UNIVERSIDADE FEDERAL DE PELOTAS
INSTITUTO DE FÍSICA E MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Dissertação

Ambiente de geometria dinâmica e seu potencial semiótico: uma abordagem no ensino dos números complexos

Rafael dos Reis Paulo

Pelotas – RS, 2019

Rafael dos Reis Paulo

Ambiente de geometria dinâmica e seu potencial semiótico: uma abordagem no ensino dos números complexos

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Pelotas, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Educação Matemática

Orientador: Dr. André Luis Andrejew Ferreira

Coorientadora: Dra. Marleide Coan Cardoso

Pelotas – RS, 2019

Universidade Federal de Pelotas / Sistema de Bibliotecas
Catalogação na Publicação

P324a Paulo, Rafael dos Reis

Ambiente de geometria dinâmica e seu potencial semiótico : uma abordagem no ensino dos números complexos / Rafael dos Reis Paulo ; André Luis Andrejew Ferreira, orientador ; Marleide Coan Cardoso, coorientadora. — Pelotas, 2019.

153 f. : il.

Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós-Graduação Acadêmico em Educação Matemática, Instituto de Física e Matemática, Universidade Federal de Pelotas, 2019.

1. Números complexos. 2. Semiótica. 3. Matemática dinâmica. 4. Engenharia didática. 5. GeoGebra. I. Ferreira, André Luis Andrejew, orient. II. Cardoso, Marleide Coan, coorient. III. Título.

CDD : 510.7

Elaborada por Maria Inez Figueiredo Figas Machado CRB: 10/1612

Rafael dos Reis Paulo

Ambiente de geometria dinâmica e seu potencial semiótico: uma abordagem no ensino dos números complexos

Dissertação aprovada, como requisito parcial, para obtenção do grau de Mestre em Educação Matemática, Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Instituto de Física e Matemática, Universidade Federal de Pelotas.

Data da Defesa: 19/02/2019

Banca Examinadora, constituída por:

___

Prof. Dr. André Luis Andrejew Ferreira (orientador)
Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática (PPGEMAT)- UFPel

___

Profa. Dra. Marleide Coan Cardoso (Coorientadora)
Instituto Federal de Santa Catarina - IFSC

___

Prof. Dr. Antônio Maurício Medeiros Alves
Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática (PPGEMAT)- UFPel

___

Profa. Dra. Rozane da Silveira Alves
Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática (PPGEMAT) – UFPEL

___

Prof. Dr. Vandoir Stormowski
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática (PPGEMAT) - UFRGS

Dedicatória

Aos meus pais, Bento de Borba Paulo e Carme Lucia dos Reis Paulo, pelo apoio, incentivo e amor incondicional.

Aos educadores, que assim como eu, vislumbram na pesquisa uma maneira de qualificar o debate educacional.

Agradecimentos

Ao meu orientador, André Luis Andrejew Ferreira, pela parceria, dedicação e paciência na orientação deste trabalho. Agradeço acima de tudo por acreditar em meu potencial e sinto-me honrado em tê-lo como orientador deste trabalho, no qual, também é fruto de sua dedicação.

À minha querida coorientadora, Marleide Coan Cardoso, que aceitou prontamente me orientar mais uma vez. Agradeço a confiança, a parceria e a dedicação na correção deste trabalho. Educadores e profissionais como você são exemplos de como a educação transforma o mundo.

A Raymond Duval, pela genialidade de teorizar o pensamento matemático.

Aos professores/pesquisadores do PPGEMAT, aos quais dedicaram tempo e esforços na busca de uma educação justa e plural.

Aos membros da banca examinadora pelas inestimáveis contribuições feitas a esse trabalho à época da qualificação, meus singelos agradecimentos a vocês.

Ao meu grande amigo, Gilmar Silveira da Silva, por sempre estar ao meu lado nesses anos de estudo e formação. Pouquíssimo são os amigos que a vida não é capaz de afastar, a esses raros amigos cito você.

Às minhas eternas mentoras, Arlene Foletto, Margarete Farias e Elizete Possamai, as quais dedico integralmente esse trabalho. Agradeço por me conduzirem ao caminho da docência e da pesquisa, serei eternamente grato por tê-las ao meu lado. Desejo que muitos outros educandos sejam transbordados com seus ensinamentos.

Aos professores que a vida trouxe ao meu encontro, que desde muito cedo me incentivaram a seguir esta carreira acadêmica, deixando grandes exemplo de vida *que enriqueceram minha formação, os quais destaco: Ailton Durigon, Andresa Pescador, Carla Margarete, Iris Weisduschat, Juliana Menegotto e Josiane Eugênio.*

Aos amigos que a Princesa do Sul me trouxe, que tornaram minha estadia muito proveitosa e feliz durante esses anos de mestrado, a vocês: João Hirdes, Letícia Klein, Luana Leal e Marcia Lupi, sou imensamente grato.

Aos amigos que sempre me incentivaram a seguir os estudos e que compartilharam à distância esses 2 anos de mestrado dedico essas páginas. Com certeza seus incentivos e suas amizades tornaram essa caminhada mais feliz e possível. Ao Adriano Eusébio, Camilla Diniz, Daniela Pereira, Elizeu Martins, Letícia Fontana e Valeska Paulo, meus sinceros agradecimentos.

Ao IFSul de Pelotas, especialmente aos professores Ivan, Bianca e Etiene, pelo acolhimento durante a execução da pesquisa e, acrescento a esse agradecimento, os estudantes e participantes que fizeram essa pesquisa acontecer.

À minha família, que por muitas vezes compreenderam minhas necessárias ausências, agradeço e dedico este trabalho a vocês: aos meus pais, irmãos, cunhadas, sobrinhos e ao meu afilhado Ítalo.

À CAPES e FAPERGS, pois o presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

“A felicidade consiste na consciência do dever cumprido”

(Luiz Carlos Prestes)

Resumo

PAULO, Rafael dos Reis. **Ambiente de geometria dinâmica e seu potencial semiótico: uma abordagem no ensino dos números complexos.** 2019. 153f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Federal de Pelotas, Pelotas, 2019.

Este trabalho apresenta uma pesquisa que tem por objetivo investigar como o ambiente de geometria dinâmica do GeoGebra interfere na abordagem dos números complexos quando se mobilizam distintas representações semióticas em situações de ensino. Para compor o quadro teórico da pesquisa os estudos de Duval (2003 e 2009) que versam sobre os Registros de Representação Semiótica fundamentarão as análises e discussões em torno da seguinte questão - utilizar o ambiente de geometria dinâmica do GeoGebra para abordar as representações gráficas dos números complexos torna o aprendizado significativo? Os encaminhamentos metodológicos apoiam-se nos pressupostos da Engenharia de Didática cunhada por Artigue (1995), que nesta proposta se caracteriza por implementar procedimentos experimentais com intervenções didáticas em duas turmas de ensino médio de uma instituição pública e federal na cidade de Pelotas – RS. O ambiente de geometria dinâmica elegido para tratar os registros dinâmicos de representação é o *software* GeoGebra, assim o mesmo compõe grande parte das situações de ensino previstas e organizadas ao longo do trabalho. A parte operacional da pesquisa divide-se nas fases propostas pela metodologia, assim sendo, nas análises preliminares foram abordados aspectos epistemológicos, didáticos e históricos sobre o ensino dos números complexos. Na segunda fase, concepção e análise *a priori*, foram organizados um conjunto de atividades que englobam o objeto matemático, isto é, os números complexos, cada atividade é descrita e precedida das hipóteses que foram formuladas por meio da articulação entre o *software* de Matemática Dinâmica e fundamentação teórica. A base de dados e informações para posterior análise e validação da pesquisa é composta por observações do professor-pesquisador no caderno de campo, registros dos cadernos dos participantes da pesquisa e as produções salvas no GeoGebra. Os resultados apontaram que a utilização do ambiente de geometria dinâmica interfere no entendimento das unidades significativas e visuais das representações semióticas inerentes aos números complexos. Também se verificou quando da utilização de registros dinâmicos o nível de congruência entre as representações aumenta.

