizando o princípio da superposição, na região interna do condutor os campos são somados vetorialmente e o resultado é um campo nulo.

Como o campo elétrico no interior do condutor é nulo, significa que a diferença de potencial elétrico entre a superfície e o volume do condutor também é nulo.

Em um condutor que se encontra em equilíbrio eletrostático o campo elétrico é perpendicular a superfície do condutor. Essa condição é

importante por que, caso o campo não fosse perpendicular à superfície seria possível decompor esse campo em dois vetores, um deles perpendicular à superfície e outro paralelo a ela. Essa componente paralela seria responsável pelo surgimento de um movimento de cargas elétricas no condutor, desfazendo a condição de equilíbrio eletrostático.

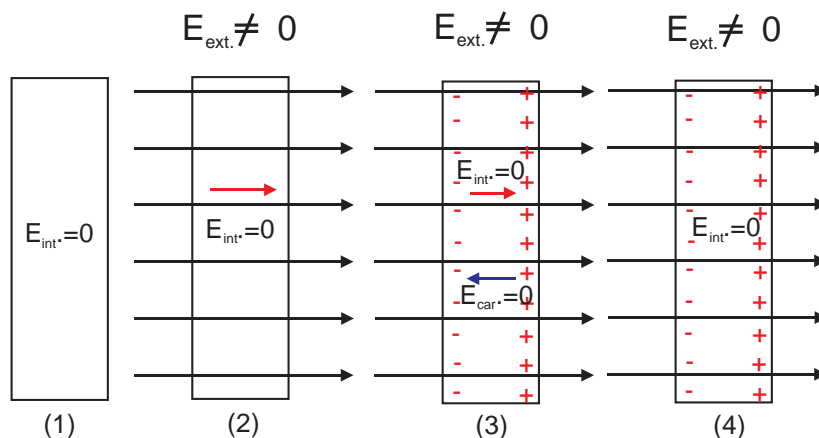


Figura 32 - (1) Condutor em equilíbrio eletrostático; (2) Condutor atravessado por campo elétrico externo; (3) Reorganização das cargas com surgimento de um campo contrário; (4) equilíbrio eletrostático atingido pela equiparação dos campos externo e interno.

2.1.8 - Comportamento de condutores e isolantes submetidos a um campo elétrico

2.1.8.a Condutores

Alguns materiais como o cobre, o ouro, o alumínio e o ferro, possuem a característica de possuir elétrons situados nas suas últimas camadas de valência. Isso significa que o elétron da última camada é mantido no átomo por uma força de atração baixa. Isso significa que o elétron está ligado ao átomo de maneira tênue e, portanto, uma pequena quantidade de energia é capaz de fazer esse elétron migrar de um átomo para outro. Essa característica é uma peculiaridade dos materiais que chamamos de condutores. Esses materiais apresentam, caracteristicamente, 1, 2 ou 3 elétrons na sua camada de valência.

Na tabela periódica esses materiais se encontram no centro da mesma e são conhecidos como *metais de transição*. O nome transição é, de certo modo, bem apropriado, pois esses elementos dividem os elementos metálicos que ficam à esquerda da tabela e os materiais não metálicos, que ficam à direita.

Segundo a União Internacional de Química Pura e Aplicada, os metais de transição são “elementos cujo átomo possui um subnível d incompleto ou que possam vir a formar cátions com um subnível d incompleto. A maioria desses elementos possui características semelhantes aos metais, tais como, boa condutibilidade térmica e elétrica e brilho. O ponto de fusão e

a dureza variam entre os materiais dessa categoria, entretanto, todos possuem maior dureza, ponto de fusão e ponto de ebulição, maiores que os metais alcalinos e que os metais alcalino-terrosos.

2.1.8.b Isolantes

Um segundo grupo de materiais, é constituído de elementos que possuem, na sua camada de valência, 5, 6, 7 ou 8 elétrons. Isso caracteriza um conjunto de materiais que necessitam de valores, as vezes astronômicos (depende do material), de energia para que um elétron de sua camada de valência possa se deslocar para outro átomo.

Esses materiais são conhecidos como isolantes ou dielétricos. Quando aplicamos um campo elétrico à um material dielétrico, este se polariza. Essa polarização, diferentemente dos condutores não provoca a liberação dos elétrons da camada de valência mas surgem momentos de dipolos. O somatório desses dipolos origina a polarização do material, tanto interna quanto externamente.

2.1.8.c Semicondutores

O terceiro grupo de materiais que nos interessa em eletricidade e magnetismo é o conjunto de elementos que possuem 4 elétrons em sua camada de valência. Esses materiais, dependendo de uma série de condições, podem se comportar como isolantes ou então como condutores.

2.1.8.d Outros parâmetros de caracterização

Nem só o número de elétrons da camada de valência caracteriza o comportamento elétrico de um material. Determinados materiais, submetidos à condições extremas de temperatura, alteram suas características.

Alguns isolantes, submetidos à altas temperaturas, aumentam sua condutibilidade. Isso ocorre porque, o aumento da temperatura ocasiona um aumento na agitação das moléculas do material. Isso facilita o processo de liberação dos elétrons da camada de valência provocando o surgimento de uma corrente elétrica.

Outros materiais, quando associados sob certas condições de pressão e temperatura e, posteriormente submetido à temperaturas abaixo de zero, tornam-se supercondutores, com valores de resistividade inferiores aos melhores condutores existentes na natureza.

Como já vimos, um material condutor, submetido à um campo elétrico fará surgir em seu interior um campo de sentido contrário ao campo externo.

O surgimento desse campo contrário poderá formar o equilíbrio eletrostático do material.

No caso de materiais isolantes serem mergulhados em um campo elétrico, fará surgir em seu interior um dipolo que se orientará conforme a disposição do campo.

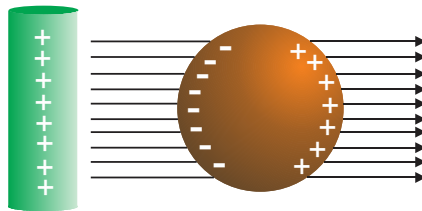


Figura 33 - Condutor atravessado por Campo Elétrico

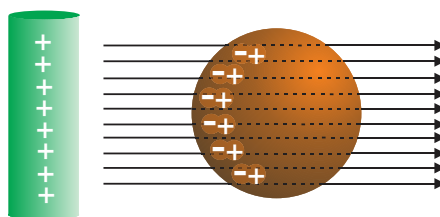


Figura 34 - Isolante atravessado por Campo Elétrico

2.1.9 - Distribuição contínua de carga

Vamos imaginar um corpo ou região do espaço, e dentro desse corpo um ponto P com um vetor posição \vec{r} . Esse vetor é produzido por uma carga distribuída de forma contínua dentro de uma determinada região do espaço.

Dividindo essa região em n subdivisões, tão pequenas que possam ser consideradas cargas pontuais. Se o vetor posição de cada uma dessas cargas for denominado de \vec{r}' e a carga pontual $\Delta q'$, então, o vetor que tem origem no ponto de carga analisado, indo até o ponto P, terá seu módulo e sentido dados por $\vec{r}_i \equiv \vec{r} - \vec{r}'$ e a sua direção, ou versor, será dada por:

$$\hat{r}_i = \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

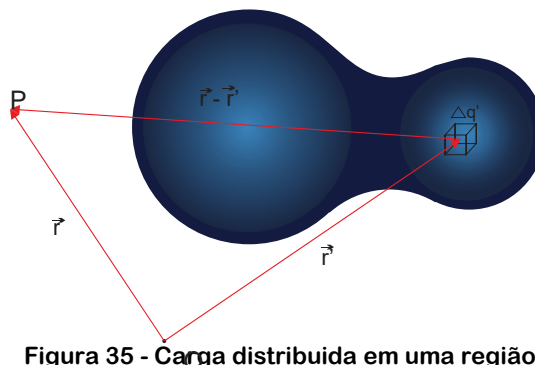


Figura 35 - Carga distribuída em uma região

Utilizando a equação do campo para uma carga pontual, obteremos a equação do campo para uma carga distribuída.

$$\vec{E} \approx \sum_{i=1}^n \frac{k\Delta q'}{r_i^2} \hat{r}_i = k \sum_{i=1}^n \frac{\Delta q'(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

Quando o limite tende a ∞ , ou seja $n \rightarrow \infty$, a aproximação da fórmula acima torna-se exata de tal forma que torna todas as cargas $\Delta q'$ infinitesimalmente pequena (dq') e a soma nesse limite é definido pela integral.

$$\vec{E} = k \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\Delta q'(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = k \int_{Região} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dq'$$

Essa integral pode ser utilizada em uma linha, uma superfície ou um volume dependendo da forma como a carga é distribuída.

Vamos analisar cada um dos três casos para determinar o comportamento do campo.

2.1.9 a – Carga distribuída em uma linha

Nesse tipo de situação a carga diferencial dq' em um fio no espaço entre (r') e $(r' + dr')$ é diretamente proporcional ao comprimento ds' , sendo assim:

$$dq' = \lambda(\vec{r}') ds'$$

Nesse caso, o elemento $\lambda(\vec{r}')$ é uma função que depende da posição do fio que recebe a denominação de *carga linear*. Essa carga linear é igual a carga por unidade de comprimento do fio.

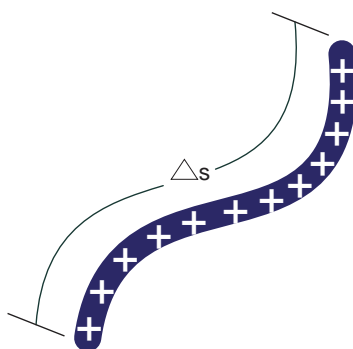


Figura 36 - Carga distribuída em uma linha

A equação vetorial de uma curva contínua é dada por uma expressão para \vec{r}' que é uma função de um parâmetro real u . Esse parâmetro determina a posição dos pontos da curva.

Para cada valor atribuído ao parâmetro u é determinada a posição de um ponto da curva. Esse valor pode ser um ângulo, um comprimento ou um instante de tempo.

Como esse parâmetro u sofre um incremento infinitesimal, isso gera, no vetor \vec{r} , também um incremento $d\vec{r}$. O comprimento infinitesimal ds , é igual ao módulo do vetor $d\vec{r}$.

Para determinar o valor da carga distribuída, aplicamos a integral de linha ao longo do curso C para a fórmula geral do campo. Não esqueça que a integral de linha nada mais é que uma integral para uma só variável.

$$\vec{E} \approx k \int_C \lambda(\vec{r}') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} ds'$$

Se observarmos a equação acima, veremos que não há uma igualdade ($=$), mas sim uma aproximação (\approx). Isso ocorre porque um fio, não é apenas uma curva, mas sim o sólido extremamente fino na sua relação entre espessura e comprimento. Desse modo, quanto menor for a secção transversal desse condutor, mais próximo da igualdade ficará a expressão.

Em um condutor qualquer, na realidade, existem vários caminhos possíveis para a análise do percurso da corrente. Desse modo, costumamos utilizar o percurso médio para o cálculo da integral.

2.1.9.b Carga distribuída em uma superfície

Vamos imaginar agora uma lâmina extremamente delgada. Para a determinação da carga distribuída nessa lâmina utilizaremos a integral de superfície.

A integral de superfície é uma integral dupla, ou seja, é uma integração de duas variáveis.

Para esses casos a carga infinitesimal dq' em uma determinada região da lâmina estará relacionada com uma chamada *carga de superfície* σ . Desse modo :

$$dq' = \sigma(r')dA'$$

Nesse caso dA' é o elemento diferencial da área da região²⁵. O elemento $\sigma(r')$ é a carga por unidade de superfície em uma posição r sobre a lâmina analisada.

Para esse caso, aplicaremos uma integral dupla à equação geral do carga distribuída e teremos.

$$\vec{E} \approx k \iint_S \sigma(r') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dA'$$

Assim como na linha, cujo valor é aproximado, para a superfície o mesmo raciocínio é válido, nesse caso porque não existe uma superfície com espessura zero. Na verdade as lâminas reais, por mais finas que seja, ainda ocupam um volume, sendo necessário determinar um caminho médio para toda a superfície da lâmina.



Figura 37 - Carga distribuída em uma superfície

Note que exemplificamos na nota de rodapé sobre uma integral dupla que ela seria a integração nos eixos x e y , entretanto, esses eixos poderão ser quaisquer dois que definam a superfície.

Nesse caso, a equação vetorial de uma expressão para o vetor posição \vec{r}' , será dada em função de dois parâmetros reais, u e v . Sendo assim, o elemento diferencial da superfície, dada por dA' , será igual a área da superfície que é descrita pelo vetor \vec{r}' quando esse o parâmetro u é incrementado de du e o parâmetro v é incrementado de dv .

Na maioria dos casos (superfícies planas), os parâmetros u e v são substituídos pelos eixos cartesianos, x e y . Entretanto, em alguns casos é mais interessante utilizarmos a notação polar, com r e θ .

2.1.9.c Carga distribuída em um volume

Na verdade, esse é o caso mais comum dos três analisados. Isso por que, na realidade, todos os objetos que analisamos são volumétricos, por menor que sejam algumas de suas dimensões. Esse é o motivo pelo qual

²⁵ dA' é o resultado de um elemento diferencial composto por $dX' \times dY'$

nos dois casos anteriores, as equações são uma aproximação da realidade.

No caso de volumes, a carga infinitesimal distribuída em um volume infinitesimal da sub-região analisada será dada por:

$$dq' = \rho(r')dx'dy'dz'$$

Nesse caso, o elemento $\rho(r')$, é denominado de *carga volumétrica* no ponto dado pelo vetor \vec{r}' , representando a carga distribuída por unidade de volume.

Por analogia, podemos dizer que nesse caso, a integral será tripla, ou seja:

$$dq' = k \iiint_V \rho(r') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dx'dy'dz'$$

Onde V é o volume onde a carga está.

Nos casos onde existe uma simetria na forma como a carga está distribuída no espaço, a solução analítica dessa integral tripla é mais simples. Nos demais casos, lançamos mão de outros métodos que tornam a solução dessas integrais triplas mais simples do que o processo analítico convencional.

Esses métodos são chamados métodos numéricos de solução de integrais triplas e podem ser: o método de Newton-Coates, o método da Quadratura de Gauss; e o método das Integrais Impróprias.

Normalmente esses métodos requerem soluções computacionais pois são todas recursivas.

2.2 FLUXO ELÉTRICO

2.2.1 - O que é Fluxo Elétrico?

Sempre que trabalhamos com distribuições contínuas de cargas e essa distribuição possui uma simetria plana, esférica ou cilíndrica, podemos determinar a expressão do campo elétrico aplicando a lei de Gauss.

Para explicarmos a lei da Gauss é preciso entender o conceito de fluxo elétrico.

Para entender o conceito de Fluxo Elétrico vamos imaginar uma superfície que se encontra perpendicular às linhas de um campo elétrico. Consideremos também que o módulo do campo seja constante em todos os pontos dessa superfície.

Podemos definir Fluxo Elétrico como sendo o produto do módulo do campo e a área da superfície. De uma forma simplificada, podemos dizer que o fluxo elétrico indica o número de linhas de força que cruzam uma superfície por unidade de área.

$$\Psi = E \cdot A$$

Existem casos em que a superfície é perpendicular às linhas de campo, mas seu módulo não é constante em toda essa superfície, a forma de resolução desse tipo de problema consiste em dividir essa superfície em várias subdivisões com áreas significativamente pequenas para que o módulo do campo seja considerado constante em cada subdivisão. Nesse caso específico, o fluxo elétrico é o resultado da soma de todos os fluxos de cada uma das subdivisões da superfície analisada.

$$\Psi \approx \sum_{i=1}^n E_i \Delta A_i$$

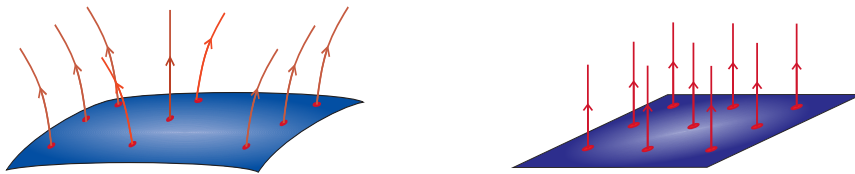


Figura 38 - Representação de duas superfícies perpendiculares às linhas de campo

Para melhor entendermos fluxo elétrico podemos traçar um paralelo com o comportamento de um fluido. O fluxo elétrico pode ser comparado a vazão.

Vazão pode ser definida como o volume de um fluido que passa por unidade de tempo em uma determinada secção. Por analogia o volume que é definido pelas linhas de campo que passam por uma determinada secção. Esse volume é denominado *tubo de fluxo*. Assim como em um fluido, se essas linhas de campo é incompressível e não existe nenhum ponto de entrada e saída de fluxo, então esse fluxo em todas as secções transversais do tubo é o mesmo, independente se esse tubo faz curvas ou inclinações.

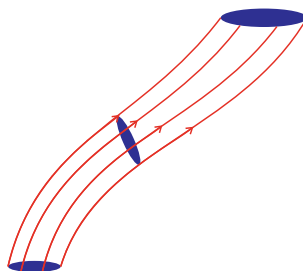


Figura 39 - Tubo de fluxo e o fluxo é igual em todas as secções

Dependendo da forma do volume analisado, podem existir subsecções onde as linhas de campo não são perpendiculares. Desse modo, elas formam um ângulo θ_i em relação ao vetor \hat{n}_i normal a superfície. O fluxo através da área ΔA_i é igual ao fluxo através da projeção dessa área perpendicular às linhas de campo, isto é, através de uma superfície horizontal, conforme mostra a figura. Podemos fazer isso porque a superfície A_i e a superfície horizontal fazem parte do mesmo tubo de fluxo que é formado pelas linhas de campo que passam pelas fronteiras das duas superfícies.

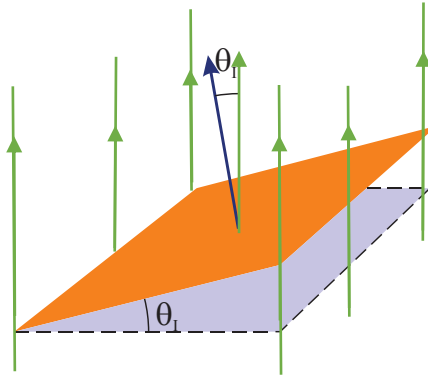


Figura 40 - Versor normal \hat{n}_i (azul) a uma superfície e projeção da superfície no plano perpendicular às linhas de campo

A área da superfície horizontal é $\Delta A_i \cos \theta_i$ que é perpendicular às linhas de campo. Se aplicarmos a equação de Ψ , anteriormente apresentada, é

$$\Delta \Psi_i = E_i \cos \theta_i \Delta A_i$$

Desse modo, o fluxo total numa superfície qualquer que não seja perpendicular às linhas de campo é dada por:

$$\Psi \approx \sum_{i=1}^n E_i \cos \theta_i \Delta A_i$$

O vetor ΔA_i é definido na direção e no sentido do versor \hat{n}_i que é normal à superfície. Seu módulo é igual a área da superfície ΔA_i .

Desse modo, podemos dizer que o produto $E_i \cos \theta_i \Delta A_i$ é igual ao produto escalar $E_i \cdot \Delta A_i$. Como sempre, a aproximação desse valor se torna mais exata conforme os limites das sub-regiões são infinitesimalmente pequenas e se aproximam de zero. Desse modo o somatório é convertido em uma integral. Para isso convertemos a expressão $\vec{E}_i \cdot \Delta A_i$ na expressão $\vec{E}' \cdot d\vec{A}'$, onde A' indica que os vetores são calculados sobre os pontos da superfície.

$$\Psi = \iint_S \vec{E}' \cdot d\vec{A}'$$

Lembre-se que a integral é dupla porquê dA' depende das duas variáveis em cada um dos eixos que delimitam a área da superfície analisada.

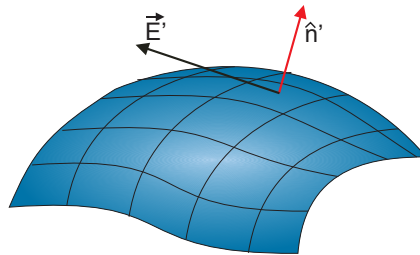


Figura 41 - Campo elétrico e vetor infinitesimal de área numa superfície

Em cada ponto dessa superfície é possível definir o vetor dA' em dois sentidos opostos e normal à superfície. O sentido escolhido determinará o sentido do fluxo calculado pela integral. O valor absoluto desse vetor é o mesmo em ambos os sentidos, mas com sinais diferentes.

Para o caso de superfícies fechadas, é normal definirmos o vetor dA' apontando para fora da superfície. Desse modo, se o fluxo calculado for positivo, será para fora da superfície e se for negativo ele será para dentro da superfície.

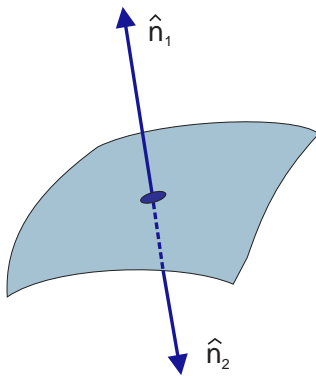


Figura 43 - Superfície com dois vetores normais

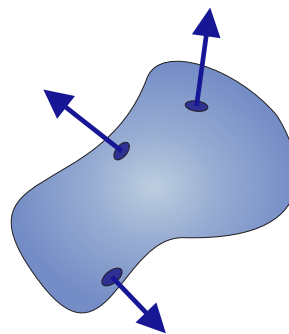


Figura 42 - Superfícies fechadas escolhemos os vetores apontando para fora

Podemos solucionar a integral dupla é interessante parametrizar a superfície S com dois parâmetros u' e v' do tipo:

$$S = \{ \vec{r}'(u', v'); u' \text{ e } v' \text{ parâmetros reais} \}$$

Para que seja mais fácil o entendimento do que foi escrito acima, vamos imaginar se a superfície fosse dada pelo plano $z' = 5x' + 4y'$, uma possível equação parametrizada desse plano seria dado por:

$$\vec{r} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + (5x' + 4y')\vec{k}$$

E essa equação fica em função de x' e y' .

Os parâmetros reais que definem uma superfície correspondem aos pontos em uma região no plano. Na figura abaixo podemos verificar que os dois parâmetros são as próprias variáveis x' e y' , e os valores que esses parâmetros podem assumir correspondem ao retângulo T' no plano xy .

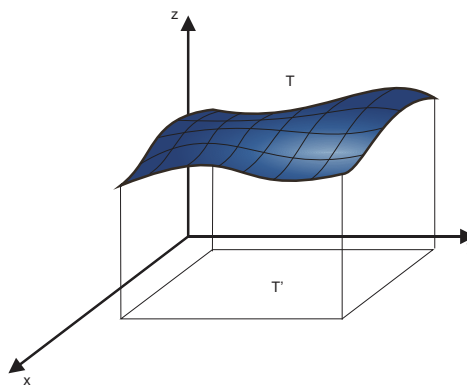


Figura 44 - Superfície com domínio no retângulo T' do plano xy

Aumentos infinitesimais dx' e dy' , no retângulo T' são projetados na superfície T , formando uma pequena região na superfície com a área dA' . Nesse limite infinitesimal, dA' é a área do paralelepípedo formado pelos vetores:

$$d\vec{r}'_x = \frac{\partial \vec{r}'}{\partial x'} dx' \quad d\vec{r}'_y = \frac{\partial \vec{r}'}{\partial y'} dy'$$

a expressão $\partial \vec{r}' / \partial x'$ é uma derivada parcial, ou seja, é uma função em x e y que só é derivada em função da variável x , e é um vetor que determina o aumento da função \vec{r}' , devido ao aumento unitário da variável x' . Da mesma forma a expressão $\partial \vec{r}' / \partial y'$ determina o aumento de \vec{r}' devido ao aumento unitário da variável y' .

O produto vetorial dos vetores será um vetor direção normal à superfície, versor \hat{n} , e de módulo igual a área do paralelepípedo, desse modo, a secção infinitesimal $d\vec{A}'$, será igual ao produto vetorial entre esses dois vetores, sendo assim:

$$d\vec{A}' = \left(\frac{\partial \vec{r}'}{\partial x'} \times \frac{\partial \vec{r}'}{\partial y'} \right) dx' dy'$$

2.2.2 - Lei de Gauss

Johann Carl Friedrich Gauss foi um matemático, astrônomo e físico alemão. Suas contribuições para o progresso das Ciências foram muito relevantes. Dentre elas podemos citar a *teoria dos números, estatística, análise matemática, geometria diferencial, geodésia, geofísica, eletrostática, astronomia e óptica*.

Com relação ao fluxo elétrico, a chamada Lei de Gauss, permite uma análise do fluxo elétrico produzido por uma carga pontual em qualquer tipo de situação. Seja o campo uniforme ou não, e para qualquer tipo de superfície fechada. Essas superfícies são conhecidas como superfícies Gaussianas. Apesar disso, essa lei só é operacional e útil em determinadas circunstâncias. Casos onde o produto escalar do campo e do vetor superfície de uma superfície Gaussiana é obtido com facilidade é um exemplo dessas circunstâncias favoráveis.

Isso sempre é possível quando a distribuição de carga apresenta o que podemos chamar de alta simetria. Podemos exemplificar essas simetrias que facilitam a solução de problemas usando a lei de Gauss.

O primeiro exemplo é conhecido como simetria planar. A simetria planar aplica-se a casos de uma distribuição de cargas em um plano infinito ou, em casos similares onde se possa fazer a aproximação de um plano infinito. Essa aproximação ocorre, por exemplo, quando o campo elétrico calculado tiver origem em um ponto muito próximo ao plano. Para isso é necessário que o plano tenha dimensões muitas vezes maior que a distância entre o ponto e o plano.

O segundo exemplo é a simetria cilíndrica, também conhecida como axial, e aplica-se ao caso de uma distribuição linear infinita. Existem dois casos clássicos para esse tipo de simetria: as linhas infinitas de carga e as cargas distribuídas em um cilindro infinito. Do mesmo modo que com o plano infinito, no caso do cilindro infinito, um cilindro de dimensões finitas, pode ser aproximado de um infinito se a distância entre a carga e a superfície do cilindro for muitas vezes maior que o comprimento do cilindro.

Finalmente a simetria esférica é aplicada em análises de cargas puntiforme e distribuição esférica de cargas.

Segundo Gauss, o campo elétrico produzido por uma distribuição de cargas é a sobreposição dos campos produzidos por muitas cargas pontuais. É interessante uma análise do fluxo elétrico que o campo de uma carga pontual produz.

Quando analisamos uma superfície fechada, podemos colocar a carga q , dentro ou fora dessa superfície.

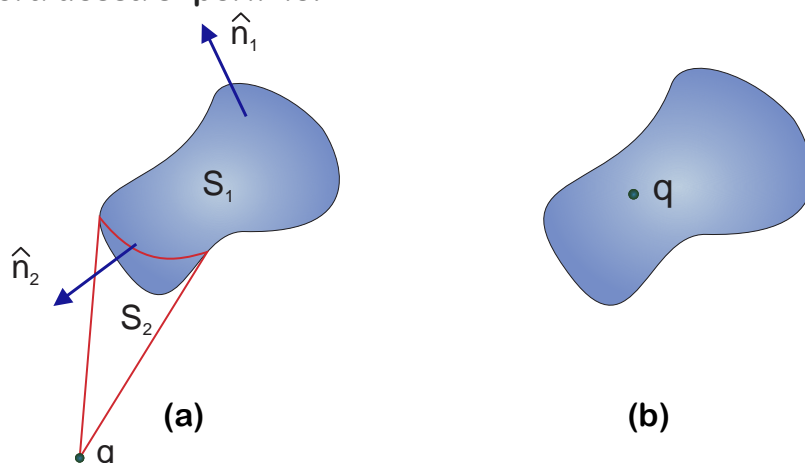


Figura 45 - Carga pontual dentro (a) e fora (b) de uma superfície fechada.

Sempre que a carga está fora da superfície fechada o tubo de fluxo é determinado pelas linhas de campo que são tangentes à superfície. Dividimos a superfície S em duas sub-regiões, S_1 e S_2 , em dois lados da curva por onde passam as linhas de campo tangentes à superfície. Em ambas as superfícies, S_1 e S_2 , o fluxo elétrico é igual. Isso ocorre porque ambas as superfícies fazem parte do mesmo tubo de fluxo. Entretanto, ambos possuem sinais opostos, já que um dos versores aponta para um lado e o outro para o lado oposto.

Se a carga q for positiva, o fluxo entra por S_2 e sai por S_1 ; no caso contrário, ou seja, se a carga q for negativa, o fluxo entra por S_1 e sai por S_2 . Utilizando a análise de Gauss, concluímos que o fluxo elétrico gerado por uma carga pontual, colocada fora de uma superfície fechada, é sempre zero.

Para o caso de cargas colocadas no interior da superfície fechada S , será atravessada por todas as linhas de campo. Uma carga pontual, gera em seu entorno, um fluxo de geometria esférica. Esse fluxo é igual ao fluxo total que atravessa a superfície fechada. Isso ocorre porque a esfera de fluxo e a superfície fechada, fazem parte do mesmo tubo de fluxo.

Considerando que a esfera de fluxo gerada pela carga possui um raio R , o campo elétrico em um ponto qualquer dessa superfície é dada por:

$$\vec{E'} = \frac{kq}{R^2} \hat{r}$$

Como já mencionamos, o fluxo total na superfície fechada S igual ao fluxo na superfície esférica, que é dado por:

$$\Psi_s = \iint_S \vec{E'} \cdot d\vec{A'} = kq \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin \phi \, d\phi \, d\theta = 4\pi kq$$

Na forma da superfície, independentemente do tamanho, será igual a $4\pi kq$, se a carga pontual estiver no interior da superfície fechada. Por convenção o fluxo é direcionado para fora se a carga for positiva e é direcionado para dentro se a carga for negativa.

Como já mencionamos, uma distribuição de cargas pode ser dividida em várias cargas pontuais q_1, q_2, \dots, q_n , desse modo, o fluxo total, através da superfície fechada S , é igual à soma de todos os fluxos individuais produzidos por cada carga.

As cargas colocadas fora da superfície S , conforme já mencionamos, não produzem um fluxo total e cada carga q_i que esteja dentro da superfície fechada produz um fluxo de $4\pi kq_i$.

Desse modo, o fluxo total através da superfície fechada é dada por:

$$\oiint_S \vec{E}' \cdot d\vec{A}' = 4\pi k q_{\text{int}}$$

onde q_{int} é a carga total no interior da superfície S . Essa foi a equação determinada por Gauss e define a Lei de Gauss.

O enunciado dessa lei, determinada por Gauss, diz que:

“O fluxo elétrico através de qualquer superfície fechada é igual ao valor da carga total no interior da superfície, multiplicado por $4\pi k$.”

Podemos escrever a lei de Gauss, de outra forma:

$$\oiint_S \vec{E}' \cdot d\vec{A}' = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

ϵ_0 também é conhecido como permissividade no vácuo²⁶ que é igual a

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi k}$$

O interessante da equação utilizada para determinar a lei de Gauss, é o fato de que a equação $\Psi_s = \oiint_S \vec{E}' \cdot d\vec{A}' = kq \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \phi d\phi d\theta = 4\pi kq$ pode ser utilizada para calcular o fluxo produzido através de uma superfície qualquer que não necessita ser obrigatoriamente fechada.

Para fazermos isso, basta substituirmos os limites das integrais pela expressões que delimitam a superfície S :

²⁶ Permissividade no vácuo $8,85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Nm}^2$

$$\Psi_s = kq \iint_S \sin \phi \, d\phi d\theta = kq\Omega$$

Nesse caso, Ω é o resultado da dupla integral e representa o ângulo sólido, cuja carga pontual se situa no vértice desse ângulo que é delimitado pela superfície S. Para superfícies fechadas em torno desse vértice, o valor máximo do ângulo sólido é igual a 4π .

Quando necessitamos descobrir a carga total dentro de uma região do espaço onde existe um campo elétrico. Os valores dos fluxos calculados na superfície esférica de raio R permitem determinar a carga total no interior da esfera.

Nós já determinamos que a carga no interior da esfera é nula e, portanto, a carga no interior da esfera temos que:

$$q_{int} = \frac{\Psi_s}{4\pi k} = \frac{2R^3}{3k}$$

Desse modo, podemos afirmar que a Lei de Gauss também é útil para calcular o campo elétrico devido a distribuição simétrica das cargas. Para isso é preciso lembrar que para descobrir o campo elétrico significa descobrir que uma superfície imaginária que é fechada (superfície gaussiana) que, por sua vez, passa pelo ponto onde se quer calcular o campo, de tal forma que a componente normal à superfície seja sempre normal e constante.

Sempre que existir uma superfície gaussiana, o fluxo nessa superfície será dada pela equação $\Psi = E \cdot A$ que será substituída na equação $\iint_S \vec{E}' \cdot d\vec{A}' = 4\pi k q_{int}$ o que resulta na equação:

$$E = \frac{4\pi k q_{int}}{A}$$

A é a área total da parte da superfície onde o campo é nulo e tem módulo constante E.

Existem casos em que as superfícies não se comportam como superfícies gaussianas. Nesses casos a lei de Gauss, como já vimos, não consegue ser aplicada. Para que possamos utiliza-la, precisamos analisar essa lei com o princípio da sobreposição e isso nos permite calcular o campo em sistemas que não possuem simetria (plana, cilíndrica ou esférica), mas que podem ser obtidos por sobreposição de sistemas com simetria.

Em outros casos, podemos obter uma expressão aproximada do campo fazendo a substituição da distribuição de carga por uma distribuição idealizada com alguma simetria.

Esse método pode ser utilizado em situações tais como a de estruturas (fios, planos ou sólidos) de dimensões finitas que podem ser substituídos por estruturas infinitas. A expressão obtida para fios, planos ou sólidos infinitos será uma boa aproximação nas regiões próximas ao centro da estrutura analisada e se a distância até essa estrutura fosse muito menor que o comprimento das mesmas.

2.2.3 – A Lei de Gauss e as Distribuições Simétricas

Vamos analisar agora o comportamento da lei de Gauss, nas distribuições simétricas anteriormente comentadas.

2.2.3.a – Distribuição de cargas com simetria esférica

Vamos começar analisando uma esfera sólida isolante de raio R que possua uma densidade volumétrica com carga uniforme ρ e estando carregada com uma carga total Q .

a) Cálculo do campo elétrico fora da esfera ($r > R$)

Em primeiro lugar, vamos analisar o caso de uma carga colocada no centro de uma esfera isolante. Essa carga forma uma superfície gaussiana de raio R e concêntrica com a esfera como podemos ver na figura abaixo.

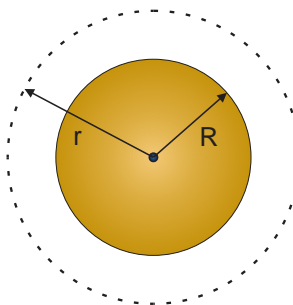


Figura 46 - Campo elétrico com raio superior a superfície esférica

Podemos resolver o problema a partir de duas possíveis simplificações. A primeira o campo \vec{E} é paralelo a $d\vec{A}$ em qualquer ponto da superfície. Na segunda simplificação o módulo do campo \vec{E} é constante, já que depende apenas do raio r . Portanto:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint E \cdot dA = E \oint dA = \frac{q_{in}}{\epsilon_0}$$

$$E \oint dA = E(4\pi r^2) = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Valor igual ao resultado obtido para uma carga puntiforme.

b) Cálculo do campo elétrico no interior da esfera ($r < R$)

Para esse caso vamos selecionar uma superfície gaussiana de estrutura esférica com $r < R$, que é concêntrica com a esfera conforme a figura abaixo.

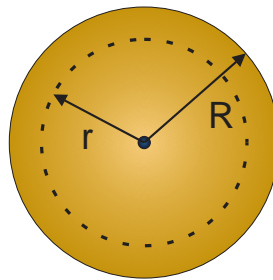


Figura 47 - Campo elétrico com raio inferior ao raio da superfície esférica

Agora iremos utilizar uma superfície gaussiana de formato esférico com um raio r inferior ao raio R da esfera. Denominaremos a esfera menor de V' . Aplicaremos a lei de Gauss levando em conta que a carga interna à superfície gaussiana de volume V' , q_{int} , é menor que a carga total da esfera Q . Nesse caso, para calcularmos q_{int} , e utilizaremos o fato de que $q_{int} = \rho \cdot V$.

$$q_{in} = \rho V' = \rho \left(\frac{4}{3} \pi r^3 \right)$$

Devido a simetria, o módulo do campo elétrico é constante em qualquer ponto na superfície gaussiana e é normal à superfície em cada ponto. Sendo assim, ao usarmos a lei de Gauss teremos:

$$\oint E dA = E \oint dA = E(4\pi r^2) = \frac{q_{in}}{\epsilon_0}$$

Resolvendo a equação para o campo E teremos:

$$E = \frac{q_{\text{int}}}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\rho \left(\frac{4}{3} \pi r^3 \right)}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r$$

Por definição sabemos que $\rho = Q/\frac{4}{3}\pi a^3$, sendo assim a expressão para E será dada por:

$$E = \frac{Q_r}{4\pi\epsilon_0 a^3}$$

2.2.3.b - Campo elétrico devido a uma casca esférica.

Imaginemos agora uma casca esférica de raio R que possui uma carga total Q distribuída de forma uniforme sobre uma superfície externa. Agora vamos determinar o campo elétrico fora e dentro da casca.

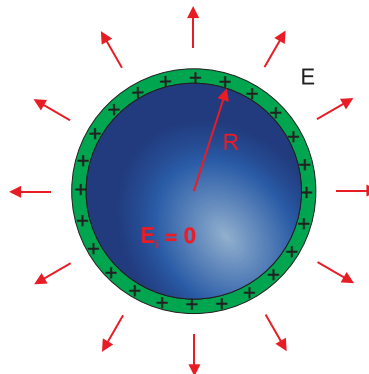


Figura 48 - Carga elétrica em uma esfera oca com carga uniforme $E_{\text{int}} = 0$

a) Cálculo do campo fora da casca esférica ($r > R$)

O cálculo do campo fora da casca é feito de forma idêntica ao que obtivemos na análise da esfera anterior. Adotando uma superfície gaussiana esférica cujo raio r é maior que o raio interno da esfera (R) concêntrica com a casca, sendo a carga interior é Q. Desse modo, o campo em um ponto fora da casca é equivalente àquela relativa a carga pontual Q que está localizada no centro da esfera oca.

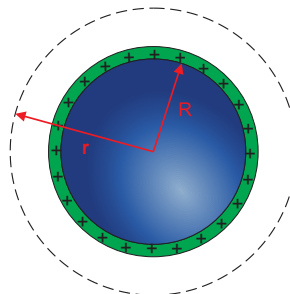


Figura 49 - Superfície gaussiana com raio superior ao raio da esfera oca.

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$$

b) Cálculo do campo dentro da casca esférica ($r < R$)

Nesse caso, conforme mostra a figura 36, o campo no interior da casca é zero. Isso pode ser obtido através da aplicação da lei de Gauss para a superfície esférica. Nesse caso específico, o raio da superfície gaussiana é menor que o raio da casca esférica. Como a carga líquida no interior da casca é zero, a lei de Gauss indica que o valor de $E=0$ para essa situação.

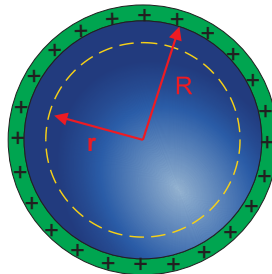


Figura 50 - Superfície gaussiana com raio inferior ao raio da esfera oca.

2.2.3.c – Distribuição de cargas com simetria cilíndrica

Considere uma linha infinita de cargas positivas e densidade de carga linear λ constante. Vamos agora verificar como se calcula o campo elétrico a uma distância r da linha.

Para termos uma simetria na distribuição das cargas é necessário que o vetor E seja perpendicular à linha de cargas e se dirigindo para fora. Se tentarmos refletir essa simetria, utilizaremos uma superfície gaussiana cilíndrica de raio R e comprimento L . O eixo central corresponde ao eixo da linha.

Na região do envoltório (parte curva da superfície) o campo E possui módulo constante e perpendicular à superfície em cada um dos pontos. Os fluxos através das bases superior e inferior são nulos. Isso ocorre porque o campo E é paralelo a essas superfícies.

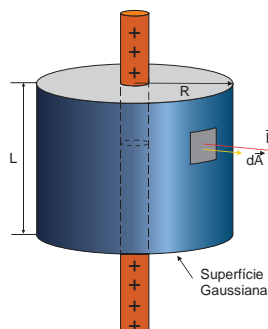


Figura 51 - Linha de carga infinita envolvida por uma superfície gaussiana de simetria cilíndrica

Aplicando a Lei de Gauss sobre essa superfície gaussiana veremos que, como nas bases do cilindro o valor de \vec{E} e de $d\vec{A}$ são iguais a zero, devemos considerar apenas a integral sobre a superfície do cilindro.

A carga total dentro da superfície gaussiana será λL e, aplicando a lei de Gauss, teremos:

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = E \oint dA = EA = \frac{q_i}{\epsilon_0} = \frac{\lambda L}{\epsilon_0}$$

Mas a área da superfície curva é dada por

$$A = 2\pi RL$$

logo

$$E(2\pi RL) = \frac{\lambda L}{\epsilon_0} \rightarrow E = \frac{\lambda L}{\epsilon_0 2\pi RL} \rightarrow E = \frac{\lambda}{2\pi R \epsilon_0}$$

Desse modo o campo elétrico produzido por cargas em uma simetria cilíndrica é inversamente proporcional ao raio ($1/r$). Já no caso de uma distribuição esférica ele é inversamente proporcional ao quadrado do raio ($1/r^2$).

2.2.3.d – Plano infinito não condutor

Para finalizar essa análise vamos verificar o comportamento da lei de Gauss em um plano infinito não condutor. Para isso vamos imaginar que esse plano esteja carregado com cargas positivas que estão distribuídas de forma uniforme sobre a superfície infinita com uma densidade superficial de carga igual a σ .

Se desejamos calcular o campo elétrico a uma distância qualquer do plano, considerando a simetria, então o campo \vec{E} deve ser perpendicular à superfície infinita e deve ser constante em todos os pontos situados a uma mesma distância do plano.

Como se trata de um plano infinito delgado, a direção do campo elétrico produzido por esse plano é para fora do mesmo e para os dois lados do mesmo.

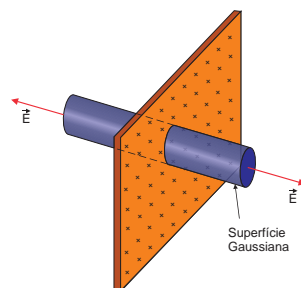


Figura 52 - Superfície gaussiana cilíndrica trespassado um plano infinito de carga.

Podemos ver na figura que a superfície gaussiana que reflete a simetria consiste de um pequeno cilindro cujo eixo central é, como já dissemos, é perpendicular ao plano. As bases desse cilindro possuem uma área A , e são equidistantes ao plano. Como o campo \vec{E} é paralelo à superfície curva do cilindro, o fluxo é zero em toda a superfície. No caso das bases, o fluxo será dado por $E.A$ e desse modo o fluxo total que atravessa toda a superfície gaussiana é a soma do fluxo de cada uma das bases, ou seja

$$\phi_E = 2.E.A$$

Já a carga elétrica total no interior da superfície gaussiana é dada por $q_{\text{int}} = \sigma A$. Se aplicarmos a lei de Gauss teremos:

$$\phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = 2EA = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma A}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

Se você observar, a distância entre as bases da superfície gaussiana cilíndrica não aparece na equação acima. Sendo assim podemos determinar que para esse caso, não interessa a distância do ponto analisado para o plano infinito carregado com densidade superficial de cargas constantes.

2.2.4 – Condutores em equilíbrio eletrostático

Como já vimos, condutores são materiais que possuem elétrons livres em sua camada de valência. Esses elétrons livres são chamados elétrons de condução. Se esses elétrons livres não estão em movimento afirmamos que esse condutor está em equilíbrio eletrostático.

Essa condição somente ocorre se o campo elétrico, em toda a extensão do condutor, é nulo. Isso é necessário pois a existência de um campo elétrico em torno do condutor aceleraria os elétrons livres e o condutor não estaria em equilíbrio.

Um condutor em equilíbrio eletrostático, quando submetido a um campo elétrico externo, tem seus elétrons livres acelerados no sentido contrário do campo. Isso faz com que, em uma extremidade do condutor, ocorra um acúmulo de elétrons, enquanto no lado oposto ocorre um acúmulo de prótons.

Esse excesso de cargas positivas e negativas nas extremidades faz surgir um campo elétrico que, dentro do condutor, tem um sentido oposto ao

campo elétrico fora do condutor. Isso faz com que o campo total dentro do condutor diminua.

Enquanto houver campo elétrico no interior do condutor, haver movimento de cargas nesse condutor, e esse movimento de cargas irá provocar uma redução da carga que, por sua vez, irá reduzir o campo até que o mesmo atinja o valor zero.

No momento em que o campo atinge zero novamente o condutor volta ao equilíbrio eletrostático e, nesse momento, novamente o campo é zero. O valor típico de tempo para condutores normais atingirem esse equilíbrio eletrostático é da ordem de 10^{-9} segundos.

2.2.5 – Comportamento da Carga e do Campo em um Condutor em Equilíbrio Eletrostático.

Anteriormente mencionamos que um condutor em equilíbrio eletrostático tem, obrigatoriamente, o campo elétrico nulo. O fluxo elétrico em uma superfície fechada no interior do condutor, também será nulo. Também sabemos que isso ocorre porque o campo é nulo em todos os pontos do condutor.

A Lei de Gauss, nos afirma que não existe carga no interior de uma superfície fechada onde o fluxo elétrico seja nulo. Obviamente, se isso ocorre, não pode haver carga em qualquer ponto interno do condutor. Como se trata de uma superfície fechada não consideramos os pontos na superfície do condutor. Isso ocorre porque superfícies fechadas que tenham em seu interior, pontos da superfície do condutor, estará externa ao condutor. Sendo assim, os únicos locais onde pode existir carga em um condutor em equilíbrio eletrostático, será a superfície. Qualquer excesso de carga que possa surgir no condutor isolado, deverá ser distribuído sobre a superfície.

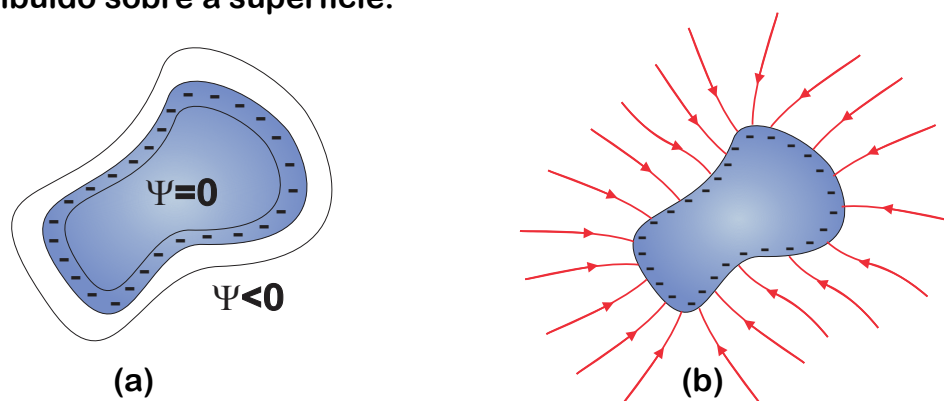


Figura 53 - (a) Condutor isolado com carga; (b) Fluxo em superfícies internas e externas e a direita, linhas de campo

Na figura a vemos que o campo elétrico dentro do condutor em equilíbrio é zero.

Imaginemos que o campo estivesse atuando ao longo da superfície do condutor. Já comentamos que esse campo seria responsável por acelerar os elétrons de condução ao longo da superfície do condutor. Isso seria o suficiente para retirar o condutor do equilíbrio eletrostático.

A componente normal à superfície tem a tendência de “puxar para fora” os elétrons da superfície, ou irá atrair os elétrons para o exterior. Entretanto, como o condutor está isolado, isso é praticamente impossível e o condutor permanecerá em equilíbrio.

Com isso, podemos concluir que o campo elétrico na superfície de um condutor em equilíbrio eletrostático sempre será perpendicular à superfície.

Para que possamos calcular o campo elétrico na superfície de um condutor em equilíbrio, imaginemos um pequeno cilindro de bases paralelas à superfície. Se esse cilindro for pequeno o suficiente, podemos aproxima-lo de uma superfície gaussiana.