Palavras-chave: números complexos; semiótica; matemática dinâmica; engenharia didática; GeoGebra.

Abstract

PAULO, Rafael dos Reis. **Dynamic geometry environment and its semiotic potential: an approach in the teaching of complex numbers**. 2019. 153f. Dissertation (Master in Mathematics Education) - Post-Graduation Program in Mathematical Education, Federal University of Pelotas, Pelotas, 2019.

This work presents a research that aims to investigate how GeoGebra 's dynamic geometry environment interferes in the approach of complex numbers when different semiotic representations are mobilized in teaching situations. In order to compose the theoretical framework of the research, Duval's studies (2003 and 2009) on the Semiotic Representation Registers will base the analyzes and discussions around the following question - to use GeoGebra's dynamic geometry environment to address graphical representations of numbers complexity makes learning meaningful? The methodological guidelines are based on the assumptions of Didactic Engineering coined by Artigue (1995) that in this proposal is characterized to implement experimental procedures with didactic interventions in two high school classes of a public and federal institution in the city of Pelotas - RS. The dynamic geometry environment chosen to handle the dynamic representation registers is the GeoGebra software, so it makes up a large part of the planned and organized teaching situations throughout the work. The operational part of the research is divided in the phases proposed by the methodology, so, in the preliminary analyzes were approached epistemological, didactic and historical aspects on the teaching of complex numbers. In the second phase, a priori conception and analysis, a set of activities were organized that encompassed the mathematical object, that is, the complex numbers, each activity is described and preceded by the hypotheses that were formulated through the articulation between the software of Dynamic Mathematics and theoretical basis. The database and information for further analysis and validation of the research is composed of observations of the researcher-teacher in the field book, records of the participants of the research and the productions saved in GeoGebra. The results pointed out that the use of the dynamic geometry environment interferes in the understanding of the significant and visual units of the semiotic representations inherent to the complex numbers. It was also verified when the use of dynamic registers the level of congruence between the representations increases.

Key-words: complex numbers; semiotics; dynamic mathematics; didactic engineering; GeoGebra.

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Sumário

Apresentação

A presente dissertação se debruça em diferentes vertentes da Educação Matemática para mostrar de maneira prática como as tecnologias digitais aliadas a estudos teóricos corroboram tanto para o ensino quanto à aprendizagem da matemática na Educação Básica. E, para abordar questões tão complexas que estão imbricadas à aprendizagem da matemática esta pesquisa se estrutura em sete capítulos, nos quais perpassam pela escolha, à temática, o referencial teórico utilizado, os procedimentos metodológicos da pesquisa, bem como o experimento e os resultados.

A introdução situa o leitor sobre o caminho percorrido para delimitar o objetivo principal, bem como a questão de pesquisa que norteia o trabalho. Ainda nesse capítulo é feito um relato em primeira pessoa contando a trajetória acadêmica e profissional do autor desta pesquisa, mostrando as escolhas que o levaram ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática (PPGEMAT) da Universidade Federal de Pelotas (UFPel).

No segundo capítulo abordar-se-á teoria dos Registros de Representação Semiótica, na qual explica a complexa tarefa que se constitui o pensamento matemático, uma vez que seus objetos são acessados apenas por meio de representações, apontando maneiras de contornar os obstáculos que são intrínsecos ao processo de ensino dessa ciência. A divisão do capítulo prima elencar aspectos fundamentais da teoria de Duval, bem como apontar para os específicos fenômenos de congruência entre representações semióticas, enfatizando que estas serão de suma importância para elucidar as inquietações provenientes do objeto de pesquisa. Além disso, reserva-se uma seção para estudar de um ponto de vista semiótico e cognitivo os registros, as representações e as transformações inerentes ao conteúdo selecionado para o desenvolvimento da pesquisa, a saber, os números complexos.

Após discorrer sobre a teoria base da pesquisa, apresenta-se no capítulo três uma discussão sobre as Tecnologias Digitais de maneira geral, seguido de um direcionamento aos ambientes de geometria dinâmica que está contido na maioria das sequências de ensino que foram aplicadas em sala de aula.

Adentrando no capítulo quatro, realiza-se uma análise sobre diferentes aspectos que envolvem o ensino dos números complexos, ou seja, um levantamento de fatos históricos que narram as vertentes dos números complexos como objeto científico, seguido de como este objeto é transposto para o meio escolar; para isso, uma análise de como os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) e os livros didáticos o abordam se fez necessário. E, finalmente, um estado do conhecimento revela as possibilidades didáticas para o ensino dos números complexos à luz da teoria dos Registros de Representação Semiótica juntamente com a utilização de *softwares* de Matemática Dinâmica.

No capítulo cinco é apresentado uma Engenharia Didática que guiará os procedimentos metodológicos da pesquisa. Para satisfazer os requisitos dessa metodologia foi realizada uma análise preliminar do invólucro que permeia o objeto da pesquisa, no qual parte está contemplado no capítulo anterior acrescido de uma descrição do ambiente e dos participantes da pesquisa. Na concepção e análise *a priori* é descrito o escopo das atividades que foram aplicadas, bem como as hipóteses e as variáveis que serão condicionadas para posterior aplicação das sequências de ensino. Ao final do capítulo, uma descrição de como ocorreu o experimento é apresentado juntamente com os dados e registros que foram utilizados para validar as hipóteses na fase precedente.

O penúltimo capítulo é responsável por articular as hipóteses sugeridas acrescidas dos aspectos teóricos para analisar e discutir os resultados com o objeto de pesquisa posto. As seções deste capítulo correspondem a uma análise *a posteriori* de cada atividade planejada à luz dos teóricos que sustentam esta pesquisa. Assim, o conjunto das atividades é discutido no último capítulo, no qual se apresenta as devidas considerações finais.

1. INTRODUÇÃO

Este capítulo foi reservado para que o leitor conheça a trajetória, as escolhas e motivos que impulsionaram o autor à realização deste trabalho. Já na segunda seção, apresenta como o objeto de pesquisa fora lapidado para nortear as investigações. Nesta seção, também se fazem presentes a questão norteadora, o objetivo geral e os objetivos específicos.

1.1 Memorial

Trago para início de conversa um relato sobre minha vida, partindo da infância na cidade de Sombrio – SC, da minha trajetória estudantil, da escolha pela docência à paixão pela pesquisa e atuação profissional.

Pois bem, Sombrio fica localizada no extremo sul da Santa e bela Catarina, meus pais se chamam Carme Lucia e Bento e, sou caçula de três irmãos: Fernando, Fabrício e Franque, isso mesmo, o único entre os quatro filhos que foge à regra dos nomes começarem pela letra F. Minha infância fora permeada de muitos amigos e companhias para brincar, conversar e estudar e, modéstia à parte, uma qualidade (ou sorte) que sempre me acompanhou foi me cercar de pessoas inspiradoras, verdadeiras e parceiras.

Estudei do primeiro ao oitavo ano (na época chamado de série) na escola E.E.B. Protásio Joaquim da Cunha, onde os meus três irmãos também estudaram. Nesses anos de estudos tive o privilégio de conhecer professores incríveis, mas sem sombra de dúvida a minha inspiração era (e é) a professora de matemática daquela época, Margarete Farias Medeiros. Ela morava (ainda mora) na minha rua e meus irmãos que tiveram aula com ela me falavam que desconheciam professora de matemática como aquela. Em 2005, também tive a honra de tê-la como professora; nas primeiras semanas de aulas já sabia o que “queria ser quando crescer”, um professor de matemática, e mais, queria ser igual a ela. Não posso negar que se hoje investigo a linha de tecnologia é porque admirava as aulas da professora Margarete utilizando o GeoGebra ou Cabri, aquelas funções dançando na minha frente faziam meus olhos brilharem. Se atualmente defendo e investigo as Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC) no ensino de matemática é porque conheço na prática como se reverberam novas aprendizagens mediadas pelo uso desses artefatos tecnológicos.

Após a conclusão do ensino fundamental iniciei o ensino médio numa escola em período integral, inicialmente se chamava Escola Agrícola Federal de Sombrio (EAFS) e atualmente se chama Instituto Federal Catarinense – *Campus* Santa Rosa do Sul. As aulas começavam às 8 horas e terminavam às 17 horas, e como morava na cidade vizinha acordava às 6 horas da manhã para apanhar o transporte na frente de casa. No começo foram dias difíceis já que meus antigos amigos da escola não quiseram estudar no instituto, pois havia rumores que o ensino era puxado e difícil. Além das disciplinas do ensino médio havia as específicas do curso de Técnico Agrícola; eram tantas disciplinas que em períodos de prova era comum mais de duas por dia.

Nessa instituição tive contato com profissionais extremamente qualificados, mas uma "guinada" decisiva aconteceu quando conheci a professora Elizete. Lembro-me como se fosse hoje, aquela mulher elegante com um semblante sério se aproximando da sala de matemática com apenas dois pinceis na mão. Após essa primeira aula de matemática com ela, definitivamente não restava mais dúvidas sobre qual carreira queria seguir. Ainda no primeiro semestre eu e mais dois grandes amigos (Gilmar e Votan) estávamos engajados em projetos de matemática aplicada orientados pela professora Elizete e, foi assim, o primeiro contato com a pesquisa. Nesse mesmo ano visitamos as feiras de matemática, congressos e vários outros eventos na área apresentando nossos trabalhos; chegamos a ganhar premiações e menções honrosas pelas pesquisas em matemática aplicada. E continuei nos anos restantes do ensino médio pesquisando aplicações da matemática.

A parceria com a professora Elizete continuou na graduação. Após encerrar o ensino médio em 2011 o instituto recém abrira o Curso de Licenciatura em Matemática coordenado pela Elizete. No início da graduação fui selecionado para uma bolsa de estágio no próprio curso, onde trabalhei dois anos ao lado da coordenadora. Além de continuar pesquisando trabalhos paralelos pude conhecê-la melhor e criamos um forte vínculo de amizade, sendo assim, sou e serei eternamente grato por tê-la ao meu lado.

Obviamente, não poderia deixar de incluir a esse time de mulheres a professora Marleide. Cada uma das professoras citadas até o momento contribuiu de forma específica na minha formação: a professora Margarete mostrou na prática como ensinar a matemática, a Elizete agregou e mostrou o valioso lugar da pesquisa na formação e a Marleide me apresentou como a teoria contribui para formação de um professor.

A afeição pelas teorias de aprendizagem e pela Didática da Matemática, com certeza, eu herdei da professora Marleide. Nas aulas de Fundamentos Teóricos e Metodológicos ela sempre frisou o tripé da formação de qualquer professor, que envolvem os conteúdos atitudinais, conceituais e procedimentais. Para além da formação teórica a Marleide mostrou na prática esses conteúdos, uma vez que acompanhei a Marleide-professora-ensino-médio, a Marleide-professora-de-cálculo e a Marleide-orientadora-de-projetos. A naturalidade com que ela transitava por esses níveis de ensino me inquietou profundamente e ficava me perguntando: Como ela consegue? O que ela tem que outros não têm? As respostas vieram em 2014 quando, juntamente com ela, realizei um projeto de extensão que abordava a teoria do Registro de Representação Semiótica.

O contato com a Marleide foi fundamental para minha permanência no curso e para minha formação profissional, pois como vinha anteriormente estudando aplicações na matemática acreditava que para ser um bom professor bastava saber muita matemática. Penso que se não conhecesse a Marleide duas opções me restavam: a desistência da licenciatura ou me tornaria um matemático arrogante que não se preocuparia com questões sensíveis referentes à sala de aula.

Hoje percebo tamanho esforço que ela fez para desconstruir a concepção errônea que tinha de educador, lembro-me das tardes que ela se sentava ao meu lado naquele sofá de couro preto na sala de professores para traduzir de forma prática os conceitos da teoria de Duval. Pouquíssimos são os educadores que conseguem atrair um estudante por uma teoria e a esses raros professores inclui-se a Marleide. A partir desse momento, adquiri uma visão humana da matemática, motivo pelo qual me levou a investigar questões voltadas para área da Educação Matemática.

E “como este mundo é pequeno” em meados da graduação o instituto realizou um concurso para contratar novos docentes e a professora Margarete se juntou ao quadro de funcionários. Além de ela me inspirar a ser um professor, também contribuiu na minha própria formação e, em 2015, orientado por ela e pela professora Elizete, finalizei a graduação.

A minha trajetória acadêmica do ensino fundamental a graduação foi influenciada por essas mulheres fantásticas. A professora Margarete por me ensinar e inspirar a ser um professor de matemática, a Elizete por sempre estar ao meu lado, aconselhando nas minhas decisões e deixando grandes exemplos de vida e a Marleide, companheira de caminhada na graduação e agora no mestrado, na qual posso afirmar que a minha formação, inclusive pessoal, não teria sido a mesma sem a sua presença.

Ao término da graduação mobilizei esforços para a escrita de um anteprojeto de pesquisa para mestrado e na busca de programas na área de Educação Matemática. Após meu amigo Gilmar comentar sobre a UFPel, onde ele cursa medicina, comecei a procurar os programas de mestrado e encontrei o PPGEMAT, realizei as etapas do processo seletivo e lá estava eu, selecionado entre os 17 mestrandos do ano de 2017. Também neste período fui convidado por um grande amigo de São Paulo para compor o quadro docente de uma plataforma *online* que visa assessorar estudantes que cursam disciplinas na área de exatas. Há três anos venho desenvolvendo videoaulas de Matemática Básica, Cálculo (I, II e III), Geometria Analítica e Álgebra Linear para a plataforma EaD Vídeos e, veiculado por essa inciativa, tive o primeiro contato com a docência possibilitando conhecer a modalidade de ensino a distância.

1.2 O caminho percorrido para o objeto da pesquisa

As pesquisas em Educação Matemática, em sua maioria, primam por estudar de certa forma, as inquietações no campo da matemática escolar. A presente pesquisa ruma neste mesmo viés, pois o professor pesquisador pretende investigar como os ambientes de geometria dinâmica interferem na mobilização de representações semióticas em situações de ensino de matemática. Antes mesmo de detalhar o delineamento teórico-metodológico e operacional desta pesquisa é necessário narrar o percurso que o objeto desta investigação sofreu até o momento, pois é partindo de questionamentos gerais que se lapidam os verdadeiros interesses de pesquisa.

Em 2015, o pesquisador estava finalizando seus estudos na graduação de Licenciatura em Matemática, sendo que neste mesmo ano ele realizava o último estágio supervisionado, juntamente com artigo de conclusão de curso. Na disciplina de estágio IV (último) os acadêmicos assumiam a regência das aulas no ensino médio para lecionar algum conteúdo, isto é, eles realizavam o planejamento, a execução e a avaliação sobre algum tópico designado pelo professor regente da turma.