Se fizermos isso, só existirá fluxo elétrico na base do cilindro na parte externa do condutor e o fluxo total através da superfície gaussiana será dada pela expressão:

$$\Psi \approx E \Delta A = 4\pi k \Delta q$$

ΔA – é a área da parte da superfície no interior do cilindro;

Δq – é a carga contida na superfície no interior do cilindro.

Quando levamos ΔA tender a zero tornamos a equação exata e podemos escreve-la como:

$$E = 4\pi k \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta A}$$

Na equação acima, o limite é igual a carga superficial. Desse modo, o campo em um ponto da superfície do computador é dado por:

$$\vec{E} = 4\pi k \sigma \hat{n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n}$$

σ - carga superficial

\hat{n} – versor normal para fora do condutor.

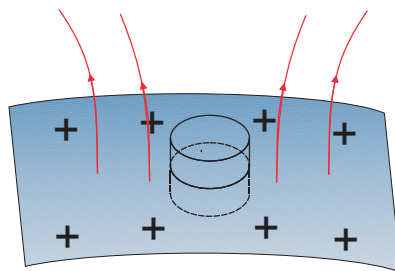


Figura 54 - Representação de uma pequena superfície gaussiana na superfície de um condutor isolado

Como o campo elétrico é perpendicular ao plano da superfície do condutor, as linhas de força são tangentes às laterais do cilindro desse modo, não existe fluxo nessas paredes laterais. Desse modo, só existe fluxo nas duas bases do cilindro da superfície gaussiana. Desse modo, ao aplicarmos esse princípio na equação

$$E = \frac{4\pi k q_{int}}{A}$$

teremos:

$$E = 2\pi k \sigma = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

Podemos ver pela equação acima que o campo da superfície do condutor é o dobro do valor do campo de uma superfície plana infinita.

Na verdade, imaginávamos que uma superfície gaussiana muito próxima do plano da superfície do condutor, seria uma forma de admitir uma ótima aproximação de uma superfície muito extensa, próxima ao infinito.

No caso de superfícies infinitas, um campo em um dado ponto é devido somente a carga que se encontra nesse ponto. Nesse caso, por simetria, podemos dizer que o campo produzido por todas as outras cargas situadas em todos os outros pontos situados no plano, será zero.

No caso do condutor fechado, o campo em um ponto da superfície resulta da sobreposição de todos os campos produzidos pelo ponto em questão adicionado ao campo produzido por todos os outros pontos que estão distribuídos na superfície.

É importante verificar que o campo do ponto deverá ser o mesmo que no caso do plano infinito, mas em sentidos opostos. Nesse caso, o campo que falta para completar o campo total é devido ao restante da superfície.

Mas como o campo total é nulo no interior o campo será $4k$ no exterior. O campo produzido pela superfície, sem incluir o ponto P será igual a $2k$ em ambos os lados da superfície e com o mesmo sentido.

O campo $2k$ que é produzido pela superfície atua sobre a carga local no ponto P, produz uma força para fora da superfície. Esse campo não inclui o próprio ponto.

$$dF = 2\pi k\sigma^2 dA$$

O sentido dessa força será sempre nesse sentido independente do sinal da carga superficial σ .

2.3 POTÊNCIAL, TRABALHO e ENERGIA POTÊNCIAL ELETROSTÁTICA

2.3.1 - Histórico

Luigi Galvani, médico, investigador, físico e filósofo italiano, em seus experimentos sobre bioeletricidade deduziu que a eletricidade, ou melhor, a corrente elétrica, se originava nos seres vivos. Em 1780, Alexandre Volta demonstrou que, ao contrário do que pensava Galvani, a corrente tinha origem através do contato de dois metais diferentes em um meio ionizado. A partir dessa descoberta, Volta desenvolveu e construiu a primeira pilha elétrica. Essa sua descoberta deu origem ao estudo da eletricidade e dos circuitos elétricos.

Nas décadas seguintes as descobertas de Volta, favoreceram o desenvolvimento da teoria eletromagnética. Dentre as suas descobertas ele também conseguiu isolar o gás metano e desenvolveu um aparelho capaz de produzir cargas elétricas por atrito, o eletróforo.

Nesse capítulo vamos estudar os efeitos de campos elétricos nas cargas elétricas.

2.3.2 - Trabalho e energia

Na Física newtoniana o problema fundamental da área conhecida como mecânica é determinar, a partir das forças que atuam em um corpo, a trajetória do mesmo. Podemos também determinar as forças que atuam sobre um corpo a partir das trajetórias dos corpos.

Trajetoória é um fenômeno físico, que é representado por uma grandeza vetorial. Isso significa que ele possui uma intensidade e uma direção e é representado em função do tempo. De acordo com a Segunda Lei de Newton:

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = m \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}$$

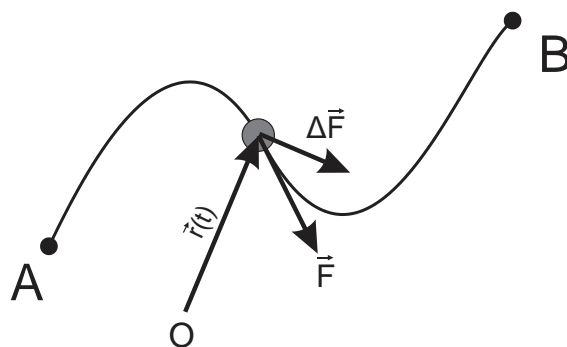
Essa equação será fácil de integrar se a força for constante, ou se só depender do tempo.

No caso de campos de força, \vec{F} será função da posição e a forma usual de resolver esse tipo de problema, consiste em calcular primeiramente a velocidade em função da posição. Primeiro iremos integrar os dois lados da equação, em função do deslocamento vetorial $d\vec{r}$, ao longo de um percurso qualquer entre A e B.

$$\int_A^B \vec{F} d\vec{r} = m \int_A^B \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r}$$

Vamos analisar o lado direito da equação. Ela pode ser escrita em função da velocidade, sendo assim podemos dizer que:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{v} \cdot \Delta\vec{r}}{\Delta t} = \vec{v} d\vec{v} = \frac{1}{2} d(v^2)$$



Com isso, podemos calcular a integral de linha de \vec{F} em função da velocidade escalar v .

$$\int_A^B \vec{F} d\vec{r} = m \int_A^B \vec{v} d\vec{v} = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 \quad (\text{a})$$

e define o **trabalho** entre os pontos A e B.

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} d\vec{r} \text{ (b)}$$

Sabendo que a **energia cinética** é definida por

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

Considerando também as equações (a) e (b) teremos o chamado **teorema do trabalho e da energia**

$$W_{AB} = E_k(B) - E_k(A)$$

Podemos dizer que o trabalho realizado por uma força sobre uma partícula ao longo de uma trajetória qualquer, é igual ao aumento da energia cinética da partícula.

Como o trabalho da partícula independe da trajetória que ela toma dizemos que a força é **conservativa**. Sendo assim é possível definir uma função E_p em cada um dos pontos do espaço. Para fazer isso, em primeiro lugar, definimos aleatoriamente um E_p em um ponto A, $E_p(A)$; para definirmos o valor de E_p em um ponto B qualquer, devemos definir o trabalho realizado pela força entre os pontos A e B, logo:

$$E_p(A) - E_p(B) = W_{AB} \text{ (c)}$$

Como o trabalho não depende da trajetória, o valor de $E_p(B)$ é consistente e a função E_p é a **energia potencial** que está associada a força conservativa. Quando combinamos as equações b e c teremos a **lei de conservação de energia mecânica**.

$$E_k(A) + E_p(A) = E_k(B) + E_p(B)$$

2.3.3 Diferença de potencial eletrostático

Como já mencionamos o trabalho realizado por um campo elétrico sobre uma carga pontual é independente da trajetória que ela percorra. Isso corrobora a afirmação de que o campo elétrico é um campo conservativo.

Mas não basta isso para termos essa certeza, sendo assim vamos provar tal afirmação.

Vamos começar analisando um campo elétrico que tem origem em uma carga pontual, o mais simples de todos os campos elétricos.

O campo elétrico produzido por uma única carga elétrica é dado pela equação:

$$\vec{E} \cdot \Delta \vec{r} = \frac{kq}{r^2} (\hat{r} \Delta \vec{r})$$

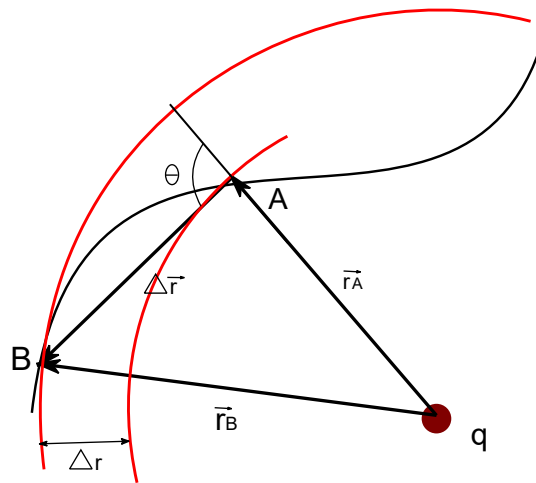


Figura 55 - Representação do deslocamento de uma partícula em uma trajetória qualquer

Se observarmos a figura acima veremos que o ângulo θ é formado pelo deslocamento $\Delta \vec{r}$ e o vetor \hat{r} . Se observarmos veremos que $\hat{r} \cdot \Delta \vec{r} = |\Delta \vec{r}| \cos \theta$ é aproximadamente igual a Δr . Desse modo, para o limite $\Delta s \rightarrow 0$ teremos

$$\hat{r} \cdot \Delta \vec{r} = dr$$

Sendo assim, o trabalho realizado pela força elétrica sobre uma carga de prova q_0 será igual a:

$$W_{AB} = q_0 \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r} = kq_0q \int_A^B \frac{dr}{r^2} = kq_0q \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right)$$

Podemos ver que esse resultado não depende da trajetória, já que ela só necessita das posições dos pontos A e B. Isso resulta no fato de que o

campo elétrico que é produzido por uma carga pontual é, portanto, conservativo.

Agora analisemos a condição de uma distribuição mais complexa de cargas. É fácil verificar que podemos adotar uma simplificação considerando que se trata de uma soma de pequenas cargas pontuais. Desse modo, é fácil entender que o resultado obtido para uma carga pontual pode ser extrapolado para casos mais complexos. Assim, o campo elétrico produzido por uma distribuição de cargas elétricas também é um campo conservativo.

Considerando que o campo elétrico é conservativo, podemos definir a energia potencial elétrica de uma partícula pontual é definido pela equação

$$E_p(A) - E_p(B) = q_0 \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

Podemos definir **potencial elétrico** como sendo a energia potencial elétrica por unidade de carga, ou seja:

$$V = \frac{E_p}{q_0}$$

Desse modo, qualquer que seja a carga de prova, a diferença de potencial elétrico entre dois pontos, A e B, será dado por:

$$V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

No sistema internacional a unidade de potencial elétrico é o **volt (V)**. Como o potencial é definido como uma energia por unidade de carga, a relação entre o volt, o joule e o coulomb será dada por:

$$1V = 1 \frac{J}{C} = 1 \frac{N \cdot m}{C}$$

Podemos utilizar outra unidade de energia, essa unidade é o **eletro-volt (eV)**, que é definido como a energia que é adquirida por uma carga

elementar e quando essa passa por uma região onde existe uma diferença de potencial de $1V$, ou seja:

$$1eV = 1,6 \times 10^{-19} C \cdot V = 1,6 \times 10^{-19} J$$

Para um caso de uma partícula pontual, situada na origem, o potencial elétrico é dado por:

$$V = \frac{kq}{r}$$

Nessa equação podemos somar qualquer constante arbitrária e, mesmo assim não iremos contrariar a equação do trabalho. Normalmente consideramos $V = 0$ quando $r \rightarrow \infty$ e, desse modo, não incluímos a constante.

Para podermos deslocar uma carga de prova de um ponto A até um ponto B, sem que haja aceleração devemos aplicar uma força externa igual e oposta a força elétrica. Essa força externa irá realizar um trabalho que, nessas condições é dada por:

$$W_{AB}(\text{externo}) = -W_{AB}(\text{elétrico}) = q_0 V_B - q_0 V_A$$

Nesse caso, se o ponto inicial A está a uma distância infinita, consideramos o potencial $V_A = 0$. Esse valor é dado por definição. V_B será igual ao trabalho que será realizado pela força externa para trazer a carga elétrica $q_0 = 1$ do ponto no infinito até o ponto B.

Sendo assim, o potencial elétrico $V(\vec{r})$ será igual ao trabalho que será feito para trazer uma unidade de carga positiva do infinito até a posição \vec{r} .

O potencial $V(\vec{r})$ constitui um campo escalar, ou seja, cada ponto do espaço existe em um valor numérico (escalar) do potencial.

2.3.4 - Gradiente do potencial elétrico

Como já vimos, a equação $V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r}$ define o potencial elétrico associado a um determinado campo elétrico. Nesse ponto iremos fazer o problema no sentido contrário. Dessa vez, iremos calcular o campo elétrico dado por um determinado potencial elétrico.

A diferença de potencial $\Delta V = V_B - V_A$, gerado entre os pontos A e B será dado pela integral do campo elétrico que será multiplicado por -1.

Sabemos que a integral pode ser calculada independentemente do percurso do ponto A até o ponto B. Para facilitar utilizaremos um caminho igual a um segmento de reta, conforme mostra a figura abaixo.

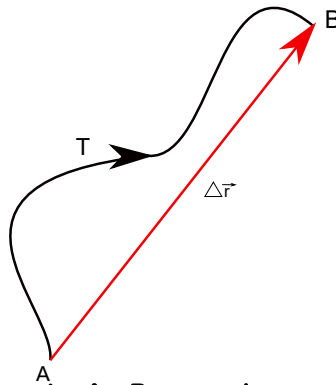


Figura 56 - Percurso entre A e B separados por um deslocamento $\Delta \vec{r}$

Se os pontos A e B estão muito próximos, podemos considerar que o campo elétrico \vec{E} é constante. Desse modo, podemos dizer que a integral é calculada de maneira simples por:

$$\Delta V \approx -\vec{E} \cdot \Delta \vec{r}$$

Onde o $\Delta \vec{r}$ é o deslocamento entre os pontos A e B e o módulo é igual ao deslocamento escalar Δs .

Se levarmos o limite $\Delta s \rightarrow 0$ a aproximação se torna mais exata, ou seja

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta s} = -\vec{E} \cdot \hat{t}$$

Nesse caso, \hat{t} é o versor tangencial a direção e o sentido do deslocamento de $d\vec{r}$. O limite da equação define a derivada direcional de uma função que possui várias variáveis. No nosso caso, a variável é V, na direção que é definida pelo versor \hat{t} . Assim,

$$\frac{dV}{ds} = -\vec{E} \cdot \hat{t}$$

Sendo assim, a derivada do potencial elétrico, em qualquer direção do versor, será igual a componente do campo elétrico nessa direção, multiplicado por -1.

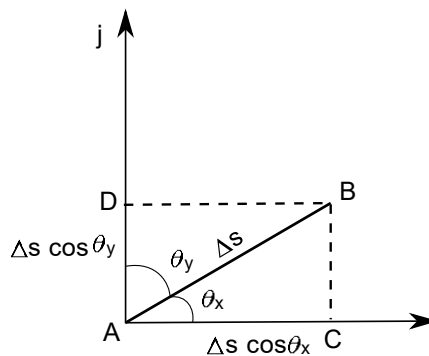


Figura 57 - projeção do deslocamento nos eixos x e y

Vamos considerar que os pontos A e B são coplanares e que o plano que contem esses pontos esteja paralelo ao plano xy. As projeções do deslocamento sobre os eixos x e y serão dadas por $\Delta s \cos \theta_x$ e $\Delta s \cos \theta_y$. Os ângulos θ_x e θ_y são formados pelo versor \hat{t} e os versores \hat{i} e \hat{j} , respectivamente. No gráfico acima podemos ver que o aumento do potencial ΔV , na trajetória de A até B será igual a soma dos aumentos dos potenciais das trajetórias de A até C e de C até B.

Se fizermos o limite de $\Delta S \rightarrow 0$ e considerando que V é uma função contínua, podemos dizer que o aumento de V a partir do ponto C até o ponto B pode ser obtido com a aproximação do aumento do ponto A até o ponto D. Note que os aumentos em V , por unidade de deslocamento, nas direções AD e AC são as derivadas parciais de V em ordem a x e a y respectivamente, ou seja:

$$\Delta V \approx \Delta S \cos \theta_x \frac{\partial V}{\partial x} + \Delta S \cos \theta_y \frac{\partial V}{\partial y}$$

Mas devemos lembrar que:

$$\cos \theta_x = \hat{i} \cdot \hat{t} \text{ e } \cos \theta_y = \hat{j} \cdot \hat{t}$$

e portanto, a derivada na direção do versor \hat{t} será dada por:

$$\frac{dV}{ds} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta S} = \left(\frac{\partial V}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \hat{j} \right) \cdot \hat{t}$$

O interessante dessa equação é o fato de que a mesma pode ser generalizada para o caso de análise em 3 dimensões, na qual obteríamos

$$\frac{dV}{dS} = (\vec{\nabla} V) \cdot \hat{t}$$

E, nesse caso, o vetor gradiente do potencial $\vec{\nabla} V$ será definido como

$$\vec{\nabla} V = \frac{\partial V}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \hat{k}$$

Essa equação permite a obtenção de resultados válidos em qualquer campo escalar. Apesar de definir o gradiente em coordenadas cartesianas, o produto escalar entre o gradiente e o versor de direção,

por ser independente do sistema de coordenadas, faz com que a equação seja válida para qualquer tipo de coordenada.

Vamos analisar especificamente o caso já estudado de um potencial eletrostático. A derivada direcional é igual ao produto escalar entre $-\vec{E}$ e o versor \hat{t} e desse modo temos a relação que permite calcular o campo elétrico a partir do potencial, ou seja

$$-\vec{E} = \vec{\nabla}V$$

Quando o versor \hat{t} estiver na direção do campo elétrico, obteremos o valor máximo do produto escalar de $\vec{E} \cdot \hat{t}$ que, no caso, será igual ao módulo de \vec{E} .

É importante notar que quando temos um potencial V , o campo elétrico será na direção em que o potencial diminuir rapidamente. Já o módulo do campo será igual ao valor absoluto da derivada nessa direção.

A linhas de força de um campo elétrico sempre migram de uma zona de maior potencial para uma zona de menor potencial. Isso significa que uma linha jamais irá retornar a um ponto de potencial superior ao ponto de potencial em que ela se encontra.

Podemos simplificar a representação no sistema de coordenadas cartesianas representadas no sistema de 3 dimensões, fazendo da seguinte forma:

$$E_x = \frac{\partial V}{\partial x} \quad , \quad E_y = \frac{\partial V}{\partial y} \quad , \quad E_z = \frac{\partial V}{\partial z}$$

Sendo de natureza conservativa, o campo elétrico permite uma igualdade entre as derivadas cruzadas. Isso torna muito simples a tarefa de descobrir se um campo vetorial qualquer é conservativo ou não, bastando para isso verificar a igualdade entre as derivadas cruzadas.

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial E_y}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial y}$$

2.3.5 - Linhas de campo e superfícies equipotenciais

Denominamos superfície equipotencial toda superfície em que os pontos formadores possuem um mesmo potencial elétrico. Essas superfícies apresentam duas propriedades importantes.

A primeira refere-se ao fato de que a força elétrica durante o deslocamento de uma carga elétrica puntiforme sobre uma superfície

equipotencial é nula. Já a segunda propriedade diz que as superfícies equipotenciais são perpendiculares às linhas de força ou linhas de campo elétrico \vec{E} , consequentemente, perpendiculares ao vetor campo elétrico \vec{E} .

Existe uma condição particular em que um campo gerado por uma carga puntiforme Q , tem sua simetria que sugere que as superfícies equipotenciais são superfícies esféricas concêntricas na carga Q e as linhas de força do campo são radiais com o centro da carga.

Vamos considerar um deslocamento na direção tangente à superfície equipotencial em um ponto P qualquer. A derivada do potencial nessa direção é nula. Isso ocorre porque o potencial não varia nessa direção.

$$\frac{dV}{dt} = 0$$

Sendo assim, $\vec{E} \cdot \hat{t} = 0$ e, desse modo, as linhas de campo elétrico são perpendiculares às superfícies equipotenciais. As linhas de campo apontarão para o lado da superfície equipotencial com menor potencial.

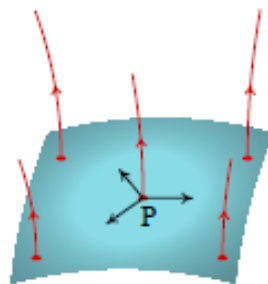


Figura 58 - superfície equipotencial

Como podemos ver na figura acima uma todas as linhas de campo que passam por uma determinada área de uma superfície, possuem, nos pontos de contato com essa superfície, o mesmo potencial.

O potencial $V(x,y)$, que se situa no plano xy , pode ser visualizado de forma gráfica. Nessa representação, o valor de V estará situado no eixo z em um sistema de coordenadas xyz . Podemos notar no gráfico que a curva resultante tem uma forte semelhança com uma superfície geográfica onde surgem montanhas e vales.

Assim como nas representações topográficas, as curvas correspondentes a um determinado nível são equipotenciais, as linhas de campo são as trajetória que a água seguiria descendo pelas montanhas.

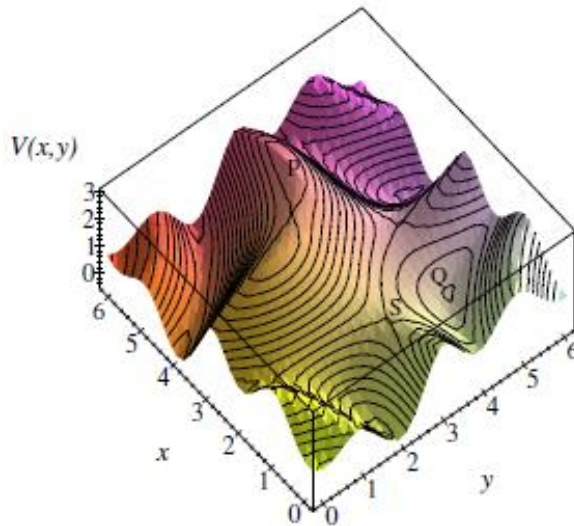


Figura 59 - representação das superfícies equipotenciais em um sistema xyz

O local nesse espaço onde a derivada em qualquer direção é nula (máximos e mínimos), é considerado ponto crítico do potencial $V(x,y,z)$ e nesses pontos o potencial elétrico é zero.

É importante entender que, em todos os pontos onde tivermos máximos ou mínimos ocorre um efeito interessante. Nos pontos de máximo, qualquer que seja a direção escolhida, o potencial elétrico irá diminuir. Por outro lado, nos pontos de mínimo, em qualquer direção o potencial irá aumentar. Como consequência disso, nos pontos de máximo as linhas de força apontam em uma direção que “sai” do ponto, enquanto que os potenciais de mínimo, tem suas linhas de força apontando em direção a carga.

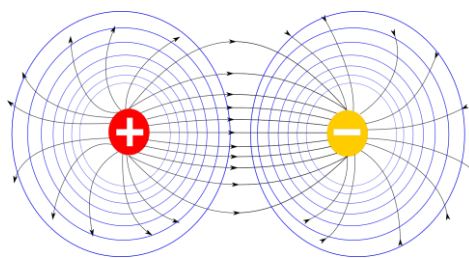
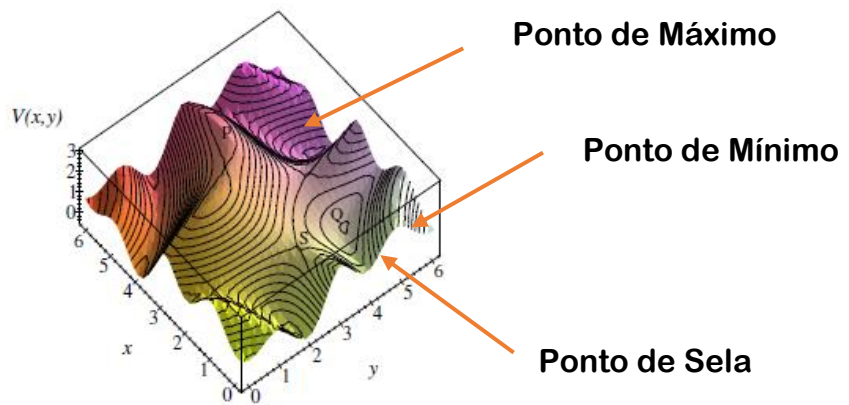


Figura 60 - Linhas equipotenciais e linhas de campo em um dipolo

Existe um terceiro ponto importante nas linhas equipotenciais, além dos pontos de máximo e mínimo, são os pontos conhecidos como pontos de sela. Nesses pontos de sela as curvas potenciais aumentam em algumas direções e diminuem em outras.



Também é possível encontrarmos regiões onde o campo elétrico seja nulo e, nesse caso, o potencial é constante em toda a região. Esses casos ocorrem, por exemplo, dentro de condutores em equilíbrio eletrostático, e ocorrem nos chamados volumes equipotenciais.

2.3.6 - Como calcular o potencial elétrico?

Se considerarmos que uma distribuição de cargas nada mais é do que um conjunto de cargas elétricas para calcular o potencial elétrico, podemos dividir esse conjunto em n pequenas cargas Δq_i . Desse modo calculamos o potencial utilizando a sobreposição dos potenciais produzidos por cada elemento que, nesse caso é considerado como uma carga pontual. Já sabemos que o potencial que cada carga produz é dado pela equação,

$$V = \frac{kq}{r}$$

entretanto esse valor não é exato, mas esse valor pode se aproximar da exatidão quando levamos o limite $n \rightarrow \infty$, desse modo $\Delta q_i \rightarrow 0$ e, desse modo a equação será:

$$V = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{k\Delta q_i}{\vec{r}_i}$$

Δq_i é a carga existente dentro de cada elemento i

\vec{r}_i é o vetor que une o ponto onde se encontra a carga Δq_i até o ponto onde se pretende calcular o campo.

Como já sabemos, no caso do campo elétrico, a carga pode ser distribuída em um volume com a carga volumétrica ρ sobre uma superfície

com carga superficial σ , que se desenvolve ao longo de uma curva com carga linear λ .

Se considerarmos que a carga está distribuída dentro de um volume então o potencial pode ser calculado com uma integral tripla do tipo

$$V = k \iiint_v \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

Nesse caso \vec{r}' varia dentro da região de integração.

No caso da carga estar distribuída sobre uma superfície então a integral será uma integral dupla, integral de superfície.

$$V = k \iint_s \frac{\sigma(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dA'$$

Observando as condições anteriores, é fácil deduzir que, no caso da carga ser distribuída sobre uma curva, a integral que resolve o potencial será uma integral de linha. Sendo assim

$$V = k \int_L \frac{\lambda(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dS'$$

Existe uma semelhança entre as integrais que utilizamos para calcular o campo e as integrais que utilizamos no cálculo do potencial. Entretanto só é necessário calcular uma integral ao invés de três no caso do campo elétrico. Se desejamos calcular o campo elétrico da distribuição de cargas, o trabalho se torna mais simples se calcularmos o potencial através da integração e, posteriormente utilizar o gradiente do potencial para determinar o valor do campo elétrico.

Por outro lado, quando for possível calcular o campo elétrico utilizando a lei de Gauss, torna-se mais conveniente calcular o potencial a partir do campo e utilizando qualquer percurso de integração, como mostra a equação.

$$V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} d\vec{r}$$

2.3.7 - O comportamento do potencial e da carga em condutores.

Como já sabemos, o campo elétrico na superfície de um condutor em equilíbrio vai ser perpendicular a superfície do mesmo. Mas, qualquer superfície perpendicular a um campo elétrico é, necessariamente, uma equipotencial, ou seja, a superfície de um condutor sempre será uma superfície equipotencial. O interior do condutor tem um campo elétrico nulo e isso implica no fato de que o potencial dentro do condutor é constante.

Em um condutor em equilíbrio, qualquer excesso de carga será distribuído sempre sobre a superfície, entretanto, a distribuição de carga não pode ser uniforme.

Para provar essa afirmação, em primeiro lugar, vamos considerar três condutores diferentes com a mesma carga superficial. Um dos condutores é plano, o outro é convexo e o último é côncavo.

Em todos os três casos a separação das linhas de campo sobre a superfície deve ser a mesma e o campo será igual e o campo é igual nos três casos quando a distância d a partir da superfície for igual a zero. Conforme aumentamos a distância d as linhas de campo são perpendiculares a superfície do condutor. A separação das linhas será maior no caso do condutor convexo e menor no caso do condutor côncavo. No caso dos condutores côncavos, as linhas de campo acabam se afastando com o aumento da distância.

Considerando que o campo elétrico é inversamente proporcional a distância entre as linhas de campo.

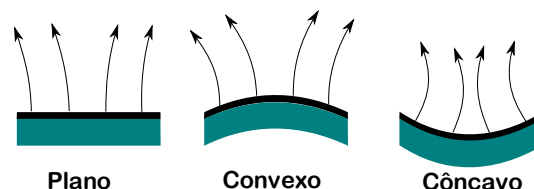


Figura 61 - Campo elétrico produzido em 3 condutores diferentes, em função da distância

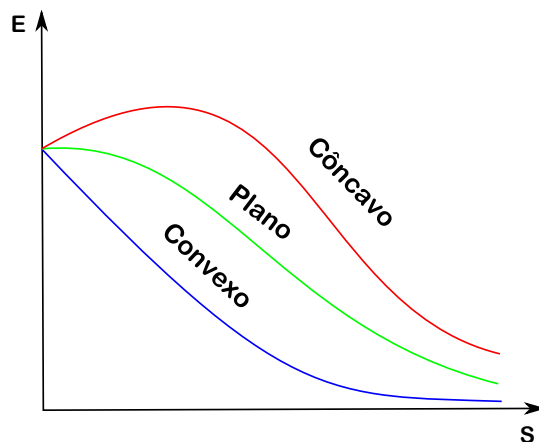


Figura 62 - Curva indicativa do comportamento da intensidade de campo elétrico em função da distância da superfície

A integração do campo elétrico desde uma distância igual a zero (0) até uma distância infinita (∞) nos fornecerá o potencial em cada um dos condutores das figuras acima. É importante notar, no gráfico, que tendendo o valor ao infinito estamos fazendo com que a tensão tenda a ZERO. Da mesma forma, é preciso salientar que os valores dos três potenciais calculados, correspondem às áreas que se situam abaixo de cada uma das curvas.

A partir dessa observação é possível constatar que o potencial da superfície côncava é maior do que os potenciais das superfícies plana e convexa. Assim como o potencial da superfície plana é maior que a superfície convexa.

Com isso podemos determinar que é impossível que a carga superficial possa ser a mesma onde o condutor é convexo, plano ou côncavo. É essa variação nas intensidades do potencial elétrico nas superfícies é que permite que o valor da integral do campo elétrico, obtenha os mesmos valores.

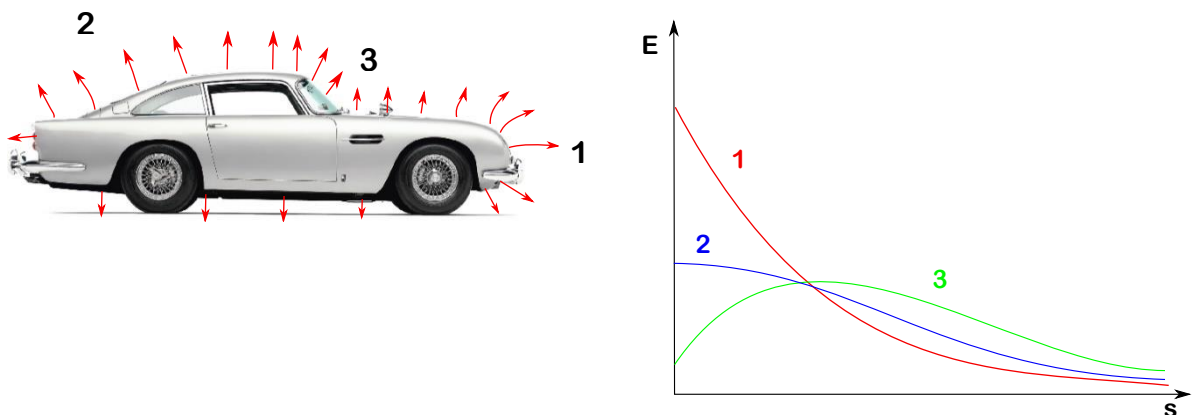


Figura 63 - Representação da intensidade de campo na superfície de um automóvel

Note que observando o desenho acima e extrapolando o número de linhas de força, nas regiões de forma convexa, a carga superficial será maior, quanto menor for a curvatura da região. Já no caso das regiões côncavas a carga superficial aumenta diretamente proporcional ao raio da curvatura.

Os projetos de para raios utilizam essa característica para funcionarem de forma mais eficiente. Como sabemos uma descarga atmosférica nada mais é do que o resultado de um grande acúmulo de cargas elétricas, que provocam uma diferença de potencial entre as nuvens e o solo e, em um determinado momento, possuem potencial suficiente para quebrar a capacidade dielétrica (isolamento) do ar, ocorrendo assim o raio.

Sendo assim, as cargas que são acumuladas nas nuvens começam a induzir cargas em objetos que se encontram próximos, no caso, os para raios. E por quê nos para raios? Eles aproveitam o fenômeno que foi explicado anteriormente, através do que chamamos de “poder das pontas”. As pontas agudas (convexas) dos para raios, acumulam grande quantidade de carga. Como esses dispositivos são colocados na parte mais alta das estruturas e, portanto, mais próximos das nuvens, oferecem o ponto perfeito para a descarga atmosférica, protegendo assim as estruturas.

2.4 Discutindo o que foi visto

2.4.1- A lei de Coulomb e suas limitações

Como já estudamos, o potencial elétrico de uma carga elétrica volumétrica $\rho(\vec{r}')$, colocada dentro de um volume qualquer, é dado pela integral tripla

$$V(\vec{r}) = k \iiint \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

Sendo uma integral de volume, para um resultado correto, é necessário que o cálculo dessa integral seja desenvolvido sobre todo o espaço volumétrico onde exista carga elétrica. Para que isso seja possível, torna-se necessário que se conheça toda a carga volumétrica existente em todos os pontos dados pelo vetor \vec{r} onde a carga volumétrica seja diferente de zero $\rho \neq 0$. Desse modo, não podemos calcular o campo somente em pontos que nos interessam.

Entretanto, na prática, as únicas informações que possuímos, na esmagadora maioria das vezes, dizem respeito apenas a uma determinada região do espaço e nos deparamos tentando calcular o

campo, pelo menos, dentro dessa região. Mas mesmo para essa região limitada, por vezes encontramos problemas associados as condições analisadas.

Vamos tomar como exemplo uma carga colocada dentro de uma caixa metálica. Analisando as linhas de força de uma carga pontual livre, solta no espaço, veremos que elas se dispersam radialmente a carga, conforme mostra a figura.

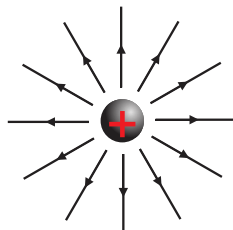


Figura 64 - linhas de força em uma carga elétrica livre no espaço

No entanto, ao colocarmos a carga elétrica em uma caixa metálica, as suas linhas de força já não se comportam mais como mostra figura anterior, pois, como também já estudamos, em superfícies metálicas as linhas de força são perpendiculares a essas superfícies.

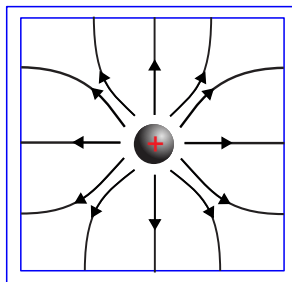


Figura 65 - linhas de força de uma carga elétrica colocada no interior de uma caixa metálica

Além desse fato, podem haver outras cargas na superfície metálica cujo cálculo é mais complexo. Finalmente, no exterior da caixa metálica podem também haver outras cargas que interagem com a superfície metálica. Para solucionar esse problema causado pela “falta de informações”, podemos lançar mão de outros métodos que permitem o calculo do campo, sem a necessidade dessas informações que não temos acesso, bastando conhecer alguns detalhes das chamadas “condições de fronteira”.

2.4.2 - Cálculo vetorial – Divergente

Quando desejamos determinar um valor de fluxo por unidade de volume em um determinado ponto, podemos utilizar o divergente, que é uma função matemática associada a qualquer campo vetorial.

Desse modo, vamos então considerar um campo vetorial qualquer, que denominaremos de \vec{F} e que possui um conjunto de coordenadas cartesianas.

$$\vec{F} = F_x(\vec{r})\hat{i} + F_y(\vec{r})\hat{j} + F_z(\vec{r})\hat{k}$$

Vamos tomar também um paralelepípedo com arestas que chamaremos, respectivamente de $\Delta x, \Delta y$ e Δz . Essas arestas obedecem as seguintes condições

$$\Delta x > |x - x_0|, \Delta y > |y - y_0|, \Delta z > |z - z_0|$$

Para calcularmos o fluxo \vec{F} através da superfície fechada representada pelo paralelogramo definido acima. Agora, imaginemos que esse paralelogramo seja numerado da mesma forma que um dado, guardando a seguinte característica: a soma de dois lados opostos será sempre 7, conforme mostra a figura.

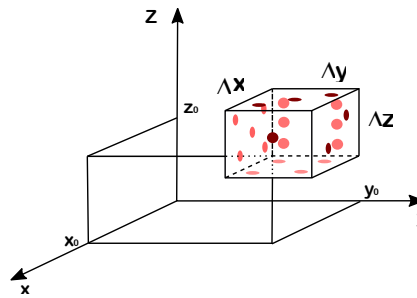


Figura 66 - paralelepípedo para representação do gradiente.

Agora vamos tomar uma das superfícies do paralelepípedo para análise. Peguemos a superfície representada pelo número 1 do dado, frontal ao nosso cubo. A primeira constatação é que a face escolhida possui coordenadas nos eixos x, y e z . No caso do eixo x , a coordenada do ponto x será dada por $x = x_0 + \Delta x$, enquanto nos eixos y e z , os valores são constantes. Nesse caso o versor normal a superfície S_1 será $\hat{S}_1 = \hat{i}$, ou seja:

$$\vec{F} \cdot \hat{S}_1 = F_x(x_0 + \Delta x, y, z)$$

O fluxo que passa através dessa superfície será dada pela integral de área (integral dupla) da função acima, portanto:

$$\Psi_1 = \iint_{S_1} (\vec{F} \cdot \hat{S}_1) dA_1 = \int_{z_0}^{z_0 + \Delta z} \int_{y_0}^{y_0 + \Delta y} F_x(x_0 + \Delta x, y, z) dy dz$$

Nessa integral, $y_0 \leq \bar{y}_1 \leq y_0 + \Delta y$.

Para solucionar essa equação, lançamos mão, novamente, do teorema do valor médio e, sendo assim, o valor obtido será:

$$\Psi_1 = F_x(x_0 + \Delta x, y_1, z_1) \Delta y \Delta z$$

Onde $z_0 \leq \bar{z}_1 \leq z_0 + \Delta z$. Se extrapolarmos para as outras faces do paralelogramo teremos:

$$\Psi_2 = F_y(\bar{x}_2, y_0 + \Delta y, \bar{z}_2) \Delta x \Delta z$$

$$\Psi_3 = F_z(\bar{x}_3, \bar{y}_3, z_0 + \Delta z) \Delta x \Delta y$$

$$\Psi_4 = -F_z(\bar{x}_4, \bar{y}_4, z_0) \Delta x \Delta y$$

$$\Psi_5 = -F_y(\bar{x}_5, y_0, \bar{z}_5) \Delta x \Delta z$$

$$\Psi_6 = -F_x(x_0, \bar{y}_6, \bar{z}_6) \Delta y \Delta z$$

É importante ressaltar que os valores médios que aparecem nessas equações, podem pertencer aos mesmos intervalos, no entanto não possuem o mesmo. Um exemplo disso são os valores médios de \bar{y}_3 e \bar{y}_4 , que pertencem ao mesmo intervalo $(y_0, y_0 + \Delta y)$, no entanto não possuem o mesmo valor.

Como todos os valores médios pertencem aos seus respectivos intervalos, no limite onde esses valores tendem a zero todos se tornam iguais aos seus valores iniciais, ou seja

$$\Delta x \rightarrow 0 \therefore x_i \sim x_0$$

$$\Delta y \rightarrow 0 \therefore y_i \sim y_0$$

$$\Delta z \rightarrow 0 \therefore z_i \sim z_0$$

Como sabemos, o divergente do campo será o limite da razão entre a variação do fluxo pela variação do volume do objeto, quando esse tende a 0. Sendo assim teremos que o divergente do campo será dado por:

$$\begin{aligned}
 \text{div} \vec{F} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta \Psi}{\Delta V} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F_x(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - F_x(x_0, y_0, z_0)}{\Delta x} \\
 &+ \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{F_y(x_0, y_0 + \Delta y, z_0) - F_y(x_0, y_0, z_0)}{\Delta y} \\
 &+ \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{F_z(x_0, y_0, z_0 + \Delta z) - F_z(x_0, y_0, z_0)}{\Delta z}
 \end{aligned}$$

Como sabemos cada um dos limites que compõe o divergente são uma definição de derivada parcial, em x, y e z, ou seja:

$$\text{div} \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

Ao observarmos a equação acima vemos que ela tem muita semelhança com a equação que define o gradiente de um campo escalar. Sendo assim, podemos escrever a equação utilizando o operador “nabla” (∇) para denotar o divergente:

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k}$$

Portanto, a divergência de um campo vetorial \vec{F} será igual ao produto escalar entre o operador nabla e o campo:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

Desse modo, o gradiente do campo escalar V é obtido aplicando o operador nabla ao campo escalar:

$$\vec{\nabla} V = \frac{\partial V}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \hat{k}$$

2.4.3 - Teorema de Ostrogradski - Gauss

O teorema de Ostrogradski-Gauss, também conhecido como teorema do divergente, estabelece uma relação entre a integral (derivada) do divergente de um campo vetorial F sobre uma região com a integral de F sobre a fronteira da região.

Uma região $E \subseteq \mathbb{R}^3$ é chamada região sólida simples se E pode ser escrita simultaneamente como:

$$E = \{(x, y, z) : (x, y) \in D_{xy}, u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\}, \text{ (tipo 1),}$$

$$E = \{(x, y, z) : (y, z) \in D_{yz}, v_1(y, z) \leq x \leq v_2(y, z)\}, \text{ (tipo 2),}$$

$$E = \{(x, y, z) : (x, z) \in D_{xz}, w_1(x, z) \leq y \leq w_2(x, z)\}, \text{ (tipo 3).}$$

A fronteira de E é uma superfície fechada e usaremos a convenção de que a orientação positiva é para fora.

Vamos considerar então uma superfície fechada qualquer que denominaremos de S. Essa superfície delimita uma região que denominaremos de R. Usando o princípio que inspira os conceitos de limite e integral, vamos imaginar que essas superfícies sejam pequenos paralelepípedos cujos volumes são infinitesimalmente pequenos e de valor ΔV_i .

Note que, por se tratar de um grupo de paralelepípedos, podemos esperar um pequeno erro na chamada região de fronteira ou borda. Se há esse erro, porque podemos desconsiderá-lo? Isso pode ser feito na medida em que o limite da superfície tende a zero, reduzindo significativamente o erro.

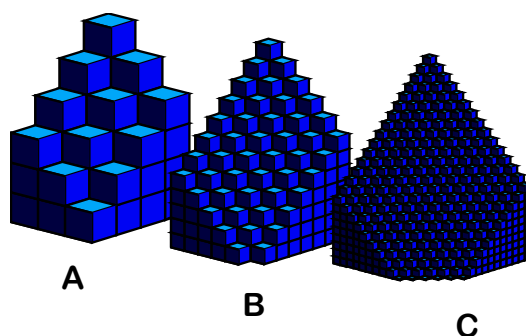


Figura 67 - Aproximação melhorada com a diminuição do volume dos paralelepípedos

Na figura, na construção com paralelogramos de menor tamanho, o fluxo de campo \vec{F} que passa por 4 paralelogramos dessa construção, é o mesmo que passa por dois da construção maior e por 1 da maior construção. Lembre que o cubo da construção da construção A contém dois cubos da construção B que, por sua vez, contém 4 cubos da construção C.

A soma de todos os fluxos que atravessam os diversos paralelogramos é igual ao fluxo que atravessa a fronteira S. Sendo assim

$$\oiint_S \vec{F} \cdot \hat{n} \cdot dA = \sum_{i=1}^{\infty} \Delta \Psi_i$$

Entretanto, $\Delta V \rightarrow 0$, o que nos permite usar a definição de divergência e obtemos a seguinte equação

$$\Delta \Psi_i = \vec{\nabla} \cdot \vec{F}_i \cdot \Delta V_i$$

Se substituirmos essa equação na anterior teremos:

$$\oiint_S \vec{F} \cdot \hat{n} \cdot dA = \iiint_R \vec{\nabla} \cdot \vec{F}_i \cdot \Delta V_i$$

Essa equação é conhecida como teorema de Ostrogradski – Gauss, ou simplesmente Teorema da Divergência. Apesar de sua aparência complexa, a equação do lado direito da igualdade é, por vezes, mais simples de calcular. Isso ocorre por que é mais fácil calcular a divergência de um campo do que calcular todos os versores normais a todos os pontos da superfície.

2.4.4 – Rotacional

Por definição, o rotacional é um operador, no cálculo vetorial, utilizado para superfícies infinitesimais, e é capaz de calcular o quanto os vetores de um campo vetorial se afastam ou se aproximam de um vetor normal a essa superfície.

Desse modo, podemos afirmar que o rotacional corresponde a uma transformação linear de um campo de vetores em um outro campo vetorial. Isso significa que, em cada ponto do espaço em que definimos um rotacional ele será dado por um vetor.

Anteriormente já comentamos que em uma superfície aberta existem dois versores normais a essa superfície. Além disso comentamos que se a superfície for orientável, um dos seus lados será positivo e o outro será negativo. Sendo assim, cada versor normal indicará a direção positiva e a direção negativa, respectivamente.

Assim que definimos a direção positiva da superfície a sua fronteira C será definida pela regra da mão direita.

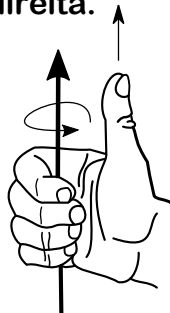
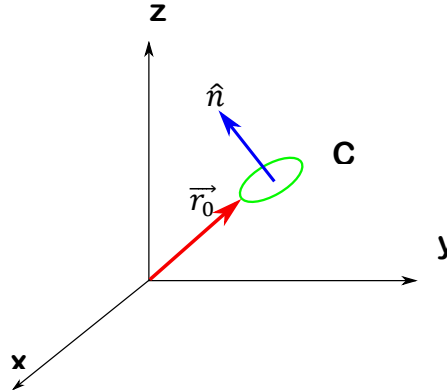


Figura 68 - Regra da mão direita para rotacional

Vamos considerar um ponto qualquer cujo vetor posição é dado por $\vec{r}_0 = x_0\hat{i} + y_0\hat{j} + z_0\hat{k}$ e uma curva fechada que iremos denominar de C. Essa curva passa por um ponto e que envolve uma pequena área ΔA , conforme mostra a figura abaixo.



Se aplicarmos a integral de linha teremos:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Essa integral terá diferentes valores para diferentes direções do vetor \hat{n} . Esse valor irá diminuir conforme diminuirmos ΔA . Se o vetor tiver a mesma direção do campo, a integral terá valor nulo. Isso ocorre porque o campo é perpendicular ao percurso.

Agora vamos imaginar que, em um ponto qualquer \vec{r}_0 exista um rotacional $rot\vec{F}$. Esse será o rotacional de campo e esse terá a seguinte propriedade.

$$(rot\vec{F}) \cdot \hat{n} \equiv \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta A} \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

para qualquer direção \hat{n} , para qualquer curva fechada C e será orientada na direção do vetor \hat{n} que passa pelo ponto \vec{r}_0 .

Sendo assim, o rotacional de \vec{F} será dado por:

$$rot\vec{F} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \hat{j} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \hat{k}$$

Essa expressão é exatamente igual a forma do produto vetorial entre o vetor operador nabla e o vetor campo \vec{F} . Ou seja, o rotacional do campo \vec{F} é igual ao produto vetorial $\vec{\nabla} \times \vec{F}$.

O rotacional pode ser representado sob o sistema de coordenadas retangulares, cilíndricas ou esféricas.

Em coordenadas retangulares, o produto vetorial anterior, será dado por:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

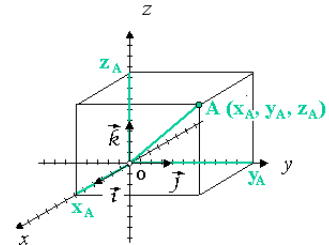


Figura 69 - Sistema de coordenadas retangulares

Nas coordenadas cilíndricas teremos:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{\rho} & \rho\vec{\phi} & \vec{z} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial \theta} \\ F_\rho & \rho F_\phi & F_z \end{vmatrix}$$

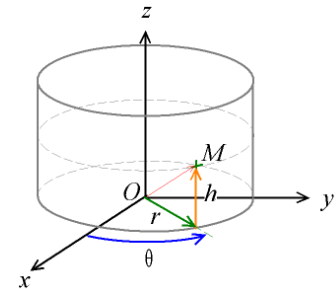


Figura 70 - Sistema de coordenadas cilíndricas

E nas coordenadas esféricas teremos:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} r & r\sin\theta\vec{\phi} & r\vec{\theta} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial \theta} \\ F_r & r\sin\theta F_\phi & rF_\theta \end{vmatrix}$$

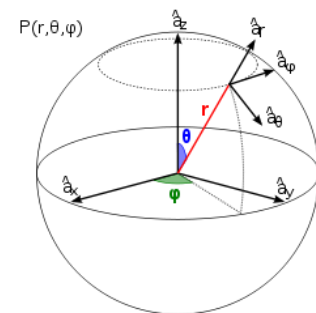


Figura 71 - Sistema de coordenadas esféricas

2.4.5 Teorema de Stokes e Equação de Poisson

Como já vimos, o rotacional facilita o cálculo das integrais de linhas em percurso fechado. Para solucionarmos um problema nessa área, basta que delimitemos uma superfície cuja fronteira seja um percurso fechado. A partir daí, dividimos a superfície em pequenos elementos quadrangulares R_i cuja área será ΔA , conforme mostra a figura abaixo.

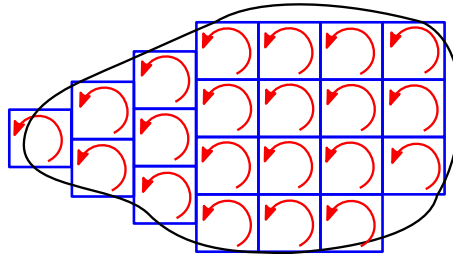


Figura 72 - Superfície fechada com os elementos quadrangulares de aproximação

Cada um dos elementos quadrangulares será percorrido no sentido anti-horário. Se somarmos a integral de linha de \vec{F} em dois percursos adjacentes, teremos como resultado a integral de linha do paralelogramo maior que será formado delimitando os dois elementos quadrangulares cujos percursos foram somados. Isso ocorre porque no lado que é comum entre os dois quadriláteros a integral de linha é calculado duas vezes em sentidos contrários e, portanto, nesse ponto o valor é zero. Por consequência, somando as integrais de linha de \vec{F} de todos os elementos quadrangulares teremos um resultado cuja aproximação é significativamente boa à integral de linha de C.

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \hat{n} \Delta A_i$$

Essa equação também pode ser escrita como:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\vec{A}$$

Essa superfície da integral dupla, pode ser uma superfície qualquer, e o resultado dessa equação é conhecida como Teorema de Stokes

Vamos analisar agora o teorema de Stokes para calcular o rotacional do campo elétrico.

A integral do percurso fechado pode ser calculada com a soma da integral de A até B, ao longo de toda a curva C_a e da integral de B até A ao longo da curva C_b . A integral de B até A será sempre igual e de sinal contrário a integral de A até B e, portanto, temos:

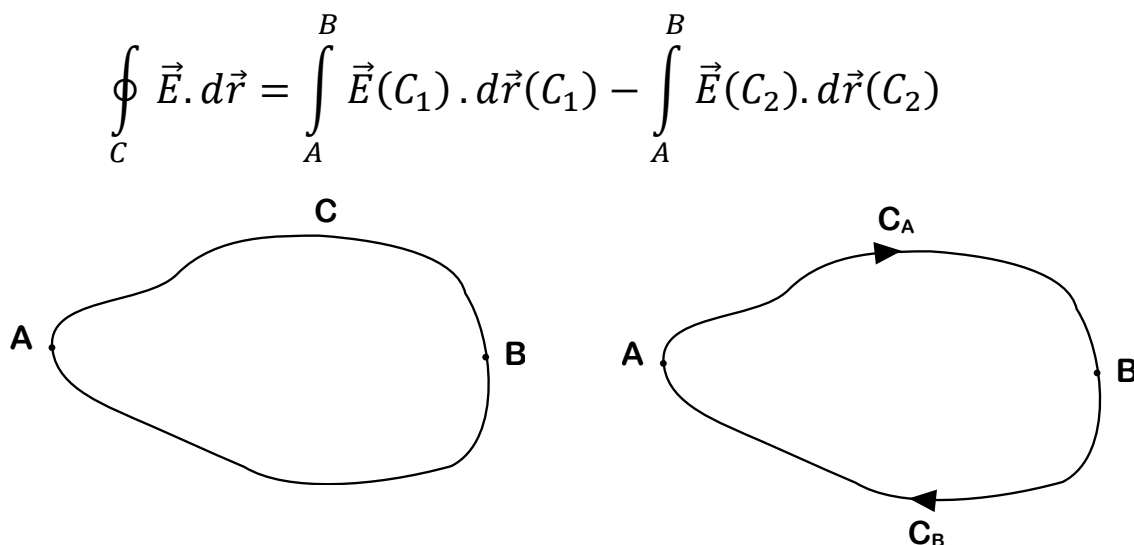


Figura 73 - Divisão do caminho C em dois caminhos C_A e C_B

Devemos lembrar que o campo elétrico é conservativo e, portanto, a integral de linha entre os pontos A e B é igual ao longo dos dois percursos e, desse modo, a integral do percurso fechado será zero.

Se substituirmos esse resultado, $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$, na equação do teorema de Stokes, teremos:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$$

Já vimos que a lei de Gauss relaciona o fluxo do campo elétrico através de qualquer superfície fechada, com a carga em seu interior. Se usarmos o teorema da divergência poderemos calcular o fluxo como uma integral de volume da divergência do campo. Sendo assim, podemos escrever a lei de Gauss de outra maneira que será mais conveniente para o cálculo do campo elétrico em geral.

Vamos considerar uma região R que é limitada por uma superfície fechada S. Lembremos que a lei de Gauss diz:

$$\oiint_S (\vec{E} \cdot \hat{n}) dA = 4\pi k \Delta q_{int}$$

Ao aplicarmos o teorema da divergência e a entre a carga interna e a carga volumétrica, obteremos:

$$\iiint_R \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dV = 4\pi k \iiint_R \rho dV$$

Podemos calcular as duas integrais de volume podem ser calculados como produto do valor médio da função integrada pelo volume total ΔV . Sendo assim teremos:

$$\overline{\vec{\nabla} \cdot \vec{E}} \Delta V = 4\pi k \bar{\rho} \Delta V$$

No limite onde $\Delta V \rightarrow 0$, podemos notar que o interior da superfície S vai se aproximando de um ponto e os valores médios de \vec{E} e $\bar{\rho}$ são os valores de \vec{E} e ρ , para esse ponto onde a superfície S se aproxima. Logo, podemos dizer que:

$$\rho \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi k$$

Essa equação é a representação da forma diferencial da lei de Gauss. Quando temos conhecimento da carga volumétrica representada por ρ , que está dentro de uma região, obtemos a divergência do campo em qualquer ponto da região.

Apesar disso, a divergência de um campo vetorial não é o suficiente para podermos definir esse campo. Para podermos defini-lo, é necessário também conhecer o rotacional, além de algumas condições na região de fronteira.

As equações

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{E} &= 0 \\ \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 4\pi k\end{aligned}$$

São duas equações básicas da eletrostática. Elas permitem o cálculo do campo elétrico em uma região onde se conheça ρ .

Podemos reduzir essas equações à uma única de valor escalar, que seja função do potencial eletrostático V que já falamos anteriormente e, portanto, teremos:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V$$

Como o rotacional do gradiente de um campo escalar qualquer, é sempre nulo, a equação $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$, é uma equação trivial. Sendo assim, se considerarmos o potencial V e usarmos o operador laplaciano, temos:

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Essa equação é conhecida como Equação de Poisson. De um modo geral, essa equação possui muitas soluções para um determinado ρ dentro de uma região. No entanto é possível obter uma solução única. Para isso é necessário impor alguma condição na fronteira, por exemplo, o valor do potencial ao longo da fronteira.

Quando a região de interesse para análise é todo o espaço e a condição de fronteira é $V=0$ no infinito, temos um caso particular para o que foi dito acima. Note que, nesse caso, a solução também é a equação que é obtida pela lei de Coulomb.

Em face da amplitude de resoluções possíveis através da Equação de Poisson, ele se torna aplicável à sistemas mais complexos que, normalmente, não podem ser solucionados pela lei de Coulomb. É óbvio que, para isso, é necessário que adentremos no campo das equações diferenciais parciais o que é muito mais complexo e escapa do escopo desse nosso estudo.

Capítulo III

MATERIAIS ELÉTRICOS

*Se quiser ter uma boa idéia,
tenha uma porção de idéias
Thomas Edson*

3.1 COMPORTAMENTO DOS MATERIAIS ELÉTRICOS

3.1.1 – Materiais Elétricos

Estudar e entender o comportamento de materiais elétricos é fundamental para entender os estudos sobre resistência elétrica, projetos de máquinas, eletrotécnica e uma série de outros elementos da eletricidade.

O fundamental é permitir a análise comportamental desses materiais.

Os materiais podem ser classificados sob diversos pontos de vista. Em Engenharia, as mais utilizadas são: a capacidade de transmitir calor ou eletricidade, que conhecida como CONDUTIBILIDADE; a capacidade de manipulação para transformação desse material, também conhecida como MALEABILIDADE; a capacidade de ser esticado ou comprimido e voltar ao seu tamanho e forma originais, chamada de ELASTICIDADE e, por fim, a capacidade de sofrer tração sem romper, conhecida como TENACIDADE.

O nosso principal interesse é quanto aos materiais elétricos e/ou magnéticos e, portanto, iremos nos concentrar nesses dois.

Vamos iniciar estudando as características ligadas a condutibilidade. Os materiais podem ser divididos em CONDUTORES, SEMICONDUTORES e ISOLANTES. Para analisa-los vamos estudar sua RESISTIVIDADE, ou seja, sua capacidade de resistir a passagem de corrente elétrica.

O principal critério para determinar se um material é condutor, semicondutor ou isolante é sua resistividade e a tabela de caracterização aparece abaixo.

Tipo de Material	Resistividade ($\Omega\text{mm}^2/\text{m}$)
CONDUTOR	10^{-2} a 10
SEMICONDUTOR	10 a 10^{12}
ISOLANTE	10^{12} a 10^{24}

Tabela 6 - Tabela de resistividade de condutores, semicondutores e isolantes.

Os materiais condutores possuem 1, 2 e 3 elétrons na camada de valência. Os elementos que possuem 4 elétrons na camada de valência são os materiais semicondutores. Os materiais que possuem 5, 6, 7 e 8 elétrons na camada de valência são os materiais isolantes.

3.1.2 – Materiais Condutores

Se observarmos veremos que, de um modo geral, a maior parte dos materiais condutores é composta por metais. Isso ocorre porque nos metais, a estrutura atômica tem, em sua camada de valência elétrons que podem fluir livremente de um átomo para outro.

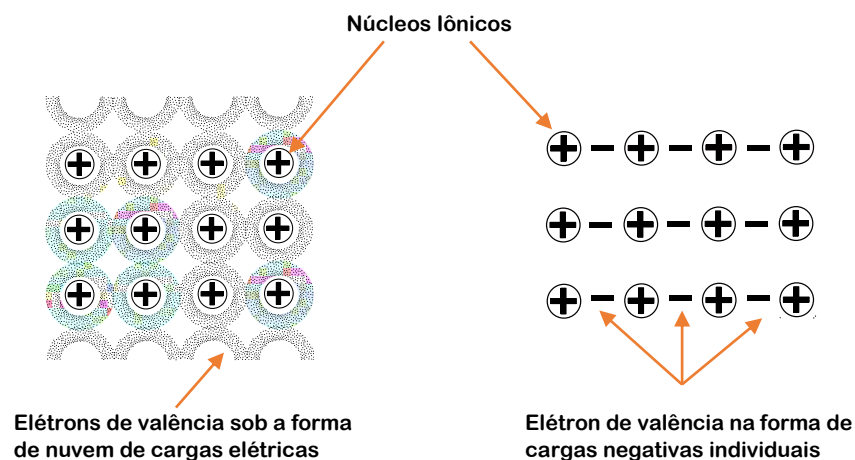


Figura 74 - Representação de estruturas de um material qualquer

Quando estabelecemos uma corrente elétrica em um condutor metálico, um número elevado de elétrons livres passa a se deslocar por esse condutor. Durante esse deslocamento alguns dos elétrons podem colidir entre esses elétrons e os átomos que constituem o material, o que representa uma certa resistência a essa passagem. Essa resistência, apesar de muito pequena, existe, pois, mesmo o melhor dos materiais condutores possui resistência elétrica.

Existem também materiais que não são metálicos que são condutores, tais como, grafite, água salgada e qualquer material em estado de plasma. Além desses materiais, tanto metálicos como não metálicos que são condutores, existem também estudos para o desenvolvimento de ligas metálicas que apresentam ótimas características de condutibilidade elétrica. Algumas dessas ligas constituem os supercondutores, cuja resistência é extremamente baixa. Entretanto, esses materiais necessitam de condições especiais em termos de temperatura, tanto que todos os supercondutores existentes necessitam ficar imersos em uma atmosfera de nitrogênio líquido.

A tabela abaixo apresenta as características elétricas de alguns dos principais materiais condutores.

Material	Resistividade $\Omega\text{mm}^2/\text{m}$	Características
Prata	0,0162	seu principal uso é em peças de contato
Cobre	0,0169	pequena resistividade, boas características mecânicas, baixa oxidação, fácil deformação a quente - o bronze e o latão são as ligas mais usadas;
Ouro	0,0240	bastante resistente à oxidação por sua estrutura altamente estável, é utilizado principalmente em peças de contato.
Alumínio	0,0262	é o segundo metal mais usado depois do cobre, tendo características elétricas e mecânicas piores do que este mas com um custo menor;
Tungstênio	0,055	dado que retém a sua resistência a altas temperaturas e tem alto ponto de fusão, o tungstênio elementar é usado em muitas aplicações de alta temperatura, como filamentos de lâmpadas, tubos de raios catódicos e válvulas termiônicas, resistências de aquecimento.
Zinco	0,059	é utilizado como elemento de proteção contra a corrosão, principalmente em contatos
Níquel	0,072	é utilizado em ligas para imãs, usa para proteger campos magnéticos por sua elevada permeabilidade magnética, as ligas níquel-cobre (monel) são muito resistentes a corrosão, utilizando-se em motores marítimos e indústria química, a liga níquel-titânio (nitinol-55) apresenta o fenômeno <i>memória de forma</i> e é usado em robótica, também existem ligas que apresentam superelasticidade.
Ferro	0,098	por suas características magnéticas ele é muito utilizado na construção de motores e geradores elétricos
Platina	0,100	Usado nas pontas das velas de ignição dos lanças-chamas a explosão e nas pontas dos para-raios;
Estanho	0,114	Utilizado na fabricação de soldas para circuitos eletrônicos
Chumbo	0,205	é utilizado principalmente em soldas, sendo sensível a vinagre, cal e materiais orgânicos em apodrecimento - é um produto venenoso;

 Mercúrio	 0,960	utilizado na fabricação de lâmpadas fluorescentes, como chave de contato em boias elétricas, e em instrumentos de laboratório
------------------	---------------	---

Tabela 7 - Tabela de resistividade e uso de materiais condutores.

Os metais puros têm uma estrutura cristalina perfeita e isso reduz a sua resistência elétrica. Entretanto, a inserção de impurezas altera a estrutura aumentando a resistividade do material. A quantidade de impurezas adicionadas não precisa ser significativamente grande para causar essa mudança. Esse aumento de resistência também ocorre quando os metais são misturados em alguns tipos de ligas de dois ou mais metais.

<i>Liga</i>	<i>Tratamentos</i>	<i>Condutividade, em relação ao cobre (%)</i>	<i>Resistência à tração, em kg/mm²</i>	<i>Alongamentos, (%)</i>
Cu + Cd (0,9 Cd)	recozido	95	até 31	50
	encruado	83-90	até 73	4
Bronze 0,8 Cd + + 0,6 Sn Cu > 60%	recozido	55-60	29	55
	encruado	50-55	até 73	4
Bronze 2,5 Al + 2 Sn	recozido	15-18	37	45
	encruado	15-18	até 97	4
Bronze fosforoso 7Sn + 1P	recozido	10-15	40	60
	encruado	10-15	105	3
Latão 30 Zn	recozido	25	32-35	60-70
	encruado	25	até 88	5
Bronze BI 0,1% Mn, o resto Cu	—	82	50-52	—
BII 0,8 Mn ou 1% Sn + + 1 Cd	—	60	56-58	—
BIII 2,4% Sn ou 1,2 Sn + + 1,2 Zn	—	31	66-74	—

Tabela 8 - Características elétricas das principais ligas de cobre

Característica física	Alumínio (duro)	Cobre (duro)	Padrão IACS*
Densidade a 20 °C (g/cm ³)	2,70	8,89	8,89
Condutividade mínima porcentual a 20 °C	61	97	100
Resistividade máxima a 20 °C (Ωmm ² /m)	0,0282	0,0177	0,0172
Relação entre os pesos de condutores de igual resistência em corrente contínua e igual comprimento	0,48	1,03	1,00
Coefficiente de variação da resistência por °C a 20 °C	0,0040	0,0038	0,0039
Calor específico (cal/g °C)	0,214	0,092	0,092
Condutividade térmica (cal/cm ³ .s. °C)	0,48	0,93	0,93
Módulo de elasticidade do fio sólido (kgf/mm ²)	7.000	12.000	—
Coefficiente de dilatação linear/°C	23×10^{-6}	17×10^{-6}	17×10^{-6}

* Padrão IACS: Padrão Internacional do cobre recosido, tomado como referência de 100% de condutividade.

Tabela 9 - Tabela de comparação entre o cobre e o alumínio

Composição	Tipo	Resist. tração (kg/mm ²)	Dureza Brinell (kg/mm ²)	Condut. elétrica (Ωmm ² /m)	Coefficiente de temperatura α_T (1/°C)	Características
AlCuMg Duraluminio	ligas normais: mole encruado	< 25 40	< 60 100	28 20	$3,5 \times 10^{-3}$ $2,1 \times 10^{-3}$	para construção de peças; sofrem corrosão
	ligas com elevada resistência: encruado encruado e laminado a frio	40 30 ... 50	110 120	— —	— —	
Al Mg Si	mole, duro, laminado a frio, laminado a quente	8	35	30	$3,5 \times 10^{-3}$	resistência mecânica média, boa deformabilidade, boa estabilidade química
		16	55	26	$3,5 \times 10^{-3}$	
		10	60	27	$2,8 \times 10^{-3}$	
		20	80	27	$2,8 \times 10^{-3}$	
Al Mg Si (Aldrey)	mole encruado	10	30	30	$3,6 \times 10^{-3}$	usado em cabos
		30	80	33	$3,6 \times 10^{-3}$	
Al Mg (valores médios)	mole, meio mole, duro	22	55	20	$2,4 \times 10^{-3}$	estável contra água do mar, não suporta soluções alcalinas. Quanto maior % Mg maior dificuldade para soldagem
		28	70	17	$2,1 \times 10^{-3}$	
		30	90	15	$1,8 \times 10^{-3}$	
Al Mn	mole, meio mole, duro	7	20	25	$2,7 \times 10^{-3}$	Melhor estabilidade que Al, boa capacidade de soldagem
		12	30	24	$2,7 \times 10^{-3}$	
		15	40	23	$2,7 \times 10^{-3}$	
Al Mg Mn	mole, meio mole, duro	15	40	23	$2,4 \times 10^{-3}$	Estabilidade média perante sais e ácidos.
		20	50	22	$2,4 \times 10^{-3}$	
		25	60	21	$2,4 \times 10^{-3}$	

Tabela 10 - Características das ligas de alumínio

3.1.3 – Materiais Semicondutores

Os materiais semicondutores são sólidos cristalinos que possuem condutividade intermediária. Atualmente o semicondutor mais utilizado é o silício, devido a sua abundância na natureza. Existem também o germânio e o carbono, que podem ser utilizados em determinadas condições. Como já mencionamos, os semicondutores são elementos tetravalentes e o silício possui uma configuração eletrônica do tipo $s^2 p^2$. A condutibilidade ou resistividade do semicondutor são alterados à partir de algumas alterações na estrutura cristalina através da inserção de “impurezas” no material semicondutor puro. Quando inserimos impurezas no silício puro, alteramos suas características elétricas e podemos criar materiais com abundância de elétrons livres (condutor) ou materiais com falta de elétrons livres (isolantes). Esses materiais recebem o nome de materiais tipo N e tipo P respectivamente.

As impurezas que associamos ao silício para obtenção desse tipo de material são outros elementos químicos. Um exemplo desses elementos é o antimônio. Sendo um elemento pentavalente, ao se associar com o silício torna o elemento um material tipo N. Já no caso de “doparmos” o silício com o elemento índio que é um elemento trivalente, transformamos o material em um elemento tipo P.

Esses elementos tipo P e tipo N, podem ser associados criando um elemento elétrico capaz de controlar a condutibilidade de corrente em um circuito. Cada um desses elementos recebe um nome e possui um conjunto de utilidades para a eletrônica. Um par PN, da origem a um diodo, que é um componente eletrônico que permite a corrente elétrica circular somente em uma direção. Esses diodos podem ser do tipo zener, túnel, scotch, led, varicap e outros. Além disso podemos associar três materiais, dois do tipo N e um do tipo P ou dois do tipo P e um do tipo N. Essas associações formam transistores bipolares, transistores de efeito de campo, MOSFET e outros.

Vamos explicar como ocorre esse fenômeno da associação de dois materiais, tipo P e tipo N.

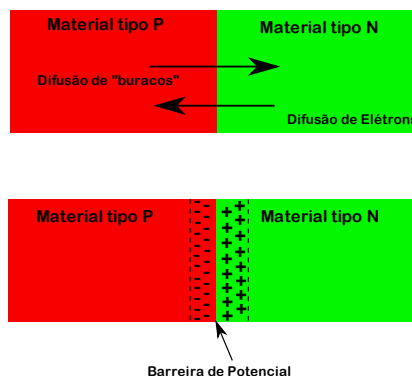


Figura 75 - junção PN e barreira de potencial

Quando os dois materiais são reunidos, imediatamente a diferença de potencial elétrico entre o material P e o material N “tenta” se estabilizar e ocorre uma pequena circulação de corrente entre os materiais. No entorno da junção essa circulação permanece até que ocorra uma estabilização das cargas nessa região surgindo o que se denomina de barreira de potencial. Essa barreira de potencial é a responsável pela estabilização do fluxo de elétrons, fazendo com que o dispositivo adquira as características desejadas.

Mas como se constrói esse tipo de componente?

O processo de construção de um elemento semiconductor segue uma série de etapas que passaremos a explicar.

A fabricação de dispositivos semicondutores é o processo utilizado para criar componentes ou chips de circuitos integrados. Consiste em uma sequência de múltiplos passos de processamento fotográfico e químico. Durante esses processos, os componentes ou circuitos eletrônicos são criados.

O primeiro passo consiste em purificar o silício até um ponto de 99,999% de pureza. Esse material se torna um lingote monocristalino, normalmente de formato cilíndrico, de até 300 mm de diâmetro. Esses cilindros são então fatiados em pastilhas de 0,75mm de espessura e polidas para que se possa obter uma superfície muito regular e plana. Uma vez cortadas essas bolachas são preparadas para as diversas etapas do processo de dopagem.



Figura 76 - Cilindros de silício e discos de silício.

No processo de fabricação de componentes e circuitos semicondutores existem uma série de etapas que devem ser processadas. Podemos dividir esses processos em quatro grandes grupos. Deposição, Remoção, Padronização e Modificação das propriedades elétricas.

Para o processo de DEPOSIÇÃO, primeiramente a bolacha é “pintada” com uma solução fotossensível em toda sua superfície. Feito isso, e após o material fotossensível secar, é colocada sobre a bolacha uma

“mascara” que é transparente nas partes que deseja depositar o “dopante” que irá transformar a condutibilidade do material. Sobre essa máscara é aplicada luz que impressiona a película fotossensível nas partes onde a máscara está vazada. Após o material fotossensível ser impressionado, o material passa por um processo de lavagem com ácido, que remove a parte impressionada do material, expondo partes do substrato tipo N e deixando o material pronto para o processo de dopagem para formação da junção PN.

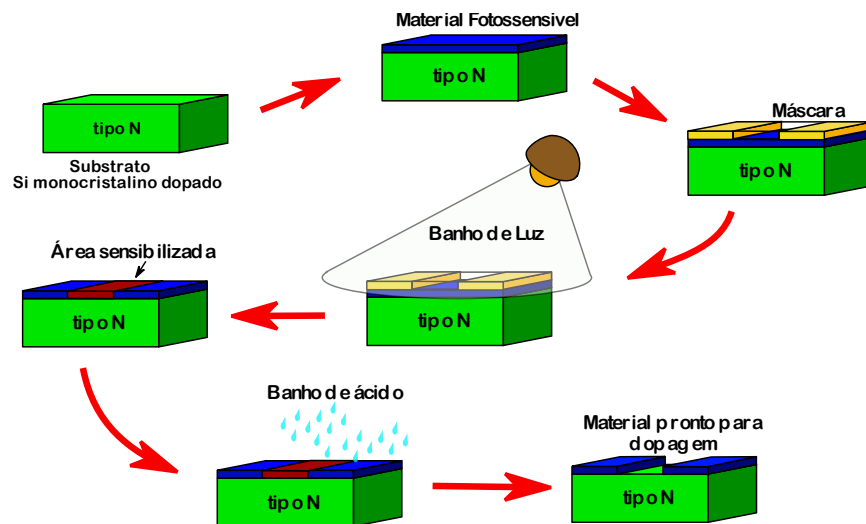


Figura 77 - Processo de preparação para confecção de uma junção PN

Estando o material pronto para dopagem a “bolacha” de silício é submetida à uma alta temperatura e um processo de imersão em gás constituído do material dopante. Esse processo permite que ocorram as interações entre o material dopante e o substrato para o surgimento do substrato do tipo P. Durante esse processo surge a barreira de potencial. Posteriormente é feita a metalização das áreas de contato do material P e do material N para que sejam adicionados os terminais elétricos. Apesar de simplificada, a explicação acima dá uma ideia do processo utilizado para construção de semicondutores.

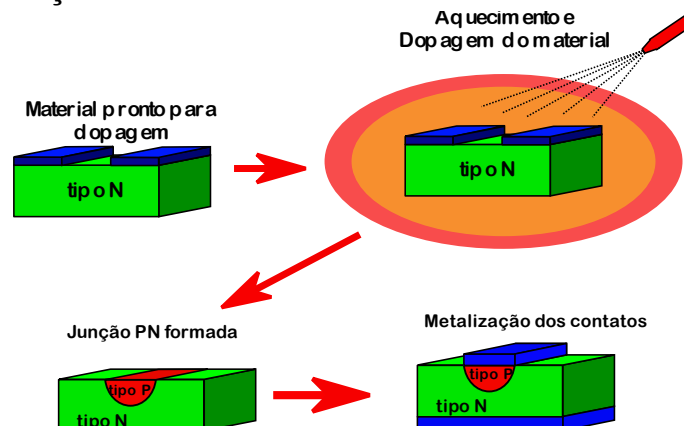


Figura 78 - Processo de conclusão do semicondutor

3.1.3 - Isolantes ou Dielétricos

Os elementos dielétricos, por natureza química, são materiais que apresentam alta resistência a passagem de corrente elétrica. Como já mencionamos, os materiais desse tipo possuem uma ausência de elétrons livres em uma determinada temperatura.

Quando submetemos um material dielétrico à uma diferença de potencial, esse material será polarizado devido a presença do campo elétrico. Esse tipo de comportamento pode ser notado em um capacitor de placas paralelas. Essa polarização vai levar o material a um aumento de temperatura que é resultante do consumo de energia.

Nós podemos classificar os dielétricos a partir do tipo de polarização. Isso faz surgir dielétricos com características bastante diferenciadas.

Por vezes, quando aplicamos uma tensão em um dielétrico, surge uma pequena corrente que circula em um circuito fechado. Dependendo da aplicação que estamos fazendo desse dielétrico, torna-se necessário o estudo dessa corrente. Existem também outros fatores que são importantes, tais como: temperatura, rigidez e envelhecimento.

Todos os materiais dielétricos possuem uma característica conhecida como rigidez dielétrica. Ela é o valor limite da tensão aplicada sobre o material a partir do momento em que os átomos que compõem o material se tornam ionizados e o material deixa de funcionar como um isolante. Esse valor não é fixo nos materiais, pois depende de fatores como temperatura, espessura do material, tempo de aplicação da diferença de potencial, sua taxa de crescimento, pressão (importante para gases).

Esses materiais podem ser sólidos, líquidos ou gasosos. Os sólidos são os mais utilizados na Engenharia. Alguns deles são: porcelana, vidro, plástico. No caso dos materiais gasosos, os mais comuns são o ar e o hexafluorido sulfúrico.

Muitas vezes, os dielétricos utilizados resultam de uma mistura de matérias primas. Isso leva a presença simultânea de diversas formas possíveis de polarização.

Material	Rigidez dielétrica (kV/mm)
Ar (1 atm)	3
Vidro	35
Papel	20
Oleo	4
Borracha	25

Tabela 11 - Tabela de rigidez dielétrica de alguns materiais

A polarização eletrônica é definida como o deslocamento elástico de elétrons que estão ligados ao núcleo do átomo pela ação do campo elétrico que é aplicado.

Uma das características dos dielétricos sólidos é a polarização iônica. Quando um material qualquer recebe ou perde um elétron da sua última camada (camada de valência), ele se torna um ion. Nesse caso, a polarização bipolar ocorre quando a orientação espacial das conexões das moléculas. Sendo assim, é possível que, ao aplicarmos uma diferença de potencial sobre o material, ocorra uma reorganização das moléculas. Finalmente temos a polarização estrutural. Ela ocorre quando as estruturas complexas de um material são submetidas a um campo elétrico externo. Quando o material é aquecido, surge um campo devido ao deslocamento de ions que compõe o dipolo. Juntamente com a polarização estrutural, essa forma de polarização, é muito sensível aos efeitos da temperatura.

Considerando que:

- capacitância C_0 e carga no vácuo Q_0 ;
- capacitância C_e e carga na polarização eletrônica Q_e ;
- capacitância C_i e carga na polarização iônica Q_i ;
- capacitância C_d e carga na polarização dipolar Q_d ;
- capacitância C_s e carga na polarização estrutural Q_s ;

Sabemos que a carga que um capacitor possui no vácuo, Q_0 e a carga eletrônica que resulta da polarização eletrônica Q_e sempre estão presentes. Já as polarizações iônica, estrutural e dipolar, são dependentes do tipo de material dielétrico que se esta utilizando.

A equação

$$\varepsilon = 1 + 4\pi k_e + 4\pi k_d + 4\pi k_s$$

é conhecido como constante dielétrica e k_e , k_d e k_s são conhecidos como suscetibilidades elétricas. Elas são originadas nas polarizações eletrônica, dipolar e estrutural, respectivamente.

3.1.4 – Materiais Magnéticos

Como já vimos anteriormente, os materiais podem ser divididos em ferromagnético, diamagnéticos e paramagnéticos. Os materiais ferromagnéticos são caracterizados por uma magnetização espontânea. Essa magnetização não exige que sejam originadas por campos magnéticos exteriores. Nesses materiais, a temperatura é importante, pois na temperatura crítica o material pode passar de ferromagnético para diamagnético.

Os materiais diamagnéticos, tem sua permeabilidade magnética menor que 1 e, quando submetidos a um campo magnético tem os seus elétrons sendo ajustados enquanto giram em torno do seu eixo. Durante esse

ajuste libera, durante o processo, um momento magnético que se dirige de forma contrária ao campo magnético que é aplicado. Isso provoca um enfraquecimento do próprio campo.

Já os materiais paramagnéticos possuem uma permeabilidade magnética em torno da unidade.

3.2 RESISTÊNCIA ELÉTRICA

3.2.1 - Definição

Como já vimos anteriormente, todos os materiais elétricos oferecem uma maior ou menor dificuldade à circulação de uma corrente elétrica. Entretanto, mesmo os materiais condutores possuem uma determinada capacidade de se opor a passagem de uma corrente elétrica. Essa oposição a passagem da corrente elétrica é conhecida como **RESISTÊNCIA ELÉTRICA** e ela existe porque todos os materiais possuem uma determinada **RESISTIVIDADE ELÉTRICA**.

No ano de 1827, o físico e matemático alemão, Georg Simon Ohm, publicou os resultados dos seus estudos sobre as relações entre corrente, tensão e resistência dos materiais. O resultado desses estudos, passou a ser conhecido como **LEI DE OHM**. Poucos anos antes, Alexandre Volta havia desenvolvido a bateria eletrolítica e os estudos sobre os efeitos da eletricidade eram novos.

Enquanto era professor em uma escola em Colônia, Ohm aproveitava o tempo livre e os laboratórios da escola para fazer seus estudos sobre circuitos elétricos. Ao concluir os estudos, publicou o trabalho denominado “O circuito galvânico investigado matematicamente” onde mostrava que uma corrente elétrica que percorria um fio condutor era proporcional a diferença de potencial aplicada a esse condutor, diretamente proporcional a sua seção transversal e inversamente proporcional ao seu comprimento.

O grande elemento inspirador do trabalho de Ohm foi um trabalho publicado por Fourier sobre condução de calor. Fourier descobriu que a condução de calor é proporcional entre dois pontos, é proporcional a diferença de temperatura entre eles e a condutividade térmica do meio que os separa. Baseado nessa descoberta, Ohm, por analogia, iniciou o estudo sobre a corrente elétrica.

Essa proporcionalidade entre a corrente e a diferença de potencial, que podemos observar em alguns tipos de material é conhecida como a **PRIMEIRA LEI DE OHM**. Todos os materiais que apresentam essa proporcionalidade são denominados de materiais ôhmicos.

Essa relação indica o quanto de tensão deve ser aplicado a cada diferente material ôhmico para que a corrente seja mantida a mesma, ou seja,

quanto maior for a dificuldade oferecida por um determinado material, a passagem da corrente elétrica, tanto maior deverá ser a tensão aplicada a ele, para que um determinado valor de corrente seja estabelecido. Como já dissemos, em seus experimentos, Ohm determinou a relação entre a seção transversal do condutor, seu comprimento e sua resistência. Entretanto ele determinou também que cada material necessitava de um coeficiente para garantir um mesmo comportamento dessa relação. Ele determinou que esse coeficiente era a resistividade de cada material (ρ) e concluiu que a resistência de um determinado material elétrico pode ser determinada pela equação:

$$R = \rho \frac{L}{A}$$

onde: R é a resistência do material (Ω)

ρ é a resistividade desse material ($\Omega \text{ m/mm}^2$)

L é o comprimento do condutor (m)

A é a seção do condutor (mm^2)

A partir daí Ohm definiu a relação entre a tensão, a corrente e a resistência a partir da equação

$$R = \frac{V}{I}$$

onde: R é a resistência (Ω)

V é a voltagem (V)

I é a corrente (A)

Material	ρ ($\Omega \cdot \text{m}$)	Material	ρ ($\Omega \cdot \text{m}$)
Prata	$1,59 \cdot 10^{-8}$	Germânio	$4,6 \cdot 10^{-1}$
Cobre	$1,7 \cdot 10^{-8}$	Silício	$6,4 \cdot 10^2$
Alumínio	$2,82 \cdot 10^{-8}$	Parafina	10^{17}

Tabela 12 - Resistividade de alguns materiais

Se igualarmos as duas equações teremos:

$$\frac{V}{I} = \rho \frac{L}{A}$$

Rearranjando a equação teremos:

$$\frac{V}{L} = \rho \frac{I}{A}$$

Mas o elemento V/L é o campo elétrico que esta atuando sobre o condutor, enquanto a relação I/A é denominada de densidade de corrente, que pode ser simbolizado J . Sendo assim,

$$E = \rho J$$

Na realidade, não se utiliza a fórmula nessa configuração, na realidade utilizamos a fórmula em função da condutividade σ , portanto

$$J = \sigma E$$

3.2.2 - O modelo de Drude

A lei de Ohm já estava sendo utilizada, o elétron havia sido descoberto no final do século XIX, já estava determinado que era o elétron o responsável pelos fenômenos elétricos que estavam sendo estudados. Entretanto era necessário explicar a relação entre o elétron e os fenômenos elétricos e as leis que regiam essas relações. Quem fez essas descobertas foi Paul Drude no ano de 1900.

Nos capítulos anteriormente estudados já verificamos que o potencial elétrico em um condutor é o mesmo em toda a extensão do condutor, ou seja, o material se encontra em equilíbrio eletrostático. A conclusão disso é simples, em um condutor eletrostaticamente carregado, não há diferença de potencial entre dois pontos quaisquer. Como em um condutor, os elétrons da camada de valência são fracamente ligados ao núcleo, podemos verificar que, devido a energia térmica, esses elétrons estão livres para se moverem aleatoriamente ao longo do condutor e, nessa condição esses elétrons recebem o nome de **ELÉTRONS DE CONDUÇÃO**.

Quando submetido a um campo elétrico, surge uma força sobre os elétrons livres e nesse caso, além do movimento aleatório originado pelo gradiente térmico do material, surge também um movimento ordenado na direção do campo.

Ao ser submetido ao campo elétrico, o condutor não está mais em equilíbrio eletrostático.

Teoricamente, nessas condições, o condutor submetido a essas condições, teria a velocidade de deslocamento dessas cargas aumentando indefinidamente. Entretanto, os elétrons em movimento enfrentam colisões entre eles e os íons de fundo, mantendo a velocidade de deslocamento dentro de determinados limites.

Podemos explicar esse fenômeno a partir de uma análise microscópica que é conhecida como modelo de Drude.

O modelo de Drude, analisa esses fenômenos a partir das seguintes hipóteses:

1. Não há interação elétron-elétron ou elétron-íon no intervalo entre as colisões;
2. As colisões ocorrem de forma abruptamente e os íons não se movem;
3. Existe um tempo médio entre as colisões (Δt);
4. Após cada colisão, o elétron perde a “memória” sobre sua velocidade e trajetória.

Vamos imaginar que um condutor, que possua um comprimento L esteja submetido a uma diferença de potencial V . Ao aplicarmos uma tensão V a esse condutor fazemos com que um campo elétrico de intensidade $E = V/L$ no condutor. Sendo assim, se selecionarmos um elétron de condução qualquer veremos que o mesmo está submetido a uma força elétrica que é dada por $F = -eE$. Esse elétron será acelerado até uma velocidade v durante um tempo Δt . Podemos representar esse efeito através da equação de variação de velocidade atingida é:

$$m \frac{\Delta v}{\Delta t} = -eE \Rightarrow \Delta v = -\frac{eE\Delta t}{m}$$

Em um condutor percorrido por uma corrente, a quantidade de carga que passa através da seção transversal desse condutor pode ser escrita como:

$$\Delta Q = n(-e)Av_m\Delta t$$

onde: n é a densidade volumétrica dos elétrons de condução (C/m^3)

e é a carga do elétron (C)

A é a seção transversal do condutor (m^2)

v_m é a velocidade média de deslocamento dos elétrons (m/s)

Δt é o tempo percorrido (s)

Desse modo, a corrente elétrica que flui através do condutor pode ser escrita da seguinte maneira:

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = -neAv_m$$

e a velocidade média que o elétron atinge é dada por:

$$|v_m| = \frac{I}{neA}$$

Esse valor médio da velocidade, na verdade é a velocidade de arraste dos elétrons e não a média das velocidades individuais de cada elétron, cujos valores são determinados pela agitação térmica.

Essa velocidade individual, devido a agitação térmica pode ser estimada através do Teorema da Equipartição da Energia, estudado em Física Estatística. Esse teorema estabelece o grau de liberdade de translação dos elétrons contribui com $k_B T/2$ para a energia térmica dos mesmos. Nesse valor apresentado temos k_B é a constante de Boltzman ($1,38064852 \times 10^{-23} \text{ m}^2 \text{ kg/s}^2 \text{ K}$) e T é a temperatura.

Se igualarmos a energia cinética média dos elétrons com a energia térmica teremos:

$$\frac{1}{2} m_e \langle v^2 \rangle = \frac{2}{3} k_B T$$

onde $\langle v^2 \rangle$ é a média do quadrado das velocidades dos elétrons
 m_e é a massa do elétron

$$v_{RMS} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m_e}}$$

O valor de v_{RMS} é conhecido como valor quadrático médio da velocidade dos elétrons ou, em inglês, *root mean square*.

A velocidade de um elétron após a colisão tem direção aleatória, mas o que realmente importa é o comportamento coletivo dos elétrons. Desse modo, se fizermos a média das velocidades para todos os elétrons, veremos que a velocidade resultante é nula, ou seja, $v_i = 0$, ou seja:

$$\Delta v = v_f - v_i = v_f$$

$$v_m = \frac{v_f + v_i}{2} = \frac{v_f}{2}$$

As equações mostram que a variação da velocidade sofrida por um elétron é o dobro da velocidade média. Sendo assim, podemos escrever:

$$-2 \frac{I}{neA} = - \frac{eE\Delta t}{m}$$

Além das grandezas já mencionadas sobre a resistência, temos também o chamado caminho médio livre (l). Essa grandeza representa a distância percorrida pelos elétrons entre duas colisões sucessivas. Como já dissemos, o tempo médio entre as colisões é Δt e a velocidade média dos elétrons dada por v_f e, portanto, o caminho médio livre será calculado por:

$$l = v_f \Delta t = \frac{2v_f m I}{ne^2 A E}$$

A equação acima mostra que a diferença de potencial é proporcional à corrente, confirmando a primeira lei de Ohm. Como a resistência é dada pela razão entre tensão e corrente, então teremos:

$$R = \frac{V}{I} = \frac{2m}{ne^2 \Delta t} \frac{\Delta L}{A}$$

Como podemos ver a resistência é diretamente proporcional ao comprimento do condutor e inversamente proporcional à seção transversal do mesmo, o que confirma a lei de Ohm.

Sendo assim, podemos afirmar que a resistividade do material é dada por:

$$\rho = \frac{2m}{ne^2 \Delta t}$$

Como vimos o modelo de Drude fornece a expressão para a resistividade dos materiais elétricos, que se trata de uma grandeza macroscópica, cuja a dependência é apenas de grandezas microscópicas que são, a massa do elétron, sua carga, a densidade de elétrons livres e o tempo médio entre colisões. Essa análise também é válida para condução iônica e para regiões com falta de elétrons.

3.2.3 - Efeito Joule e Potência Elétrica

Quando um condutor é percorrido por uma corrente elétrica dissipa toda a energia retida pela resistência é dissipada sob a forma térmica.

Esse efeito térmico, que recebe o nome de efeito joule, ocorre devido ao choque dos elétrons livres contra os átomos dos condutores. Esses átomos, ao receberem energia vibram com mais intensidade. Desse modo, quanto maior for a vibração desses átomos, maior será a temperatura que o condutor irá atingir.

Dependendo da utilização que queremos fazer do material elétrico, essa dissipação de calor pode ser, ou não, interessante. Em casos como chuveiros elétricos, torradeiras, cafeteiras e outros equipamentos desse tipo, esse efeito é interessante.

Por outro lado, em circuitos eletrônicos, onde o funcionamento e a velocidade de processamento estão associados à temperatura do material, o efeito Joule é totalmente indesejado e dispositivos de resfriamento são necessários nesses casos.

Qualquer máquina ou equipamento elétrico, a potência é definida como o quociente entre a energia que é transformada pelo tempo corresponde.

$$P = \frac{E}{t}$$

No sistema internacional, a energia tem como unidade o Joule, e o tempo é dado em segundos. Desse modo, a unidade de potência é dada pela unidade J/s ou, a unidade mais utilizada que é o Watt (w).

A potência é o resultado do produto da corrente que circula em um condutor, pela tensão que alimenta esse condutor, assim

$$P = V \cdot I$$

Entretanto, como sabemos a tensão V é o produto da corrente pela resistência, desse modo:

$$V = R \cdot I$$

Substituindo essa equação na equação da potência, teremos:

$$P = R \cdot I \cdot I \Rightarrow P = R \cdot I^2$$

Por outro lado, sabemos que:

$$I = \frac{V}{R}$$

E, novamente, substituindo essa equação na equação da potência, teremos:

$$P = V \cdot \frac{V}{R} \Rightarrow P = \frac{V^2}{R}$$

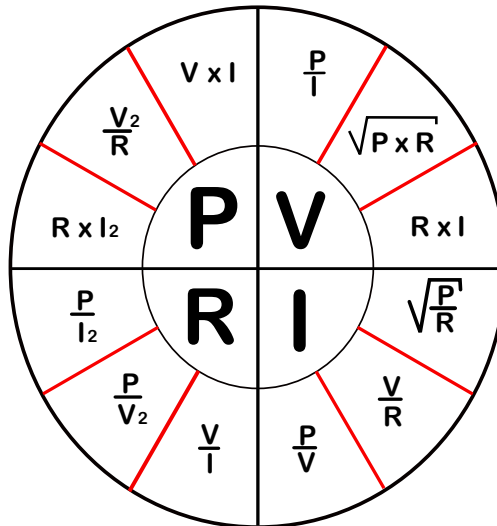


Figura 79 - Grafico com as relações entre Tensão, Corrente, Resistência e Potência

3.3.4 - Tipos e usos dos Resistores

A grande pergunta que devemos fazer é. Para que servem os resistores? Na prática, os resistores servem para limitar a intensidade de corrente elétrica através de determinados componentes, ou dividir um valor de tensão de alimentação.

Existem duas formas básicas de representar um resistor. Podemos fazê-lo através de um retângulo ou através de uma linha em zig-zag. A representação de retângulo com terminais é uma representação simbólica para os resistores de valores fixos tanto na Europa como no Reino Unido, já a representação em "linha quebrada" (zig-zag) é usada nas Américas e Japão. No Brasil, qualquer uma das duas formas são aceitas.

Outro uso para os resistores é a possibilidade de serem utilizados como transdutores. Transdutores são componentes capazes de realizar conversão de uma forma de energia em outra. Alguns exemplos são os microfones, interruptores e Resistores Dependentes da Luz ou LDRs, que são exemplos de transdutores de entrada, ou seja, transformam formas de energia como a mecânica em um sinal elétrico. O outro tipo de transdutor é representado por alto-falantes, lâmpadas de filamento, relés,

"buzzers" e também os LEDs, são exemplos de transdutores de saída. Transformam sinais elétricos em outras formas de energia.

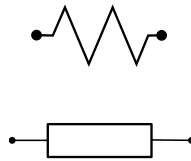


Figura 80 - Representações gráficas de um resistor

Existem várias formas e construções dos resistores. Cada forma obedece alguns critérios das necessidades dos seus usos.

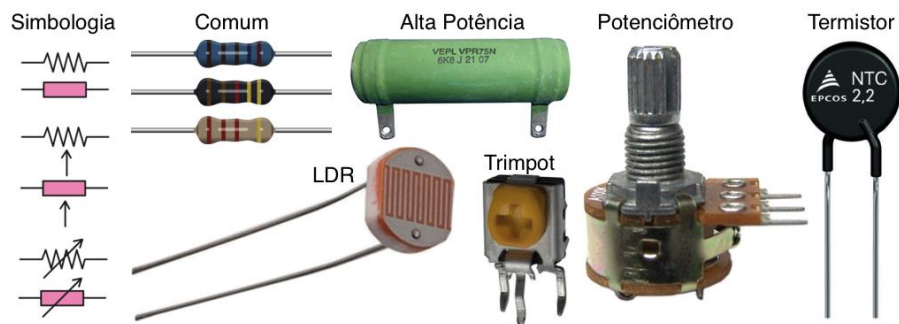


Figura 81 - Tipos de resistores

Veremos, a seguir, esses tipos de construção.