Anterior a esse estágio, no primeiro semestre de 2015, foram realizadas observações em turmas do ensino médio para oferecer aos licenciandos o primeiro contato com este nível de ensino. Assim, fez-se a escolha de uma turma de terceiro ano para observar e, na maioria das vezes, nessa mesma turma acontece a regência no segundo semestre. Pois bem, com intuito de escrever um artigo que relatasse uma pesquisa em sala de aula foi solicitado que a professora regente, ainda no estágio de observação, designasse ao professor pesquisador o conteúdo que ele trabalharia na regência, desse modo o conteúdo dos números complexos foi apontado.

Já com o conteúdo determinado, fez-se uma busca de trabalhos que versam sobre abordagens desse conteúdo, como por exemplo Monzon (2012) e Oliveira (2010) que se encontram no estado do conhecimento desta pesquisa. Ambos fazem a utilização do GeoGebra como parte vital para abordar esse conteúdo, mostrando como representá-los no plano utilizando recursos dinâmicos disponíveis no ambiente de geometria dinâmica do *software*.

No entanto, antes de planejar e desenvolver as sequências de ensino foi aplicado aos professores que lecionam Matemática e Física na instituição um questionário para investigar as concepções que os mesmos têm sobre o ensino dos números complexos na Educação Básica. O questionário continha perguntas abertas e fechadas e a partir desse instrumento foram coletadas as seguintes informações (Quadro 1). Cabe destacar, que nas perguntas fechadas havia a possibilidade de marcar mais de uma opção.

Quadro 1: Questionário sobre o ensino dos números complexos.

Questionamento	Respostas dos professores	%
1. Como você classifica a importância do estudo dos números complexos?	Aplicação em outras áreas do conhecimento científico.	43,75
	Resolução de equações polinomiais.	18,75
	Compreensão dos conjuntos numéricos.	18,75
	Auxilia no ensino de Física.	18,75
2. Como você inicia as aulas sobre Números Complexos?	Abordando alguns fatos históricos.	30,77
	Resolvendo equações de solução complexa.	38,46
	Definindo o número "i" ou unidade imaginária.	7,69
	Retomando os conjuntos numéricos.	23,08
	Resolvendo problemas voltados à Física.	0
3. Qual tópico do conteúdo de Números Complexos você tem dificuldades de ensinar?	Unidade imaginária.	18,18
	Conjugado de um Número Complexo.	0
	Operações com Números Complexos.	9,10
	Representação no plano Argand-Gauss.	0
	Forma polar ou trigonométrica.	36,36
	As leis de Moivre.	36,36
4. Na operacionalização de suas aulas você utiliza algum material de apoio?	Livro didático.	30
	Parâmetros Curriculares Nacionais.	10
	Tecnologias da Informação e Comunicação - TIC's.	30
	Apostilas e materiais próprios.	30

Fonte: Elaborado pelo pesquisador, 2015.

Foram realizadas perguntas abertas aos mesmos professores a fim de diagnosticar quais os interesses frente a permanência ou não do conteúdo nos currículos escolares. Nessas perguntas foi solicitado que argumentassem, de modo geral, sobre a importância dos números complexos no currículo escolar, bem como, em outras áreas do conhecimento. Destacam-se algumas respostas que apareceram com maior frequência:

Os números complexos atualmente estão sendo eliminados do currículo do ensino médio, principalmente pela forma que vêm sendo abordado em sala de aula, de forma descontextualizada. (Professor 3)

Analisando as aplicações dos números complexos, vemos que esses números servem realmente para o uso em engenharias, física, topografia, entre outras áreas que não se aplicam ao ensino médio. Evidente que utilizamos na resolução de polinômios, mas não vejo isso como uma aplicação do conteúdo. (Professor 1)

Os números complexos tornaram um instrumento capaz de dar conta do desenvolvimento de novas tecnologias voltadas para os efeitos visuais (rotações de coordenadas) e para o pleno desenvolvimento da engenharia elétrica (estudo de correntes alternadas). (Professor 1 e Professor 4)

Através destas respostas percebe-se que os professores reconhecem a importância desse conteúdo para o próprio avanço da matemática como ciência, porém não como objeto de ensino, mas que pelo fato das aplicações não serem diretas o ensino dos números complexos acaba sendo flexibilizado a nível curricular, e no que diz respeito a sua abordagem introdutória em sala de aula, a mesma se restringe na resolução de equações de segundo grau, ampliação dos conjuntos numéricos e/ou uma abordagem sobre a história do conteúdo. Os tópicos que os professores apontam com maior dificuldade de ensinar são às representações dos números complexos na forma polar, bem como as operações que advém delas, como é caso da potenciação e divisão na forma polar (leis de Moivre).

Diante desse paradigma na instituição, iniciou-se o planejamento de sequências de ensino para serem aplicadas durante as aulas de regência e os resultados seriam relatados e exportados no artigo final de conclusão. Assim, o objeto de investigação que norteou a elaboração das sequências didáticas primou por verificar como implementar Tecnologias Digitais no ensino dos números complexos. Além de estudar as possibilidades de inserir o GeoGebra para abordar esse conteúdo fez-se uma discussão de um ponto de vista didático, isto é, de que forma esta tecnologia contribui para aprendizado dos estudantes.

Para abarcar o campo didático no artigo final foram utilizados os estudos de Brousseau – para revelar as situações didáticas e adidáticas que podem surgir a partir da utilização desta tecnologia no ensino dos números complexos e Chevallard – para clarificar a necessária transposição dos objetos matemáticos referentes aos números complexos em situações de ensino.

Embora os estudos de Brousseau e Chevallard contribuíssem para enriquecimento do aporte teórico do artigo, a análise e discussão com as teorias advindas destes autores não revelaram o potencial do uso desse recurso no ensino dos números complexos, acredita-se que por dois motivos: (i) tempo reduzido para aplicação da pesquisa, foram reservados 6 encontros de 45 minutos para abarcar os tópicos[1] dos números complexos incluindo procedimentos avaliativos; (ii) dificuldade de encontrar textos traduzidos e práticas realizadas com essas teorias no ensino dos números complexos.

Conforme mencionado sobre o pouco tempo designado para aplicar a pesquisa, a utilização do GeoGebra pelos estudantes se restringiu a simples

[1] Noção de conjunto, unidade imaginária, conjugado, operações na forma algébrica e polar, plano Argand-Gauss e leis de Moivre.

visualização das representações. Porém, uma teoria que se revelou durante a escrita dos resultados foram os Registros de Representação Semiótica, que de maneira geral mostrou que o ambiente de geometria dinâmica do GeoGebra possui um potencial semiótico que merece estudo e investigação.

Assim, para esta pesquisa de mestrado suscitou pesquisar de forma relacional o ambiente de geometria dinâmica do GeoGebra com os registros de representação semiótica referentes ao conteúdo dos números complexos. Para nortear os rumos da pesquisa o seguinte questionamento se levantou: *utilizar o ambiente de geometria dinâmica do GeoGebra para abordar as representações gráficas dos números complexos torna o aprendizado significativo?*

Acredita-se que esse questionamento é extensão do objeto de pesquisa, que deseja ***investigar como o ambiente de geometria dinâmica do GeoGebra interfere na abordagem dos números complexos quando se mobilizam distintas representações semióticas em situações de ensino***.

E, para conduzir o percurso das investigações com vistas a uma aproximação do objeto da mesma, foram elencados os seguintes objetivos específicos que se encontram diluídos nos capítulos desta pesquisa, são eles:

- Discutir a teoria dos Registros de Representação Semiótica intrínseca nos objetos matemáticos que compõem o conteúdo dos números complexos;
- Apresentar alguns aspectos dos números complexos no que se refere à sua história, presença dos atuais currículos nacionais e pesquisas que versam sobre os mesmos;
- Planejar situações de ensino em que primem relacionar os números complexos com os ambientes de geometria dinâmica.