3.3.4.a – Resistores de Valor Fixo

Resistores de valor fixo, são dispositivos, como o próprio nome diz, tem seu valor fixado durante a fabricação. Existem dois tipos de materiais utilizados para confecção desses componentes. O primeiro é o resistor de fio, onde se utiliza um fio de uma liga resistiva conhecida como Constantan.

A liga de Constantan é composta por cobre (entre 53% e 57%), Níquel (entre 43% e 45%), Manganês (entre 0,5% e 1,2%) e Ferro (<0,5%). Sua resistividade é de $49 \times 10^{-6} \Omega \cdot \text{cm}$.



Figura 82 - Construção de resistor de fio

O outro material é o resistor de carbono. Esse tipo de resistor, muito utilizado na eletrônica, tem em sua construção a deposição de uma fina película de carbono sobre um tubo de cerâmica. Eles também são conhecidos como resistores de filme. O filme resistivo é enrolado em hélice por fora desse tubo. Posteriormente são instalados os terminais e o resistor é recoberto por uma camada isolante. Depois que a camada isolante seca, são pintadas faixas coloridas que identificam o resistor.

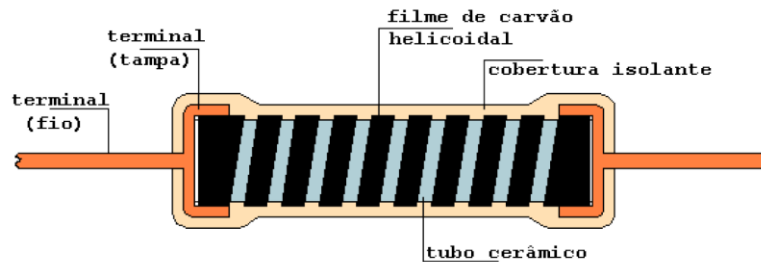


Figura 83 - Construção interna de um resistor de carbono

Esse tipo de resistor é de fácil fabricação e barato. Os valores comerciais apresentam uma precisão entre 5% e 10% dos valores apresentados no código de cores.

Existem resistores de precisão maior, entre 1% e 2%. Eles são construídos de filme metálico ou óxido metálico que apresentam uma maior precisão na sua confecção.

3.3.4.b – Identificação dos Resistores

Dependendo do tipo de resistor, o valor ôhmico de sua resistência é apresentado de forma diferente.

Os resistores de fio têm seu valor e sua precisão impressos no corpo do dispositivo e é de fácil leitura.

Os resistores de carbono, por serem muito pequenos, não permitem a impressão dos valores de resistência no seu corpo. Sendo assim é necessário que se utilize uma outra forma de representação do valor da resistência e da tolerância desse resistor. Para isso utilizamos um sistema de código de cores, que é uma codificação internacional.

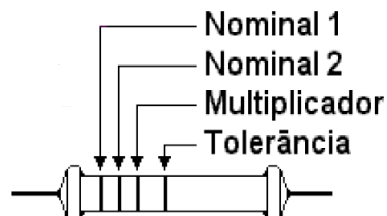


Figura 84 - Representação da disposição das cores em um resistor comum.

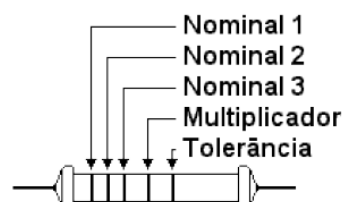


Figura 85 – Representação da disposição de cores de um resistor de precisão

Cor		Nominal 1	Nominal 2	Multiplicador	Tolerância
Sem codificação					±20%
Prateado				× 0.01	±10%
Dourado				× 0.1	±5%
Preto			0	× 1.0	
Castanho		1	1	× 10	±1%
Vermelho		2	2	× 100	±2%
Laranja		3	3	× 1 K	
Amarelo		4	4	× 10 K	
Verde		5	5	× 100 K	
Azul		6	6	× 1 M	
Violeta		7	7	× 10 M	
Cinza		8	8		
Branco		9	9		

Figura 86 - Tabela do código de cores para resistores comuns

Cor		Nomina l 1	Nomina l 2	Nomina l 3	Multiplicado r	Tolerânci a
Sem codificaçã o						
Prateado					× 0.01	
Dourado					× 0.1	±5%
Preto			0	0	× 1.0	
Castanho		1	1	1	× 10	±1%
Vermelho		2	2	2	× 100	±2%
Laranja		3	3	3	× 1 K	
Amarelo		4	4	4	× 10 K	
Verde		5	5	5	× 100 K	±0,5%
Azul		6	6	6	× 1 M	
Violeta		7	7	7	× 10 M	
Cinza		8	8	8		
Branco		9	9	9		

Figura 87 - Tabela do código de cores para resistores de precisão

3.3.4.c – Potência Dissipada pelos Resistores

Dependendo do tipo de utilização que daremos ao resistor é necessário que ele seja capaz de suportar uma maior ou menos potência que será dissipada pela circulação de corrente.

Os resistores de fio são capazes de atingir potências maiores pois sua construção é mais robusta. Comercialmente eles podem atingir potências de 100W, 50W, 20W, 10W e 5 W.

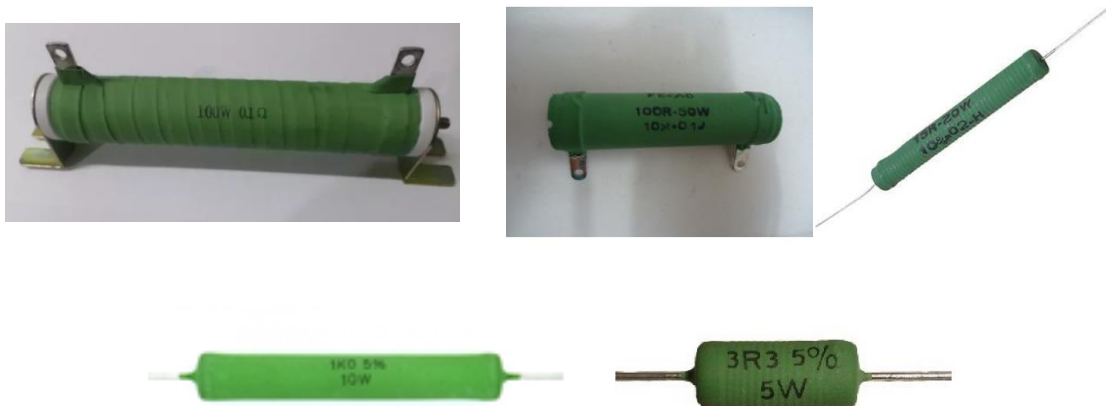


Figura 88 - Resistores de fio de várias potências

Os resistores de filme suportam potências menores e sua capacidade está relacionada ao tamanho do componente, conforme mostra a ilustração abaixo. Esses resistores podem atingir até 2W. Para casos onde o componente vai trabalhar próximo a sua potência nominal, é interessante utilizar um dissipador de calor.

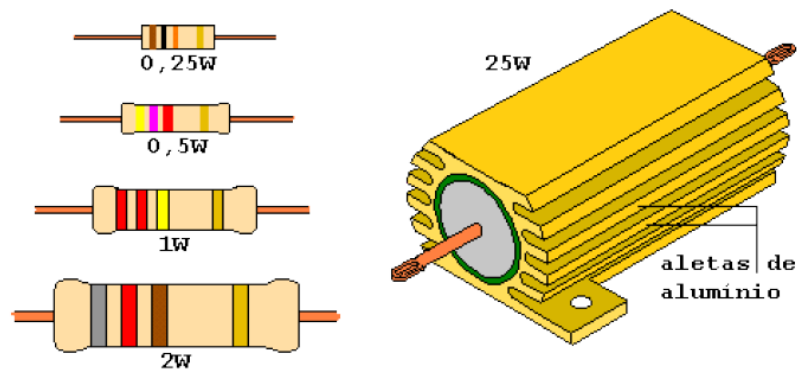


Figura 89 - Tamanhos padrão dos resistores e um dissipador de calor para esses componentes

3.3.4.d – Resistores Variáveis e Resistores Ajustáveis

Além dos resistores fixos, existe um outro grupo de resistores cujo valor de resistência pode ser alterado e ajustado de acordo com a necessidade do projeto. Esse tipo de resistor existe para casos em que são necessários valores diferentes dos valores comerciais de resistores fixos,

ou quando se necessita de uma variação de valor da resistência de acordo com o momento.

Um exemplo desse segundo caso é o ajuste do volume de saída de um amplificador de áudio.

Os resistores ajustáveis são utilizados quando o valor da resistência pode, ou deve ser continuamente ajustada. Por exemplo, volume de áudio, valor da intensidade luminosa e outras. Esses resistores recebem um nome específico, são conhecidos como **POTENCIÔMETROS**.

Construtivamente é um dispositivo que possui um elemento móvel que desliza sobre uma trilha de carbono depositada no corpo do potenciômetro. O deslocamento do cursor sobre a trilha varia a resistência entre o centro do cursor e uma das extremidades do potenciômetro.

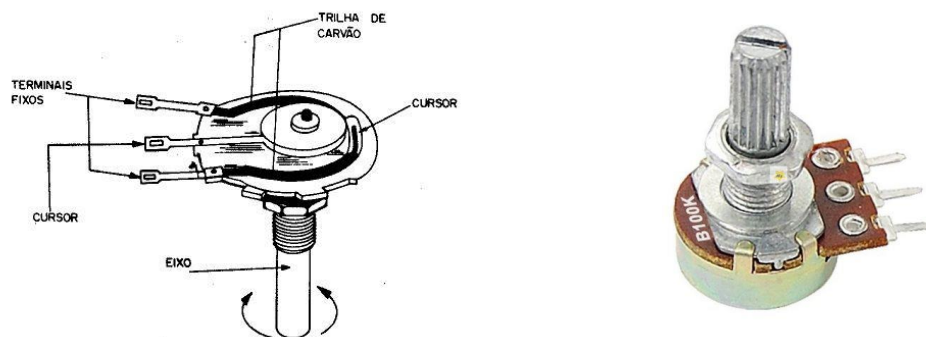


Figura 90 - Esquema construtivo de um potenciômetro e vista externa

Outra forma de resistor é o resistor ajustável. Esse tipo de resistor é utilizado para circuitos onde o valor de resistência desejado não é um valor comercial. Nesse tipo de resistor o valor é ajustado durante a montagem e não é mais alterada.

Construtivamente ela é muito similar ao potenciômetro, diferenciando somente a sua estrutura física externa.

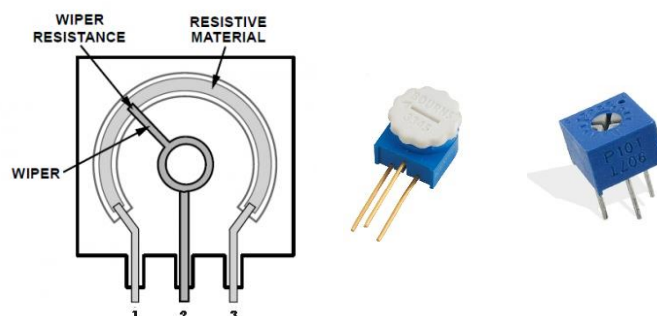


Figura 91 - Construção interna de um trimpot e duas formas construtivas

3.3.4.e – Resistores Especiais

Existem ainda dois tipos de resistores especiais cuja resistência varia de acordo com características especiais.

O primeiro tipo de resistor especial é um NTC cujo nome é a abreviação de *Negative Temperature Coefficient*, é um dispositivo não linear cuja resistência varia de acordo com a variação da temperatura. São construídos a partir de um óxido semiconductor que pode ser, Fe_3O_4 (óxido de ferro)+ Zn_2TiO_4 (óxido de titânio) ou CoO (óxido de cobalto) + Li_2O (óxido de lítio)



Figura 92 - NTC e simbologia para NTC e PTC

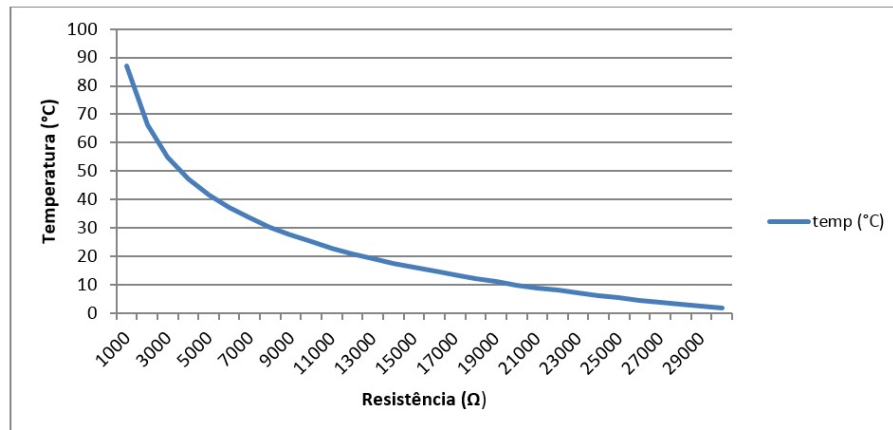


Figura 93 - Curva característica de um NTC

O valor da resistência em um NTC pode ser calculado por:

$$R = A \cdot e^{B/T}$$

Onde: R – resistência (Ω)

e – número de Euler (2,718)

B – Constante do material no NTC em $^{\circ}\text{K}^3$

T – temperatura do NTC em $^{\circ}\text{K}$

A – constante a uma dada Temperatura (retirada do gráfico abaixo)

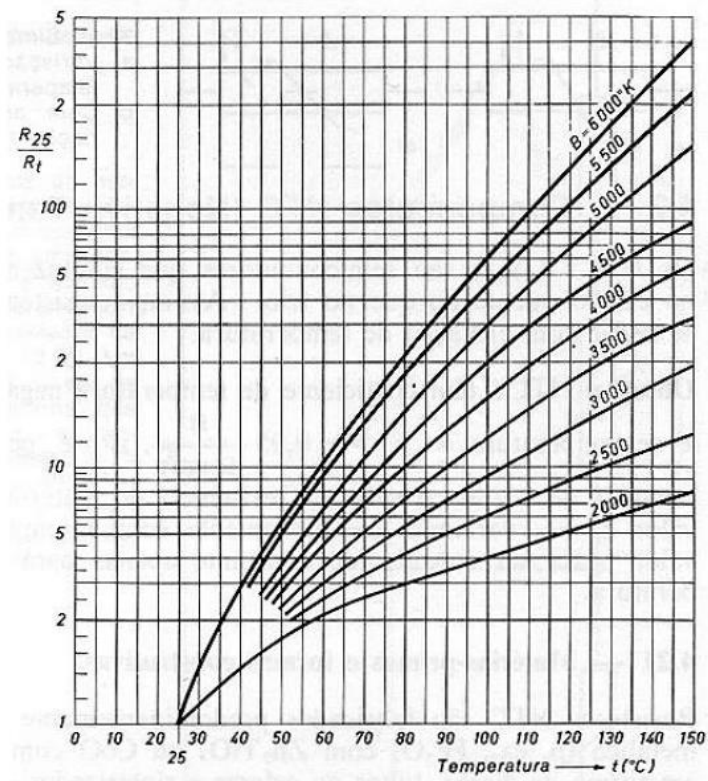


Figura 94 - Gráfico que relaciona a razão R_{25}/R_t de um NTC à temperatura ambiente de 25 °C

Por outro lado, podemos obter os valores de A e B. Para isso é necessário medir o valor da resistência R do NTC em dois valores quaisquer de temperaturas.

Da equação do NTC temos:

$$R_1 = A \cdot e^{B/T_1}$$

$$R_2 = A \cdot e^{B/T_2}$$

Se dividirmos a resistência R_2/R_1 , teremos:

$$\frac{R_1}{R_2} = e^{B(1/T_1 - 1/T_2)} \Rightarrow \log \frac{R_1}{R_2} = B \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) \log e$$

onde:

$$B = \left(\frac{1}{\log e} \right) \cdot \left(\frac{\log R_1 - \log R_2}{\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}} \right)$$

Podemos calcular o valor de B através da fórmula:

$$B = \frac{\log R_1 - \log R_2}{\log e \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right)}$$

Para calcular o coeficiente de temperatura α_T pela relação

$$\alpha_T = -\frac{B}{T^2}$$

Além do resistor que varia com a temperatura, temos resistores que variam sua resistência com a luminosidade e são conhecidos como LDR (Ligth Dependent Resistor). Ele é um dispositivo construído basicamente com sulfeto de cádmio (CdS) ou seleneto de cádmio (CdSe), sendo considerados semicondutores que diminuem sua resistência com o aumento da intensidade da luz.

Para determinar a resistência de um LDR em uma determinada luminosidade temos a seguinte equação

$$R_{LDR} = R_{escuro} \times L^{-a}$$

onde: R_{LDR} Resistência do LDR (Ω)

R_{escuro} Resistência do LDR sem presença de luminosidade (Ω)

L Luminosidade incidente sobre o LDR (lux)

a Constante do material usado no LDR (Ω/lux)



Figura 95 - LDR e seus simbolos esquemáticos

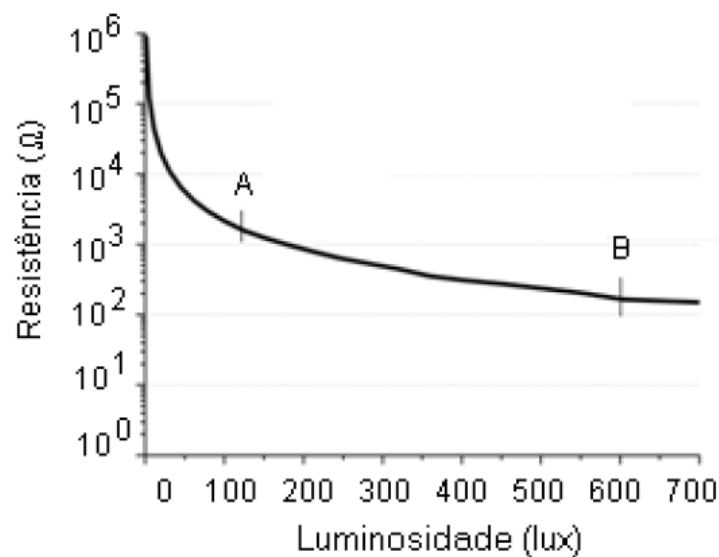


Figura 9

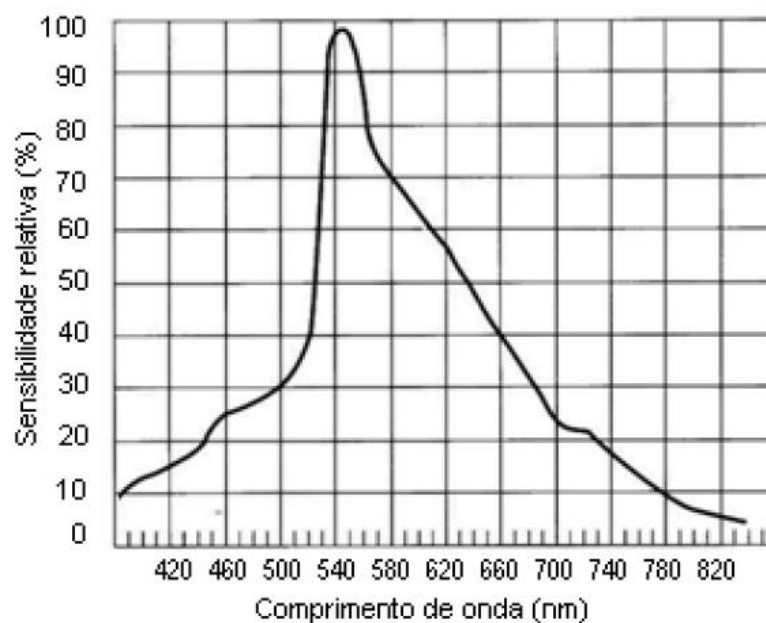


Figura 97 - Curva de resposta da sensibilidade do LDR pelo comprimento de onda.

3.2.5 - Associação de Resistores

Resistor é um dispositivo elétrico qualquer, cuja função seja inserir em um circuito uma determinada dificuldade à passagem de corrente elétrica. O chuveiro elétrico, promove o aquecimento da água através da resistência que fornece a passagem de corrente elétrica. Como veremos mais adiante, essa resistência, ao ser percorrida por uma corrente, dissipa energia sob a forma de calor. Essa mesma característica é

utilizada em fornos elétricos, ferros elétricos e outros aparelhos de aquecimento.

Os resistores podem ser associados em série, em paralelo ou em associações mistas e, cada uma dessas disposições possui características específicas que vamos analisar a seguir.

3.2.5.a Associação em série

Um conjunto de resistores está associado em série quando todos os resistores que compõem o circuito são percorridos pelo mesmo valor de corrente elétrica. Para que os resistores estejam associados em série basta que os resistores sejam ligados um em seguida do outro, conforme mostra a figura abaixo.

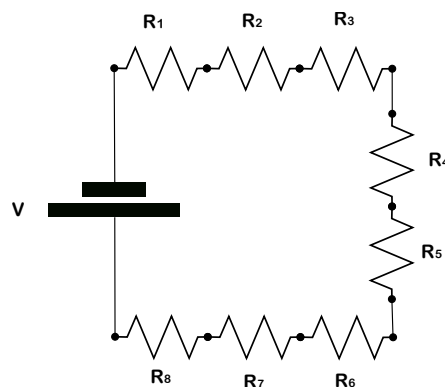


Figura 98 - Associação série de resistores

Para conhecermos o comportamento dessa associação de resistores frente a tensão que alimenta o mesmo, será necessário encontrar o que denominamos de **RESISTÊNCIA EQUIVALENTE**.

No caso da associação em série a resistência equivalente é obtida da soma de todas as resistências em série, desse modo:

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + \cdots + R_n$$

Em cada resistor irá passar o mesmo valor de corrente I e cada resistor ficará com uma pequena parcela da tensão que alimenta todo o circuito. Desse modo, a queda de tensão em cada resistor será dada por:

$$V_{R_n} = R_n \times I$$

Do mesmo modo, como já mencionamos, cada resistor irá dissipar uma potência, sob a forma de calor, que será proporcional a sua resistência. Desse modo

$$P_{R_n} = V_{R_n} \times I$$

$$P_{R_n} = \frac{V_{R_n}^2}{R_n} \Rightarrow R_n = \frac{V_{R_n}^2}{P_{R_n}}$$

Baseados nessas equações podemos determinar a potência total dissipada por uma associação em série.

$$V_{eq} \times I = V_1 \times I + V_2 \times I + V_3 \times I + \dots + V_n \times I$$

$$V_{eq} \times I = I \times (V_1 + V_2 + V_3 + \dots + V_n)$$

$$V_{eq} = \frac{I \times (V_1 + V_2 + V_3 + \dots + V_n)}{I}$$

$$V_{eq} = V_1 + V_2 + V_3 + \dots + V_n$$

Mas

$$P_{eq} = V_{eq} \times I$$

$$P_{eq} = (V_1 + V_2 + V_3 + \dots + V_n)I$$

$$P_{eq} = V_1I + V_2I + V_3I + \dots + V_nI$$

$$P_{eq} = P_1 + P_2 + P_3 + \dots + P_n$$

A associação em série é denominada **DIVISOR DE TENSÃO**.

3.2.5.b Associação em paralelo

Na associação em paralelo a tensão de alimentação é igual em todos os resistores e a corrente se divide de forma proporcional aos valores das resistências associadas.

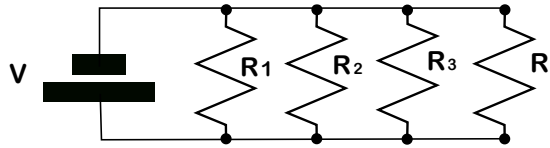


Figura 99 - Circuito paralelo

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots + \frac{1}{R_n}$$

Para o caso de somente dois resistores estarem associados, teremos:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \Rightarrow R_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$$

Fazendo o mínimo múltiplo comum entre os dois denominadores teremos:

$$R_{eq} = \frac{1}{\frac{R_2 + R_1}{R_1 \times R_2}} \Rightarrow R_{eq} = \frac{R_1 \times R_2}{R_1 + R_2}$$

Analisando as equações para encontrar a relação das correntes e potência teremos:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots + \frac{1}{R_n}$$

$$\frac{1}{\frac{V}{I_{eq}}} = \frac{1}{\frac{V}{I_{R_1}}} + \frac{1}{\frac{V}{I_{R_2}}} + \frac{1}{\frac{V}{I_{R_3}}} + \dots + \frac{1}{\frac{V}{I_{R_n}}}$$

$$\begin{aligned} \frac{I_{eq}}{V} &= \frac{I_1}{V} + \frac{I_2}{V} + \frac{I_3}{V} + \dots + \frac{I_n}{V} \Rightarrow I_{eq} \\ &= \frac{V(I_{R_1} + I_{R_2} + I_{R_3} + \dots + I_{R_n})}{V} \end{aligned}$$

$$I_{eq} = I_{R_1} + I_{R_2} + I_{R_3} + \dots + I_{R_n}$$

Considerando a potência teremos:

$$P_{eq} = V \cdot I_{eq}$$

$$P_{eq} = V(I_{R_1} + I_{R_2} + I_{R_3} + \cdots + I_{R_n})$$

$$P_{eq} = VI_{R_1} + VI_{R_2} + VI_{R_3} + \cdots + VI_{R_n}$$

$$P_{eq} = P_{R_1} + P_{R_2} + P_{R_3} + \cdots + P_{R_n}$$

Como podemos ver, assim como no circuito série, a potência total no circuito paralelo, também é resultado da soma de todas as potências parciais.

3.2.5.c Associação Mista

A associação mista de resistores é a mais comum das ligações de resistores. Nela encontramos resistores associados em série e em paralelo e existem várias formas de resolução desse tipo de circuito.

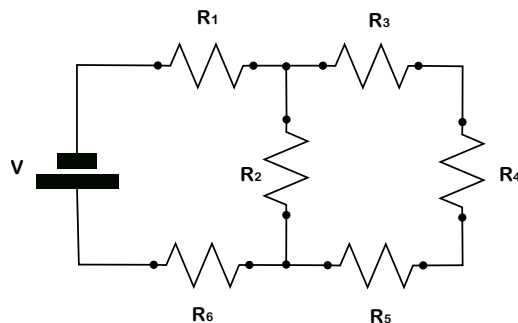


Figura 100 - associação mista de resistores

Como já dissemos, esse tipo de circuito permite uma série de formas de resolução. A primeira, e mais simples, é fácil de realizar em circuitos com pouco componentes.

Esse método consiste em reduzir o circuito toda a uma só resistência equivalente. Com o valor da resistência equivalente encontramos a corrente inicial que será a corrente total do circuito e depois começamos a retornar ao circuito anterior.

No caso do circuito da figura 91, em primeiro lugar resolveríamos a associação em série de R_3 , R_4 , R_5 . De posse desse resultado, que chamaremos de R_{T1} , resolvemos o circuito paralelo entre R_{T1} e R_2 . Chamaremos o resultado dessa segunda associação de R_{T2} . Esse resultado é associado em série com os resistores R_1 e R_6 . Teremos, por

fim, o Resistor Equivalente do circuito. Conforme mostra o diagrama a seguir.

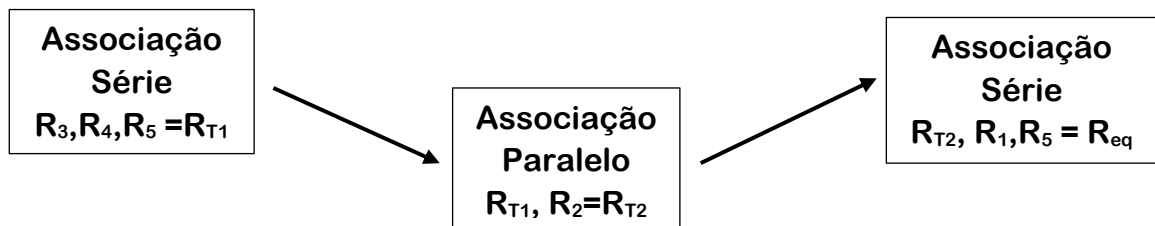


Figura 101 - Sequencia para encontrar o resistor equivalente do circuito da figura 80

Encontrado o resistor equivalente, aplicamos a lei de Ohm e encontramos a corrente total do circuito.

Com essa corrente total, que chamaremos de I_t , encontramos a queda de tensão sobre o resistor R_{T2} que será igual a queda de tensão no resistor R_2 .

Como R_2 está em paralelo com o resistor equivalente R_{T1} podemos utilizar esse valor de tensão para encontrar a corrente sobre R_3 , R_4 , R_5 e a análise está concluída.

Como podemos ver pela descrição, para circuitos com muitos resistores esse método apresenta muita complexidade e muito trabalho. Para isso utilizamos outros métodos que simplificam significativamente o resultado.

3.2.6 - Leis de Kirchhoff

As leis de Kirchhoff são leis utilizadas para solução de problemas com circuitos mais complexos. Esses circuitos podem ter sua complexidade devido a 3 fatores:

- Grande número de resistores;
- Grande número de resistores e outros componentes;
- Mais de uma fonte de alimentação.

As leis de Kirchhoff são duas. A primeira lei é conhecida como Lei dos Nós e a segunda lei é conhecida como Lei das Malhas.

3.2.6.a - Primeira Lei de Kirchhoff – A Lei dos Nós

A primeira lei diz que a soma de todas as correntes que chegam em um nó é igual a soma de todas as correntes que saem desse mesmo nó, ou seja:

$$\sum I_{in} = \sum I_{out}$$

Essa lei é uma consequência da conservação da carga total existente no circuito. Isso confirma que nenhuma carga é acumulada em um nó

elétrico. Definimos nó como um ponto onde 3 ou mais componentes elétricos se juntam.

Imaginemos o circuito abaixo:

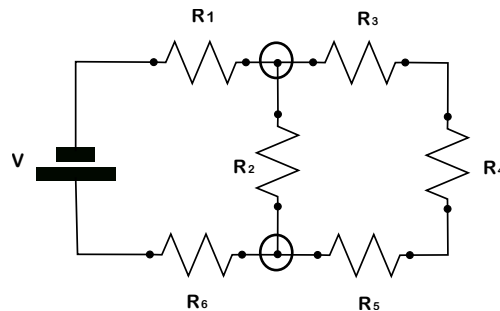


Figura 102 - Representação de nós

O ponto de encontro dos resistores R_1 , R_2 e R_3 é um nó, e nele, temos correntes que chegam e que saem desse nó e, portanto, a soma de todas é igual a zero. Do mesmo modo teremos esse resultado no nó representado pela união dos resistores R_2 , R_5 e R_6 .

3.2.6.b - Segunda Lei de Kirchhoff – A Lei das Malhas

A lei das malhas diz que o somatório de todas as Forças Eletromotrizes (f.e.m) em uma malha qualquer, é igual as quedas de tensão de todos os componentes dessa malha.

$$\sum f.e.m = \sum R_n \cdot I_n$$

Vamos analisar o circuito abaixo.

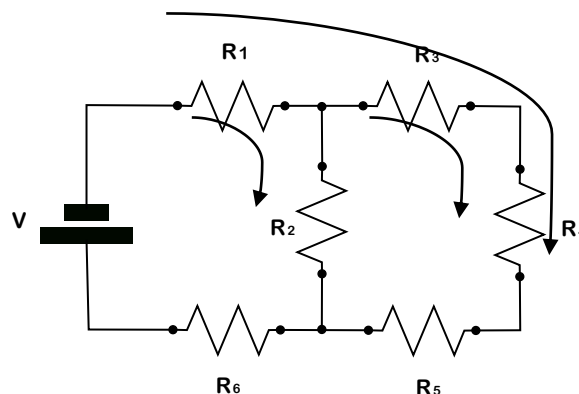


Figura 103 - Representação de malha

Nesse circuito existe 3 malhas possíveis. Nem sempre é necessário utilizar todas.

A primeira malha é constituída da fonte V e dos resistores R_1 , R_2 e R_6 . A segunda malha é composta pelos resistores R_2 , R_3 , R_4 e R_5 . Finalmente a terceira malha é composta pela fonte V e os resistores R_1 , R_3 , R_4 , R_5 e R_6 .

Capítulo IV

CAPACITORES

“Em todo o espaço há energia...é(só) uma questão de tempo até que os homens tenham êxito em associar seus mecanismos ao aproveitamento desta energia.”

Nikola Tesla

4.1 CAPACITORES EM CORRENTE CONTÍNUA

4.1.1 - Definição e Histórico

Uma das principais descobertas ligadas a eletricidade, ocorrida no século XVIII foi feita por Von Musschenbroek, na cidade de Leiden, na Holanda que foi realizada a partir de um experimento realizado anteriormente por dois estudiosos da Pomerânia, Andreas Cunaeus e Ewald Jürgen Von Kleist. O experimento de Von Musschenbroek consistia de uma garrafa cheia de água que foi conectada a uma máquina eletrostática. Em seguida ele aproximou a outro objeto e verificou o surgimento de uma grande faísca.

Posteriormente esse experimento foi aperfeiçoado com a colocação de uma chapa metálica no interior da garrafa, encostada na parte interior do vidro e outra chapa metálica na parte externa da garrafa. A chapa interna é ligada ao exterior através de um fio que é conectado na chapa interior. Esse foi o primeiro protótipo do capacitor modernos.

Um capacitor é um dispositivo muito utilizado em eletroeletrônico que é utilizado para armazenar energia elétrica sob a forma de campo elétrico que existe no seu interior.

Consideremos um gerador de cargas elétricas ou corpo carregado que é conectado a uma esfera condutora com o raio R . Ambos estão imersos em um meio cuja constante eletrostática é k .

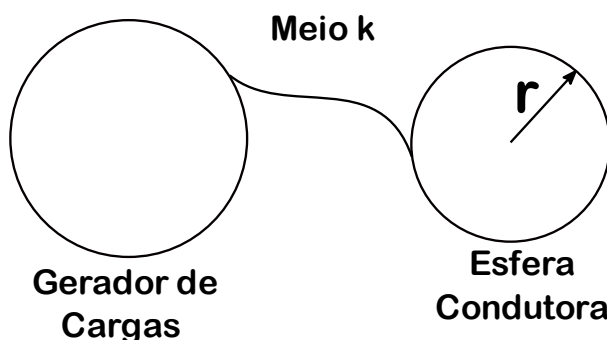


Figura 104 - Experimento para mostrar o funcionamento do capacitor

O condutor que liga a esfera até o gerador de cargas fará com que as cargas geradas sejam levadas para a esfera condutora carregando-a com uma carga Q . Pelo que já vimos anteriormente, sabemos que o potencial elétrico formado na superfície de uma esfera condutora carregada será dado pela equação.

$$V = k \frac{Q}{R}$$

onde: V – potencial elétrico na superfície da esfera (Volts)

Q – quantidade de carga (Coulomb)

R – raio da esfera (metros)

k – constante eletrostática do meio ($9 \times 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$ para o vácuo)

Se trabalharmos a equação teremos:

$$\frac{Q}{V} = \frac{R}{k}$$

Aumentando a quantidade de cargas Q na esfera, iremos verificar que o potencial elétrico V aumenta na mesma proporção e isso nos permite realizar a seguinte relação matemática:

$$\frac{Q_1}{V_1} = \frac{Q_1}{V_1} = \dots = \frac{Q_1}{V_1} = \frac{Q_1}{V_1} = \frac{R}{k} = cte = C$$

Essa constante C depende do raio da esfera e do meio ou da quantidade de carga Q e do potencial elétrico V , é chamada Capacitância.

Então podemos dizer que a capacitância é a expressão da habilidade de um dispositivo em armazenar cargas elétricas.

A unidade de capacitância é o FARAD (F), que é a razão entre a quantidade de carga elétrica e a voltagem.

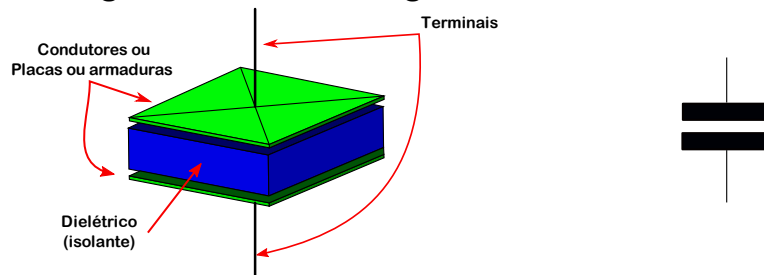


Figura 105 - Esquema construtivo de um capacitor e sua simbologia

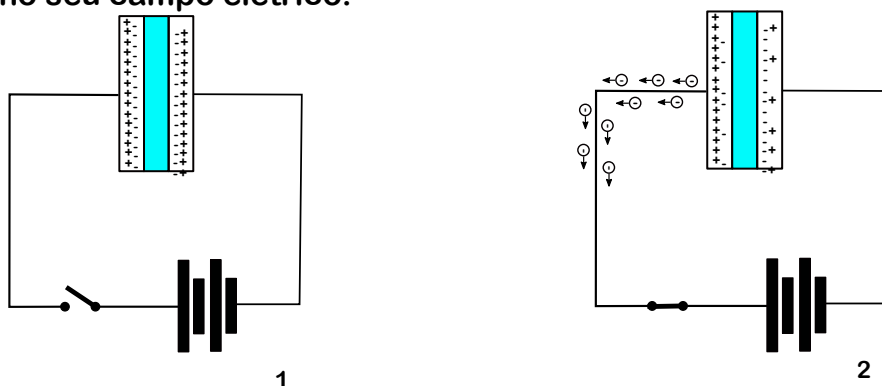
<i>Material</i>	<i>Constante Dielétrica K</i>	<i>K Usual</i>
Vácuo	1	1
Ar	1,0001	1
Água	78,0	78
Óxido de Alumínio	7 a 8	
Cerâmica	≥ 10	
Vidro	4 a 10	8
Vidro Pyrex	4,5	4,5
Mica	6 a 8	6
Papel	2 a 5	3,5
Pertinax	5	5
Polycarbonato (MKC ou MAC)	3	3
Poliéster (MKT)	3,0 a 3,2	
Polipropileno (MKP)	2,1 a 2,3	
Poliestireno (MKS)	2,5	2,5
Porcelana	4 a 8	6,5
Óxido de Tântalo	11	11
Teflon	2,0 a 2,1	
Baquelite	4,8	4,8

Figura 106 - Tabela das constantes dielétricas de alguns materiais

4.1.2 - Processo de Carga dos Capacitores

Imagine um capacitor sendo ligado em uma fonte de alimentação através de uma chave do tipo Liga-Desliga. Gradativamente as duas placas do capacitor passarão a ficar carregadas. A placa ligada ao polo positivo da bateria ficará carregada positivamente e a placa ligada ao polo negativo ficará carregada negativamente. Como já vimos, considerando que as duas placas ficaram com a mesma quantidade de cargas, mas com sinais diferentes, surgirá entre elas um campo elétrico uniforme que é orientado da placa positiva para a placa negativa.

Considerando que as cargas elétricas se encontram imersas em um campo elétrico, elas possuem potencial elétrico e a diferença de potencial entre as placas estabelece uma tensão elétrica no capacitor carregado. Esse é o motivo pelo qual dizemos que o capacitor armazena energia elétrica no seu campo elétrico.



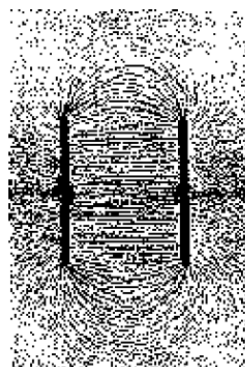
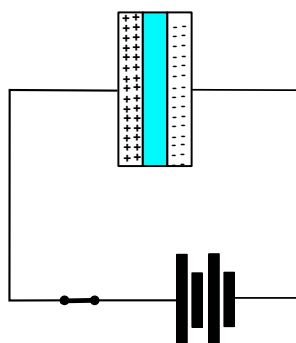


Figura 107 - (1) Capacitor descarregado; (2) Chave fechada, capacitor carregando; (3) Capacitor carregado; (4) Campo elétrico uniforme no interior do capacitor

Vamos agora considerar o circuito abaixo:

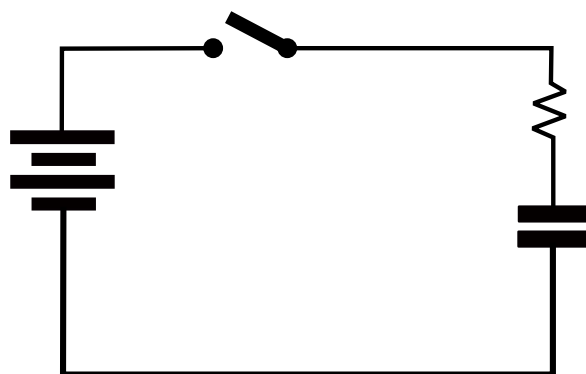


Figura 108 - Circuito RC em corrente contínua

Enquanto a chave está aberta, não há corrente e, portanto, a tensão no capacitor e no resistor são nulos.

Quando a chave é fechada, o capacitor está descarregado, sendo assim, toda a tensão da bateria estará sobre o resistor. Desse modo, podemos concluir que, no instante em que a chave é fechada, a corrente máxima do circuito será dada por:

$$I_0 = \frac{E}{R}$$

Essa corrente continuará fluindo no circuito enquanto o capacitor está sendo carregado. Durante esse processo a corrente irá diminuindo até chegar a zero.

A tensão sobre o capacitor também irá diminuindo e, a cada instante de tempo ela terá o valor dado pela seguinte equação:

$$V_R = E \cdot e^{-t/RC}$$

onde: V_R – Tensão no resistor (volt)

E – Tensão na fonte (volt)

e – 2,718 (constante)

t – tempo decorrido do momento do fechamento da chave até o instante que se deseja.

Sabendo que um circuito série é um divisor de tensão, a tensão do capacitor será dada por:

$$V_c = E - V_R$$

Logo:

$$V_c = E - E \cdot e^{-t/RC}$$

Desse modo:

$$V_c = E(1 - e^{-t/RC})$$

Com essa equação podemos calcular a tensão do capacitor em qualquer instante durante a carga do capacitor. O denominador RC é chamado **CONSTANTE DE TEMPO** do circuito.

Essa constante de tempo será a mesma para a carga e para descarga do capacitor.

Durante o processo de descarga do capacitor a tensão sobre o capacitor será dada por:

$$V_c = E_0 \cdot e^{-t/RC}$$

E a corrente será dada por

$$I = I_0 e^{-t/RC}$$

A partir dessas equações conseguimos levantar as curvas de carga e descarga dos capacitores em corrente contínua.

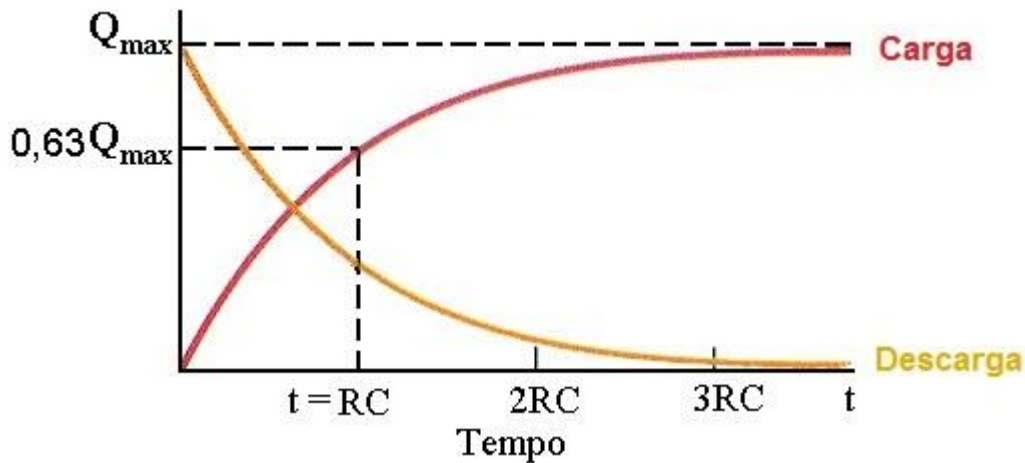


Figura 109 - Curva de carga e descarga de um capacitor.

4.1.3 – Reatância Capacitiva

Os capacitores apresentam grande resistência quando sofrem variações de tensão. A essa oposição damos o nome de REATÂNCIA CAPACITIVA. O valor da reatância capacitiva é dado por:

$$X_c = -\frac{1}{2\pi fC}$$

Em corrente contínua, o capacitor se comporta como um circuito aberto. Em corrente alternada o capacitor se comporta com alta impedância, entretanto, como podemos ver na equação, para frequências muito altas o capacitor tem um comportamento que se aproxima de um curto circuito.

4.1.3 - Associação de Capacitores

Assim como os resistores, os capacitores podem ser associados em série, em paralelo ou em uma associação mista.

4.1.3.a – Associação em Série

Quando associamos capacitores em série temos:

$$q_1 = C_1 V_1, q_2 = C_2 V_2 \text{ e } q_3 = C_3 V_3$$

$$q_1 = q_2 = q_3 = q_n$$

Em uma associação em série

$$V = V_1 + V_2 + \dots + V_n$$

Logo

$$V = q \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_1} + \dots + \frac{1}{C_n} \right)$$

Considerando que

$$V = \frac{q}{C_{eq}}$$

Então

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n} \Rightarrow \frac{1}{C_{eq}} = \sum_i \frac{1}{C_i}$$

4.1.3.b Associação em Paralelo

Partido do mesmo pressuposto anterior, temos:

$$q_1 = C_1 V_1, q_2 = C_2 V_2 \text{ e } q_3 = C_3 V_3$$

$$q_1 = q_2 = q_3 = q_n$$

Mas em uma associação em série a carga total é igual a soma das cargas parciais, sendo assim:

$$q = q_1 + q_2 + \dots + q_n$$

Como

$$q = C_{eq} V$$

Então

$$C_{eq} = (C_1 + C_2 + \dots + C_n) \Rightarrow C_{eq} = \sum_i C_i$$

4.1.3.c – Associação Mista

Entre os capacitores, as associações mistas são resolvidas da mesma forma que as associações mistas de resistores.

4.1.3 - Tipos de Capacitores

Comercialmente existem diversos tipos de capacitores que são utilizados nas mais diversas aplicações. Para classificarmos os capacitores, geralmente o fazemos relacionando com o material que compõem seu dielétrico.

Os tipos mais comuns encontrados no comércio são:

- Capacitores Cerâmicos (disco Cerâmico, tipo “plate” e multicamadas);
- Capacitores de Filme Plástico (de poliéster, policarbonato, polipropileno e poliestireno);
- Capacitores Eletrolíticos de Alumínio;
- Capacitores Eletrolíticos de Tântalo;
- Capacitores Variáveis;
- Capacitores de Mica.

4.1.3.a – Capacitores de Disco Cerâmico

Esse tipo de capacitor é construído com um dielétrico que é feito de material cerâmico. Para fabricar esses capacitores começa com uma determinada quantidade de pó de cerâmica que é colocado em uma prensa e comprimido na forma de pastilhas. Quando as pastilhas estão prontas elas recebem um tratamento térmico para consolidação da pastilha. Após esse processo, as pastilhas são impregnadas de prata que é pulverizada nas duas faces da pastilha. Elas formarão as duas placas do capacitor. Depois de pronto são soldados os terminais sobre as camadas de prata. Isso ocorre após um banho desengordurante para limpeza. Concluída essa etapa uma resina é impregnada para proteção e isolamento e o capacitor é levado a um forno pra endurecimento da resina.

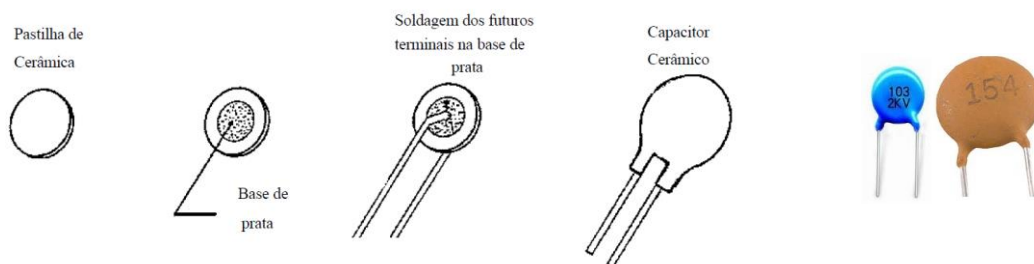


Figura 110 - Sequência das etapas de fabricação de um capacitor de cerâmica

Os capacitores de disco cerâmico são componentes com valores de média e baixa capacitância, normalmente na ordem dos picofarads (10^{-12}). Tem sua principal utilização em circuitos que operam em alta frequência. Isso ocorre porque o baixo fator de perda e alta estabilidade do valor de capacitância são importantes, e esses capacitores fornecem essas características.

A identificação do valor de capacitância desses capacitores é, normalmente feita pela leitura direta no corpo do capacitor, bastando ler o número impresso no componente e multiplica-lo por 10^{-12} . Esses números respeitam um código de 3 algarismos. O primeiro algarismo indica a unidade, o segundo indica a dezena e o terceiro indica o número de zeros que compõem o valor do componente.

A tolerância do capacitor de cerâmica é expresso por uma letra que, normalmente, é impressa após o valor da capacitância.

C ≤ 10 pF	letra indicativa	C > 10 pF
+/- 0,1 pF	B	
+/- 0,25 pF	C	
+/- 0,5 pF	D	
+/- 1 pF	F	+/- 1 %
+/- 2 pF	G	+/- 2 %
	H	+/- 3 %
	J	+/- 5 %
	K	+/- 10 %
	M	+/- 20 %
	S	+ 50% a - 20%
	Z	+ 80% a - 20%
		+ 100% a - 20%
	P	+ 100%

Figura 111 - Código para identificação da tolerância

4.1.3.b – Capacitores de Disco Cerâmico “Plate”

Esse tipo de capacitor cerâmico tem como principais vantagens e características o seu tamanho que é ultra reduzido, grande estabilidade no valor da capacitância, baixo custo e uma estreita faixa de tolerância que gira em torno de 2%. Na tabela abaixo temos uma representação resumida dos principais dados desse tipo de capacitor. A principal diferença em relação aos capacitores de cerâmica é o fato de que os tipo “plate” possuem placas retangulares de cobre e os cerâmicos convencionais possuem placas circulares de prata.

4.1.3.d – Capacitores de Filme Plástico

Esse tipo de capacitor possui um dielétrico que é uma lâmina de material plástico (poliéster, polipropileno, poliestireno, policarbonato). Sua capacitância é da ordem dos nanofarads (10^{-9}). Tem como principais características a baixíssimas perdas no dielétrico, alta resistência de isolamento, estabilidade da capacitância, baixa porosidade e, conseqüentemente, grande resistência a umidade. Os tipos são Poliéster (MKT), polipropileno (MKP), Poliestireno (MKS) e Policarbonato (MKC ou MAC).

Existem dois tipos. Os não metalizados possuem dielétrico de filme plástico e armaduras de folhas de alumínio. O conjunto de armaduras mais o dielétrico podem ser bobinados ou sanfonados, fornecendo duas opções construtivas. Já os capacitores metalizados têm como característica marcante tem a propriedade de auto regeneração. O dielétrico desses tipos de capacitores consiste de filmes de plástico em cuja a superfície era depositada, através de um processo de vaporização, uma camada de alumínio que deixa esse filme plástico metalizado. Nesse caso, podemos bobinar o capacitor ou então dispor o conjunto em camadas. Através da deposição das superfícies laterais dos capacitores com o metal vaporizado obtemos um bom contato entre as armaduras e os terminais, assegurando baixa indutância e baixas perdas. Nesse tipo de capacitor, em caso de sobre tensão capaz de perfurar o filme plástico, a camada de alumínio que existe em torno do furo, por ser submetido a elevada temperatura, acaba se transformando em óxido de alumínio, que é isolante desfazendo o curto-circuito. Esse fenômeno é conhecido como auto regeneração.

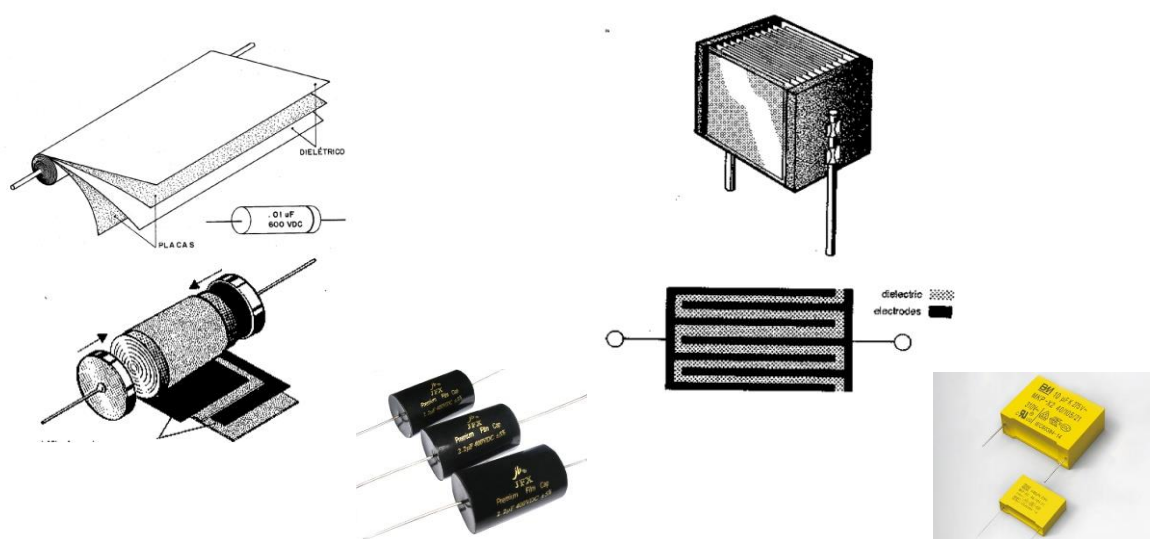
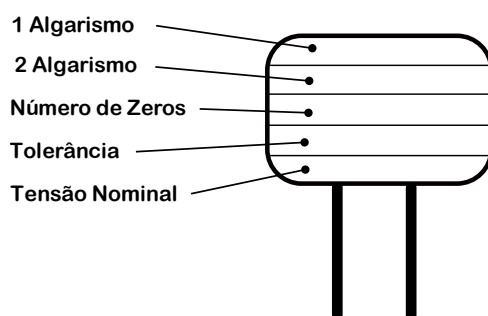


Figura 115 - Esquemas construtivos dos capacitores de filme plástico metalizado e não metalizado

A leitura do valor do capacitor pode ser feita de forma direta com os valores impressos que aparecem da seguinte forma: o valor nominal (um número), a tolerância (em letra maiúscula) e a tensão nominal (um número com unidade, geralmente). Uma das principais características dessa representação é que quando o valor nominal for maior que 1, o valor está sendo indicado em picrofarad (pF). No caso do valor indicado ser menor que 1, o valor estará expreso em microfarad (μ F). Quanto a tolerância, utilizamos a mesma tabela da figura 8. A outra forma de indicação do valor desse tipo de capacitor é o código com 5 faixas coloridas e a leitura deve ser feita conforme a figura abaixo.



Cor	1º Algarismo	2º Algarismo	Número de Zeros	Tolerância	Tensão Nominal
Preto	0	0		$\pm 20\%$	
Marrom	1	1	0		100V
Vermelho	2	2	00		250V
Laranja	3	3	000		
Amarelo	4	4	0000		400V
Verde	5	5	00000		
Azul	6	6			630V
Violeta	7	7			
Cinza	8	8			
Branco	9	9		$\pm 10\%$	

Figura 116 - Tabela de cores para capacitores de filme plástico

4.1.3.e – Capacitores Eletrolíticos de Alumínio

De um modo geral, todo o capacitor é constituído de duas armaduras e um dielétrico entre elas. Os capacitores eletrolíticos também possuem essa característica, entretanto se diferenciam dos demais pelo fato de que o terminal que corresponde ao cátodo está associado a um fluido condutor conhecido como eletrólito, e não a uma armadura metálica. O outro terminal, o ânodo, está ligado a uma folha de alumínio que teve sua superfície formada por um processo eletroquímico que forma uma camada de óxido de alumínio que servirá como dielétrico. Normalmente o núcleo é bobinado. Esse núcleo bobinado possui a folha de alumínio acima descrita e uma segunda folha de alumínio conhecida como folha de cátodo. Essa folha não é oxidada e tem a função de servir como eletrodo da substância líquida condutora.

Ambas as folhas são separadas por algumas camadas de papel poroso que armazena o eletrólito. A principal característica desses capacitores é a alta capacitância específica e apresentam valores da ordem de microfarads (10^{-6}). Como em qualquer outro capacitor, os capacitores eletrolíticos têm sua capacitância proporcional a áreas de suas placas e inversamente proporcional a distância entre elas. Nos capacitores eletrolíticos a distância entre as placas é determinada pela espessura da camada de óxido que se forma na folha de ânodo. O óxido de alumínio é mais vantajoso que outros dielétricos pois pode ser obtido direto do filme de alumínio, além de ser capaz de suportar altas tensões elétricas. A distância máxima de afastamento entre as armaduras é de 0,7 mm enquanto a espessura da camada de papel gira em torno de 6 a 8 mm. O processo de cauterização eletroquímica torna a folha de alumínio rugosa, o que aumenta a superfície das placas. Isso ocorre porque, como o cátodo é um eletrólito ele preenche muito bem as reentrâncias da folha do ânodo.

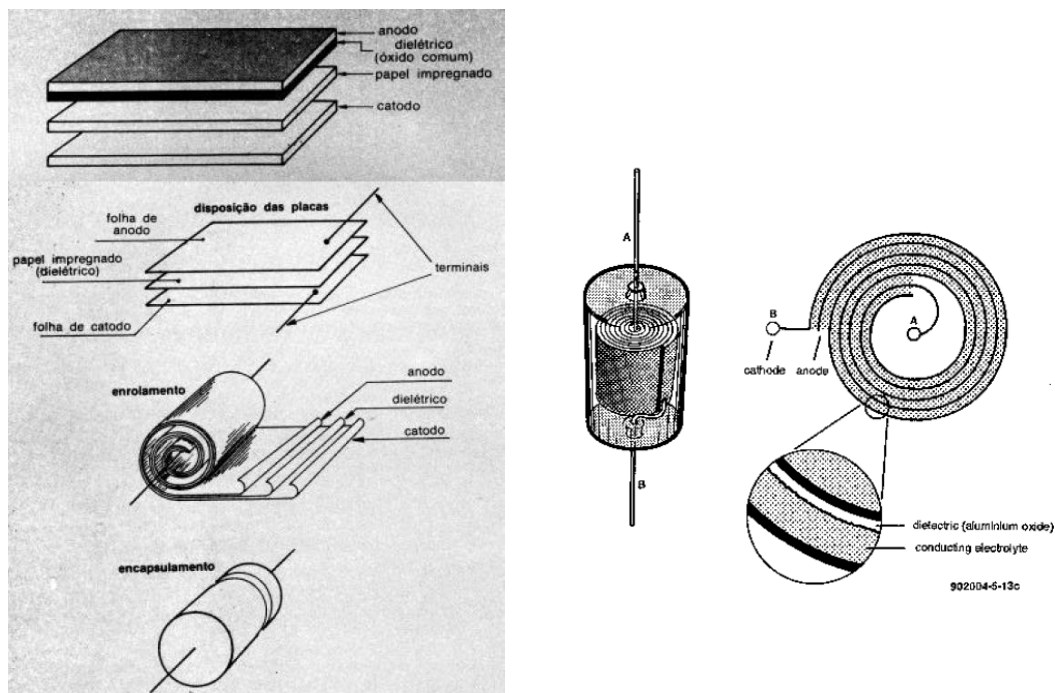


Figura 117 - Aspectos construtivos de um capacitor eletrolítico

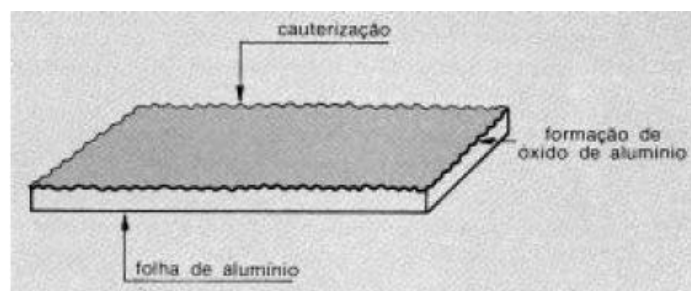


Figura 118 - Superfície rugosa que surge após a cauterização eletroquímica

Os capacitores eletrolíticos que são construídos dessa forma são polarizados, ou seja, o polo positivo deve ser ligado no ânodo e o polo negativo no cátodo. A ligação com polarização invertida inicia o processo eletrolítico que deposita uma camada de óxido sobre a folha de cátodo. Esse processo pode gerar gás e esse pode destruir ou explodir o capacitor. Existem alguns capacitores eletrolíticos que não são polarizados. Eles são conhecidos como bipolares. Esses capacitores são construídos substituindo a folha de cátodo, por uma segunda folha de ânodo, que é construída da mesma forma da primeira. Esse tipo de substituição permite que o capacitor funcione em corrente contínua, em qualquer polaridade e também funcione em corrente alternada. Esse tipo de capacitor necessita de até o dobro do volume de um capacitor polarizado de mesmo valor de capacitância e tensão. Os valores de capacitância vêm indicados no corpo do capacitor, bem como a polaridade, no caso dos capacitores



Figura 119 - Capacitor Eletrolítico Polarizado

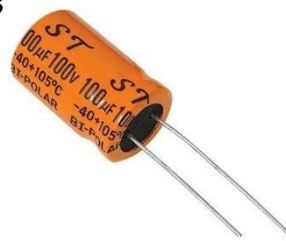


Figura 120 - Capacitor Eletrolítico Não Polarizado

4.1.3.f – Capacitores Eletrolíticos de Tântalo

Esse tipo de capacitor utiliza óxido de tântalo como material isolante e também são polarizados devido a existência de um eletrólito. Esse tipo de capacitor é indicado especificamente para circuitos impressos e que requeiram baixa corrente de fuga e baixo fator de perdas. São capacitores que apresentam longa vida operacional, são muito compactos e elevada estabilidade nos parâmetros elétricos. Sua identificação é feita pelo valor impresso diretamente no corpo do capacitor, assim como a tensão nominal e a polaridade.

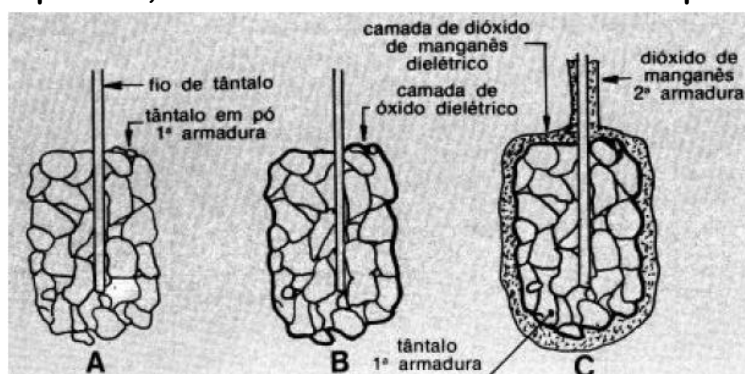


Figura 121 - Aspecto construtivo de um capacitor de tântalo

4.1.3.g – Capacitores Variáveis

Existem determinados dispositivos eletrônicos cuja utilização necessita de variações em um valor de capacitância. Circuitos de sintonia de rádio é um exemplo. Para isso utilizamos capacitores variáveis, que são aqueles que permitem a variação de sua capacitância.

Nesses capacitores o dielétrico é, normalmente, o ar ou então, o filme plástico e sua capacitância pode ser variada por meio de um eixo ou parafuso. Nesse eixo ou parafuso são fixadas placas ou grupo de placas móveis. Um segundo grupo de placas é fixo e montado sobre um material isolante do corpo ou chassi. Esse eixo ou parafuso, ao ser movimentado aproxima ou afasta as placas móveis das placas fixas fazendo com que a capacitância varie.

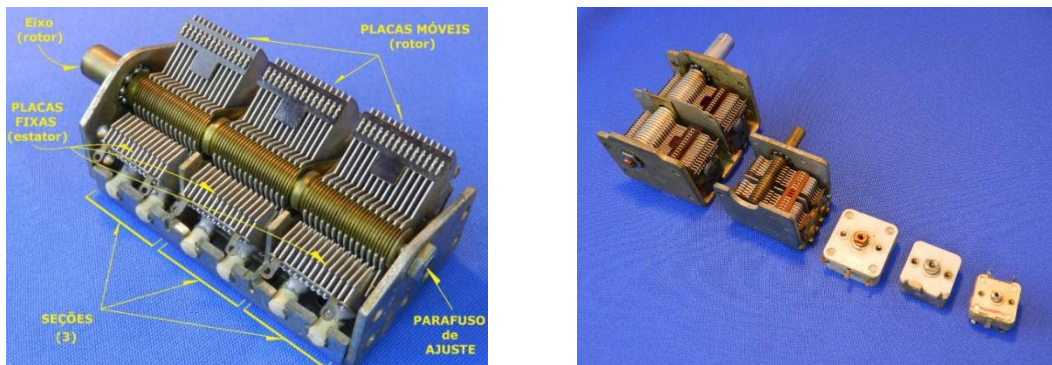


Figura 122 - Tipos de capacitores variáveis

Capítulo V

CIRCUITOS ELÉTRICOS

“Em todo o espaço há energia...é(só) uma questão de tempo até que os homens tenham êxito em associar seus mecanismos ao aproveitamento desta energia.”

Nikola Tesla

5.1 CIRCUITOS EM CORRENTE CONTÍNUA

Definimos um circuito de Corrente Contínua C.C. como sendo aquele circuito em que todas as fontes de tensão têm sua força eletromotriz constante.

Quando os circuitos possuem capacitores, existe uma pequena flutuação na corrente durante um período de tempo denominado transitório. Esse período transitório, que dura frações de segundos, se estabiliza quando os capacitores estão carregados, e a corrente passa a ser estável novamente.

Para estudar um circuito de forma mais eficaz é interessante representá-lo sob a forma de um diagrama de circuito.

A figura abaixo mostra um circuito divisor de tensão onde os pontos A, B e C são os três terminais do potenciômetro.

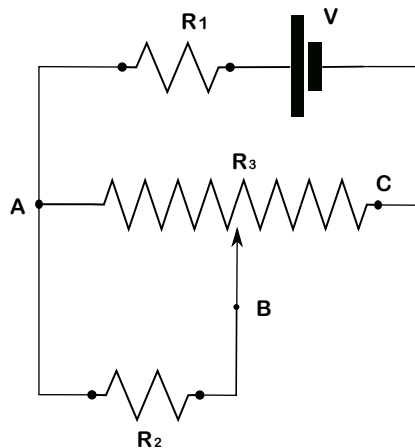


Figura 123 - Representação de um diagrama de circuito.

5.1.1 Leis dos Circuitos

A análise de um circuito elétrico consiste em calcular correntes e tensões em cada componente que constitui o circuito. Através desses valores podemos determinar a potência dissipada em cada componente do circuito.

Como já comentamos anteriormente, existem várias formas de analisarmos um circuito elétrico. Entretanto, podemos lançar mão de uma técnica que é capaz de solucionar de forma mais simples e rápida qualquer tipo de circuito elétrico. Essas técnicas são conhecidas como Leis de Kirchhoff.

5.1.1.a – Primeira Lei de Kirchhoff

Como já vimos, a primeira lei de Kirchhoff é também conhecida como a lei dos nós e ela nos diz que o somatório de todas as correntes que fluem para um nó é igual ao somatório de todas as correntes que saem desse nó. Essa lei é válida sempre que as correntes são estacionárias, ou seja, que se mantenham constantes. Nesse caso a densidade da nuvem de cargas de condução permanece constante dentro do condutor, sem que ocorra acumulação de cargas em nenhum ponto do circuito. Sendo assim, toda a carga que entra em um condutor, por unidade de tempo, deverá sair por outros condutores.

5.1.1.b – Segunda Lei de Kirchhoff

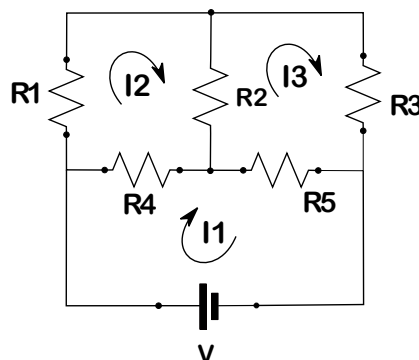
A segunda lei, também conhecida como lei das malhas ou lei das tensões nos diz que a soma das diferenças de potencial, em qualquer percurso fechado em um circuito é sempre nula. Esse percurso fechado é conhecido como malha.

5.1.1.c – Analisando o Método das Malhas

Como já vimos, em circuitos com várias resistências e somente uma fonte de alimentação, podemos dimensionar o circuito através do método de encontrar a resistência equivalente e, a partir dela, começar a determinar as correntes e as quedas de tensão nos componentes dos circuitos.

Existem casos em que os circuitos possuem mais de uma fonte de alimentação e, nesses casos, é necessário utilizar as leis de Kirchhoff para solucionar o problema.

Vamos analisar o caso do circuito abaixo.



As correntes são dispostas com seu sentido escolhido aleatoriamente, uma em cada malha. Depois de resolvido o problema, as correntes que se deslocarem em sentido contrário aos estipulados, apresentarão sinal negativo.

Na análise, utilizaremos as duas leis de Kirchhoff para organizar o sistema de equações.

A malha da corrente I_1 terá a seguinte equação (pela segunda lei de Kirchhoff):

$$V = I_1 R_4 + I_1 R_5$$

A malha da corrente I_2 será dada por:

$$0 = I_2 R_1 + (I_2 - I_3) R_2 + (I_2 - I_1) R_4$$

Finalmente na malha da corrente I_3 teremos:

$$0 = (I_2 - I_3) R_2 + I_3 R_3 + (I_3 - I_1) R_5$$

Com essas três equações montamos um sistema.

$$\begin{cases} I_1 R_4 + I_1 R_5 = V \\ I_2 R_1 + I_2 R_2 - I_3 R_2 + I_2 R_4 - I_1 R_4 = 0 \\ I_2 R_2 - I_3 R_2 + I_3 R_3 + I_3 R_5 - I_1 R_5 = 0 \end{cases}$$

Colocando as correntes em evidência temos:

$$\begin{cases} I_1 (R_4 + R_5) = V \\ I_2 (R_1 + R_2 + R_4) - I_3 R_2 - I_1 R_4 = 0 \\ I_2 R_2 + I_3 (-R_2 + R_3 + R_5) - I_1 R_5 = 0 \end{cases}$$

Agora basta montarmos um sistema de matrizes:

$$\begin{bmatrix} (R_4 + R_5) & 0 & 0 \\ -R_4 & -R_2 & (R_1 + R_2 + R_4) \\ -R_5 & R_2 & (-R_2 + R_3 + R_5) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para calcularmos as correntes, utilizamos a lei de OHM. Desse modo teremos:

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \div \begin{bmatrix} (R_4 + R_5) & 0 & 0 \\ -R_4 & -R_2 & (R_1 + R_2 + R_4) \\ -R_5 & R_2 & (-R_2 + R_3 + R_5) \end{bmatrix}$$

Assim teremos:

$$I_1 = \begin{bmatrix} V & 0 & 0 \\ 0 & -R_2 & (R_1 + R_2 + R_4) \\ 0 & R_2 & (-R_2 + R_3 + R_5) \end{bmatrix} \div \begin{bmatrix} (R_4 + R_5) & 0 & 0 \\ -R_4 & -R_2 & (R_1 + R_2 + R_4) \\ -R_5 & R_2 & (-R_2 + R_3 + R_5) \end{bmatrix}$$

$$I_2 = \begin{bmatrix} V & (R_4 + R_5) & 0 \\ 0 & -R_4 & (R_1 + R_2 + R_4) \\ 0 & -R_5 & (-R_2 + R_3 + R_5) \end{bmatrix} \div \begin{bmatrix} (R_4 + R_5) & 0 & 0 \\ -R_4 & -R_2 & (R_1 + R_2 + R_4) \\ -R_5 & R_2 & (-R_2 + R_3 + R_5) \end{bmatrix}$$

$$I_3 = \begin{bmatrix} V & 0 & (R_4 + R_5) \\ 0 & -R_2 & -R_4 \\ 0 & R_2 & -R_5 \end{bmatrix} \div \begin{bmatrix} (R_4 + R_5) & 0 & 0 \\ -R_4 & -R_2 & (R_1 + R_2 + R_4) \\ -R_5 & R_2 & (-R_2 + R_3 + R_5) \end{bmatrix}$$

5.1.2 Circuitos com Capacitores

Como já vimos, a diferença de potencial em um capacitor é diretamente proporcional à carga que está armazenada nas suas armaduras. Quando ligamos um capacitor que está sem carga, a diferença de potencial em seus terminais é nula. Para o circuito, esse capacitor se comporta como um curto circuito. Nos instantes seguintes a carga do capacitor começa a aumentar e a diferença de potencial em seus terminais começa a aumentar.

Também já vimos que essa carga não pode aumentar indefinidamente ela vai até atingir um valor constante. Quando esse valor é atingido a corrente no capacitor é zero e ele passa a ser considerado um interruptor aberto que impossibilita a passagem de corrente. Como já foi dito, o período até a estabilização da carga do capacitor é denominado TRANSITÓRIO.

Essa análise teórica, na prática não se verifica integralmente pois os capacitores possuem uma pequena corrente, mesmo com carga completa, que é denominada CORRENTE DE FUGA.

Capítulo VI

CORRENTE ALTERNADA

“Lembre-se que as pessoas podem tirar tudo de você, menos seu conhecimento”

Albert Einstein

6.1 CORRENTE ALTERNADA

Vamos imaginar um circuito de corrente contínua, um circuito básico, com uma fonte, que pode ser química ou eletromecânica, e uma carga que pode ser uma lâmpada. Nesse tipo de circuito, a corrente flui a partir do terminal negativo da fonte, viaja pelo circuito, passa pela carga e retorna ao terminal positivo da fonte. Esse movimento de carga é conhecido como corrente elétrica e, nesse caso, é corrente contínua.

Agora vamos imaginar o mesmo circuito só que com uma pequena modificação, vamos substituir a fonte de energia de corrente contínua, por uma fonte de corrente alternada. Isso significa que a fonte esta constantemente trocando de polaridade. Desse modo, por um intervalo de tempo, a corrente flui em uma direção e, no intervalo seguinte, a corrente irá fluir na direção contrária. Esse ciclo se repete indefinidamente enquanto a fonte estiver ligada. Essa corrente é conhecida como Corrente Alternada.

6.1.1 Fontes de Corrente Alternada

Como já falamos, um condutor elétrico, quando corta um campo magnético, surge nesse uma corrente nesse condutor. Agora, vamos imaginar um gerador que possui uma bobina que será imersa em um campo magnético B e gira, imersa nesse campo, com uma frequência angular ω . Enquanto gira, o fluxo do campo magnético que atravessa a bobina é dado por:

$$\Phi_B = \overrightarrow{A_n} \cdot \vec{B} = AB \cos(\theta) = AB \cos(\omega t + \delta)$$

Nessas condições, uma força eletromotriz ε será induzida nas extremidades do anel, como é determinado pela lei de Faraday

Nestas condições, uma força eletromotriz ε será induzida nas extremidades do anel, como determinado pela Lei de Faraday:

$$\varepsilon(t) = -\frac{d}{dt}\Phi_B = -\frac{d}{dt}AB\cos(\omega t + \delta) = AB\omega \sin(\omega t + \delta) = \varepsilon_0 \sin(\omega t + \delta)$$

O valor do ângulo de fase δ é determinado pelas condições iniciais. Se na definição das condições iniciais delimitarmos o ângulo de fase como nulo, as operações matemáticas serão mais simplificadas, logo:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \sin(\omega t)$$

A mudança da polaridade em uma fonte de corrente alternada é feita de forma suave e regular que se repete em uma sucessão de ciclos em uma forma senoidal.

O sinal senoidal é obtido devido ao posicionamento do enrolamento em relação as linhas de campo magnético conforme mostra a figura abaixo

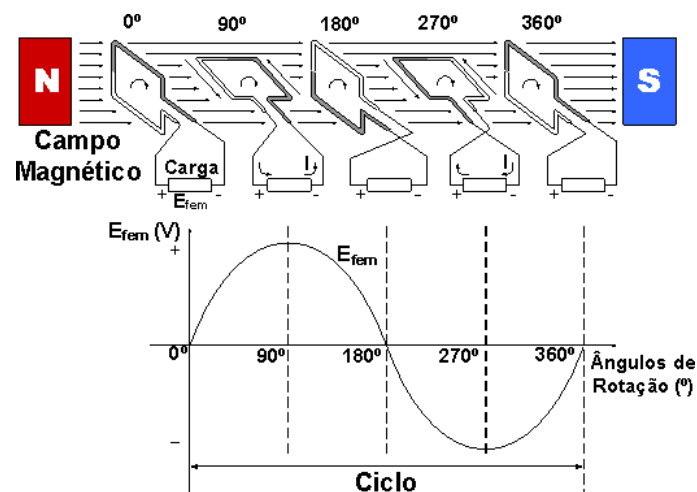


Figura 124 - Geração de um sinal alternado

As máquinas que geram corrente alternada, os geradores de C.A, também conhecidos como alternadores, são máquinas capazes de converter energia mecânica, gerada por uma máquina primária, em energia elétrica. Essa transformação se baseia nas leis de Faraday e Lenz, que já analisamos. O gerador elementar, monofásico, de corrente alternada é uma concepção de Michael Faraday, feita em 1831, na Inglaterra. Essa máquina consistia de uma espira que girava entre os polos de um ímã.

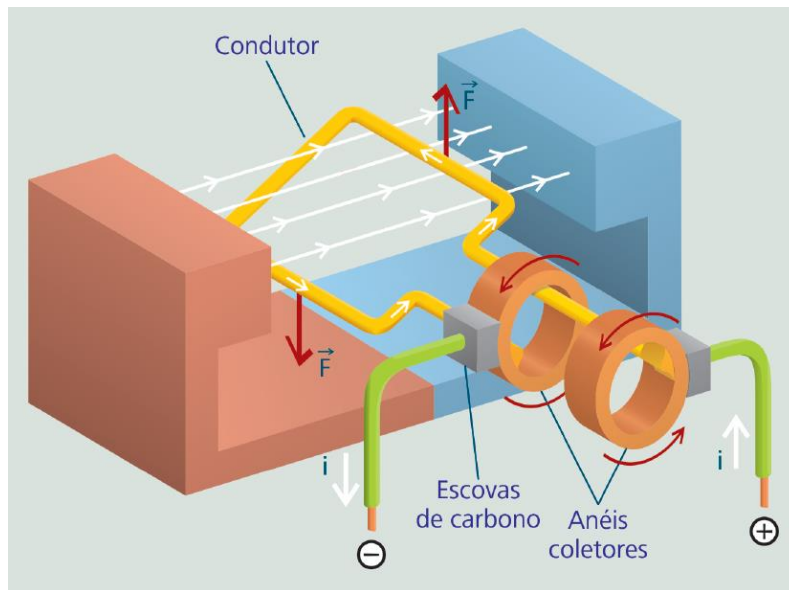


Figura 125 - Gerador de Faraday

Nesse gerador monofásico elementar, a espira de fio girando dentro do campo magnético produz uma força eletromotriz induzida (fem). Os terminais da bobina são ligados ao circuito externo através de anéis coletores e escovas. Essas escovas, normalmente são pequenos blocos de grafite, que é um material condutor. Sem essas escovas não seria possível fazer com que a força eletromotriz alternada, fosse fornecida na saída do gerador. Tanto a corrente quanto a tensão, nesse tipo de gerador, mudam de direção, cada vez que a espira gira 180° e como já vimos ambas tem o formato de uma senoide.

Os valores instantâneos da força eletromotriz podem ser calculados pela equação:

$$e = B \times l \times v \times \text{sen}(\theta)$$

onde: e – força eletromotriz induzida (volts)

B – indução do campo magnético (tesla)

l – comprimento do condutor (metros)

v – velocidade linear de deslocamento do condutor (m/s)

θ - ângulo entre B e v

Como a corrente e a tensão sofrem as mudanças de forma regular, elas possuem algumas características e propriedades básicas.

Frequência – é a propriedade elementar de qualquer onda regular. Ela indica o número de vezes que um ciclo ocorre por unidade de tempo. No nosso caso, a unidade de tempo é o segundo. Sendo assim, a frequência

determina quantos ciclos completos ocorrem em 1 segundo, e sua unidade é o Hertz.

Período – é a medida do tempo que é necessário para que um ciclo seja completo. Desse modo, a unidade de tempo do período é o segundo e ele é o inverso da frequência.

Comprimento de onda – Como uma onda se move fisicamente no espaço de forma simultânea com a sua evolução no tempo, pode ser interessante determinar o quanto uma onda se move no tempo em um ciclo. Obviamente esse valor depende da velocidade com que a onda se move. Se soubermos a frequência de uma onda podemos dividir a velocidade de propagação da luz ($c = 3 \times 10^8$ m/s) pela frequência para obtermos o valor do comprimento de onda que será representado pela letra λ . Desse modo podemos dizer que

$$\lambda = \frac{c}{f}$$

Amplitude – A amplitude indica qual o máximo valor positivo e qual o máximo valor negativo que uma onda atinge, a partir de um referencial neutro. Em corrente alternada a amplitude de uma onda senoidal é o valor da função seno em seu máximo valor. Entretanto, para sistemas elétricos, não esse valor, denominado valor de pico, que nos interessa. O valor de referencia em uma tensão alternada é sempre o valor eficaz. O valor eficaz é a parcela da corrente ou tensão que realmente realiza trabalho elétrico, ou seja, é o valor que realiza o mesmo trabalho, que uma fonte de corrente continua realizaria. Esse valor eficaz é dado pela equação:

$$V_{ef} = \frac{V_{pico}}{\sqrt{2}} = 0,707V_{pico}$$

6.1.2 Por quê utilizar corrente alternada?

Como sabemos muitos equipamentos de hoje, por serem eletrônicos e, principalmente, digitais, funcionam com corrente continua e, conseqüentemente, podem funcionar com corrente continua ou corrente alternada (com uso de retificadores). Desse modo podemos perguntar, e por quê utilizar a corrente alternada?

Existe um motivo simples para isso, o custo desse tipo de energia é mais baixo.

Já sabemos que quando uma corrente percorre um condutor, devido a resistência que esse condutor possui à passagem dessa corrente, provoca uma perda de energia sob a forma de calor. Sabemos também

que a potência é o produto da corrente, vezes a tensão sobre o circuito. Agora imaginemos uma cidade como sendo uma carga ligada a um sistema que consiste de usina – transmissão – distribuição, conforme o desenho.

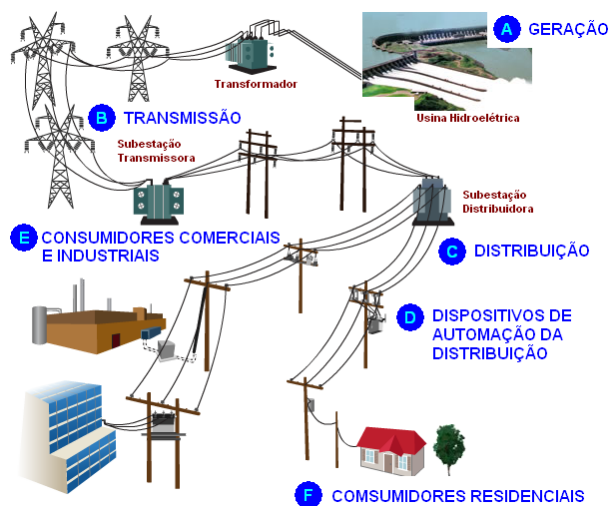


Figura 126 - Sistema de geração - transmissão - distribuição de energia

A carga representada pela cidade, com todas as suas atividades produtivas e consumidores residenciais, exige alta potência para seu funcionamento.

Agora imagine que todo esse sistema seja alimentado com, por exemplo, 220 volts, em corrente contínua. Para atingirmos a potência necessária, a corrente transmitida pela linha seria muito alta o que provocaria uma alta perda de energia sob a forma de calor. Poderíamos então reduzir a corrente transmitida aumentando a tensão na linha (como de fato é feito na corrente alternada).

Entretanto, é extremamente complexo e caro fazer essa operação em corrente contínua. Já no caso da corrente alternada, um simples transformador de força faz essa conversão.

Atualmente, a energia elétrica gerada nas usinas no mundo inteiro, gira em torno de algumas centenas ou milhares de volts, por unidade geradora, dependendo do tamanho do gerador.

O que se faz nas usinas é transformar esses milhares de volts em dezenas ou centenas de milhares de volts, reduzindo a corrente para que a potência seja mantida. Com essa redução da corrente, reduzimos as perdas na transmissão. Isso significa que, boa parte dos recursos gastos na geração de energia, não são desperdiçados sob a forma de calor na perda dos condutores.

Esse é o principal motivo para continuarmos utilizando a corrente alternada como forma de alimentação da maioria dos circuitos.

Capítulo VII

INDUTORES E INDUÇÃO ELETROMAGNÉTICA

“Não se pode ensinar nada a um homem; só é possível ajudá-lo a encontrar a coisa dentro de si”

Galileu Galilei

7.1 INDUTORES

7.1.1 – Introdução

Indutores, basicamente são fios enrolados em torno de um núcleo, que poderá ser magnético, tal como o ferro ou ferrite, ou não magnético como o ar. Eles são elementos capazes de armazenar energia na forma de campo magnético.

Devido a forma da sua construção faz com que o campo magnético criado pela circulação de corrente, seja concentrado. Como resultado, a corrente que percorre o indutor se torna dependente do fluxo magnético gerado pela própria corrente. Podemos determinar o valor da indutância através da razão entre o fluxo magnético e a corrente, ou seja:

$$L = \frac{\phi(t)}{i(t)}$$

onde: ϕ é o fluxo em função do tempo (W - weber)

i é a corrente (A- amperes)

L é a indutância (H – henry)

Assim como nos capacitores, um indutor é um elemento de circuito em que podemos aplicar, entre os seus terminais, uma diferença de potencial. Analogamente ao que tratamos nos capacitores, o fluxo magnético total em um indutor que é formado por um número N de espiras, é proporcional a corrente elétrica que circula nessas espiras, ou seja:

$$\Phi_B^T \propto i$$

A constante que transforma essa proporcionalidade em uma igualdade é a indutância. É por esse motivo que temos:

$$\Phi_B^T = L \cdot i$$

Utilizando a Lei de Faraday, teremos que a diferença de potencial no indutor será dado por:

$$V_L = \frac{\partial \Phi_B^T}{\partial t}$$

ou seja:

$$V_L = -L \frac{di}{dt}$$

A forma como enrolamos a bobina, o material que utilizamos no núcleo e o número de espiras no enrolamento, determinam a indutância de um indutor.

Já podemos concluir que:

- O aumento da indutância L é diretamente proporcional ao aumento do número de espiras. A indutância aumenta com o quadrado do número de espiras.
- A permeabilidade magnética relativa K_r do material age de forma diretamente proporcional a indutância.
- Na medida em que a área A abrangida por cada espira aumenta, veremos que a indutância aumenta com o quadrado do diâmetro.
- A indutância diminui conforme se aumenta o comprimento da bobina.

$$L = \mu_r \frac{N^2 \cdot A}{l} (1,26 \times 10^{-6}) \text{ (H)}$$

Toda a indutância, quando percorrida por uma corrente variável, apresenta uma oposição a essa variação da corrente. Essa oposição recebe o nome de Reatância Indutiva e sua unidade é o ohm (Ω).

A formula da reatância indutiva é:

$$X_l = 2\pi fL$$

Os indutores podem ser associados de várias formas, assim como os capacitores e os resistores. Entretanto essas associações apresentam algumas peculiaridades.

No caso da associação em série existem duas possibilidades:

No primeiro caso, os indutores podem estar afastados um do outro de tal forma que não ocorra interação eletromagnética entre eles. Nesse caso, o valor da Indutância Resultante é dada por:

$$L_t = L_1 + L_2 + \cdots + L_n$$

No segundo caso, os indutores são colocados em uma distância tal que ocorre interação eletromagnética entre eles. Para casos como esse devemos considerar o efeito da indutância mútua. Sendo assim:

$$L_t = L_1 + L_2 + \cdots + L_n \pm nL_M$$

No caso das associações em paralelo, a questão relativa , ou seja, não existem duas condições para tal associação:

Para uma associação de vários indutores em paralelo, teremos:

$$\frac{1}{L_t} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \cdots + \frac{1}{L_n}$$

Para o caso de apenas dois indutores, teremos:

$$L_T = \frac{L_1 \cdot L_2}{L_1 + L_2}$$

7.1.2 Indutância Mútua

Vamos considerar dois indutores concêntricos de raio R_1 e R_2 e por onde circulam uma corrente i_1 e i_2 . Cada indutor tem um número de espiras N_1 e N_2 e ambas com comprimento ℓ .

O campo que será criado no primeiro indutor será dado por:

$$B_1 = \mu_0 \frac{N_1}{\ell} i_1$$

onde $0 < r < R_1$

Desse modo, o fluxo Φ_2 induzido pelo enrolamento 1 nas N_2 espiras desse segundo enrolamento será dado por:

$$\begin{aligned}\Phi_{2(1)} &= N_2 \int \vec{B}_1 \cdot d\vec{A}_2 = N_2 B_1 (\pi R_1^2) = N_2 \left(\mu_0 \frac{N_1}{l} i_1 \right) (\pi R_1^2) \\ &= \mu_0 N_1 N_2 \frac{\pi R_1^2}{l} i_1\end{aligned}$$

Desse modo:

$$\begin{aligned}\Phi_{1(2)} &= L_{12} i_1 \\ L_{21} &= \mu_0 N_1 N_2 \frac{\pi R_1^2}{l}\end{aligned}$$

Denominamos a indutância L_{21} como **INDUTÂNCIA MÚTUA**.
De forma similar teremos:

$$B_2 = \mu_0 \frac{N_2}{l} i_2$$

onde $0 < r < R_2$

Desse modo, o fluxo magnético $\Phi_{1(2)}$ produzido por B_2 sobre as espiras N_1 do solenoide 1 será dada por:

$$\Phi_{1(2)} = N_1 \int \vec{B}_2 d\vec{A}_1 = N_1 B_2 (\pi R_2^2) = \mu_0 N_1 N_2 \frac{\pi R_2^2}{l} i_2$$

E teremos:

$$\begin{aligned}\Phi_{1(2)} &= L_{12} i_2 \\ L_{12} &= \mu_0 N_1 N_2 \frac{\pi R_2^2}{l} = L_{21}\end{aligned}$$

7.1.3 Associação de Indutores

7.1.4 Auto indutância

Agora vamos imaginar que as duas bobinas acima descritas coincidam, ou seja, tenham o mesmo raio, sendo assim teremos:

$$\Phi = \mu_0 N^2 \frac{\pi R^2}{l} i$$

Desse modo, a autoindutância desse conjunto de bobinas é dada por:

$$L = \mu_0 N^2 \frac{\pi R^2}{l}$$

É fácil perceber que a autoindutância L é diretamente proporcional ao quadrado do número de espiras. Isso ocorre porque o fluxo em cada espira é proporcional a espira N , já que ele depende de todas as outras espiras e o fluxo total produz mais um N .

A polaridade oposta que surge na bobina devido a autoindução é denominada **FORÇA CONTRAELETROMOTRIZ** (f_{cem}). Sendo assim, podemos representar o circuito da seguinte forma:

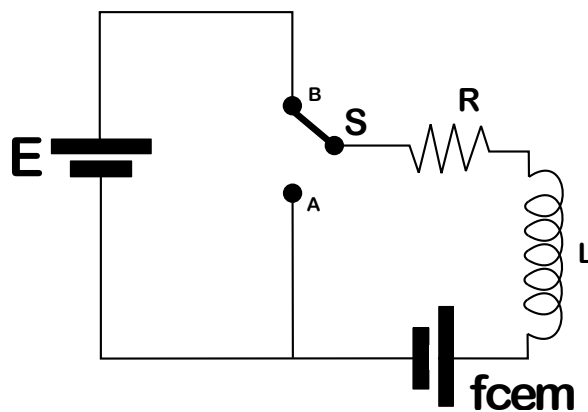


Figura 127 - Circuito RL com a representação da f_{cem}

Assim que surge a f_{cem} teremos a tensão resultante dada por :

$$V_{res} = E - f_{cem}$$

e a corrente no circuito será dada por

$$I = \frac{E - f_{cem}}{R}$$

Essa f_{cem} só existe enquanto o campo magnético, gerado na indutância, varia. Quando o campo magnético atinge o valor máximo, a corrente também atinge seu valor máximo e a f_{cem} deixa de existir.

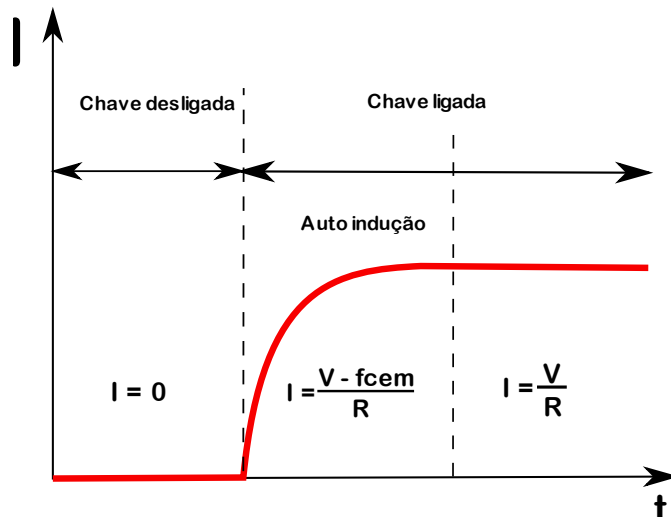


Figura 128 - Curva característica da corrente durante o período de carga do indutor.

Quando o circuito é desligado (posição da chave em A), a concentração do campo irá induzir uma f_{cem} no indutor, o que fará com que o decréscimo da corrente.

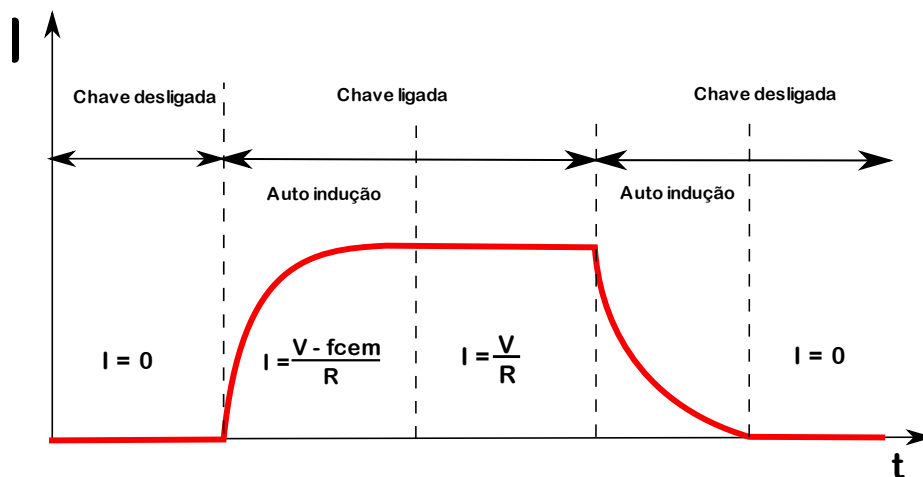


Figura 129 - Curva característica de carga e descarga do indutor

7.1.5 Circuitos RL

Vamos analisar um circuito que contém um resistor e um indutor associados em série, conforme mostra a figura abaixo.