Diante dos objetivos e do questionamento levantados para essa pesquisa, no próximo capítulo abordar-se-á os elementos teóricos que serão utilizados tanto no planejamento como na validação das propostas de atividades desta pesquisa.

2. SEMIÓTICA

A gênese da semiótica não é recente e tampouco clarificada como na atualidade. Ao fazer uma busca de sinônimos ou definições em dicionários e pesquisas na *web*, certamente os resultados vão se direcionar a teoria dos signos e, filósofos como Peirce e Saussure são indicações literárias e bibliográficas para o aprofundamento na área. De modo geral, a referência da semiótica se alia a semiologia (termo mais recente) que em tempos antigos era a doutrina designada aos estudos dos signos. Em efeito, a palavra "signo" gerou grandes discussões entre os mais antigos filósofos, perpassando por Platão, Aristóteles, Euclides, Agostino de Hipona, Descartes, entre outros. Algumas definições e análises de cada um destes filósofos são abordados no primeiro capítulo do livro Primeiros Elementos de Semiótica de D'amore (2015).

Dentre os filósofos acima mencionados os estudos do norte-americano Charles Sanders Peirce (1839-1914) e do suíço Ferdinand de Saussure (1857-1913) marcaram o início da semiótica moderna; Peirce defendendo a teoria dos signos de natureza fundamentalmente semiótica e Saussure de natureza puramente linguística. Divergências à parte, a teoria dos signos (nomeada por Saussure de semiologia) possibilitou e ainda possibilita nominar e significar "objetos idealizados" no plano mental, como D'amore (2015) relembra a semiótica dos Epicuristas no século IV, tais objetos eram chamados de "obscuros por si próprios: ou seja, não são perceptíveis através dos sentidos e necessitam do uso de signos" (D'AMORE, 2015, p. 41).

A semiologia defendida por Peirce é estruturada numa tríade que mostra os signos condicionados as seguintes características: (1) ao aspecto perceptível do signo, denomina como ***representamen***, ou signo propriamente dito; (2) o que de fato o signo representa, denominado o **objeto** e; (3) o **significado**, que faz referência ao interpretante. A partir desses três aspectos ele define signo sendo:

> Alguma coisa que, para alguém está para algo segundo algum aspecto ou capacidade. Dirige-se a alguém, isto é, cria na mente dessa pessoa um signo equivalente, ou talvez um signo mais desenvolvido. Esse signo que cria denomina-o interpretante do primeiro signo. O signo está no lugar de alguma coisa: o seu objeto. (D'AMORE, 2015, p. 60).

Diferentemente de Pierce, Saussure reestrutura a semiologia de forma diádica não levando em conta contextos do interpretante. No modelo do signo defendido pelo suíço, o signo é definido pela relação direta entre o significado (conceito) e o significante (imagem acústica). Pode-se fazer comparações entre as duas abordagens, o significado cunhado por Saussure corresponde ao objeto de Pierce e, o significante ao *representamen*. Ora, a diferença é que em uma é considerado o meio no qual se desenvolve o signo, no entanto, ambos destacam a importância de diferenciar, ou melhor, não confundir a representação (significante-*representamen*) com o objeto representado (mais à frente será retomada essa discussão na teoria de Duval).

Até o momento foi abordado a semiótica de maneira ampla e incorporada a teoria dos signos - semiologia, assim sendo, acredita-se que fica evidente que a semiótica estuda o campo das representações de um objeto, e não, o objeto. Para além das representações, a semiótica e, já citando a teoria que será estudada, os registros de representação semiótica estudam de que forma estas representações contribuem para o entendimento e compreensão dos objetos matemáticos[2].

O estudo das representações semiótica dos objetos matemáticos tem seus fundamentos nas pesquisas do francês Raymond Duval, filósofo e psicólogo de formação. Ele foi responsável por transpor os conceitos gerais da semiótica com vista a estudar o pensamento cognitivo, vislumbrando potencializar o ensino e a aprendizagem da matemática.

Desde a década de 70 Raymond Duval vem produzindo pesquisas no ramo da psicologia cognitiva com ênfase na aprendizagem da matemática. Em seus escritos é evidente e notório os pressupostos da teoria cognitivista do suíço Jean Piaget, até porque Piaget contribuiu para semiótica quando estudou e classificou os estágios de desenvolvimento cognitivo, onde somente no estágio pré-operatório (dos 2 aos 6 anos) a capacidade de elaborar representações e a utilização de alguns símbolos se manifestam, segundo D'amore (2015).

Até o momento pode-se perceber a estrita relação que os registros de representação semiótica têm com a teoria dos signos e os estudos da epistemologia cognitiva de Piaget, cabendo nesta situação a seguinte pergunta – Por que a

---

[2] "[...] em Matemática, fala-se mais em "objetos matemáticos" do que em "conceitos matemáticos", uma vez que em Matemática, preferencialmente, são estudados objetos a conceitos". (D'AMORE, 2005, p. 49).

necessidade de investigar especificamente a aprendizagem da matemática de um ponto de vista semio-cognitivo?

É a partir desta indagação que se clarifica a importância dos registros de representação, como o próprio Duval (2003, p. 37) discorre que os registros são “os graus de liberdade de que um sujeito pode dispor para objetivar a si próprio uma ideia ainda confusa, um sentimento latente, para explorar informações ou simplesmente para poder comunicá-las a um interlocutor”. Evidencia-se que as representações semióticas cumprem, em primeira instância, a função de comunicar ideias e objetos que estão interiorizados em outro sistema de representação, o mental. Mas, devido ao caráter específico da matemática, as representações semióticas cumprem um papel secundário e essencial para a compreensão dos objetos, pois em matemática:

> Há o fato de que os objetos matemáticos, começando pelos números, não são objetos diretamente perceptíveis ou observáveis com a ajuda de instrumentos. O acesso aos números está ligado à utilização de um sistema de representação que os permite designar. (DUVAL, 2003, p. 14).

O fato de os objetos matemáticos serem acessíveis por meio de representações semióticas tornar-se de inteira importância estudar de um ponto de vista cognitivo e matemático tais representações. Porém, antes de argumentar o valioso papel que cumpre a representação semiótica dos objetos matemáticos na aprendizagem da matemática, é necessário tomar conhecimento sobre algumas definições que Duval aborda na sua principal obra *Sémiosis et pensée humaine: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*.

2.1 As representações

No início do capítulo 2 foi destacada a teoria do signo que teve grandes contribuições dos filósofos Pierce e Saussure, partindo dos estudos gerais da semiologia, Duval destaca, no âmbito da matemática, três representações inerentes ao pensamento matemático. São elas: as representações mentais, as representações semióticas e as representações computacionais. No quadro 2 evidencia-se as especificidades de cada representação.

Quadro 2: Tipos e funções de representações classificadas segundo Duval

	INTERNA	EXTERNA
CONSCIENTE	Mental função de objetivação	Semiótica função de objetivação função de expressão função de tratamento intencional
NÃO-CONSCIENTE	Computacional função de tratamento automático ou quase instantâneo	

Fonte: Duval, 2009, p. 43.

As representações mentais "são todas as que permitem uma visão de objeto na ausência de todo significante[3] perceptível" (DUVAL, 2009, p.45) e, portanto, preenchem funções internas nas representações conscientes. Além de cumprir a função de objetivação[4] as representações mentais recobrem um amplo domínio que vai além desses objetos denominados ausentes (conceitos, ideias, noções etc.) e adentra em desejos e crenças próprias do indivíduo.