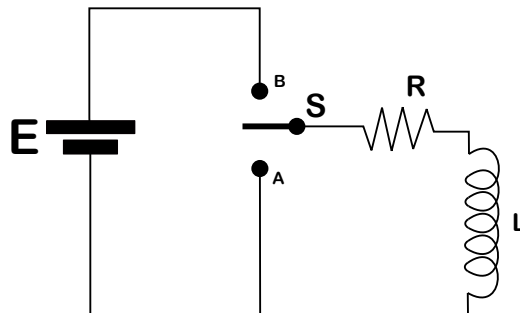


Figura 130 - Circuito RL

Em primeiro lugar vamos colocar a chave S no ponto B. Nesse instante o circuito RL passa a ser alimentado e a corrente vai aumentando da seguinte forma:

$$E - Ri - L \frac{di}{dt} = 0$$

Podemos transformar a equação em

$$\frac{E}{L} = \frac{R}{L}i + \frac{di}{dt}$$

Se multiplicarmos os dois lados da equação por $e^{tR/L}$, teremos:

$$\frac{d}{dt}(i(t)e^{tR/L}) = \frac{E}{L}e^{tR/L}$$

Integrando teremos:

$$\begin{aligned} i(t)e^{tR/L} &= \int \frac{E}{L}e^{tR/L}dt + K = \frac{E}{R}e^{tR/L} + K \\ \Rightarrow i(t) &= \frac{E}{R} + Ke^{-tR/L} \end{aligned}$$

Mas, $i(0) = 0$, então:

$$0 = i(0) = \frac{E}{R} + K \Rightarrow K = -\frac{E}{R}$$

E a solução da equação fica:

$$i(t) = \frac{E}{R}(1 - e^{-tR/L})$$

Essa é a equação do comportamento da corrente para o circuito enquanto a corrente inicial sobe.

Vamos agora analisar a partir do instante em que mudamos a chave do ponto B para o ponto A. Nesse instante, o circuito, que acumulou carga no indutor, passa a descarregar.

A equação será:

$$-Ri - L \frac{di}{dt} = 0$$

O sinal negativo surge por que a corrente nesse momento começa a circular no sentido contrário ao que circulava quando o circuito estava no processo de carga.

O valor da corrente, agora, irá diminuindo e V_L (tensão no indutor) tem um sentido contrário do fluxo magnético. E como a corrente está caindo, V_L tem o sentido oposto ao tempo em que estava carregando. Mas $di/dt < 0$ garante que isso ocorra. A solução para $i(t)$ fica:

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = 0 \Rightarrow i(t) = Ke^{-tR/L}$$

Em $i(0) = E/R$, então:

$$i(t) = \frac{E}{R}e^{-tR/L}$$

Sendo essa a equação do comportamento da corrente para o período de descarga.

7.1.6 Energia do Campo Magnético do Indutor

Vamos analisar o comportamento da energia que é armazenada no indutor.

Consideremos o circuito RL série anteriormente analisado. Durante o tempo em que a corrente cresce no circuito temos:

$$E - Ri - L \frac{di}{dt} = 0$$

Se multiplicarmos toda essa equação por i teremos:

$$Ei = Ri^2 + Li \frac{di}{dt}$$

O primeiro termo da equação é a potência fornecida pela bateria, o segundo termo é a potência dissipada no resistor e o último termo é a potência armazenada no indutor.

$$\frac{dU_B}{dt} = Li \frac{di}{dt} = \frac{L}{2} \frac{di^2}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{Li^2}{2} \right) \Rightarrow U_b = \frac{Li^2}{2}$$

Sendo assim, a densidade de energia magnética que um solenoide de comprimento ℓ e área A armazena é dada por:

$$u_B = \frac{U_B}{vol} = \frac{Li^2/2}{A \cdot l}$$

Mas, para um solenoide, temos:

$$L = \mu_0 \frac{N^2}{l} A$$

$$B = \mu_0 \frac{N}{l} i$$

E portanto:

$$u_B = \frac{Li^2}{2Al} = \left(\mu_0 \frac{N^2}{l} A \right) \frac{i^2}{2Al} = \frac{\mu_0 N^2 i^2}{2l^2} = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

Sendo essa a energia armazenada no indutor.

7.1.7 Circuito LC

Já estudamos o comportamento de capacitores e de indutores de forma individual ou associados com resistores. Vamos analisar agora o comportamento desses dois componentes juntos.

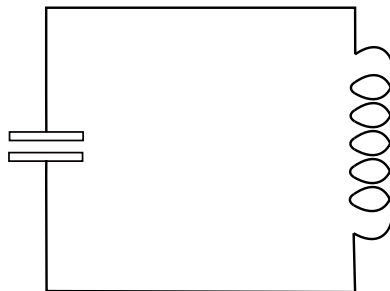


Figura 131 - Circuito LC

Para um circuito LC temos:

Com o capacitor descarregado a corrente será dada por:

$$i = -\frac{dq}{dt}$$

Derivando essa equação teremos

$$\frac{d^2 i}{dt^2} = -\frac{i}{LC} = -\omega_0^2 i$$

onde $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

E a solução da equação fica:

$$i(t) = A \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

A carga q será dada por

$$q(t) = -\frac{A}{\omega_0} \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

Se considerarmos os dois componentes como ideais, ou seja, sem perdas resistivas, e considerando ainda que não existem resistências no circuito, a corrente e as cargas ficam oscilando, transferindo energia do capacitor para o indutor e vice-versa.

7.1.8 Correntes de Foucault

Podemos obter correntes induzidas em fios condutores e condutores maciços, que estejam em movimento, em um campo elétrico ou atravessando um fluxo magnético variável. Dentro desses materiais condutores podemos encontrar, para uma mesma corrente, vários percursos fechados para a circulação. Em cada percurso fechado o fluxo magnético irá variar com o tempo. Desse modo as tensões fazem circular correntes induzidas no interior desses materiais condutores. Denominamos essas correntes de **CORRENTES DE FOUCAULT**.

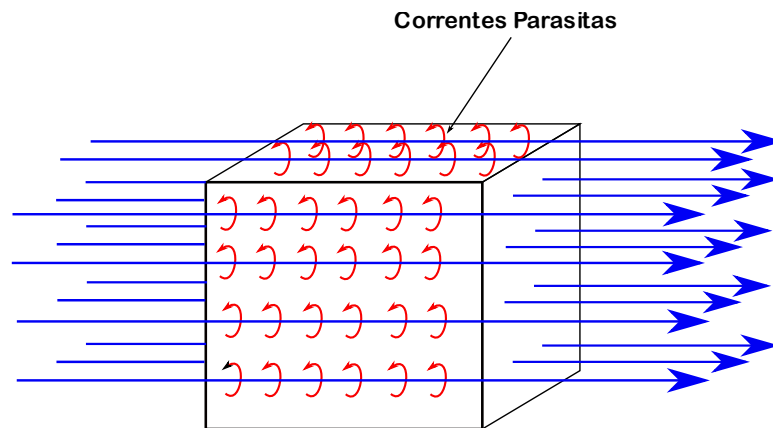


Figura 132 - Correntes parasitas induzidas no material condutor

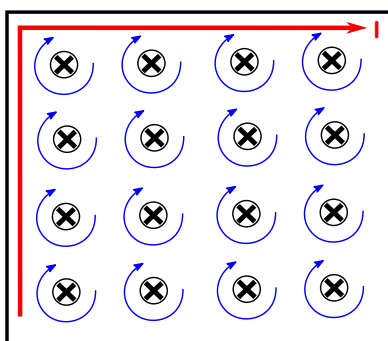


Figura 134 - Corrente parasita em material maciço

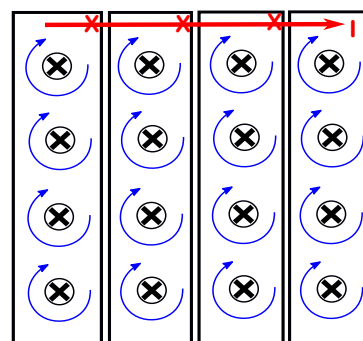


Figura 133 - Corrente parasita em material laminado

Podemos notar nas figuras acima que nos materiais maciços a corrente parasita resultante circula em torno do material como um todo. Essa corrente resultante só ocorre na periferia do material por que, nos pontos internos as pequenas correntes resultantes se anulam. Essas correntes podem atingir valores elevados e esse fenômeno provoca um aquecimento devido ao efeito Joule o que exige mais energia adicional da fonte de alimentação. Esse aquecimento indesejado é chamado de perdas de Foucault.

Apesar desse efeito ser indesejado nos transformadores, ele é muito interessante nos fornos de indução.

Nos transformadores, uma das formas de reduzir esse efeito é a utilização de núcleos laminados isolados o que reduz a circulação de correntes parasitas.

7.1.9 Acoplamento Magnético

Vamos imaginar dois indutores que são colocados muito próximos um do outro de tal forma que o fluxo magnético de ambos os indutores se entrelace. A esse fenômeno damos o nome de acoplamento magnético.

Quando os dois indutores se encontram nessa situação, ocorre uma transferência de energia de um indutor para outro através do campo magnético. Com isso teremos uma variação na corrente e essa variação produz uma variação do fluxo induzindo uma tensão no outro indutor.

$$\phi_1 = \phi_{11} + \phi_{12}$$

$$\phi_2 = \phi_{22} + \phi_{21}$$

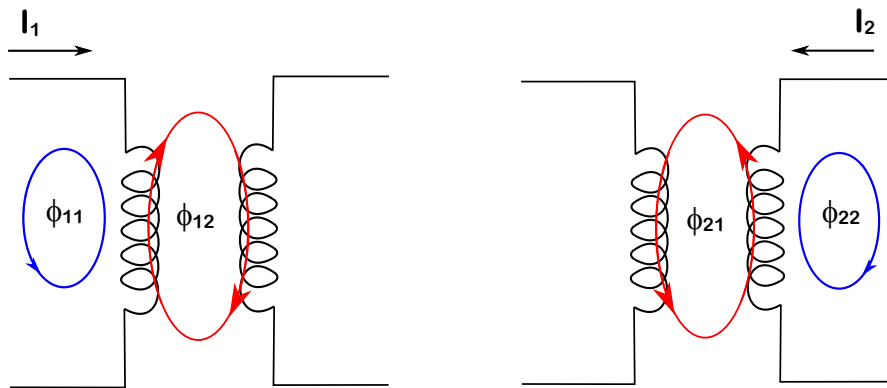


Figura 135 - Acoplamento Magnético

7.1.10 Coeficiente de Acoplamento

Continuemos analisando as bobinas da figura 9. Vamos considera-las acopladas magneticamente através de um núcleo. Como já vimos o uso de um núcleo metálico facilita a concentração do fluxo magnético facilitando o acoplamento.

Vamos imaginar então que a bobina da esquerda esteja alimentada por uma fonte de alimentação que varia no tempo $V_1(t)$ e que provoca a circulação de uma corrente variável no tempo $I_1(t)$ e um fluxo variável $\phi_{11}(t)$ no núcleo. A bobina 1 possui N_1 espiras e uma indutância L_1 . Como os terminais da bobina 2, que possui N_2 espiras e indutância L_2 encontram-se abertos. Desse modo, a corrente e o fluxo magnético gerados, são nulos.

Com essas condições, apenas uma parte do fluxo magnético que é gerado na bobina 1 ira atravessar as espiras da bobina 2 criando o fluxo mútuo $\phi_{12}(t)$.

Nesse caso, definimos COEFICIENTE DE ACOPLAMENTO k , como sendo um número adicional dado pela relação entre o fluxo mútuo e o fluxo total e expressa o percentual do fluxo magnético mútuo existente entre os circuitos magneticamente acoplados. Desse modo:

$$k = \frac{\phi_{12}}{\phi_1} = \frac{\phi_{21}}{\phi_2} < 1$$

Capítulo VIII

CIRCUITOS OPERANDO EM CORRENTE ALTERNADA

“Lembre-se que as pessoas podem tirar tudo de você, menos seu conhecimento”

Albert Einstein

8.1 ANÁLISE DE CIRCUITOS MONOFÁSICOS

Vamos agora analisar o comportamento dos circuitos puramente resistivos, puramente indutivos, puramente capacitivos, e a associação resultante de dois ou mais desses componentes, quando submetidos à tensões alternadas.

8.1.1 - Circuitos Puramente Resistivos

Vamos imaginar a possibilidade de um circuito que contenha somente resistências ôhmicas. Nesse caso, de acordo com as Leis de Ohm, a corrente será sempre proporcional a tensão. No caso de aplicarmos uma tensão alternada a esse circuito puramente resistivo, a corrente também terá um sinal sinusoidal em fase com o sinal da tensão.

Devemos lembrar que um sinal está em fase quando os valores da tensão e da corrente crescem ou diminuem exatamente no mesmo instante, conforme mostra o gráfico abaixo.

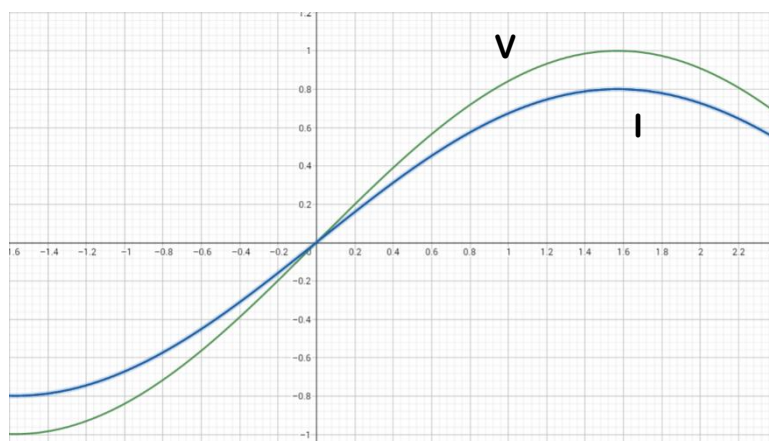
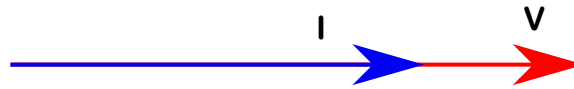


Figura 136 - Relação entre corrente e tensão em um circuito puramente resistivo

Sob o ponto de vista de cálculos, apesar da tensão e da corrente serem representadas em função de ωt , ou seja, da frequência e do tempo, as equações são as mesmas da lei de Ohm sem nenhum tipo de modificação.

Fasorialmente podemos representar essa condição entre tensão e corrente como mostra a figura abaixo.



8.1.2 – Circuitos Puramente Indutivos

Como já vimos anteriormente um indutor, quando percorrido por uma corrente alternada, ou que varia no tempo, surge uma força eletromotriz. E como já vimos, essa força eletromotriz é expressa da seguinte forma:

$$E = L \frac{di}{dt}$$

Onde L é a indutância da bobina. Então, como também já vimos, a variação da corrente em uma bobina, provoca o surgimento de uma força contra eletromotriz. Se imaginarmos que a corrente instantânea é expressa pela equação:

$$i = I_m \cdot \text{sen}(\omega t)$$

Teremos, nos terminais do indutor a tensão dada pela equação:

$$\begin{aligned} u = -e &= L \frac{di}{dt} = L \frac{d(I_m \cdot \text{sen}(\omega t))}{dt} = I_m \cdot \omega \cdot L \cdot \cos(\omega t) = \\ &= I_m \cdot \omega \cdot L \cdot \text{sen}(\omega t + 90) \end{aligned}$$

E com isso confirmamos que existe uma defasagem entre a corrente e a tensão que, no caso de circuitos puramente indutivos, é de 90°. A representação fasorial dessa situação se encontra na figura abaixo.

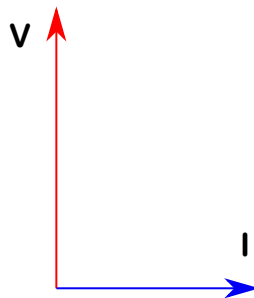


Figura 137 - Representação fasorial da relação entre corrente e tensão em um circuito puramente indutivo

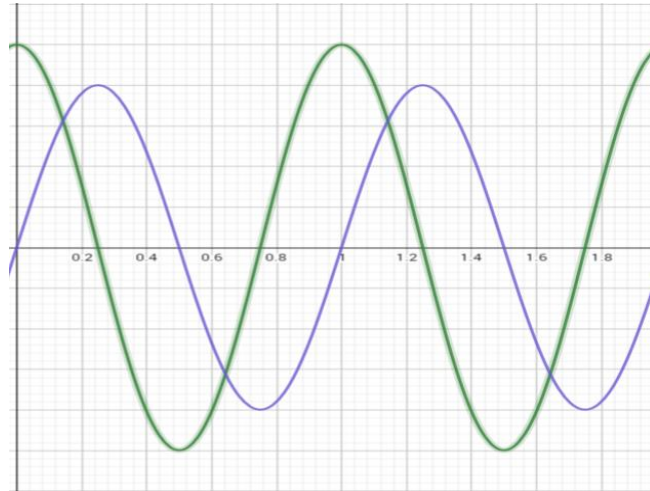


Figura 138 - Representação gráfica temporal da defasagem entre tensão e corrente em um circuito puramente indutivo

Se observarmos o gráfico acima veremos que quando a corrente é nula, a tensão é máxima (tanto positiva quanto negativamente), e quando a corrente atinge seu valor máximo a tensão se anula.

A razão entre o valor máximo da tensão, dada por U_m e o valor máximo da corrente I_m em uma bobina é igual a ωL e, como já vimos, recebe o nome de REATÂNCIA INDUTIVA (X_L):

$$X_L = \omega L = 2\pi fL$$

Como podemos ver essa reatância indutiva, ao contrário da resistência, varia com a frequência. Quanto maior for a frequência maior será a reatância indutiva.

8.1.3 – Circuitos Puramente Capacitivos

Já sabemos que a carga elétrica acumulada em um capacitor, em qualquer instante de tempo, é dada por:

$$Q = C.V$$

Considerando que a corrente é definida como sendo a quantidade de carga elétrica que passa por um condutor por unidade de tempo, teremos:

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

Quando relacionamos a tensão e a corrente, em um capacitor de capacitância C , teremos:

$$I = C \frac{dV}{dt}$$

Da mesma forma que ocorre nos indutores, em um capacitor, quando a tensão varia, a sua corrente também varia. Novamente supondo a tensão instantânea seja expressa por:

$$u = U_m \cdot \text{sen}(\omega t)$$

A corrente que atravessa o capacitor é dada pela equação:

$$\begin{aligned} i &= C \frac{dV}{dt} = C \frac{d(U_m \cdot \text{sen}(\omega t))}{dt} = U_m \cdot \omega \cdot C \cdot \cos(\omega t) = \\ &= U_m \cdot \omega \cdot C \cdot \text{sen}(\omega t + 90^\circ) \end{aligned}$$

Nesse caso, verificamos que a tensão está atrasada em relação a corrente em 90° , conforme mostra a representação fasorial abaixo.

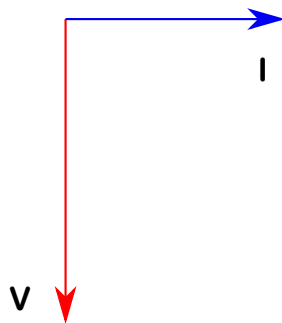


Figura 139 - Diagrama fasorial da relação entre tensão e corrente em um circuito puramente capacitivo

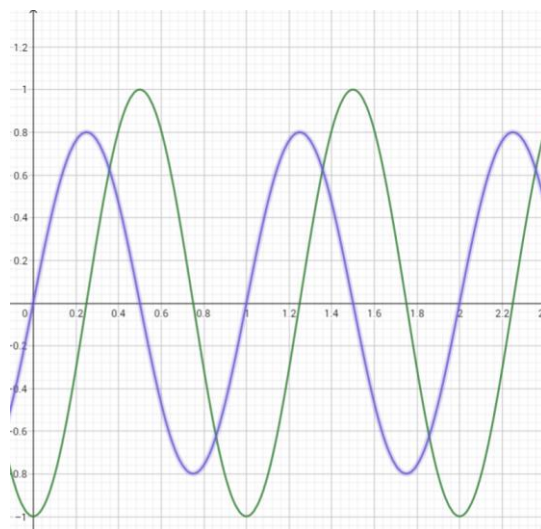


Figura 140 - Gráfico tensão corrente em um circuito puramente capacitivo.

De forma análoga ao circuito puramente indutivo, podemos notar que no circuito puramente capacitivo, quando a tensão atinge o valor zero, a corrente atinge seu valor máximo (negativo ou positivo). Do mesmo modo, quando a tensão atinge seu máximo positivo ou negativo, a corrente é zero.

A razão entre o valor máximo da tensão (U_m) e o valor máximo da corrente (I_m) em um capacitor é $1/(\omega C)$ e recebe o nome de REATÂNCIA CAPACITIVA (X_c), logo:

$$X_c = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C}$$

No caso das reatâncias capacitivas, o aumento da frequência ao qual o circuito é submetido, provoca uma redução nessa reatância.

8.1.4 – Circuitos RL em Corrente Alternada.

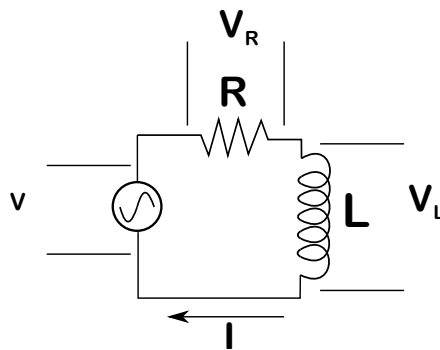


Figura 141 - Circuito RL submetido a tensão alternada

Para analisar esse tipo de circuito, devemos admitir que o fio que constrói o indutor, tenha resistência nula (seja um condutor ideal). Da mesma forma iremos considerar que a resistência é uma resistência ideal, não apresentando nenhuma outra característica elétrica.

Com essas considerações iniciais podemos afirmar que a tensão V_r está em fase com a corrente, ângulo de 0° e que a tensão V_L está em um ângulo de 90° de defasagem.

Se aplicarmos as leis de Kirchhoff, teremos:

$$V = V_r + V_L$$

Considerando agora essa equação e as afirmações anteriores, podemos traçar um diagrama fasorial do comportamento das tensões e correntes no circuito

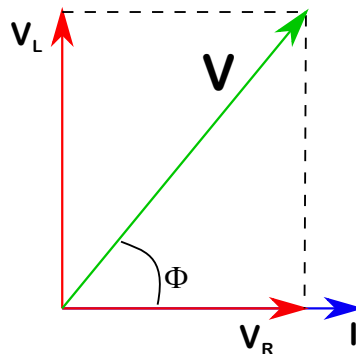


Figura 142 - Diagrama fasorial de um circuito RL em corrente alternada

Sob o ponto de vista de análise temporal, a adição das duas tensões defasadas de 90° nos apresenta o gráfico abaixo.

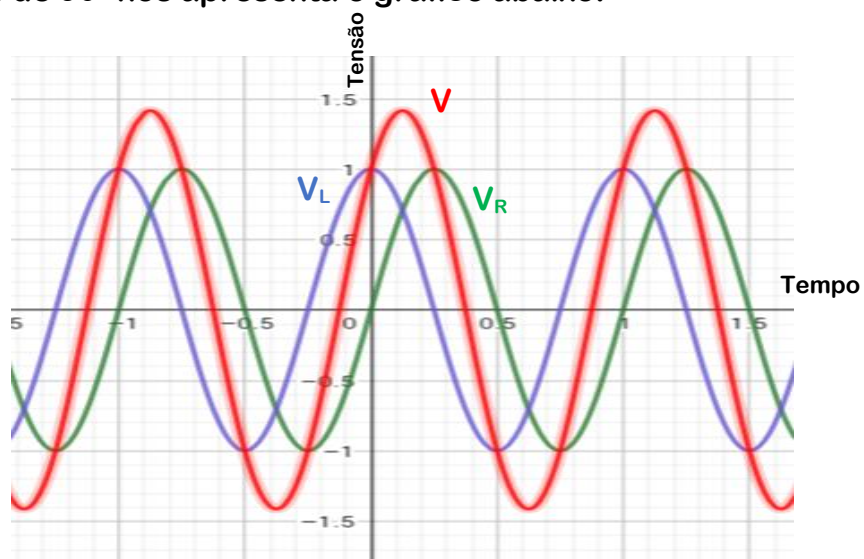


Figura 143 - Representação temporal da relação entre V_R , V_L e V

No gráfico fasorial, é possível ver que o valor do módulo da tensão V é obtida com a aplicação do Teorema de Pitágoras.

$$V = \sqrt{V_L^2 + V_R^2}$$

Entretanto:

$$V_R = R \cdot I$$

$$V_L = X_L \cdot I$$

A IMPEDÂNCIA (Z) do circuito é o resultado da associação da resistência ôhmica com a reatância indutiva e é dada por:

$$Z = \frac{V}{I}$$

Como a corrente I , tem fase nula, podemos desenhar o triângulo da impedância conforme a figura abaixo.

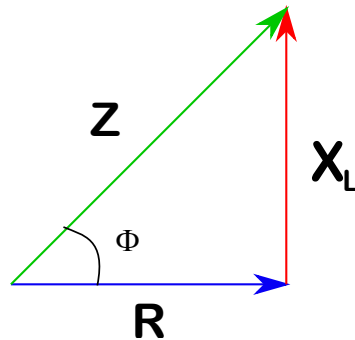


Figura 144 - Diagrama fasorial das impedâncias, reatâncias e resistências de um circuito RL

Do mesmo modo que a tensão, podemos encontrar o valor da impedância do sistema executando o Teorema de Pitágoras para solucionar tal problema, logo:

$$Z = \sqrt{X_L^2 + R^2}$$

É fácil notar que o ângulo Φ é igual para o triângulo das tensões quanto para o triângulo das resistências, sendo assim, podemos obter esse valor a partir da equação:

$$\Phi = \arccos\left(\frac{R}{Z}\right) \text{ ou } \Phi = \arctan\left(\frac{X_L}{R}\right)$$

8.1.5 – Circuitos RC em Corrente Alternada

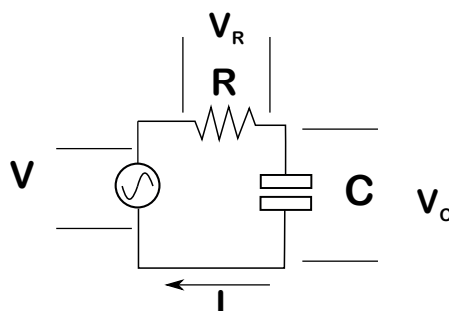


Figura 145 - Circuito RC em corrente alternada

Vamos analisar agora o comportamento de um circuito RC submetido a uma tensão alternada.

Nessa situação podemos dizer que a tensão V_R sobre a resistência R está em fase com a corrente I e que a tensão V_C do capacitor está em defasagem de 90° com a corrente.

Novamente aplicando a lei de Kirchhoff teremos:

$$V = V_R + V_C$$

A representação fasorial dessa relação pode ser vista na figura a seguir:

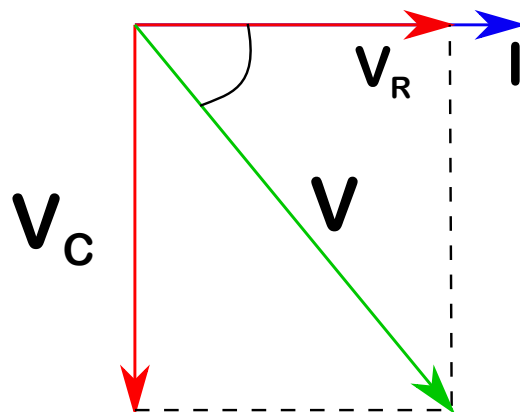


Figura 146 - Diagrama Fasorial de um Circuito RC submetido à Corrente Alternada

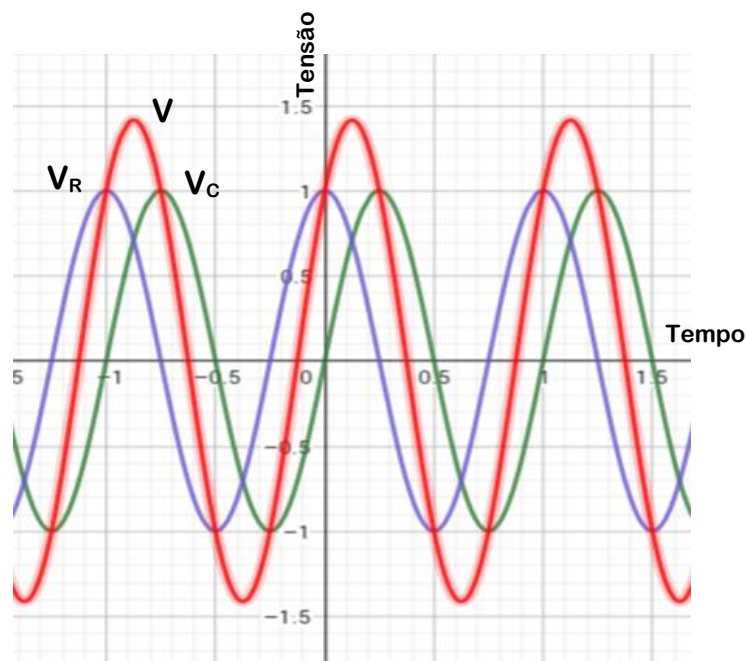


Figura 147 - Diagrama de tempo da relação entre as tensões de um circuito RC em corrente alternada

Novamente podemos ver que a tensão resultante pode ser obtida pelo Teorema de Pitágoras.

$$V = \sqrt{V_R^2 + V_C^2}$$

Novamente temos que:

$$V_R = R \cdot I$$

$$V_C = X_C \cdot I$$

Sendo assim, a impedância Z total do circuito será dada por:

$$Z = \frac{V}{I}$$

Novamente, se desenvolvermos o diagrama fasorial da relação de resistências, reatâncias e impedâncias teremos:

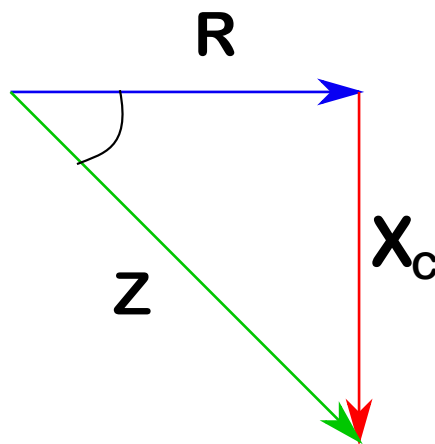


Figura 148 - Diagrama fasorial das resistências, reatâncias e impedâncias em um circuito RC em corrente alternada

O módulo da impedância será dado por:

$$Z = \sqrt{X_C^2 + R^2}$$

O ângulo de defasagem será dada por :

$$\Phi = \arccos\left(\frac{R}{Z}\right) \quad \text{ou} \quad \Phi = \arctan\left(\frac{X_C}{R}\right)$$

8.1.6 – Circuitos RLC Série em Corrente Contínua

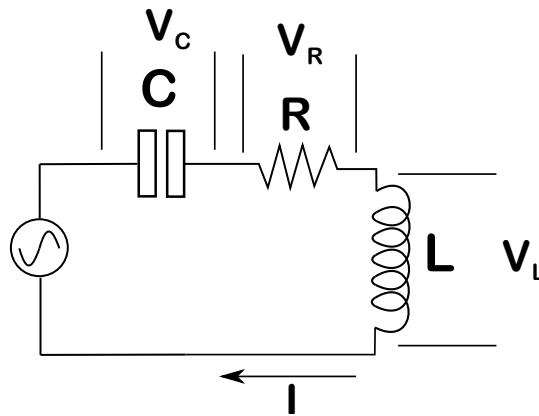


Figura 149 - Circuito RLC série em corrente alternada

Vamos analisar agora circuitos RLC série quando submetidos à correntes alternadas. Na verdade, esse tipo de circuito é o mais comum que existe já que praticamente todos os componentes eletroeletrônicos apresentam características de resistores, de indutores e de capacitores. O exemplo mais simples é o de uma resistência de chuveiro.



Figura 150 - exemplo de resistências de chuveiro

Como podemos ver nos exemplos de resistências de chuveiros apresentados acima, qualquer que seja a forma ela é sempre constituída de um fio, de alta resistência (resistor) enrolado sob a forma de uma bobina (indutor) e entre cada duas espiras dessa bobina ocorre um efeito de capacitância (capacitor). É óbvio que a principal função desse componente é oferecer resistência à passagem de corrente elétrica e, através do efeito Joule, produzir o aquecimento da água do banho. Entretanto, os efeitos de impedância capacitiva e indutiva também estão presentes no circuito, mesmo que de forma muito pequena quando comparados à resistência.

Em outros casos, tais como linhas de transmissão e distribuição de energia, esses parâmetros capacitivos e indutivos tem uma influência muito maior e, portanto, são consideráveis no sistema. Novamente utilizando a lei das malhas podemos dizer que:

$$V = V_C + V_R + V_L$$

Nesse caso da associação em série, surgem três possibilidades:

1ª O circuito é predominantemente indutivo, ou seja:

$$V_L > V_C, (X_L > X_C)$$

Nesse caso, o diagrama fasorial resultante será:

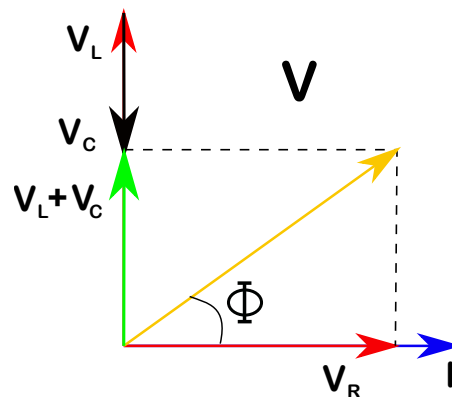


Figura 151 - Diagrama fasorial das tensões em um circuito RLC série com $V_L > V_C$ (Indutivo)

2ª O circuito é predominantemente capacitivo, isto é:

$$V_L < V_C, (X_L < X_C)$$

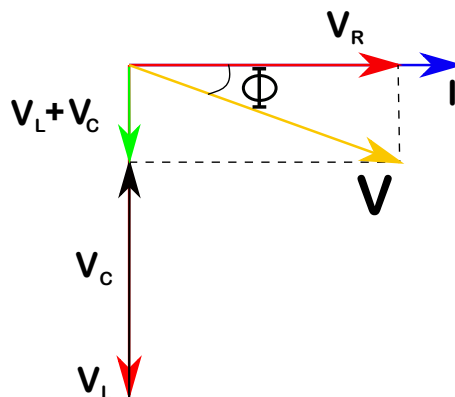
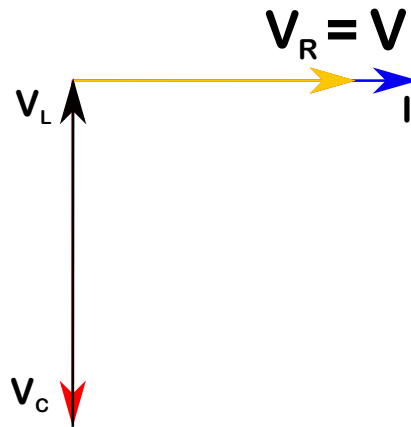


Figura 152 - Diagrama fasorial das tensões em um circuito RLC série com $V_L < V_C$ (capacitivo)

3ª Circuito com Ressonância, ou seja,

$$V_L = V_C, (X_L = X_C)$$

Nesse caso, o diagrama fasorial será:



Como podemos ver, no caso de ressonância, as tensões no capacitor e no indutor são de módulo igual, sinal contrário e, portanto, se anulam. Esse tipo de condição normalmente deve ser evitados, pois podem produzir valores de sobretensão elevados que são perigosos, para os equipamentos e para o pessoal que os opera.

Entretanto, existem alguns casos em que a ressonância tem utilidade. Cada circuito RLC possui uma frequência de ressonância, nesses casos, $X_L = X_C$ e essa frequência pode ser determinada por:

$$X_L = X_C \Leftrightarrow 2\pi f_r L = \frac{1}{2\pi f_r C}$$
$$f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

8.1.7 – Circuitos RLC Paralelo em Corrente Alternada

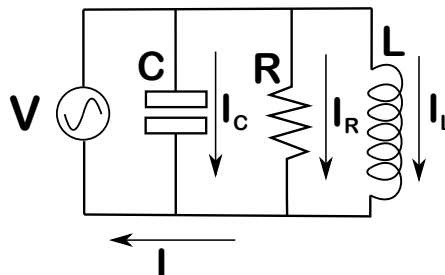


Figura 153 - Circuito RLC paralelo

Como já vimos anteriormente, em todos os circuitos elétricos existem características resistivas, indutivas e capacitivas. Isso ocorre mesmo que, em alguns casos, algumas dessas características possam ter valores tão pequenos que sejam desprezados. Para análise, vamos considerar que todos os componentes sejam ideais, ou seja, o resistor só tem resistência, o capacitor só tem capacitância e o indutor só tem indutância.

Utilizando a Lei dos Nós, teremos:

$$I = I_R + I_L + I_C$$

Como estamos tratando das correntes, nesse caso iremos traçar o diagrama fasorial das correntes.

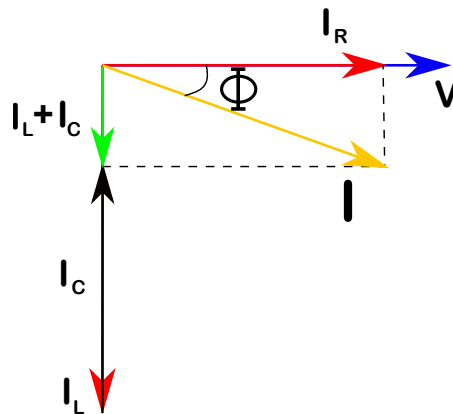


Figura 154 - Diagrama fasorial das correntes do circuito RLC paralelo

Para encontrarmos o valor de I basta aplicarmos novamente o Teorema de Pitágoras e assim teremos:

$$I = \sqrt{I_R^2 + (I_C - I_L)^2}$$

O ângulo de defasagem entre as correntes é dado por:

$$\Phi = \arccos \frac{I_R}{I}$$

Do mesmo modo que a associação em série, os circuitos RLC em paralelo podem assumir uma de três condições diferentes:

- $I_L > I_C, (X_L > X_C)$ – Circuito Indutivo
- $I_L < I_C, (X_L < X_C)$ – Circuito Capacitivo
- $I_L = I_C, (X_L = X_C)$ – Circuito em Ressonância

Da mesma forma como acontece com as tensões em um circuito ressonante em série, no caso do circuito em paralelo, as correntes I_L e I_C se anulam. Nos circuitos em série, a ressonância pode causar sobretensão, no caso dos circuitos em paralelo a ressonância pode causar sobrecorrente.

Como $X_L = X_C$, a frequência de ressonância será dada da mesma forma que no circuito em série, desse modo:

$$f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

8.1.8 – Observações sobre Análise de Circuitos em Corrente Alternada

As leis que governam a análise de circuitos em corrente alternada são as mesmas que foram analisadas em corrente contínua. Desse modo, as leis de Kirchhoff, analisadas para corrente contínua, também valem para a corrente alternada.

Entretanto, para corrente alternada, tanto as tensões quanto as correntes variam no tempo o que torna complexa a análise, tanto se formos trabalhar no domínio tempo ou com a representação gráfica vetorial. Uma forma de facilitar essa análise é utilizar a Transformada de Steinmetz, que nos permite atingir esse objetivo, principalmente em circuitos RLC com alto grau de complexidade.

De forma similar às outras formas de transformada, Fourier, Laplace, Z e outras), as grandezas são transformadas para o domínio de Steinmetz, são complexas e permitem as operações simplificadas de adição, subtração, multiplicação e divisão na resolução de circuitos.

No Apêndice I você poderá ter uma explicação mais aprofundada o conceito abrangido pela Transformada de Kirchhoff.

8.2 – Potências Instantânea, Ativa, Reativa e Aparente

8.2.1 – Potência Instantânea

Vamos analisar um circuito que é alimentado por uma tensão:

$$v = V_m \cdot \text{sen}(\omega t)$$

E, conseqüentemente é percorrido pela corrente

$$i = I_m \cdot \text{sen}(\omega t + \Phi)$$

Então dizemos que a potência instantânea é a potência dissipada em cada instante de tempo e é resultado do produto da tensão V pela corrente I naquele instante de tempo.

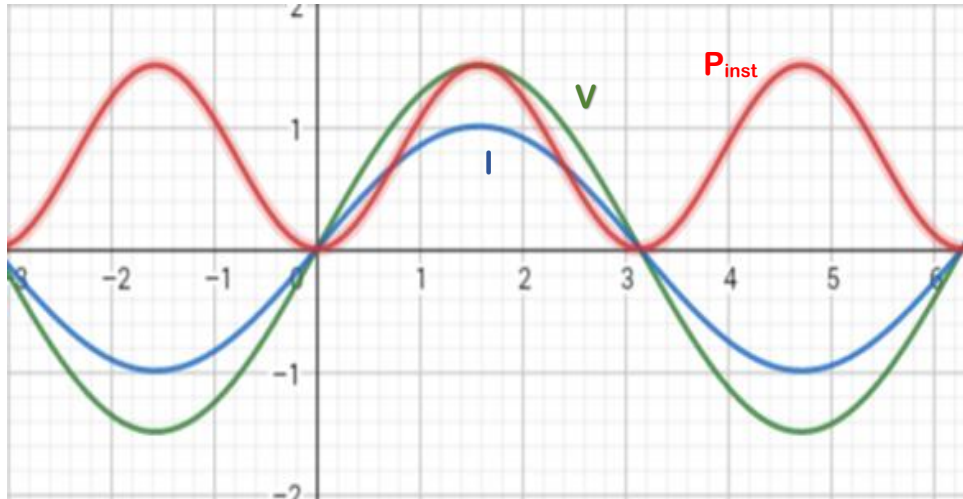


Figura 155 - Gráfico da Tensão, Corrente e Potência Instantânea

Como podemos notar, a potência será sempre positiva o que significa que o circuito está sempre recebendo energia e que está sendo consumida pela resistência do circuito.

8.2.2 – Potência Ativa

Como podemos ver no gráfico anterior, existem instante de tempo em que a potência instantânea é nula e outras em que a potência é máxima. Mas em termos de funcionamento de circuitos, o que nos interessa é o chamado, VALOR MÉDIO dessa potência.

Por definição, o valor médio de qualquer função variável no tempo, representa a média de todos os valores instantâneos. Entretanto, se calcularmos o valor médio para um ciclo completo, teremos como resultado, um valor nulo, pois o valor, em módulo, obtido para o semiciclo positivo será igual ao valor em módulo do semiciclo negativo, entretanto terão sinais trocados e se anulam. O que fazemos é sempre calcular o valor médio para um dos semiciclos.

A potência média é calculada por:

$$P = V \cdot I$$

A POTÊNCIA ATIVA é medida diretamente em wattímetros e é calculada por:

$$P = R.I^2 = V.I\cos(\Phi)$$

8.2.3 – Potência Reativa

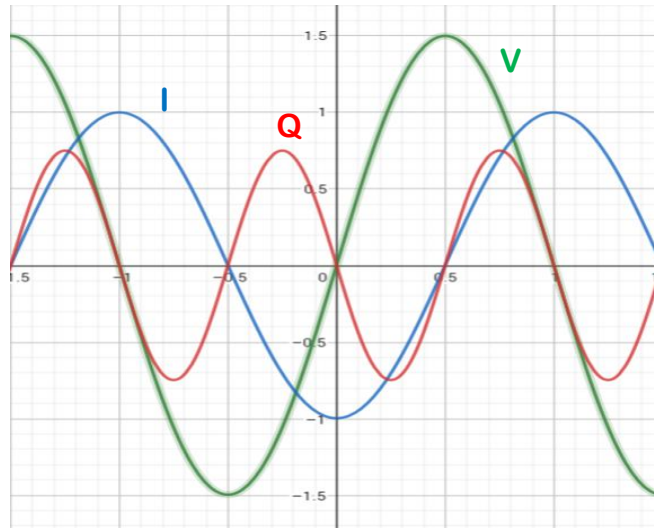


Figura 156 - Gráfico da Potência Reativa

É fácil observar, ao olhar o gráfico, que a potência alterna entre positiva e negativa, com o dobro da frequência da tensão e da corrente. Se a potência instantânea sobre a carga é positiva, essa carga está consumindo energia da fonte de alimentação. Nos períodos em que a potência instantânea é negativa sobre a carga, essa passa a fornecer a energia para a fonte de alimentação.

No caso de a carga ser indutiva, essa receberá e fornecerá energia, de forma alternada, sendo o valor médio nulo, ou seja, a energia recebida é igual a energia que é devolvida.

Se tentarmos medir essa potência com um wattímetro ele indicará um valor nulo, ou seja, $P = 0 \text{ W}$.

Apesar da potência não estar sendo consumida ela circula, sob a forma de corrente elétrica. Essa potência que corresponde a esta energia oscilante recebe o nome de Potência Reativa, e é representada por Q .

No caso de um circuito puramente indutivo a potência reativa é calculada por:

$$Q = X_L.I^2$$

Mas circuitos puramente indutivos são teóricos, na prática, os circuitos apresentam um misto de características, sendo assim, o ângulo de defasagem é diferente de 90° , sendo assim:

$$Q = V.I \sin(\Phi)$$

Onde V e I são a tensão e a corrente nesse circuito e Φ é o ângulo de defasagem entre a tensão e a corrente. Essa potência é medida por um VARIMETRO e o valor é dado em Volt-Ampére Reativo (Var).

8.2.4 – Potência Aparente

A potência aparente é a potência aparentemente consumida em um circuito CA. Essa potência é representada por S e se mede em Volt-Ampére (VA) e pode ser determinado pela seguinte expressão:

$$S = V.I$$

A representação fasorial está apresentada abaixo.

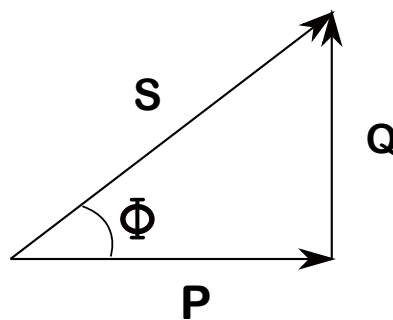


Figura 157 - Diagrama Fasorial de Potências

Como se trata de um triângulo retângulo, podemos encontrar a potência S, através do Teorema de Pitágoras.

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

8.2.5 - Fator de Potência

Como já vimos, somente a potência ativa é consumida. Mas ela não existe sozinha na corrente alternada, pois temos também a potência reativa e essa potência representa um gasto para quem produz, transmite e distribui essa energia. Isso ocorre, como já vimos, pelo Efeito Joule e, por conseguinte, depende da intensidade de corrente que percorre os condutores.

Por esse motivo, as companhias de energia elétrica não se interessam que essas potências reativas sejam mínimas, ou seja, que a potência ativa, seja o mais próximo possível da potência aparente.

Se dividirmos a potência real pela potência aparente, teremos:

$$\frac{P}{S} = \frac{V.I.\cos(\Phi)}{V.I} = \cos(\Phi)$$

Essa relação entre a potência real e a potência aparente é conhecida como FATOR DE POTÊNCIA.

A existência de fatores de potência com valores inferiores a 1 em instalações elétricas ocorrem devido à um excesso de cargas indutivas, normalmente motores elétricos e outros tipos de cargas.

Alguns dos inconvenientes desse baixo fator de potência são:

- Para o produtor de energias, o gerador é caracterizado por uma tensão e uma corrente, ou seja, pela potência aparente $S = V.I$. Como o gerador é uma máquina elétrica a potência ativa que ele vai produzir depende da defasagem (Φ) apresentado pela carga. Desse modo, quanto mais baixo o fator de potência, maior terá que ser a capacidade de geração do gerador.

Com isso, o transformador de transmissão também deverá ter uma capacidade maior, onerando o custo de construção da usina e sua operação, já que parte da energia produzida é perdida.

- Para as empresas que transmitem e distribuem a energia elétrica, temos dois efeitos. Nas linhas de transmissão dimensionada para uma determinada potência aparente, o baixo fator de potência da carga, faz com que o investimento na construção da linha de transmissão foi em vão. Pois a linha deverá transmitir uma energia aquém da sua capacidade e o consumidor receberá uma energia de baixa qualidade.

Já no caso da distribuição, a corrente é mais elevada, pois a tensão é mais baixa, sendo assim, a corrente será maior e, conseqüentemente, há um aumento das perdas por efeito Joule. Além disso, todos os sistemas de proteção, devem ser superdimensionados.

- Para os consumidores, se forem consumidores industriais, o baixo fator de potência exige sistemas superdimensionados de proteção, transformação e medição. Para todos os tipos de consumidores, há um aumento do consumo de energia sem que seja uma energia aproveitável, aumentando as contas de luz.

Além disso, segundo a legislação, fatores de potência inferiores a 0,92, geram, além da conta de luz, uma multa ao consumidor.

8.2.6 – Correção do Fator de Potência

Sempre que o fator de potência é muito baixo devemos promover a correção do fator de potência. Como a redução do fator de potência é originada pelo excedente de cargas indutivas no sistema, a forma de

corrigir esse fator de potência é agregar capacitores em paralelo com o sistema para regularizar o fator de potência do mesmo.

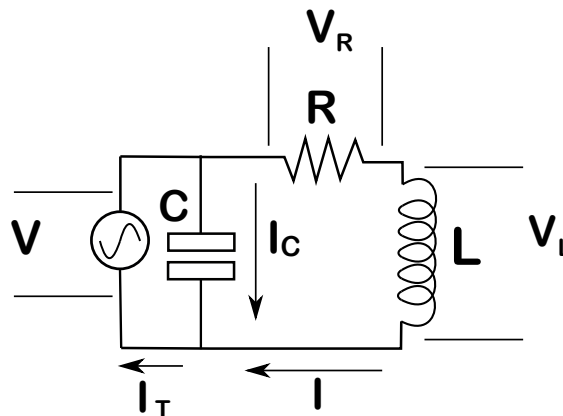


Figura 158 - Circuito RL com capacitor de correção de fator de potência

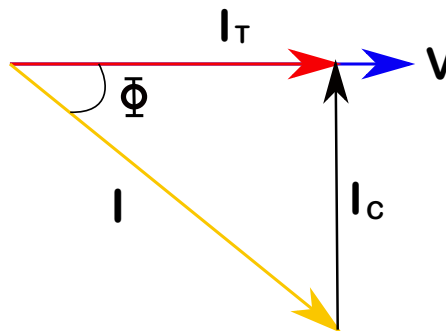


Figura 159 - Diagrama Fasorial das Correntes

Na realidade, a associação do capacitor em paralelo, não anula a componente indutiva do circuito é isso não ocorre porque a potência aparente sempre varia e, em segundo lugar, porque a sobre compensação de uma instalação, pode provocar o aparecimento de sobretensões na linha.

Para corrigir o Fator de Potência devemos seguir uma sequencia simples de passos, como veremos a seguir:

1º - Determine a impedância:

$$Z = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

2º – Encontre o ângulo de defasagem:

$$\tan \Phi = \frac{P}{Q}$$

3º – Encontre a corrente total:

$$I = \frac{V}{Z}$$

4º – Calcule a potência aparente:

$$S = \frac{V^2}{Z}$$

5º – Calcule a potência real:

$$P = I^2 \cdot R$$

6º – Calcule o fator de potência:

$$fp = \frac{P}{S}$$

Se o fator de potência calculado for menor que 0,92, ou seja:

$$f_p < 0,92$$

Significa que a potência reativa é maior que zero, ou seja, é indutiva.

$$Q > 0$$

Desse modo devemos encontrar o valor do capacitor, ou banco de capacitores que faça a correção desse fator de potência. Isso significa que esse capacitor ou banco de capacitores deve produzir uma potência reativa menor que zero, o que fará com que essa potência reativa inferior a zero contrabalance a potência reativa maior que zero, aproximando o fator de potência de 1.

O fator de potência encontrado é resultado, da impedância do circuito, cujo módulo é dado por:

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2}$$

Como conhecemos a resistência e a impedância do circuito devemos lembrar que, sob a forma retangular é representado da seguinte forma:

$$Z = R + jX$$

Mas

$$X = X_L - X_C$$

Para que tenhamos um fator de potência próximo a 1 devemos prever que:

$$X = X_L - X_C = 0$$

Logo

$$X_L = X_C$$

Sendo assim devemos igualar o valor de X, da equação de impedância com o valor de X_C , ou seja:

$$X_C = X$$

Considerando que:

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = X$$

$$X_C = \frac{1}{2\pi f C}$$

$$C = \frac{1}{2\pi f X_C}$$

Na verdade, na prática não tentamos fazer $X_C = X_L$ e isso por que nesse momento enfrentamos um segundo problema.

Como vimos na realização do processo calculado, tentamos fazer $X_C = X_L$, apesar disso ser possível, devemos lembrar dois aspectos importantes:

1º - Os bancos de capacitores são de alto custo. Sendo assim, quanto maior for o valor da capacitância de correção, maior será o custo do banco de capacitores;

2º - A legislação que estipula um valor mínimo para o fator de potência indutiva é a mesma que controla o efeito contrário, ou seja, um fator de potência capacitivo, o que ocorre conforme as cargas indutivas vão sendo desligadas em determinados períodos do dia. Por esse motivo os

bancos de capacitores devem ser automáticos, ou seja, devem ser capazes de acompanhar as variações da carga indutiva, o que aumenta mais ainda o custo do banco de capacitores.

Devido ao exposto acima, devemos procurar atingir um valor do fator de potência levemente superior ao valor de 0,92, de acordo com a disponibilidade econômica.

8.3 Sistemas Trifásicos

8.3.1 - Vantagens dos Sistemas Trifásicos

Quando comparamos os sistemas trifásicos com os sistemas monofásicos, notamos algumas vantagens do primeiro sobre o segundo:

- Um gerador trifásico tem uma potência 50% maior que um gerador monofásico que tenha o mesmo volume e tenha custado o mesmo preço;
- O somatório das seções dos condutores que transportam uma determinada potência em um sistema trifásico é menor que o somatório da seção dos condutores monofásicos que transportam a mesma potência, possua as mesmas perdas e tenha a mesma tensão de alimentação;
- A capacidade de produzir campos magnéticos girantes, que possuem os sistemas trifásicos, permite a utilização de motores assíncronos, aparelhos simples que são robustos e econômicos e que tem o maior percentual de uso no mercado de tração elétrica industrial;
- Partido de sistemas trifásicos é possível obter alimentações monofásicas, enquanto o contrário não é possível.

8.3.2 – Geração Trifásica

Já vimos como um gerador monofásico produz energia elétrica, vamos ver agora como é gerada a energia trifásica.

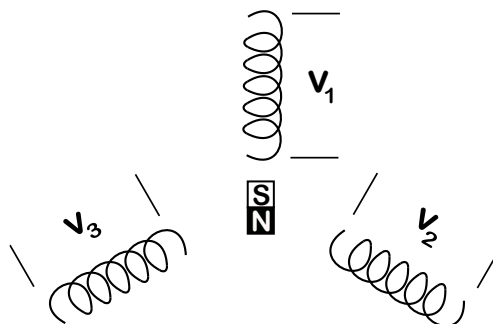


Figura 160 - Representação esquemática de um gerador trifásico

Note que, construtivamente um gerador trifásico possui três bobinas dispostas há 120 graus uma da outra. Quando o rotor gira, induz, através do seu campo magnético, uma Força Eletromotriz sinusoidal. Essa f.e.m tem uma amplitude máxima e os picos de cada fase estão deslocadas 120° uma da outra. Isso significa que cada fase começa seu ciclo, há 1/3 do período da anterior, ou seja:

$$\begin{aligned}v_1 &= V_m \cdot \text{sen}(\omega t) \\v_2 &= V_m \cdot \text{sen}(\omega t - 120^\circ) \\v_3 &= V_m \cdot \text{sen}(\omega t - 240^\circ) = V_m \cdot \text{sen}(\omega t + 120^\circ)\end{aligned}$$

O gráfico abaixo apresenta as curvas relativas as 3 fases.

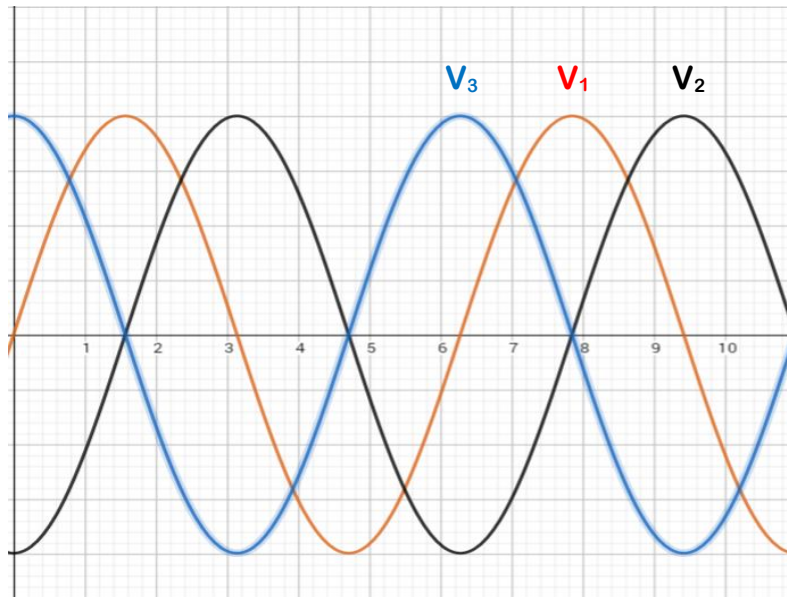


Figura 161 - Representação temporal das 3 fases

A representação vetorial das três fases está apresentada abaixo.

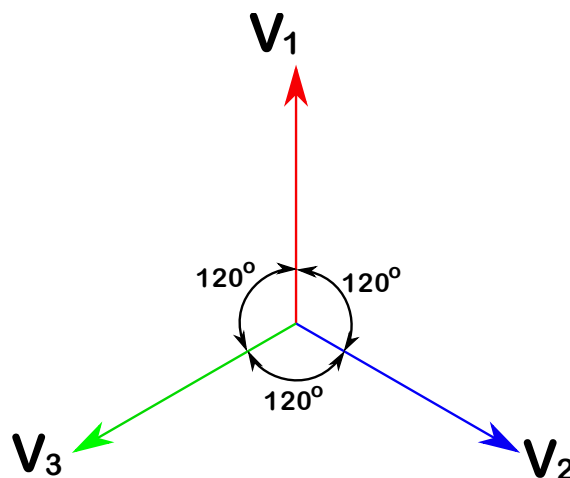


Figura 162 - Diagrama Fasorial Trifásico

8.3.3 – Sistemas Trifásicos Equilibrados

Vamos imaginar um sistema trifásico (representamos 3ϕ) que está alimentando uma determinada carga caracterizada por três receptores independentes. Nesse caso, utilizaremos 6 fios (um par para cada receptor). Se as cargas tiverem a mesma impedância, então as correntes I_1 (fase 1), I_2 (fase 2), I_3 (fase 3), são de valor eficaz idênticos defasados de 120° uma da outra.

Nesse caso dizemos que o sistema está **EQUILIBRADO**. Dizemos isso por que, a soma das três correntes é sempre nula.

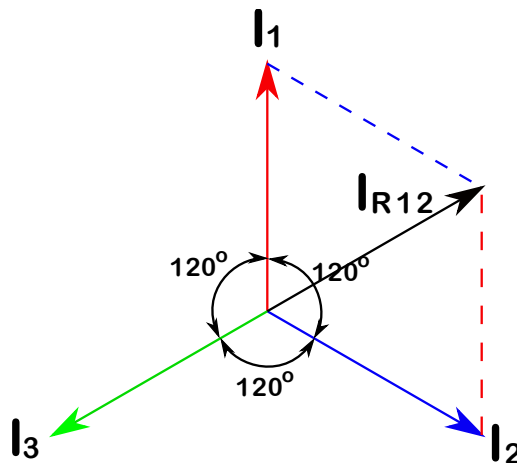


Figura 163 - Vetores de corrente

Como podemos ver na figura acima, a corrente I_{R12} é a corrente resultante da soma dos vetores de corrente I_1 e I_2 . Como é possível ver também, essa corrente I_{R12} tem o mesmo módulo da corrente I_3 , mas com sinal contrário. Sendo assim, esses dois vetores se anulam, comprovando que a soma de três vetores de mesma intensidade, defasados de 120° , é igual a zero.

8.3.4 – Ligação Estrela

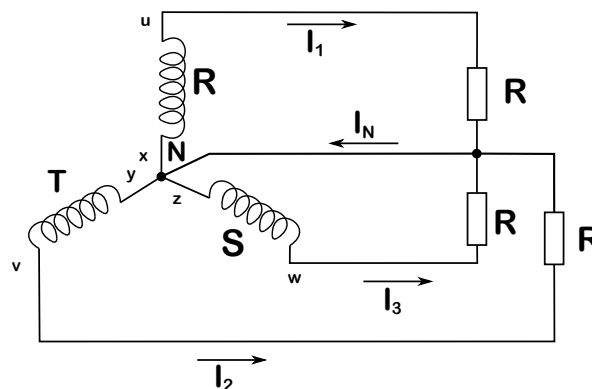


Figura 164 - Ligação em Estrela

Se pegarmos os terminais x, y e z, do gerador e unirmos em um ponto teremos o que é conhecido como **LIGAÇÃO EM ESTRELA**. O ponto comum desses três enrolamentos é denominado **NEUTRO** que, nesse caso, substitui os três condutores de retorno do exemplo anterior. Como já vimos, no caso do sistema estar balanceado, a corrente no neutro será nula.

Essa forma de ligação exige 4 condutores (3 condutores de fase e 1 condutor neutro). Os condutores de fase recebem os nomes R, S e T. Normalmente esse tipo de ligação é utilizado, nos sistemas de distribuição de energia, para alimentação na baixa tensão (220v ou 110v, dependendo do consumidor).

Nesse caso, as cargas são alimentadas por **TENSÕES DE FASE** e essas tensões são dadas por:

$$v_{xu} = V_p \cdot \text{sen}(\omega t) \text{ ou } v_{xu} = V_F \angle 0^\circ = V_F$$

$$v_{yv} = V_p \cdot \text{sen}(\omega t - 120^\circ) \text{ ou }$$

$$v_{yv} = V_F \angle -120^\circ = V_F \left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$v_{zw} = V_p \cdot \text{sen}(\omega t + 120^\circ) \text{ ou }$$

$$v_{zw} = V_F \angle 120^\circ = V_F \left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

Porém, quando as cargas não são balanceadas (o caso mais comum), as tensões entre duas fases, que são chamadas **TENSÕES DE LINHA**, e são dadas por:

$$v_{RS} = v_{xu} - v_{yv} = V_F - V_F \left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = V_F \left(\frac{3}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$= \sqrt{3}V_F \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2} \right)$$

Portanto

$$v_{RS} = \sqrt{3}V_F \angle 30^\circ$$

$$v_{ST} = v_{yv} - v_{zw} = V_F \left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) - V_F \left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$= V_F (-j\sqrt{3}) = -j\sqrt{3}V_F$$

Portanto

$$v_{ST} = \sqrt{3}V_F[-90^\circ]$$

$$v_{TR} = v_{ZW} - v_{xu} = V_F \left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) - V_F = V_F \left(-\frac{3}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$= -\sqrt{3}V_F \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2} \right)$$

Portanto

$$v_{TR} = \sqrt{3}V_F[150^\circ]$$

Com isso, concluímos que:

$$V_L = \sqrt{3}V_F$$

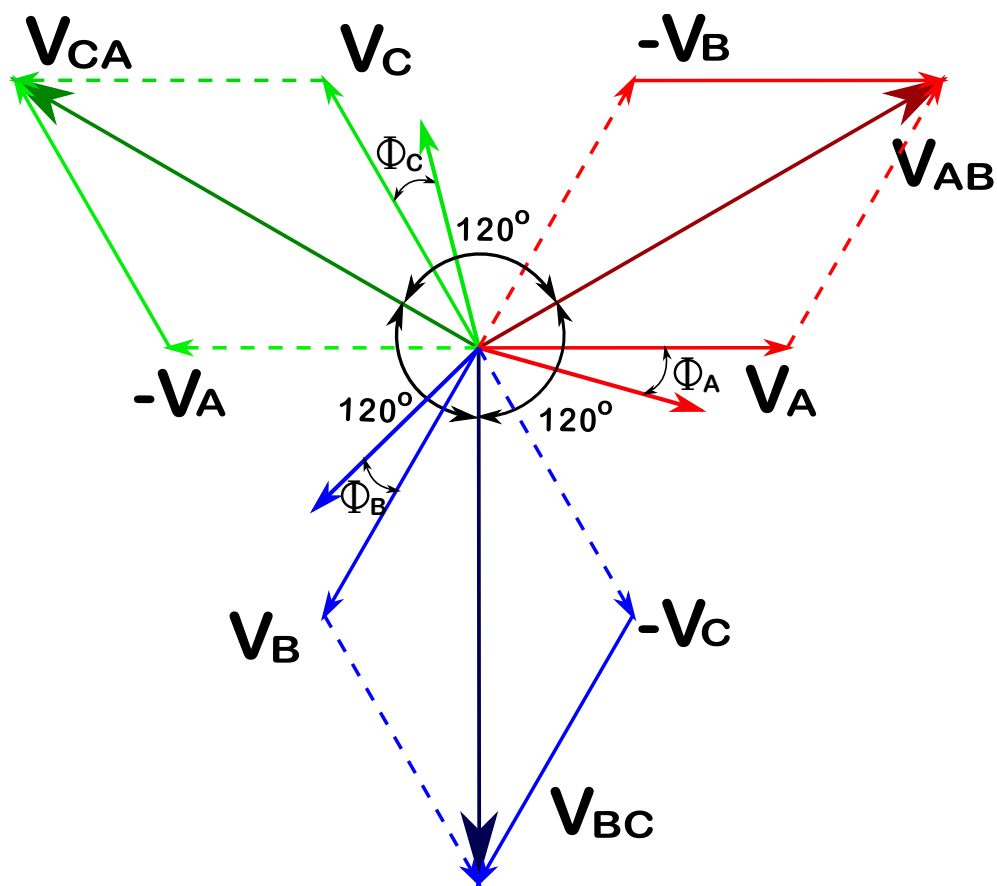


Figura 165 - Diagrama Fasorial com Carga Balanceada em Sistemas Estrela.

8.3.5 – Ligação Triângulo

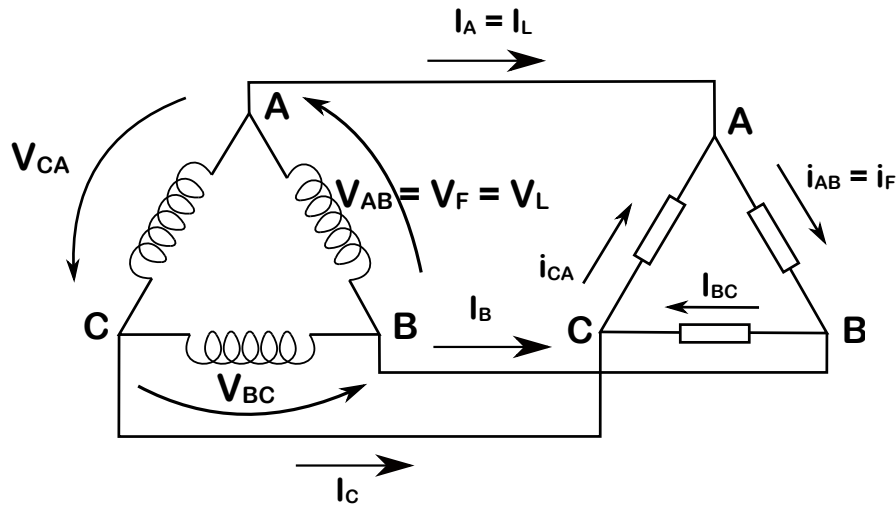


Figura 166 - Ligação Triângulo ou Delta

Nesse tipo de ligação, V_{AB} , V_{BC} , V_{CA} correspondem às tensões de fase e as tensões de linha. Isso significa que:

$$V_L = V_F$$

Entretanto, diferentemente da ligação estrela, na ligação triângulo as correntes de fase i_{AB}, i_{BC}, i_{CA} , são diferentes das correntes de linha i_A, i_B, i_C que podem ser calculadas da seguinte forma:

$$I_A = i_{AB} - i_{CA}$$

$$I_B = i_{BC} - i_{AB}$$

$$I_C = i_{CA} - i_{BC}$$

No caso de carga balanceada, as defasagens entre a tensão e a corrente em cada uma das fases é igual. Isso significa que:

$$\Phi_A = \Phi_B = \Phi_C = \Phi$$

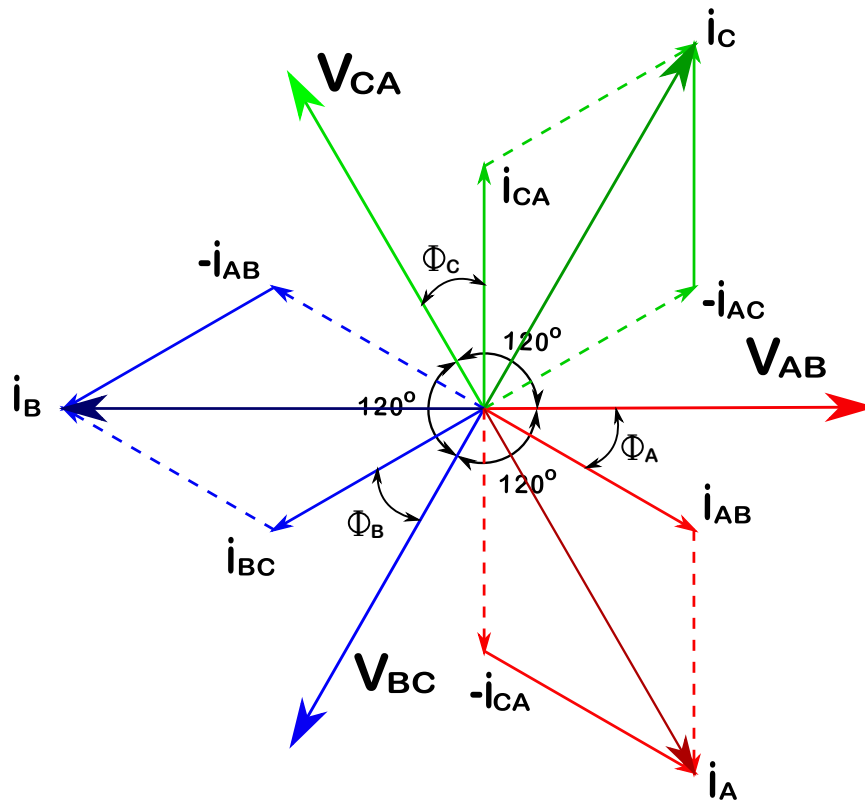


Figura 167 - Diagrama Fasorial para Carga Balanceada em um Sistema Triângulo

Da mesma forma como no sistema em estrela, no caso do sistema em triângulo, quando as cargas não estão balanceadas, ou seja, $\Phi_A \neq \Phi_B \neq \Phi_C$, as tensões de linha e de fase podem ser escritas como:

$$v_{AB} = V_P \cdot \text{sen}(\omega t) \text{ ou } v_{AB} = V_L | 0^\circ = V_L$$

$$v_{BC} = V_P \cdot \text{sen}(\omega t - 120^\circ) \text{ ou}$$

$$v_{BC} = V_L | -120^\circ = V_L \left(-\frac{1}{2} - j \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$v_{CA} = V_P \cdot \text{sen}(\omega t + 120^\circ) \text{ ou}$$

$$v_{CA} = V_L | 120^\circ = V_L \left(-\frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

A relação entre os módulos das tensões de linha e de fase é determinada exatamente da mesma forma como ocorre com as tensões no sistema estrela, portanto:

$$i_L = \sqrt{3} \cdot i_F$$

8.3.6 – Potência em Sistemas Trifásicos

Como já vimos, nos sistemas monofásicos, a potência ativa é dada por:

$$P = VI \cos \Phi \quad [W]$$

Onde V e I são a tensão e a corrente eficazes, respectivamente. Φ é o ângulo entre elas. Pois bem, em um sistema trifásico balanceado as potências em cada uma das fases é igual as demais. Desse modo, a potência ativa total será a soma das potências de cada uma das fases, ou seja:

$$P = 3 \cdot V_F \cdot I_F \cdot \cos \Phi$$

Sendo V_F e I_F são os valores eficazes.

Na ligação em estrela, sabemos que a corrente de fase é igual a corrente de linha ($I_F = I_L$). Também sabemos que:

$$V_F = \frac{V_L}{\sqrt{3}}$$

Se substituirmos essas duas igualdades na equação da potência, teremos:

$$P = 3 \cdot \frac{V_L}{\sqrt{3}} I_L \cos \Phi$$

Operando a divisão teremos:

$$P = \sqrt{3} V_L \cdot I_L \cdot \cos \Phi$$

Para o caso do sistema em triângulo, a potência será dada por:

$$P = 3 \cdot \frac{I_L}{\sqrt{3}} V_L \cdot \cos \Phi$$

Novamente aplicando a divisão teremos:

$$P = \sqrt{3} I_L \cdot V_L \cdot \cos \Phi$$

Observando as duas equações (estrela e triângulo), vemos que a equação é a mesma para ambos os casos. Entretanto essas potências são diferentes.

Se utilizarmos o mesmo raciocínio podemos determinar as potências reativa total e aparente total.

No caso da potência reativa total em sistemas trifásicos, ela pode ser calculada por:

$$P_R = 3 \cdot V_F \cdot I_F \cdot \text{sen}\Phi \text{ [VAR]}$$

Ou ainda

$$P_R = \sqrt{3} \cdot V_L \cdot I_L \cdot \text{sen}\Phi \text{ [VAR]}$$

Para potência aparente total, teremos:

$$P_A = 3 \cdot V_F \cdot I_F \text{ [VA]}$$

Ou ainda

$$P_A = \sqrt{3} \cdot V_L \cdot I_L \text{ [VA]}$$

Capítulo IX

ELETRODINÂMICA

“Todas as ciências matemáticas são baseadas nas relações entre as leis físicas e as leis dos números, de modo que o objetivo da ciência exata é reduzir os problemas da natureza à determinação das quantidades por operações com números”

James Clerk Maxwell

9.1 CORRENTE DE DESLOCAMENTO

Já vimos que a Lei Ampère relaciona a densidade da corrente em um ponto qualquer com o rotacional do campo magnético que ela produz. Sendo assim:

$$\vec{J} = \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{B}$$

Também já vimos que a divergência do rotacional de um campo vetorial qualquer é sempre zero. Sendo assim, a equação anterior, obviamente implicará que a densidade de corrente, em qualquer ponto, será nula.

Entretanto, como também já vimos, isso está em contradição com o princípio fundamental que define a conservação da carga elétrica.

Como você deve lembrar, que a equação que expressa a conservação da carga elétrica, na sua forma diferencial é:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{dp}{dt} = 0$$

Desse modo, a Lei de Ampère só é válida para o caso de correntes estacionárias. Nesses casos, como sabemos, não ocorrem variações na carga volumétrica em qualquer ponto. É, portanto, necessário encontrar uma fórmula que seja mais geral para o rotacional do campo \vec{B} que seja capaz de reproduzir a Lei de Ampère para os casos particulares das ondas estacionárias. Para fazer isso, vamos começar com a equação da continuidade.

Vamos então utilizar a carga volumétrica na equação da conservação da carga elétrica e utilizaremos a Lei de Gauss. Com isso obtemos:

$$\vec{\nabla} \left(\vec{J} + \epsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt} \right) = 0$$

Devemos lembrar que o termo entre parênteses é o campo vetorial \vec{F} cujo divergente é igual a zero. Sendo assim:

$$\vec{J} + \epsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt} = \vec{F}$$

Para o caso particular onde a derivada do campo elétrico é zero, teremos que a densidade de corrente será igual ao campo \vec{F} . Nesse caso, para que a Lei de Ampère seja válida, é necessário que:

$$\vec{F} = \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{B}$$

Nesse caso, a divergência é nula como se fazia necessário. Isso ocorre por que a divergência do rotacional de qualquer campo, como já vimos, é sempre nula. As duas últimas equações nos permitem chegar a Lei de Ampère-Maxwell.

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt}$$

Quando o sistema está em presença de correntes não estacionárias, a variação de carga elétrica em alguns pontos traz como consequência o aparecimento de campos elétricos variáveis que introduzem na equação um termo adicional.

$$\vec{J}_D = \epsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt}$$

Esse termo é conhecido como DENSIDADE DE CORRENTE DE DESLOCAMENTO.

Para obtermos a forma integral da equação de Ampère-Maxwell multiplicamos $d\vec{A}$, e integramos sobre uma superfície S.

$$\iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot d\vec{A} = \mu_0 \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

Usando o teorema de Stokes podemos escrever a integral do lado esquerdo como uma integral de linha. A integral do vetor \vec{J} , que se encontra na equação do lado direito representa a corrente que percorre a curva C e a integral de \vec{E} representa o fluxo elétrico Φ . Sendo assim, o resultado que obteremos é semelhante a Lei de Ampère, entretanto, tem uma corrente modificada:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 (I_C + I_D)$$

Onde: C é a curva fronteira da integral;
 I_C é a corrente através da superfície S
 I_D é a corrente de deslocamento.

Essa corrente de deslocamento é definida por:

$$I_D = \epsilon_0 \frac{d\Phi}{dt}$$

9.2 EQUAÇÕES DE MAXWELL

Nos primeiros capítulos desse livro já vimos as equações que são a base da eletrostática e do magnetismo. Além disso sabemos que no caso de campos não estáticos, devemos modificar as equações básicas, pois nesse caso, os campos elétrico e magnético já não são independentes. A equação de Ampère-Maxwell, possui uma constante ($\mu_0 \epsilon_0$) que pode ser determinada a partir da constante de Coulomb e da constante magnética.

$$\mu_0 \epsilon_0 = \frac{k_m}{k} = \frac{1}{9 \times 10^{16}} \frac{s^2}{m^2} = \frac{1}{c^2}$$

Constante magnética
Constante de Coulomb

c é a velocidade da luz no vácuo ($c = 3 \times 10^8$ m/s).

Como a luz é uma onda eletromagnética, não é estranho a relação entre as constantes eletromagnéticas e a velocidade da luz.

Os campos, elétrico (\vec{E}) e magnético (\vec{B}) são definidos por 4 equações básicas que definem as divergentes e os rotacionais. Essas equações são:

Lei de Gauss $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$

Lei da Faraday $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt}$

Equação de Ampère Maxwell $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$

Lei de Ampère Maxwell $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \frac{1}{c^2} \frac{d\vec{E}}{dt}$

Essas quatro equações, derivadas das respectivas leis, são conhecidas como LEIS DE MAXWELL e definem os campos \vec{E} e \vec{B} em qualquer ponto, em qualquer meio somente em função da carga volumétrica e da densidade de corrente.

A densidade de corrente, por sua vez, depende da quantidade de cargas em movimento. Isso é determinado a partir das leis da mecânica e levando em consideração que a força eletromagnética sobre uma partícula com carga q é definida como sendo a Força de Lorentz:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

É fácil entender que seria quase impraticável resolver o problema se fossemos considerar todas as cargas e correntes que existem dentro de um condutor. Entretanto, vamos trabalhar com uma ordem de grandeza das distâncias entre átomos que é muitas vezes maior que o tamanho do próprio átomo. Justamente por causa disso, torna-se mais interessante, incluir os campos das cargas e as correntes polarizadas que existem nos átomos em dois novos campos, denominados, \vec{D} e \vec{H} . Em função desses dois campos (que analisaremos com mais calma no Apêndice II). Por enquanto, vamos aceitar que as equações de Maxwell, em função desses dois campos ficam:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}_0 + \frac{d\vec{D}}{dt}$$

Nessas equações: ρ_0 é uma carga volumétrica “livre” (não inclui as cargas polarizadas nos átomos)

\vec{J}_0 é a densidade de corrente “livre” (não incluindo as correntes de polarização)

\vec{D} é o chamado Deslocamento Elétrico

\vec{H} é o campo magnético do meio.

É interessante constatar que as quatro últimas equações apresentadas, são as equações de Maxwell para análises macroscópicas. Quando vamos resolver é necessário fazer uma relação entre o deslocamento elétrico (\vec{D}) e o campo magnético do meio (\vec{H}), com o campo elétrico (\vec{E}) e o campo magnético (\vec{B}).

Para analisarmos as equações o mais simples é a análise feita em um meio que seja isotrópico e linear. Nesse caso, os campos \vec{D} e \vec{H} são paralelos e diretamente proporcionais a \vec{E} e \vec{B} .

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \qquad \vec{B} = \mu \vec{H}$$

Nesse caso, ϵ é a permissividade elétrica do meio;

μ é a permeabilidade magnética.

As equações de Maxwell também podem ser representadas sob a forma de integral. Desse modo, se integrarmos sobre uma superfície fechada S e aplicarmos o segundo teorema da divergência a integral ao longo de uma curva fechada C e aplicarmos o teorema de Stokes, teremos:

$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{A} = q_0$$

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = - \iint_{S_C} \frac{d\vec{B}}{dt} \cdot d\vec{A}$$

$$\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{r} = I_0 + \iint_{S_C} \frac{d\vec{D}}{dt} \cdot d\vec{A}$$

Essas equações são válidas em qualquer superfície fechada (S), curva fechada (C) e superfície S delimitada por C (S_C). Essas são as equações básicas da eletrodinâmica.

9.3 TRANSFORMAÇÃO DE GALILEU DO CAMPO ELETROMAGNÉTICO

A derivada da equação $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \frac{1}{c^2} \frac{d\vec{E}}{dt}$ indica que pode existir um campo magnético sem que existam correntes, por que a variação do campo elétrico em função do tempo é também uma fonte do campo magnético. Essa variação temporal do campo elétrico pode ocorrer por causa das variações nas suas fontes ou simplesmente devido a um deslocamento global das fontes.

Se analisarmos o deslocamento das fontes, no referencial em movimento com as fontes não existe variação do campo elétrico em função do tempo e, por conseguinte, o campo magnético não pode ser igual ao do referencial em movimento.

Vamos considerar uma distribuição de carga $\rho(t)$ que é fixa em um referencial R'. Essa carga se desloca com uma velocidade \vec{v} . No referencial R', não existe corrente, sendo assim, de acordo com a equação $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \frac{1}{c^2} \frac{d\vec{E}}{dt}$, o rotacional do campo magnético (\vec{B}) será igual a derivada do campo elétrico em função do tempo, dividida pela velocidade da luz ao quadrado. Sendo assim, a derivada do campo elétrico \vec{E}' , quando em movimento, é calculada aplicando a derivada convectiva ao campo \vec{E} .

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}' = \frac{1}{c^2} \frac{d\vec{E}'}{dt} = \frac{1}{c^2} \frac{d\vec{E}}{dt} + \frac{\vec{v}}{c^2} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \frac{1}{c^2} \vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{E})$$

Se utilizarmos a lei de Gauss, teremos que o termo $\vec{v}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E})$ será igual a $\rho \vec{v} / \epsilon_0$. Nesse caso, o produto $\rho \vec{v}$ é a densidade de corrente e \vec{j} é a constante ϵ_0 e $c^2 = 1/\mu_0$.

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}' = \frac{1}{c^2} \frac{d\vec{E}'}{dt} + \mu_0 \vec{j} - \frac{1}{c^2} \vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{E})$$

Se utilizarmos a lei de Ampère-Maxwell, podemos substituir os dois primeiros termos que estão no lado direito da equação pelo rotacional do campo magnético \vec{B} . Sendo assim obtemos:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}' = \vec{\nabla} \times \left(\vec{B} - \frac{1}{c^2} \vec{v} \times \vec{E} \right)$$

Então:

$$\vec{B}' = \vec{B} - \frac{1}{c^2} \vec{v} \times \vec{E} + \vec{C}$$

\vec{C} é um campo com rotacional igual a zero.

Essa relação ao qual chegamos é válida para qualquer velocidade \vec{v} , mas devemos atentar que para o caso específico em que $\vec{v} = 0$, ambos os campos \vec{B} e \vec{B}' deverão ser iguais. Isso significa que $\vec{C} = 0$.

Dessa forma iremos obter o campo magnético \vec{B}' em função dos campos elétrico \vec{E} e magnético \vec{B} . Esses dois campos, associados a equação

$$\vec{E}' = \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}$$

Constituem o que denominamos de TRANSFORMAÇÃO DE GALILEU do campo eletromagnético.

Sendo assim teremos:

$$\begin{aligned}\vec{E}' &= \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \\ \vec{B}' &= \vec{B} - \frac{1}{c^2} \vec{v} \times \vec{E} + \vec{C}\end{aligned}$$

Equação 1 – Transformação de Galileu do campo Eletromagnético

Note que essas duas equações relacionam os campos \vec{E}' e \vec{B}' no referencial em movimento em qualquer ponto \vec{r} e qualquer instante t . Vamos aqui lançar um conceito. A ideia de “laboratório”, que irá se distinguir do conceito “referencial em movimento”. As equações de Maxwell variam em relação à transformação entre referenciais inerciais. Para poder entender o que dissemos acima, vamos definir o mesmo sistema de eixos coordenados para os dois referenciais. Chamaremos o referencial R (laboratório) e R' (referencial em movimento). Vamos também determinar um instante inicial $t = 0$. Desse modo, se selecionamos um instante t qualquer, diremos que a origem do referencial R' está nas coordenadas $t\vec{v}$ que é relativa ao referencial R e a relação entre a posição de uma partícula nos dois referenciais, será dada pela transformação de Galileu:

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}t$$

A transformação reversa dessa equação será $\vec{r} = \vec{r}' + \vec{v}t$. Essa equação que tem a forma da transformação de Galileu por que a velocidade de R, relativa a R', será $-\vec{v}$.

Desse modo, o tratamento dado para R e R' é idêntico e é completamente arbitrária a escolha do referencial que definimos como laboratório. Se derivarmos a equação acima, teremos a derivada da velocidade e da aceleração. Essas duas derivadas também não irão permitir a distinção entre os referenciais inerciais.

Quando fazemos a transformação de Galileu do campo eletromagnético, já não possuímos uma situação de simetria. Sendo assim, se quisermos obter a transformação inversa, devemos substituir \vec{B} e \vec{E} nas equações da transformação de Galileu e teremos:

$$\begin{aligned}\vec{E}' &= \vec{E} + \vec{v} \times \left(\vec{B}' + \frac{1}{c^2} \vec{v} \times \vec{E} \right) = \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} + \vec{\beta}(\vec{\beta} \cdot \vec{E}) - \beta^2 \vec{E} \\ \vec{B}' &= \vec{B} - \frac{v}{c^2} \times (\vec{E}' - \vec{v} \times \vec{B}) = \vec{B} - \frac{1}{c^2} \vec{v} \times \vec{E}' + \vec{\beta}(\vec{\beta} \cdot \vec{B}) - \beta^2 \vec{B}\end{aligned}$$

Definimos $\vec{\beta} = \vec{v}/c$

Também podemos eliminar $(\vec{\beta} \cdot \vec{B})$ e $(\vec{\beta} \cdot \vec{E})$ por que realizando uma multiplicação escalar das equações de transformação de Galileu por $\vec{\beta}$ vamos obter as seguintes equações:

$$\begin{aligned}\vec{\beta} \cdot \vec{E}' &= \vec{\beta} \cdot \vec{E} \\ \vec{\beta} \cdot \vec{B}' &= \vec{\beta} \cdot \vec{B}\end{aligned}$$

Se substituirmos essas duas igualdades nas equações acima teremos:

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \gamma^2 \left(\vec{E}' - \vec{v} \times \vec{B}' \right) - \gamma^2 \vec{\beta} \left(\vec{\beta} \cdot \vec{E}' \right) \\ \vec{B} &= \gamma^2 \left(\vec{B}' + \frac{1}{c^2} \vec{v} \times \vec{E}' \right) - \gamma^2 \vec{\beta} \left(\vec{\beta} \cdot \vec{B}' \right)\end{aligned}$$

Nessas fórmulas γ é conhecido como FATOR DE DILATAÇÃO DE LORENTZ e é definida por:

$$\gamma^2 = \frac{1}{1 - \beta^2}$$

Nesse caso a transformada inversa não tem a mesma forma da transformação inicial. Isso pode ser comprovado se analisarmos, por exemplo, um campo magnético que seja nulo no referencial R. Se passarmos esse campo magnético para o referencial R', irá surgir um campo elétrico \vec{E}' que será igual ao campo elétrico \vec{E} . Entretanto se o movimento fosse contrário, ou seja, o campo magnético estivesse originalmente no referencial R' e fosse nulo, ao passa-lo para o referencial R verificaríamos o surgimento de um campo elétrico \vec{E} que seria diferente do campo \vec{E}' .

Na verdade, a diferença entre os valores dos dois campos é muito pequena. Isso ocorre por que as velocidades que normalmente trabalhamos, o valor de β será muitas vezes menor que 1 e o valor de γ é praticamente 1. Para esse caso, a transformada inversa apresenta a mesma forma da inicial.

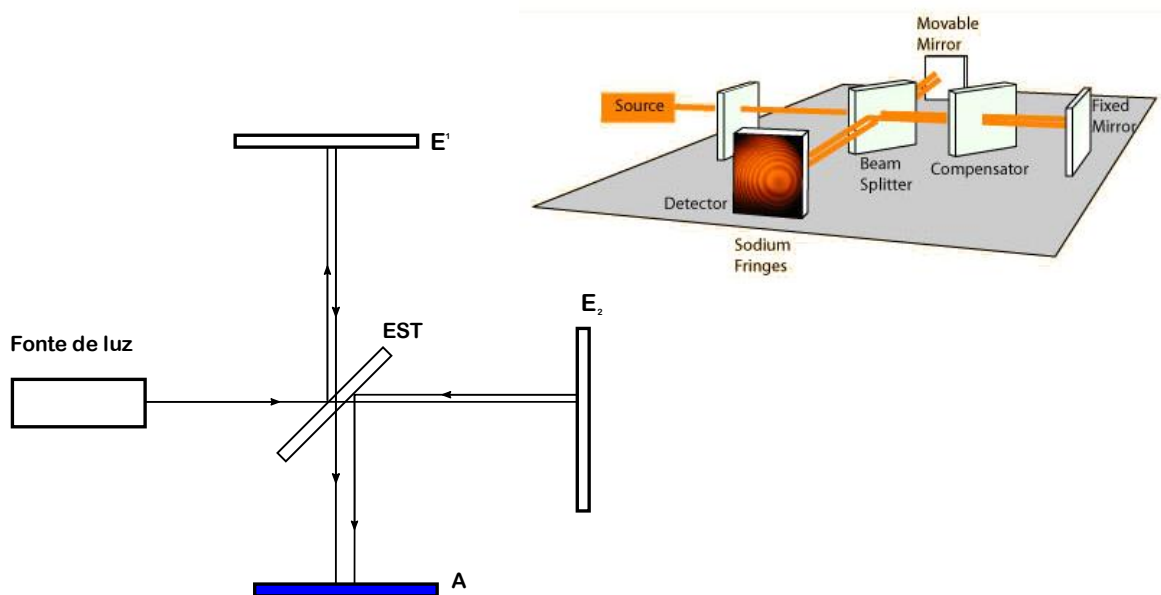
A situação fica mais complexa quando nossas análises se aproximam da velocidade da luz. Em princípio seria fácil descobrir qual seria o verdadeiro referencial R, local em que as equações de Maxwell são exatas. Com a simples medida da velocidade da luz no vácuo e sua respectiva comparação com c .

Esse meio hipotético que constitui o referencial R e por onde se propaga o campo eletromagnético, recebeu o nome de “éter”. O final do século XIX, principalmente suas últimas quatro décadas, testemunharam vários experimentos de ótica para a descoberta da velocidade da Terra no éter. Esses experimentos chegaram a sugerir que o éter era material e poderia ser arrastado parcialmente por objetos, incluindo a Terra.

Os responsáveis pela derrocada total do conceito de éter foram Michelson e Morley com o seu interferômetro que é um instrumento capaz de detectar variações mínimas na velocidade de propagação da luz em diferentes direções.

O funcionamento desse equipamento é, de certa forma, muito simples. Um feixe de luz é separado em duas partes em um espelho semitransparente (EST). Os dois feixes resultantes dessa separação são refletidos em dois outros espelhos E_1 e E_2 e atingem um anteparo A. Nesse ponto são observadas as franjas de interferência entre esses feixes. As faixas mais claras aparecerão nos pontos onde a diferença entre os percursos dos dois feixes for múltiplo inteiro do comprimento de onda e produzem uma interferência construtiva.

Se deslocarmos o espelho E_1 ou o espelho E_2 iremos provocar uma modificação no tempo de demora de um dos feixes que chega em A e, com isso, produziremos um deslocamento nas franjas de interferência. Se a velocidade da luz variasse com a direção, o movimento dos espelhos do interferômetro seria possível alterar os tempos de chegada dos dois feixes e, com isso, deslocar as franjas.



Equação 2 - Interferômetro de Michelson e Morley

Michelson e Morley em seu experimento mostraram que a velocidade da luz solar não varia com a direção, uma vez que durante a experiência eles não observaram nenhuma variação na posição das franjas. Mas foi Hendrik Lorentz que conseguiu explicar de forma mais substancial o resultado do experimento. Ele explicou a invariância da velocidade da luz. Para isso, ele admitiu que os corpos em movimento no éter sofrem uma contração igual a $1/\gamma$ na direção do movimento. Ele explicou que essa contração se dá devido a uma modificação da transformação de Galileu que, nesse caso, passaria a ser substituída pela transformação de Lorentz. Desse jeito as transformadas dos campos eletromagnéticos são idênticas em qualquer referencial.

A consolidação dessas teorias veio com Albert Einstein, em 1905, quando publicou a sua Teoria da Relatividade. Com essa teoria ela conseguiu compatibilizar as equações de Maxwell com a inexistência de referenciais absolutos.

Devemos lembrar que um dos postulados fundamentais da teoria da relatividade é a invariância da velocidade da luz no vácuo. Os resultados desse estudo são extremamente surpreendentes e, ao mesmo tempo, se mostram irreconciliáveis com a mecânica clássica, e o mais interessante é que no caso do eletromagnetismo, as equações de Maxwell e a invariância da carga permanecem válidas, mesmo com as questões do relativismo.

9.4 ENERGIA DO CAMPO ELETROMAGNÉTICO

No estudo do campo eletrostático, concluímos que esse campo tem associado a si uma energia potencial. Pois bem, da mesma forma, no caso de um campo eletromagnético dinâmico existe uma energia associada. Se quisermos determinar a força que age sobre um pequeno volume dV , cuja carga volumétrica é determinada por $\rho(\vec{r}, t)$, e se desloca com uma velocidade \vec{v} dentro de campos eletromagnéticos $\vec{E}(\vec{r}, t)$ e $\vec{B}(\vec{r}, t)$, utilizaremos a equação:

$$d\vec{F} = \rho(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})dV$$

Essa força irá realizar um trabalho durante o intervalo de tempo, descrito por dt que será igual a $d\vec{F} \cdot d\vec{r}$. A potência fornecida será dada por:

$$dP = d\vec{F} \cdot \vec{v}$$

A partir dessa equação teremos:

$$dP = d\vec{F} \cdot \vec{v} = \rho(\vec{E} \cdot \vec{v})dV = (\vec{E} \cdot \vec{j})dV$$

Como pode ser visto, o campo magnético não entra explicitamente na equação. Isso ocorre por que a força magnética, na realidade, não realiza trabalho. Entretanto, a potência depende, de forma implícita, do campo magnético, isso por que, as variações desse campo, influem diretamente no campo elétrico.

A potência fornecida em uma região R será o resultado de uma integral de volume da equação anterior. Se utilizarmos a lei de Ampère-Maxwell, podemos descrever a densidade de corrente em função dos campos magnético e elétrico, assim:

$$P = \iiint_R \vec{E} \left(\vec{\nabla} \times \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) dV$$

Podemos agora reescrever a equação acima utilizando a identidade vetorial $\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = \vec{H} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H})$ e a lei de Faraday e obteremos:

$$P = \iiint_R \left[-\vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) \right] dV$$

A equação possui três termos. O último representa um fluxo que passa através da fronteira da região R. Esse termo pode ser escrito como a integral da superfície se utilizamos o teorema da divergência.

Se utilizarmos os conceitos $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ e $\vec{B} = \mu \vec{H}$, no caso de um meio linear, veremos que o deslocamento elétrico e o campo magnético, estão relacionados com o campo elétrico e a indução magnética. O produto escalar de qualquer vetor com a sua derivada é igual a metade da derivada do quadrado do seu módulo.