No que concerne às representações semióticas, elas também cumprem o papel de objetivação nas representações ditas conscientes. Contudo, exprimem visões do objeto num plano real e perceptível, tendo além do significado, um significante ou propriamente um signo. Duval aponta um erro crasso que pode ocorrer quando as representações mentais e semióticas são postas em dependência, ele atribui a palavra *noésis* para apreensão conceitual de um objeto (representações internas) e *semiósis* para a produção de representações externas (semióticas). Assim, é comum pensar que a *noésis* independe da *semiósis*, para explicar que essa afirmação não se sustenta, pelo menos em relação aos objetos matemáticos, vamos relembrar que a representação semiótica primariamente cumpre a função de comunicação, daí convém estabelecer que é necessário tomar consciência de uma ideia ou de um conceito antes mesmo de produzir um significante. Porém, quando se refere aos objetos matemáticos essa afirmação se desmantela, pois algumas "representações "mentais" não passam de representações semióticas interiorizadas" (DUVAL, 2003, p. 31), isso ocorre porque

---

[3] Também denominado por representante "é um objeto real, podendo ser percebido: o representante evoca, então, 'objetos ausentes'" (DUVAL, 2009, p. 84).

[4] "A objetivação corresponde à descoberta pelo próprio sujeito do que até então ele mesmo não supunha, mesmo se outros lhe houvessem explicado". (DUVAL, 2009, p. 41).

é nas representações semióticas que se operam as transformações e, muitas delas acabam (re)significando as representações internas utilizadas.

As representações computacionais “são todas aquelas cujos significantes, de natureza homogênea, não requerem visão de objeto, e que permitem uma transformação algorítmica de uma sucessão de significantes em outras” (DUVAL, 2009, p. 47). Estes tipos de representações podem ser associados ao processamento de sistemas computacionais ou, como Duval (2009) compara, com o domínio da Inteligência Artificial, se diferem das outras duas representações por não cumprir a função de objetivação do objeto e, por isso, é classificada como não-consciente. Embora sirvam para efetuarem tratamentos e codificações de algumas representações semióticas.

Nas representações mobilizadas para executar qualquer atividade é notório a tensão existente entre àquelas ditas conscientes (mentais e semióticas), pois são elas as responsáveis por produzir e objetivar conceitos e ideias num plano perceptível. E, isso ocorre devido ao fato de não possuírem correspondência direta, ou seja, uma representação semiótica nem sempre corresponde fielmente as representações mentais. Isso enaltece a importância de mobilizar uma pluralidade de representações externas. Um exemplo no campo da matemática é citado por D’amore (2015, p. 29-30) onde “no mundo da experiência sensível, portanto, palavras como “unidade”, “número”, “par”, “ímpar”, “ponto”, “reta”, “triângulo”, “quadrado”, “círculo” indicam apenas representações ou cópias imperfeitas de objetos, ideias ou formas”. Assim, as produções dos alunos (representações semióticas) nem sempre acusam a compreensão dos objetos representados, por isso que Duval (2003, p. 27) deixa claro que “um sucesso matemático não corresponde a um sucesso cognitivo” e, isso se clarifica quando o mesmo autor explica numa entrevista dada à Freitas e Rezende (2013), as diferenças de um ponto de vista matemático e cognitivo:

> Compreender, do ponto de vista matemático, é ser capaz de justificar um resultado por meio de uma propriedade. Mas, do ponto de vista cognitivo, é primeiro reconhecer o mesmo objeto em diferentes representações semióticas que podem ser feitas a partir dele, cujos conteúdos não têm nada em comum. (FREITAS; REZENDE, 2013, p. 20).

Esta situação pode ser exemplificada quando uma criança (re)produz uma representação pela simples imitação de outra representação. A imitação seguindo as fases do desenvolvimento cognitivo de Piaget é utilizada na fase inicial, pois nelas as crianças ainda não são capazes de representar objetos, como citado no início deste capítulo.

De maneira geral, é possível averiguar a pluralidade das representações que são requeridas para exprimir ideias e conceitos. Para Duval (2009) as representações semióticas são fundamentais para as atividades matemáticas, pois "as representações semióticas não são somente indispensáveis para fins de comunicação, elas são necessárias ao desenvolvimento da atividade matemática" (DUVAL, 2009, p. 15). Assim, qualquer produção matemática passa fundamentalmente por representações semióticas, nesse ponto, fica evidente o motivo pelo qual Duval (2009) se preocupou em investigar de maneira mais contundente as representações semióticas na abordagem dos objetos matemáticos em detrimento das demais. Obviamente a sua teoria não se fundamenta apenas em afirmar que tais representações são necessárias, mas sim, como compreender e potencializar os objetos de ensino da matemática por meio de uma diversidade de representações semióticas.

Logo, na próxima subseção serão apresentadas as transformações que ocorrem dentro das representações semióticas, seguindo definições de Duval (2009) e destacando aspectos da importância da mobilização da pluralidade de representações semióticas em situações de ensino.

2.2 As transformações nas produções semióticas

Como visto anteriormente, o acesso aos objetos matemáticos só é possível por meio de representação semiótica, no entanto, este acesso não garante sua aprendizagem. Um aspecto importante é considerar o que cada representação, por meio de suas unidades significativas, acessa do objeto representado e de que forma é possível tratar e/ou converter esta representação, de maneira que possibilite acessar aspectos diferentes do objeto representado. Duval (2009) utilizou-se da palavra "Registro" para designar distinções entre as representações semióticas.

No âmbito da matemática os registros de representações semióticas tais como a língua natural, sistemas de numeração, figuras geométricas, escrituras algébricas, representações gráficas, entre outras, permitem acessar diferentes aspectos do objeto representado. Por meio das representações semióticas e de suas unidades significativas é que se pode acessar os objetos matemáticos, seja do ponto de vista didático ou do ponto de vista cognitivo. Por unidades significativas entende-se que são:

> As letras, símbolos, eixos, desenhos que, a partir de uma sintaxe própria e de um processo de significação, constituem-se em diversos registros de representações semiótica capazes de representar certos aspectos do objeto matemático para um indivíduo que as reconhece. (CARDOSO, 2015, p. 42).

Deste modo, Duval (2003) classifica os registros em quatro tipos, como se pode observar no quadro 3, a seguir:

Quadro 3: Classificação de diferentes registros de representações semióticas mobilizáveis no funcionamento matemático, segundo Duval (2003)

	REPRESENTAÇÃO DISCURSIVA	REPRESENTAÇÃO NÃO DISCURSIVA
REGISTROS MULTIFUNCIONAIS: Os tratamentos não são algoritmizáveis.	Língua natural Associações verbais(conceituais). argumentações a partir de observações, de crenças...; dedução válida a partir de definição ou de teoremas.	Figuras geométricas planas ou em perspectivas (configurações em dimensão 0, 1, 2 ou 3) apreensão operatória e não somente perceptiva; construção com instrumentos.
REGISTROS MONOFUNCIONAIS: Os tratamentos são principalmente algoritmos.	Sistemas de escritas: numéricas (binárias, decimal, fracionária...); algébricas; simbólicas (línguas formais) Cálculo	Gráficos cartesianos mudanças de sistemas de coordenadas; interpolação, extrapolação.

Fonte: Duval, 2003, p. 14.

Para além dos registros de representação semiótica tabelados é essencial tomar conhecimento sobre as transformações que podem ocorrer entre estas diferentes representações dos registros, as conversões e os tratamentos. Pois bem, a conversão é quando uma representação troca de registro do mesmo objeto representado, já os tratamentos ocorrem internamente a um registro de representação, não ocorrendo assim, a mudança do mesmo. Uma definição mais sofisticada pode ser encontrada em Duval (2009):

> Um tratamento é uma transformação que se efetua no interior de um mesmo registro, aquele onde as regras de funcionamento são utilizadas; um tratamento mobiliza então apenas um registro de representação. A conversão é, ao contrário, uma transformação que faz passar de um registro

> a um outro. Ela requer então a coordenação dos registros no sujeito que a efetua. (DUVAL, 2009, p. 39).

Em matemática, são muitos os exemplos que podemos observar e aplicar nestas transformações acima definidas, por exemplo, o objeto matemático identificado como uma equação do segundo grau pode ser enunciado em língua natural da seguinte forma: - eleve ao quadrado a incógnita identificada como x, subtraia duas vezes a mesma incógnita e adicione uma unidade e obtenha o resultado igual a zero. Esta representação em língua natural, para alguém que reconhece a representação algébrica de uma equação do segundo grau, pode ser convertida, na equação: $x^2 - 2x + 1 = 0$. Neste caso, realizou-se uma conversão, pois foram utilizadas duas representações distintas, com unidades significativas distintas para cada representação (língua natural e escritura algébrica). Pode-se exemplificar o tratamento com esta mesma equação, supondo que além de representar na escritura algébrica fosse solicitado encontrar a solução da equação. Uma forma de "tratar" esta equação é percebendo que a mesma pode ser representada na forma fatorada e, neste caso, o quadrado perfeito, ou seja, $(x - 1)(x - 1) = 0$ ou ainda na forma $(x - 1)^2 = 0$. Assim, fica evidente que não houve mudança de representação, apenas se realizou tratamentos da representação do objeto matemático, no caso, a equação do segundo no registro algébrico.

Os diferentes tratamentos e conversões realizadas nas representações semióticas, de acordo com Duval, podem potencializar a aprendizagem dos objetos matemáticos quando de sua abordagem em situações de ensino. Estas atividades permitem acessar um mesmo objeto em diferentes representações, permitindo assim um discernimento entre o objeto e sua representação. Segundo Duval (2003, 2009), tal diferenciação é condição crucial para as aprendizagens, principalmente na matemática. A recíproca é que "toda confusão entre o objeto e sua representação provoca, com o decorrer do tempo, uma perda de compreensão'' (DUVAL, 2009, p. 14)".

Portanto, para o ensino de matemática é importante mobilizar pelo menos duas[5] representações semióticas, pois dessa forma possibilita ao estudante conhecer a pluralidade de representações que se pode mobilizar para acessar os diferentes aspectos dos objetos matemáticos estudados. Contudo, vale "lembrar que

[5] Na utilização de apenas uma representação pode ocorrer a confusão objeto-representação.

são as transformações de representações semióticas que são importantes em Matemáticas e não as representações elas mesmas" (DUVAL, 2009, p. 10), ou melhor, é a conversão entre diferentes representações semióticas que favorece a compreensão. Por outro lado, de nada adianta a utilização de inúmeras representações dos objetos matemáticos se os estudantes não reconhecem as relações que existem entre as unidades significativas correspondentes em cada representação semiótica.

A importância da diversidade de registros de representações se cristaliza quando Duval indaga e responde a um paradoxo inerente na produção matemática – "como não confundir o objeto com sua representação, se não temos acesso ao próprio objeto, fora de sua representação? É a possibilidade de multirrepresentação potencial de um mesmo objeto que permite contornar este paradoxo" (FREITAS; REZENDE, 2013, p. 17).

Em suma, os registros de representação semiótica se remetem ao estudo das representações externas e, tais representações contemplam uma gama de possibilidades que são mobilizadas para acessar os objetos da matemática. A mobilização entre as representações ocorre por meio de duas transformações, os tratamentos e as conversões. Então, seria suficiente afirmar que se as transformações forem aplicadas tem-se uma compreensão dos objetos matemáticos em estudo? Uma resposta a este questionamento inicial é que não necessariamente. As transformações não são recursos neutros ou tão simplórios, pois o processamento de cada representação carrega consigo custos de apreensão das unidades significativas bem como o estabelecimento de relações com as unidades significativas de outra representação. Neste caso, existem características que devem ser analisadas internamente a essas transformações, principalmente nas conversões. E, isso será retratado na próxima subseção, onde abordar-se-á o fenômeno da congruência das unidades significativas entre registros.

2.3 Congruências das unidades significativas entre representações semióticas

O fenômeno da congruência entre registros de representação ocorre em toda transformação de conversão das representações semióticas, isto é, as unidades significativas de cada representação são colocadas em correspondência e verificada o grau de congruência. Duas representações possuem um grau elevado de congruência quando três critérios são notáveis em suas representações:

> [...] O primeiro é a possibilidade de uma correspondência “semântica” dos elementos significantes: a cada unidade significante simples de uma das representações, pode-se associar uma unidade significante elementar. [...] O segundo critério é a univocidade “semântica” terminal: a cada unidade significante elementar da representação de partida corresponde uma só unidade significante elementar no registro da representação de chegada. [...] O terceiro é o critério de correspondência na ordem dentro da organização das unidades compondo cada uma das duas representações é pertinente apenas quando estas apresentam o mesmo número de dimensões. (DUVAL, 2009, p. 68-69).

Retomando o exemplo do objeto matemático que se utilizou para explicar as transformações, pode-se fazer uma análise sobre a congruência entre as representações utilizadas.

Quadro 4: Exemplo do fenômeno de congruência.

Língua natural (registro de partida)	**Registro algébrico (registro de chegada)**
Eleve ao quadrado a incógnita x, subtraia duas vezes a incógnita e adicione uma unidade e obtenha resultado a zero	$x^2 - 2x + 1 = 0$

Fonte: Elaborado pelo pesquisador, 2018.

O primeiro critério refere-se à correspondência semântica entre as unidades significativas, assim, tais unidades como: “eleve”, “incógnita”, “subtraia”, “vezes” “adicione” e “igual” têm correlação quase direta com a equação representada. Em seguida tem-se a univocidade semântica, em outras palavras, cada unidade significativa no registro de partida em língua natural corresponde se, e somente se, há outra unidade significativa no registro de terminal (chegada) no caso algébrico, como se nota que cada “palavra” está estritamente ligada a um símbolo para quem os reconhece e entende a representação apresentada. O último critério se refere a ordem de apreensão entre as unidades nas duas representações, caso um estudante não compreenda, por exemplo, que a palavra “incógnita” se converte em outra unidade significa, neste caso o “x”, mas poderia ser qualquer outra letra para representar, neste caso tem-se um problema de ordem ou dimensão.

Contudo, vale ressaltar que a congruência está intimamente ligada ao desenvolvimento cognitivo do sujeito, pois à medida que se mobiliza mais representações incorre a possibilidade do fenômeno da não-congruência, como aponta Duval (2009):

> Não apenas o tempo de tratamento aumenta, mas a conversão pode se revelar impossível de efetuar, ou mesmo de compreender, se não houver uma aprendizagem prévia concernentes às especificidades semióticas de formação e de tratamento de representação que são próprias a cada um dos registros. (DUVAL, 2009, p. 65-66).

Com essa citação de Duval um questionamento é necessário – Então, no planejamento e sistematização dos objetos de ensino deve-se priorizar representações que possuem uma maior congruência? Essa pergunta é de inteira importância para explicar a complexidade deste fenômeno. O primeiro ponto de vista é que a análise de congruência não pode levar em consideração apenas os objetos matemáticos que se pretende ensinar, mas também a quem será dirigido. Somente verificando as aprendizagens prévias (conforme citação anterior) dos estudantes é possível antever a congruência entre as representações. E no tocante cenário da sala de aula, onde múltiplas formas de aprendizagem surgem, o trabalho de selecionar representações congruentes se agrava.