Desse modo, a equação anterior pode ser escrita como:

$$P = \iiint_R \left[-\frac{1}{2\mu} \frac{\partial B^2}{\partial t} - \frac{\epsilon}{2} \frac{\partial E^2}{\partial t} \right] dV - \frac{1}{\mu} \oint_S (\vec{E} \times \vec{B}) \cdot d\vec{A}$$

$$P = -\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V u \cdot dV - \oint_S \vec{S} \cdot d\vec{A}$$

Na equação anterior u é energia eletromagnética volumétrica e pode ser definida pela equação:

$$u \equiv \frac{1}{2\mu} B^2 + \frac{\epsilon}{2} E^2$$

O outro elemento introduzido na equação \vec{S} , é conhecido como vetor de Poynting e será definido pela equação:

$$\vec{S} \equiv \frac{1}{\mu} \vec{E} \times \vec{B}$$

A potência instantânea P representa a energia mecânica que o sistema fornece por unidade de tempo. Essa energia será igual a diminuição de energia eletromagnética na região R .

Desse modo na equação da potência, a integral de volume de u representa a energia eletromagnética total que se encontra dentro da região R . A integral fechada de \vec{S} é o fluxo de energia eletromagnética.

A energia mecânica ou energia eletromagnética dentro do volume V são diretamente afetados pela variação do fluxo de energia eletromagnética. Já o vetor de Poynting representa a densidade de fluxo de energia eletromagnética, ou seja, é a energia eletromagnética transferida por unidade de área e por unidade de tempo. Sua direção e sentido indicam a direção e sentido de transferência da energia.

9.5 POTÊNCIA VETORIAL

Como já vimos, podemos representar o campo eletrostático em função do seu potencial eletrostático. Uma das condições necessárias para a definição do potencial é o fato de que o campo eletrostático é conservativo.

Quando submetido a condições não estáticas, como o rotacional do campo não é nulo, o campo elétrico deixa de ser conservativo. Apesar disso ainda é possível definir potenciais eletromagnéticos através da análise que faremos a seguir.

Primeiro vamos lembrar do Cálculo Vetorial que, qualquer campo vetorial \vec{F} é capaz de verificar a seguinte propriedade:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = 0$$

Note que essa propriedade, juntamente com a terceira equação de Maxwell ($\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$) indicam que podemos escrever a equação do campo magnético como:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

Onde: \vec{A} – campo vetorial que recebe o nome de POTENCIAL VETORIAL. Entretanto existem algumas questões sobre essa equação que devem ser analisadas.

Se observarmos bem, o rotacional de \vec{A} é, na verdade, uma combinação das derivadas que compõe \vec{A} , no entanto, existem várias funções cujas derivadas são iguais. O que torna a definição de potencial vetorial, uma definição arbitrária.

Vamos imaginar que exista um vetor \vec{A} e um outro vetor \vec{A}' representem dois campos que possuam o mesmo rotacional \vec{B} , sendo assim:

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{A}' \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{A} - \vec{\nabla} \times \vec{A}' = \vec{\nabla} \times (\vec{A}' - \vec{A})$$

Nesse caso, a diferença entre \vec{A} e \vec{A}' é um campo conservativo e podemos determinar se calcularmos o gradiente de um campo escalar ϕ .

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\phi$$

Anteriormente vimos que a mesma coisa ocorria no caso eletrostático onde podíamos somar uma constante arbitrária ao potencial e isso não modificava o campo elétrico. O potencial foi definido de forma única, com a definição de um ponto onde deveria ser nulo.

Mas essa solução só é válida para \vec{A}' , no caso do potencial \vec{A} a definição do ponto onde esse potencial é nulo, não é o bastante, obrigatoriamente devemos escolher um valor arbitrário para a divergência desse \vec{A} . Isso ocorre por que, para definir um campo vetorial, necessitamos do rotacional e do divergente desse campo.

Se tomarmos a equação que definiu o potencial vetorial e substituirmos na segunda equação de Maxwell teremos:

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0$$

Rotacionais do gradiente de qualquer campo escalar são sempre zero e isso implica a existência de um campo escalar, que nos denominamos de potencial escalar V , de tal forma que:

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla}V$$

Isolando o campo elétrico teremos:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Dessa forma, ainda podemos definir o potencial escalar V . Entretanto, nesse caso, o campo elétrico irá depender tanto do potencial escalar quanto do potencial vetorial.

Quando o sistema é estático, temos uma derivada do potencial vetorial em função do tempo, cujo resultado é zero. Sendo assim, o campo elétrico será igual ao gradiente do potencial escalar, com sinal negativo.

Vamos voltar a equação que relaciona os vetores \vec{A} e \vec{A}' . Ao adicionarmos o termo $\vec{\nabla}\phi$ no potencial \vec{A} nós não iremos alterar o campo magnético. Entretanto, segundo a equação acima o campo elétrico irá se reduzir em $\vec{\nabla}(\partial\phi/\partial t)$.

Como já sabemos, para que o campo elétrico seja bem definido, é necessário que operemos uma alteração de \vec{A} e \vec{A}' e, ao mesmo tempo, ocorra uma alteração do potencial escalar V , para:

$$V' = V - \frac{\partial\phi}{\partial t}$$

Com isso, a segunda e a terceira ficam garantidas através da definição dada de potencial escalar e potencial vetorial. Nesse caso, em função dos potenciais, escreveremos a primeira e a quarta equação de Maxwell como:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla}V) + \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (a)$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \mu_0 \vec{J} - \frac{1}{c^2} \left(\vec{\nabla} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} \right) \quad (b)$$

Note que mesmo com as duas equações temos a liberdade de escolher de forma arbitrária a divergência de \vec{A} ; qualquer escolha que façamos para o divergente ($\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$) denominaremos esse de CALIBRAÇÃO. A calibração de Coulomb, $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$, é a mais simples que pode ser escolhida. Substituindo essa calibração na equação (a), acima, transformarmos essa na equação de Poisson da eletrostática.

Já a equação (b) envolve dois potências, que são, V e \vec{A} , o que torna a utilização da calibração mais complicada. Para isso, utilizamos o fato de que a calibração permite que se possa dividir V e \vec{A} em duas equações de mesma estrutura. Essa é chamada de Calibração de Lorentz:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t}$$

Na equação (b), o segundo e o terceiro termo somem e podemos escrever as equações (a) e (b) da seguinte forma:

$$\nabla^2 V - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{J}$$

Dessa forma, as duas equações apresentam uma simetria melhor. Além disso, apresentam a vantagem de ser uma única equação capaz de ser aplicada a campos diferentes, pois a solução matemática é semelhante nos dois casos.

Para o caso de regiões onde não existam cargas ou correntes, os termos que se encontram no lado direito das equações tem resultado nulo e, com isso, obtemos as chamadas EQUAÇÕES DE ONDA.

Capítulo X

ESTUDO DAS ONDAS ELETROMAGNÉTICAS

“Não penso que as ondas de rádio que descobri vão ter alguma aplicação prática”

Heinrich Hertz

“Em todo o espaço há energia...é (só) uma questão de tempo até que os homens tenham êxito em associar seus mecanismos ao aproveitamento desta energia.”

Nikola Tesla

10.1 ONDAS ELETROMAGNÉTICAS

Como já estudamos, em qualquer espaço onde não existam cargas ou correntes, podemos escrever as equações de Maxwell da seguinte forma:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Essas equações possuem várias soluções e a mais simples será $\vec{E} = \vec{B} = 0$ para qualquer ponto. Entretanto, sabemos que um campo pode ser nulo em um referencial que esteja em movimento e diferente de zero em um outro referencial que não esteja em movimento. Sendo assim essa consideração nos faz questionar; haverá uma situação em que as soluções triviais $\vec{E} = \vec{B} = 0$ ocorram em um determinado referencial e não ocorram no referencial de laboratório?

Vamos testar as prováveis respostas a essa questão utilizando as equações de transformação dos campos. Faremos isso igualando os campos do referencial R' a zero.

$$\vec{E} = -\vec{v} \times \vec{B}$$

$$\vec{B} = \frac{1}{c^2} \vec{v} \times \vec{E}$$

Na primeira equação, como sabemos de Cálculo Vetorial, implica que o campo elétrico \vec{E} é perpendicular ao campo magnético \vec{B} e também perpendicular a \vec{v} . Desse modo, esses três vetores definem um sistema de coordenadas cartesianas. Nesse caso, o eixo x aponta o campo elétrico, o eixo y aponta o eixo do campo magnético e o eixo z aponta a velocidade do referencial R' (\vec{v}).

O fato dos três vetores serem perpendiculares podemos analisar as equações anteriores através das seguintes relações entre os módulos:

$$E = vB$$

$$c^2 B = vE$$

Ao analisarmos essas igualdades podemos afirmar que a velocidade do referencial R' é igual a velocidade da luz. Podemos afirmar também que o modulo do campo elétrico é igual a velocidade da luz (c) multiplicada pelo campo de indução magnética, ou seja:

$$E = cB$$

Como já vimos anteriormente vimos que a existência de campos elétricos e magnéticos que não sejam paralelos, ocasiona o surgimento de uma densidade de fluxo de energia eletromagnética que é dado pelo vetor de Poynting, ou seja:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} = c\epsilon_0 E^2 \hat{v}$$

Nessa equação \hat{v} é o versor na direção e sentido de propagação da onda. Ele se situa perpendicular aos campos pela regra da mão direita. A consequência disso é que irão existir soluções não triviais no vazio. Essas soluções são chamadas **ONDAS ELETROMAGNETICAS**. Nessas ondas, os campos elétrico e magnético são cruzados, para cada ponto analisado, e transportam a energia eletromagnética na direção perpendicular a esses campos, que é a direção de propagação da onda.

Enquanto a onda eletromagnética se propaga no vazio, em cada ponto por onde ela passa, existirá uma energia que será dada pela equação:

$$u \equiv \frac{\epsilon_0}{2} (c^2 B^2 + E^2) = \epsilon_0 E_0^2$$

Note que essa equação foi definida no capítulo anterior como sendo a energia eletromagnética volumétrica, entretanto, substituímos μ por μ_0 e ϵ por ϵ_0 .

Embora a equação $E = cB$ mostre que em uma onda eletromagnética, o campo magnético seja muitas vezes menor que o campo elétrico, ambas as ondas contribuem da mesma forma para a energia.

10.2 EQUAÇÃO DA ONDA ELETROMAGNÉTICA

Agora vamos utilizar as equações de Maxwell, citadas no início desse capítulo, e encontraremos a forma explícita dos campos em uma onda eletromagnética. Essa expressão será obtida em função do tempo e da posição.

Em primeiro lugar vamos analisar a segunda e a quarta equação de Maxwell. Os rotacionais dessas duas equações são:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \vec{B}$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \vec{E}$$

Se aplicarmos a propriedade do rotacional de um rotacional no lado esquerdo das duas equações e utilizarmos o lado direito das duas equações para obter:

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \nabla^2 \vec{B} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

Agora vamos trabalhar com a primeira e a terceira equação de Maxwell. Delas sabemos que o divergente dos dois campos é nulo, o que nos leva a EQUAÇÃO DA ONDA para os campos elétrico e magnético.

$$\nabla^2 \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Como podemos observar essas duas equações tem a mesma forma matemática e também possuem soluções que são semelhantes. Essas equações de onda aparecem em várias áreas da Física e da Engenharia e já haviam sido objeto de estudos de d'Alembert e outros matemáticos, mesmo antes de Maxwell.

É importante observar que essa são somente duas das quatro equações de Maxwell, sendo assim é necessário utilizar as outras duas equações para calcular um dos campos em função do outro. Desse modo só necessitaremos solucionar uma das equações de onda.

A equação de onda é linear, na verdade uma combinação linear de soluções, chamadas **FUNÇÕES DE ONDA**, é também uma solução. Isso significa que duas ondas sobrepostas originam uma terceira onda que é o resultado da soma das funções das duas ondas iniciais.

10.3 ONDAS PLANAS

Já sabemos que o campo elétrico e o campo magnético são perpendiculares entre si e perpendiculares na direção da propagação da onda eletromagnética. Entretanto, a direção dos campos não são obrigatoriamente as mesmas em pontos diferentes.

Para os casos onde os campos têm sempre a mesma direção dizemos que se trata de uma **ONDA PLANA POLARIZADA**, e a direção de polarização é a direção do campo elétrico.

Vamos analisar uma onda plana que seja polarizada na direção de \hat{j} que se propaga na direção do eixo z. Dessa forma teremos:

$$\vec{E} = E\hat{j}$$

$$\vec{B} = B\hat{k}$$

Se analisarmos a primeira e a terceira equação de Maxwell veremos que o divergente de cada uma dessas equações tem que ser nulo.

$$\frac{\partial E}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial B}{\partial z} = 0$$

É interessante observar que o campo elétrico E não depende da variável y e o campo magnético B não depende da variável z. Por outro lado, como

em qualquer ponto temos que o módulo do campo elétrico será $E = cB$, então confirmamos que nem o campo elétrico e nem o campo magnético podem depender de y ou z , respectivamente. Desse modo, o campo elétrico será função de x e t no eixo y e o campo magnético será função de x e t no eixo z , ou seja:

$$\vec{E} = E(x, t)\hat{j}$$

$$\vec{B} = B(x, t)\hat{k}$$

Substituindo o campo elétrico na equação de onda teremos os dois lados da equação na direção \hat{j} e obteremos a equação escalar de onda escalar.

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

Vamos utilizar agora um operador que atua sobre a função $E(x, t)$, para encontrar a solução da equação acima.

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) E = 0$$

Podemos então fatorar o operador e teremos:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) E = 0$$

Nesse caso a ordem dos operadores é indiferente. Como se trata de uma multiplicação, para que a equação se verifique é necessário que:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) E = 0$$

ou

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) E = 0$$

Vamos então analisar a primeira condição:

$$\frac{\partial E}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t} = 0$$

Note que o lado esquerdo da equação tem a mesma forma da derivada convectiva, onde a velocidade, no caso dessa análise é na direção de \hat{i} e o seu módulo é igual a c . Como já vimos, a derivada convectiva é a variação do campo E , no referencial R' que acompanha o movimento da onda, com a velocidade c na direção de \hat{r} , ou seja:

$$\frac{dE}{dt} = 0$$

e essa condição irá acontecer ao longo das retas $x' = x - ct$.

Isso significa que para cada valor que x' pode assumir teremos um ponto correspondente que esta em R' e que se desloca na direção positiva do eixo x e descreve uma trajetória que é retilínea e se encontra no domínio (x,t) da função E .

Ao longo de todas essas retas características teremos a derivada de E com valor nulo. Desse modo o valor de E é constante. Na figura abaixo podemos ver esse efeito.

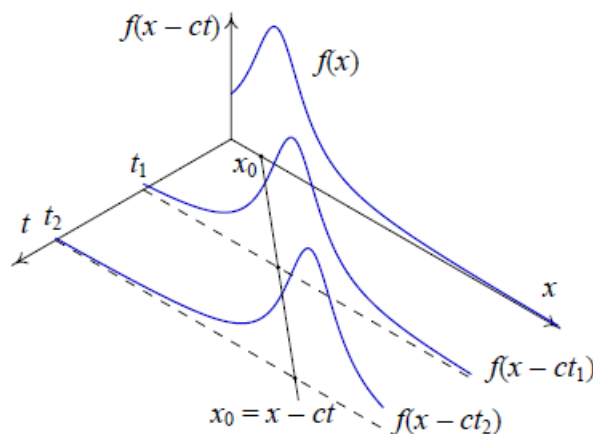


Figura 168 - Onda plana com propagação na direção positiva do eixo x

Alterando as características o valor constante de E ao longo da reta característica também pode ficar diferente. Ora, se a função $f(x')$ esta representando todos os valores de E nas mais diferentes características, então o valor de E para qualquer ponto do domínio será dado por:

$$E(x, t) = f(x - ct)$$

Nessa equação f pode ser uma função qualquer que corresponde ao valor de E ao longo do eixo x , no instante inicial $t = 0$. Essa é a representação da onda que se propaga no eixo x , no sentido positivo.

Agora vamos analisar a segunda equação. Ela possui uma solução idêntica a primeira, o que a diferencia é o fato de que agora a onda se propaga no sentido negativo do eixo x . Isso conduz a funções que apresentam a forma $g(x+ct)$.

Podemos dizer que a forma geral das ondas planas que se propagam na direção do eixo x e uma sobreposição de duas ondas, uma que se propaga no sentido positivo e outra que se propaga no sentido negativo, respectivamente, função de $x - ct$ e função de $x + ct$.

$$E(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct)$$

Essas duas funções podem ser determinadas a partir das chamadas condições de fronteira. Uma das regiões de fronteira está no instante inicial $t = 0$ nesse ponto teremos:

$$E(x, 0) = f(x) + g(x)$$

A figura abaixo mostra o que ocorre com os campos elétrico e magnético de uma onda plana em um determinado instante de tempo t . Se observarmos um segundo instante de tempo $t + \Delta t$ veremos um gráfico semelhante com um deslocamento a uma distância $c\Delta t$ no eixo x e sentido positivo.

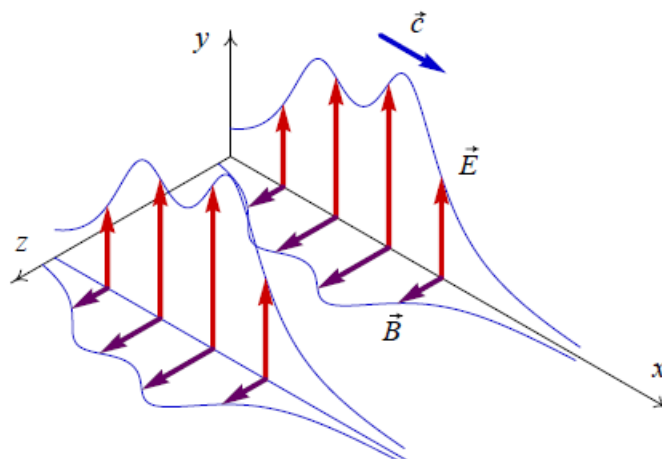


Figura 169 - Campo de ondas eletromagnéticas planas com propagação no eixo x e sentido positivo

Até agora consideramos apenas as ondas de polarização linear onde os campos \vec{E} tem sempre a mesma direção. No entanto, existem também

ondas planas com campos que rodam, com polarizações circulares ou elípticas.

10.4 ONDAS HARMÔNICAS

Ondas com periodicidade são um caso importante de ser estudado. Elas são ondas que se repetem em intervalos determinados de tempo. Uma onda periódica é o resultado de um conjunto de funções seno e funções cosseno, que possuem frequências diferentes. Quando a função de onda, que analisamos na seção anterior, é uma função seno ou cosseno, ela é denominada ONDA HARMÔNICA ou ONDA MONOCROMÁTICA.

Vamos imaginar uma função sinusoidal, que possua um período λ cuja função é dada por:

$$\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}u + \varphi_0\right)$$

Se u assumir, por exemplo, o valor $(y - ct)$, a função irá corresponder a uma onda plana que se propaga na direção \hat{j} . No caso da onda estar polarizada na direção de \hat{i} , o campo elétrico será dado por:

$$\vec{E} = E_0 \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(y - ct) + \varphi_0\right] \hat{i}$$

A constante E_0 define a amplitude do campo elétrico. O ângulo φ é chamado FASE e é dado por:

$$\varphi = \left[\frac{2\pi(y - ct)}{\lambda} + \varphi_0\right]$$

E a constante φ_0 é chamada de FASE INICIAL. Se dois pontos tem a mesma fase, em qualquer instante de tempo, dizemos que eles estão em fase. λ recebe o nome de COMPRIMENTO DE ONDA, e mede a distância entre dois pontos consecutivos que estejam em fase, na direção da propagação da onda.

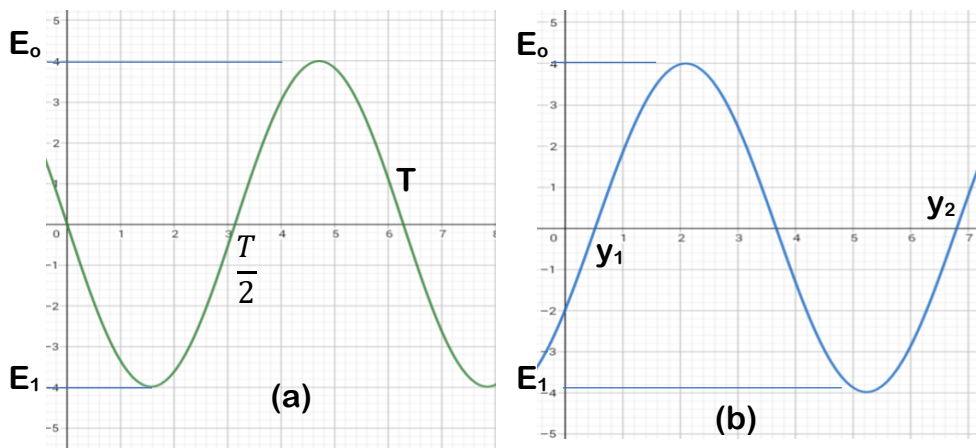


Figura 170 - Campo elétrico de uma onda eletromagnética harmônica, plana e polarizada (a) em função do tempo e (b) em função da posição

O campo E oscila sinusoidalmente e o PERÍODO T é o tempo que leva para que a onda complete um ciclo. Para esse período ser constante, durante cada oscilação é necessário que a onda se desloque em um comprimento de onda λ mantendo uma velocidade constante c , conseqüentemente teremos:

$$T = \frac{\lambda}{c}$$

A FREQUÊNCIA indica o número de ciclos completos em uma unidade de tempo. Ela é dada pela equação:

$$f = \frac{1}{T}$$

E a frequência angular, que indica o aumento, por unidade de tempo, em radianos, da fase em um ponto qualquer.

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

Da mesma forma como medimos a distância entre dois pontos em fase com o comprimento de onda λ , o número de pontos que se encontram em fase, dividido pela unidade de comprimento. Essa medida é conhecida como NÚMERO DE ONDA. Se multiplicarmos 2π pelo número de onda, estaremos determinando o aumento de fase por unidade de comprimento. Denominamos esse número como NÚMERO DE ONDA ANGULAR.

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Podemos então calcular a onda harmônica, a partir da frequência angular e do número de onda angular.

$$\vec{E} = E_0 \sin(ky - \omega t + \varphi_0) \hat{i}$$

Sabemos que o comprimento de onda e o período estão relacionados, desse modo a frequência angular e o número de onda angular devem obedecer a seguinte relação:

$$c = \frac{\omega}{k}$$

Podemos encontrar ondas harmônicas que estão se propagando em qualquer direção que seja diferente da direção do eixo y . Costumamos definir o VETOR DE PROPAGAÇÃO \vec{k} utilizando o módulo que é igual ao número da onda angular k e na direção de propagação da onda.

Na equação da onda harmônica y é a projeção da posição \vec{r} de um ponto, na direção de propagação \hat{j} , desse modo ky deve ser substituído por k que será multiplicado pela projeção do vetor \vec{r} na direção da propagação, ou seja $\vec{k} \cdot \vec{r}$ e, com isso, temos uma fórmula mais geral para a onda harmônica plana:

$$\vec{E} = E_0 \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_0) \hat{p}$$

Denominamos \hat{p} como sendo o VERSOR DE POLARIZAÇÃO que irá definir a direção do campo elétrico que poderá ser qualquer direção perpendicular ao vetor de propagação \vec{k} .

Como já vimos, a sobreposição de duas ondas harmônicas planas irá originar uma nova onda eletromagnética plana, porque a equação de onda é linear. Essa sobreposição permite a construção de ondas planas mais complexas que não precisam ser, necessariamente, harmônicas. A utilização de séries de Fourier permite a obtenção de uma onda periódica que é obtida da sobreposição das ondas harmônicas.

10.5 ONDAS ESFÉRICAS

Podemos considerar as ondas planas como simples aproximação que é válida dentro de uma pequena região quando comparada a distância da

fonte. Isso ocorre porque a onda eletromagnética real se propaga em várias direções e a aproximação é feita para uma só direção.

Se temos uma fonte produzindo uma onda eletromagnética, nós podemos considerá-la como sendo uma fonte pontual. Para fontes pontuais a propagação ocorre sob a forma radial cuja origem é a fonte. Desse modo, o vetor de polarização estará sobre $\hat{\theta}$ e $\hat{\phi}$.

Para entendermos, vamos considerar uma onda que em cada ponto está polarizada na direção $\hat{\phi}$, a fórmula geral do campo elétrico será:

$$\vec{E} = E(r, \theta, \phi, t) \hat{\phi}$$

Se a fonte for capaz de emitir em todas as direções de forma igual, será considerada isotrópica e, com isso, teremos uma simetria esférica. Nesse caso, a função de onda irá depender apenas da distância do ponto escolhido até a origem r e do tempo t .

Utilizando a expressão do Laplaciano para vetores com simetria esférica, obteremos:

$$\nabla^2 E(r, t) \hat{\phi} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} [rE(r, t)] \hat{\phi}$$

A partir da equação de onda, já analisada, temos a seguinte implicação

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rE)}{\partial r^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

Se multiplicarmos ambos os lados dessa equação por r , considerando que as variáveis r e t são independentes, teremos a equação da onda plana para a função rE :

$$\frac{\partial^2 (rE)}{\partial r^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 rE}{\partial t^2}$$

Note que rE deverá ser uma onda plana cuja função que a define é $f(r, t)$ que se propaga na direção radial:

$$E(r, t) = \frac{1}{r} f(r \pm ct)$$

Na equação, sinal positivo corresponde a ondas que se propagam na direção da origem. No entanto, como considerávamos as ondas com origem da fonte, devemos somente considerar o sinal negativo.

Desse modo, o sinal negativo na função $f(r \pm ct)/r$ representa que a onda se propaga se afastando da fonte.

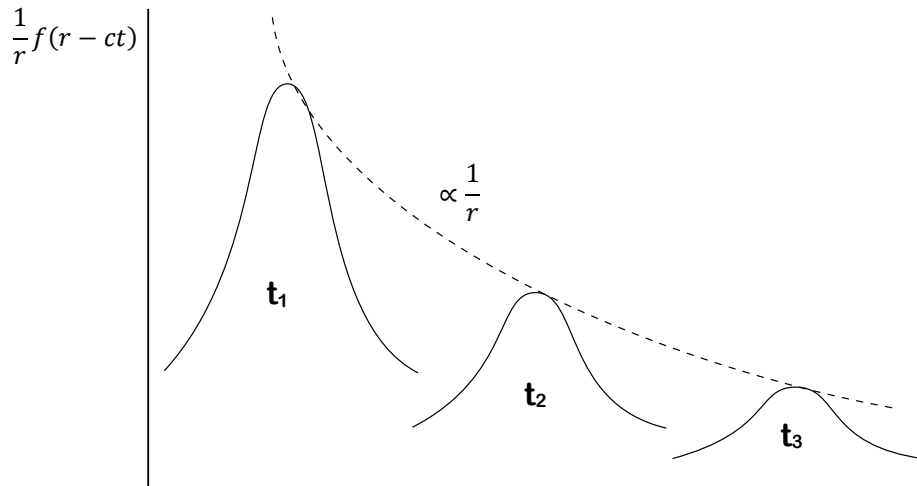


Figura 171 - Função de onda esférica em três instantes de tempo diferentes

Todos os pontos que estão em fase formam esferas concêntricas, cujos centros coincidem na origem da onda. Elas são chamadas **FRENTES DE ONDA**.

Utilizamos a lei de Faraday para calcular o campo magnético, considerando que o campo elétrico está na direção $\hat{\phi}$, desse modo o seu rotacional, em coordenadas esféricas, será:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rE)}{\partial r} \hat{\theta} = \frac{1}{r} f'(r - ct) \hat{\theta}$$

Se integrarmos em função de t e multiplicarmos por -1, obteremos a equação do campo magnético.

$$\vec{B} = \frac{1}{cr} f(r - ct) \hat{\theta}$$

Já sabemos que os campos elétricos são perpendiculares e, nesse caso, seu produto vetorial tem a direção radial.

Já sabemos também que o módulo do campo magnético é c vezes menor do que o módulo do campo elétrico. Além disso a onda poderia estar polarizada na direção do versor $\hat{\theta}$ ou em qualquer outra direção que seja perpendicular à direção radial.

Se a função f for sinusoidal, teremos a formação de uma onda esférica harmônica, sendo a formula geral da equação dada por:

$$E(r, t) = \frac{E_0}{r} \sin(kr - \omega t + \varphi_0)$$

A amplitude da onda irá diminuir a medida que r aumenta.

10.6 INTENSIDADE DAS ONDAS MAGNÉTICAS

Definimos a densidade de fluxo energético de uma onda ϕ com sendo a energia que é transportada por uma onda, em uma superfície normal a sua direção de propagação dividida pela unidade de área e pela unidade de tempo. Uma medida que podemos utilizar como referência é o valor do fluxo energético da luz solar que entra na atmosfera da terra. Esse valor é, aproximadamente 1.4 kW/m^2 .

Para as ondas eletromagnéticas, o fluxo de energia dividido pela unidade de área é igual ao módulo do vetor de Poynting, então:

$$\phi = c\epsilon_0 E^2$$

Essa equação nos apresenta um valor instantâneo, isso por que, o campo elétrico é variável, nesse caso, uma onda periódica. Sendo uma onda periódica possui um valor médio que será dado por:

$$\overline{E^2} = \frac{1}{T} \int_0^T E^2 dt$$

Considerando que a onda é harmônica e plana, então utilizaremos a identidade trigonométrica

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

para aplicarmos na equação de campo elétrico. Sendo assim teremos:

$$\overline{E^2} = \frac{E_0^2}{2T} \int_0^T [1 - \cos 2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_0)] dt$$

No entanto, a função cosseno tem seu período igual a $2T$, o que faz com que dentro dos limites de integração 0 e T , sua integral seja nula, então:

$$\overline{E^2} = \frac{E_0^2}{2}$$

Assim teremos a densidade média de fluxo energético como diretamente proporcional ao quadrado da amplitude do campo elétrico.

$$\bar{\phi} = \frac{\epsilon_0}{2} c E_0^2$$

O fluxo energético, também denominado, potência radiante, Φ_e , é a energia total emitida por unidade de tempo.

Para uma fonte pontual, que emita uma onda esférica, se a densidade de fluxo energético for ϕ , situado a uma distancia r , teremos um fluxo energético dado por:

$$\Phi_e = 4\pi r^2 \bar{\phi}$$

Ao diminuirmos o ângulo sólido (Ω) da onda que é emitida por uma fonte pontual, veremos que a sua intensidade aumente devido a concentração da radiação.

Desse modo definimos INTENSIDADE de uma onda como sendo a razão entre o fluxo energético e a unidade de ângulo solido.

$$I = \frac{\Phi_e}{\Omega}$$

Para o caso de fontes isotrópicas, teremos um ângulo sólido que é de 4π . Se associarmos com a equação do fluxo energético, teremos a seguinte equação:

$$I = r^2 \phi$$

Para calcularmos a densidade média de fluxo energético utilizamos uma forma análoga ao que utilizamos na solução da onda plana. Para fazer isso iremos substituir E_0 por E_0/r^2 , então:

$$\phi = \frac{\epsilon_0}{2r^2} c E_0^2$$

E a intensidade também será diretamente proporcional ao quadrado da amplitude do campo elétrico.

$$I = \frac{\epsilon_0}{2} c E_0^2$$

10.7 ESPECTROS ELETROMAGNÉTICOS

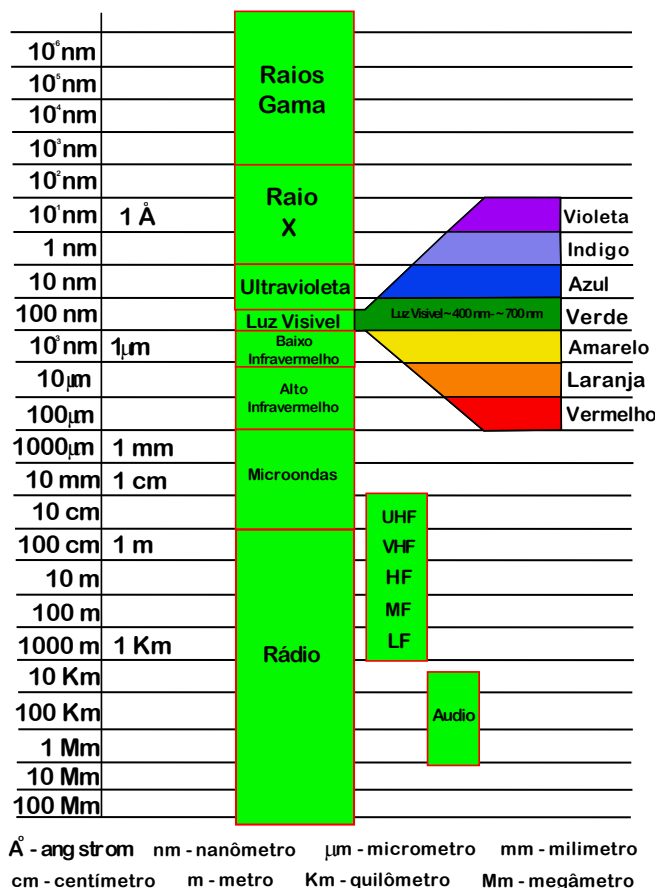
Uma das características das ondas harmônicas é o fato de que seus comprimentos de onda λ e suas frequências f não podem variar de forma independente, pois como já vimos $\lambda f = c$.

Além disso, as amplitudes dos campos elétrico e magnético também não variam de forma independente pois se relacionam na relação $E_0/B_0 = c$.

A partir da frequência ou do comprimento de onda temos como classificar uma determinada onda dentro de um ESPECTRO ELETROMAGNÉTICO. Com essa classificação podemos caracterizar as propriedades de uma onda.

A figura abaixo apresenta o espectro eletromagnético das ondas com λ e f conhecidas. Entretanto é possível que existam ondas com comprimentos e frequências que variem do 0 ao ∞ .

ESPECTRO ELETROMAGNÉTICO



Uma forma de produzir ondas eletromagnéticas basta produzirmos aceleração das cargas em um condutor, normalmente uma antena. Outra é a radiação de corpo negro que é emitida por sistemas termodinâmicos em temperaturas que são maiores que o zero absoluto. Além dessas duas temos as transições entre níveis de energia em sistemas quânticos como átomos ou núcleos.

Podemos observar que conforme a frequência aumenta, o comprimento da onda diminui e os mecanismos de emissão são sistemas menores. Do mesmo modo, uma interação de onda eletromagnética é maior com objetos que possuem tamanhos da ordem de grandeza λ .

Devido a isso, ondas de radar não conseguem penetrar em objetos muito pequenos. Por outro lado, por outro lado, o raio X é capaz de atravessar com facilidade as células e a radiação gama, cujo comprimento de onda é menor e consegue penetrar nos cromossomos, sendo capaz de alterar o conteúdo genético.

Outra característica das ondas eletromagnéticas é o fato de que elas não apresentam uma frequência definida como no caso das ondas harmônicas, pois elas são resultado de um conjunto, ou soma, de um conjunto de ondas harmônicas, cada uma com uma frequência particular. O exemplo mais conhecido vem da descoberta de Isaac Newton, sobre a decomposição da luz. Em seu experimento ele fez a luz visível (branca), atravessar um prisma e verificou que a luz branca era composta por 7 cores distintas. A figura abaixo mostra o efeito do experimento.

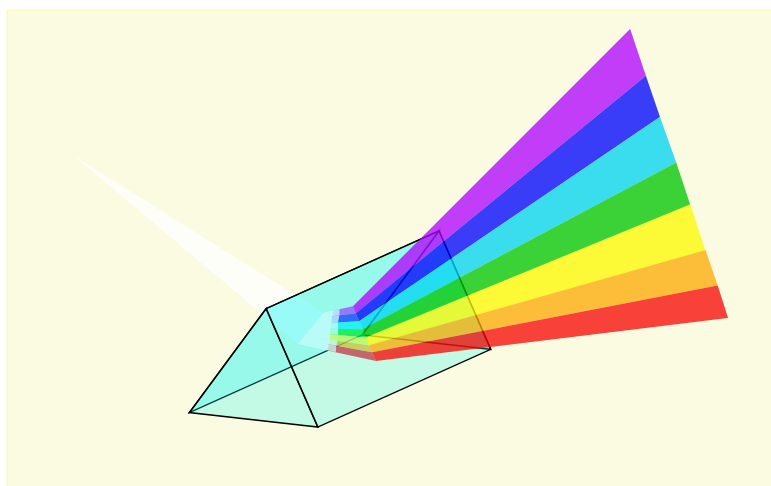


Figura 172 - Experimento de decomposição da luz visível

Existem ainda algumas outras constatações em relação as ondas eletromagnéticas. Quanto maior for a frequência da onda, maior será a permissividade elétrica, significando que a luz terá uma velocidade menor para frequências mais altas. O índice de refração, que sabemos ser inversamente proporcional a velocidade do meio por onde se desloca a luz, é diretamente proporcional ao valor da frequência.

Um dos usos científicos dessa propriedade de decomposição da cor é a possibilidade de determinarmos a composição química da fonte. Em um espectrômetro uma luz atravessa uma superfície padrão e a amostra, ao mesmo tempo. Cada uma irá gerar um espectro de cores, a partir da comparação é possível determinar os elementos químicos que compõe a amostra. Outra forma de realizarmos essa análise é procedendo a queima da amostra que em sua chama, irá apresentar as cores relativas aos elementos químicos que a compõe.

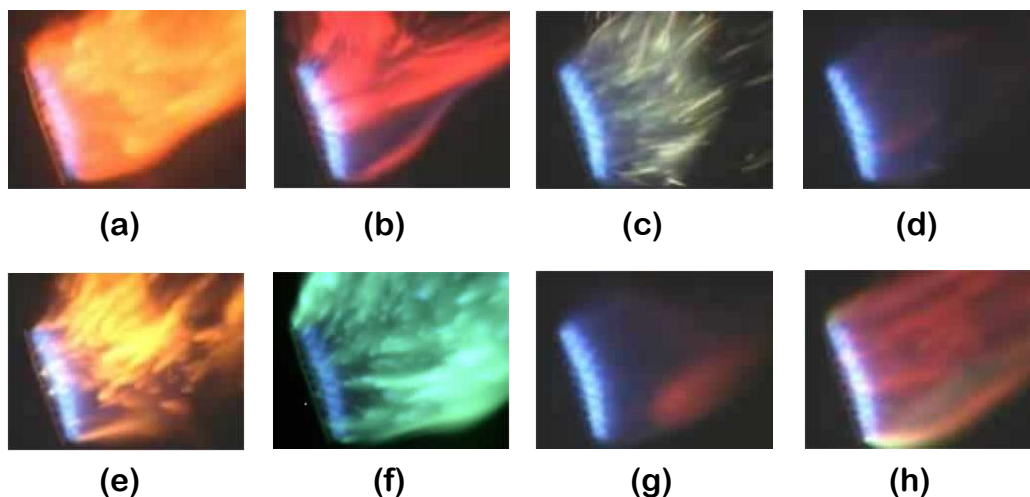
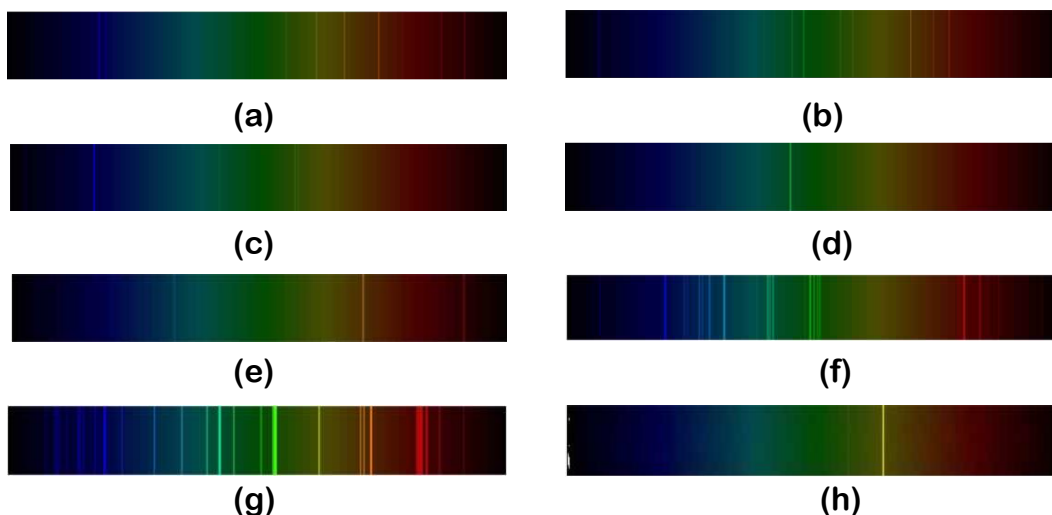


Figura 173 - Exemplos de fotometria de chama para alguns elementos (a) cloreto de sódio, (b) cloreto de estrôncio, (c) cloreto de magnésio, (d) cloreto de alumínio, (e) cloreto de cálcio, (f) cloreto de cobre, (g) cloreto de manganês, (h) cloreto de lítio

No processo apresentado acima, há uma emissão de luz visível através da queima do material. No outro processo, como já mencionamos, é um processo de absorção onde a luz passa pelo material analisado. As faixas absorvidas pelo espectro aparecem de forma escura caracterizando assim a composição química.



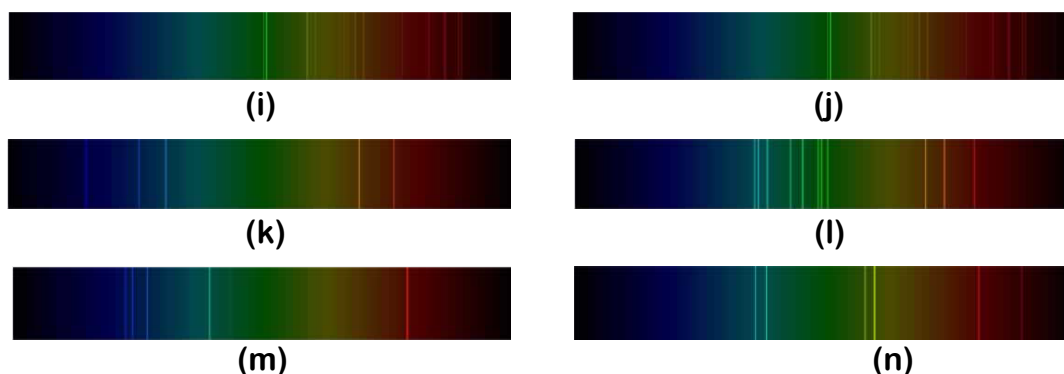


Figura 174 - Exemplos de emissão de espectro (a) césio, (b) rubídio, (c) índio, (d) tálio, (e) lítio, (f) estrôncio, (g) cálcio, (h) sódio, (i) bário, (j) molibdênio, (k) boro, (l) fósforo, (m) zinco, (n) telúrio

Esse processador de espectroscopia permite inclusive analisar a composição química dos planetas e estrelas.

10.8 ONDAS ELETROMAGNÉTICAS EM MEIOS MATERIAIS

Até agora estudamos a propagação de ondas eletromagnéticas no vazio. Quando tratamos das ondas em meios materiais, substituímos as equações de Maxwell, pelas equações utilizadas em meios macroscópicos. Vamos considerar que o meio seja isotrópico e linear e que não existem cargas e nem correntes livres. Nesse caso, obteremos um sistema de equações do seguinte tipo:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\end{aligned}$$

Que são as equações de Maxwell adaptadas para o meio macroscópico, conforme vimos no início do capítulo.

Como já vimos:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

No caso das equações acima vamos substituir ϵ_0 por ϵ (a permissividade elétrica do material), e μ_0 por μ (a permeabilidade magnética do material). Isso ocorre por que as ondas eletromagnéticas já não se propagam mais na velocidade da luz e a nova equação de velocidade é dada por:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$$

No caso de materiais condutores, os elétrons atenuam qualquer campo elétrico externo de forma muito rápida. Isso impede a propagação de ondas eletromagnéticas. Com exceção dos materiais ferromagnéticos, a permeabilidade magnética dos demais materiais é muito próxima de μ_0 e, portanto, a velocidade das ondas eletromagnéticas é dada por:

$$v \approx \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu_0}} = c \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\epsilon}} = \frac{c}{\sqrt{k}}$$

K é a constante dielétrica conforme vimos ao estudar o conceito e a equação de permissividade elétrica. Mas também já vimos que a constante dielétrica tem uma forte dependência da frequência. Mesmo nas frequências muito baixa vamos acabar encontrando um valor de K que é diferente dos valores estáticos medidos no capacitor. Essa dependência de K em relação a frequência é que vai determinar as diferentes velocidades para as diferentes componentes harmônica. E isso é que dá origem a DISPERSÃO.

Como já vimos enquanto estudávamos as ondas eletromagnéticas no espaço vazio são transversais. Isso significa que os campo elétrico e o campo magnético são perpendiculares. Vamos agora estudar o comportamento das ondas eletromagnéticas em meios materiais, tentando verificar a existência de outras soluções para as equações de Maxwell, nessas condições. Para isso vamos utilizar o método da Transformada de Fourier que é muito semelhante a Transformada de Laplace.

No caso do uso da Transformada de Fourier de um campo vetorial, ela irá outro campo vetorial que é definido da seguinte forma:

$$\mathfrak{F}\{\vec{F}\} = \int \iiint \vec{F}(t, \vec{r}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} dV dt$$

A integral, calculada no tempo tem um intervalo de um período $T = 2\pi/\omega$, No caso do volume de integração, temos um paralelepípedo com arestas

que tem o mesmo tamanho dos comprimentos de onda ($\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$), que tem como definição os valores, $2\pi/k_x, 2\pi/k_y, 2\pi/k_z$, respectivamente. É importante observar que a função $\mathfrak{F}\{\vec{F}\}$ não depende das variáveis (t, \vec{r}). Entretanto, essa função depende da frequência angular (ω) e do vetor de propagação (\vec{k}). Sendo assim, a transformada do divergente do vetor \vec{F} será dada por:

$$\int \iiint \vec{\nabla} \cdot \vec{F} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} dV dt$$

Aplicando a propriedade distributiva no divergente, teremos:

$$\vec{\nabla} \cdot (f \vec{F}) = \vec{\nabla} f \cdot \vec{F} + f \vec{\nabla} \cdot \vec{F}$$

Considerando que o gradiente de uma função exponencial é a própria função que é multiplicada por $i\vec{k}$, então teremos:

$$\int \iiint \left[\vec{\nabla} \cdot \left(e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \vec{F} \right) - i\vec{k} \cdot \vec{F} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \right] dV dt$$

Segundo o teorema do divergente, a primeira integral de volume pode ser escrita como o produto do fluxo de \vec{F} vezes a função exponencial. Esse produto ocorre através do paralelepípedo com as arestas $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$ e seu valor é nulo porque \vec{F} e o exponencial são funções periódicas.

O tratamento da segunda integral será feito escrevendo o produto da constante $-i\vec{k}$ vezes a transformada de Fourier do campo \vec{F} . Desse modo a transformada do divergente será dada por:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} \rightarrow -i\vec{k} \cdot \mathfrak{F}\{\vec{F}\}$$

Da mesma maneira é possível provar que as transformadas do rotacional e da derivada em função do tempo, de \vec{F} são:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} \rightarrow -i\vec{k} \times \mathfrak{F}\{\vec{F}\}$$

$$\frac{\partial \vec{F}}{\partial t} \rightarrow i\omega \mathfrak{F}\{\vec{F}\}$$

E com isso é possível determinar as Transformadas de Fourier para as equações de Maxwell para situações em que não existam cargas ou correntes livres.

$$\vec{k} \cdot \mathfrak{F}\{\vec{D}\} = 0$$

$$\vec{k} \times \mathfrak{F}\{\vec{E}\} = \omega \cdot \mathfrak{F}\{\vec{B}\}$$

$$\vec{k} \cdot \mathfrak{F}\{\vec{B}\} = 0$$

$$\vec{k} \times \mathfrak{F}\{\vec{H}\} = -\omega \mathfrak{F}\{\vec{D}\}$$

A primeira e a terceira equação mostram que o deslocamento elétrico \vec{D} e o campo magnético \vec{B} são perpendiculares ao vetor de propagação, lembrando que é direção que cada componente harmônico do campo é a mesma direção da sua correspondente Transformada de Fourier. Nos casos anteriormente estudados da propagação no vázio, vimos que o deslocamento elétrico é igual ao campo elétrico \vec{E} , consequentemente, essas ondas são ondas transversais. No caso dos meios materiais, a segunda e a quarta equação podem receber valores que tornam as soluções de em que \vec{E} ou \vec{H} oscilam na direção do vetor de propagação \vec{k} se o campo \vec{B} for zero. Para esse caso sabemos que o vetor de Poynting será zero e as ondas não irão transportar energia. Esse tipo de onda recebe o nome de onda eletromagnética longitudinal ou estática.