Por outro lado, a não-congruência explica as dificuldades que muitos docentes se deparam na prática, pois nas pesquisas de campo realizadas por Duval e outros pesquisadores há apontamentos em que toda atividade na qual a conversão das representações é congruente ocorre uma alta taxa de sucesso, já nas conversões de representações não-congruentes a recíproca se ratifica, conduzindo com mais frequência ao fracasso na atividade cognitiva em questão. Todavia, quando se verifica a dissimetria entre unidades significativas (não-congruência) deve-se buscar uma alternativa em outra representação.

Uma análise interna aos tipos de registros de representação classificados por Duval (Quadro 3) se mostra necessária para explicar as nuances entre a tipologia do registro e o fenômeno da congruência. O autor aponta uma distância cognitiva entre os registros discursivos (língua natural, sistemas de escritas etc.) e os não discursivos (figuras geométricas, gráficos etc.). A língua natural, em especial, que na maioria das atividades é o registro de partida é multifuncional, isto é, os tratamentos a serem realizados não são generalizados, exemplificando, quando pedimos para um estudante desenhar a seguinte figura enunciada verbalmente – *Desenhe um losango*, se seguidamente solicitar a outro estudante converter da representação figural para a representação em língua natural, muitas possibilidades podem surgir (quadrilátero, paralelogramo, entre outras), pode-se perceber que neste exemplo o critério da univocidade semântica não é satisfeito. Assim, frisa-se a importância de elaborar enunciados bem estruturados, objetivos e mais congruentes possíveis de ponto de vista semiótico.

Para clarificar melhor esse fenômeno é válido o professor se conscientizar que por mais que uma conversão entre representações não seja congruente, isso não diminui a importância do acesso a esse objeto que está sendo ensinado. Cabe ao professor explorar outras possibilidades, seja de um ponto de vista didático ou puramente semiótico, ou seja, apresentando-lhes outras representações que tornem esses objetos matemáticos mais acessíveis.

2.4 Números complexos e seus registros de representação

Nesta seção far-se-á uma análise semiótica dos números complexos e suas distintas representações semióticas, isto inclui verificar os registros de representação semiótica, as transformações e o fenômeno da congruência inerentes às suas distintas representações.

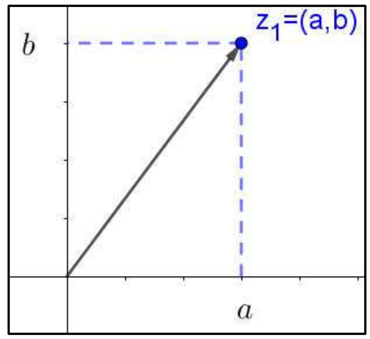
Duval (2011) discute que a complexidade de um objeto matemático está intrinsicamente ligada as representações que dão acesso ao mesmo. Isso não significa que quanto mais registros e, por consequência, mais representações, o objeto se torna mais acessível. As representações de um objeto se tornam mais congruentes, portanto, mais acessíveis, quando as representações permitem transformar-se em outras representações dentro de um mesmo registro ou entre registros distintos. Assim, uma diversidade de registros (quantitativamente) oferece inúmeras representações que podem ser selecionadas sob a ótica da congruência para serem abordadas na prática.

Mesmo considerando a inumerabilidade dos registros de representação semiótica, nem sempre é possível transitar entre todos num mesmo objeto. As potencialidades das conversões de representação estão relacionadas com a natureza do objeto, para exemplificar uma limitação de representação observa-se o caso das transformações lineares, na qual é abordado em álgebra linear – ao se deparar com uma transformação que pretende ir de $\mathbb{R}^2$ para $\mathbb{R}^4$ perde-se neste momento as representações do registro gráfico, visto que todas as representações desse registro se limitam à terceira dimensão. Desta forma, é importante discutir que a falta de registros de representações não caracteriza a complexidade do objeto, mas restringe as possibilidades de transformação das representações.

É neste contexto que se explica a importância de discutir o teor semiótico por detrás do objeto que se deseja ensinar, pois revela as possibilidades de se explorar esse objeto em situações de ensino. No caso dos números complexos, o quadro 5 apresenta alguns registros e suas representações, as unidades significativas e/ou visuais deste, quando da sua abordagem em sala de aula.

Quadro 5: Registros de representação de um número complexo e suas unidades significativas e/ou visuais.

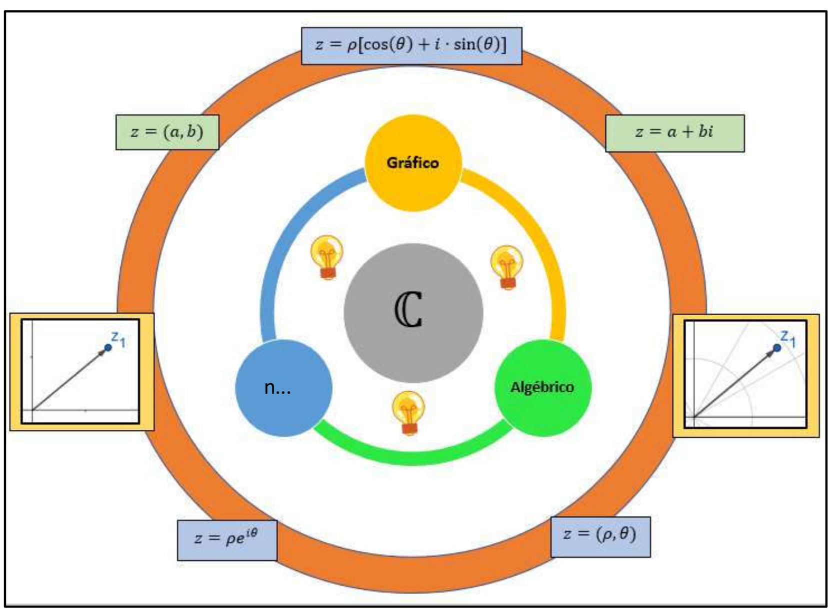
Registro	**Representações**	**Unidades significativas/visuais**
Algébrico	$z = a + bi$	Parte real (a) Parte imaginária (b) Unidade imaginária (i)
	$z = (a, b)$	Afixo (a, b) Parte real (a) Parte imaginária (b)
	$z = \rho(cos\theta + i \cdot sen\theta)$	Argumento (θ) Módulo (ρ) Unidade imaginário (i)
	$z = \rho e^{i\theta}$	Base (e) Argumento (θ) Módulo (ρ)

Gráfico		Afixo (z_1) Eixo real (a) Eixo imaginário (b)
. . . n	. . . n	. . . n

Fonte: Elaborado pelo pesquisador, 2018.

Outra forma de dispor os elementos do quadro 5 pode ser visto na figura 1 que esquematiza a utilização da *semiósis* para acessar os objetos.

Figura 1: Registros de representações semióticas dos números complexos.



Fonte: Elaborado pelo pesquisador, 2018.

Ao centro está o objeto que se deseja acessar (utilizou-se o símbolo $\mathbb{C}$ para representar o objeto número complexo), ao redor se encontram os registros e suas representações que exercem a função de “iluminar” o objeto matemático em questão. Tais registros e suas representações se diferenciam por regras de conformidade específicas que se manifestam na sintaxe de suas unidades significativas ou visuais, conforme o caso.

As representações semióticas, expostas sobre o anel externo, recobrem as múltiplas portas de entrada para acessar o objeto em seus distintos registros. Assim, fica evidente o que afirma Duval (2003; 2009) que toda representação fornece um entendimento parcial do objeto, pois ao acessar o objeto pela representação $z = a + bi$ perpassa apenas um dos registros algébricos mencionado no quadro 5.

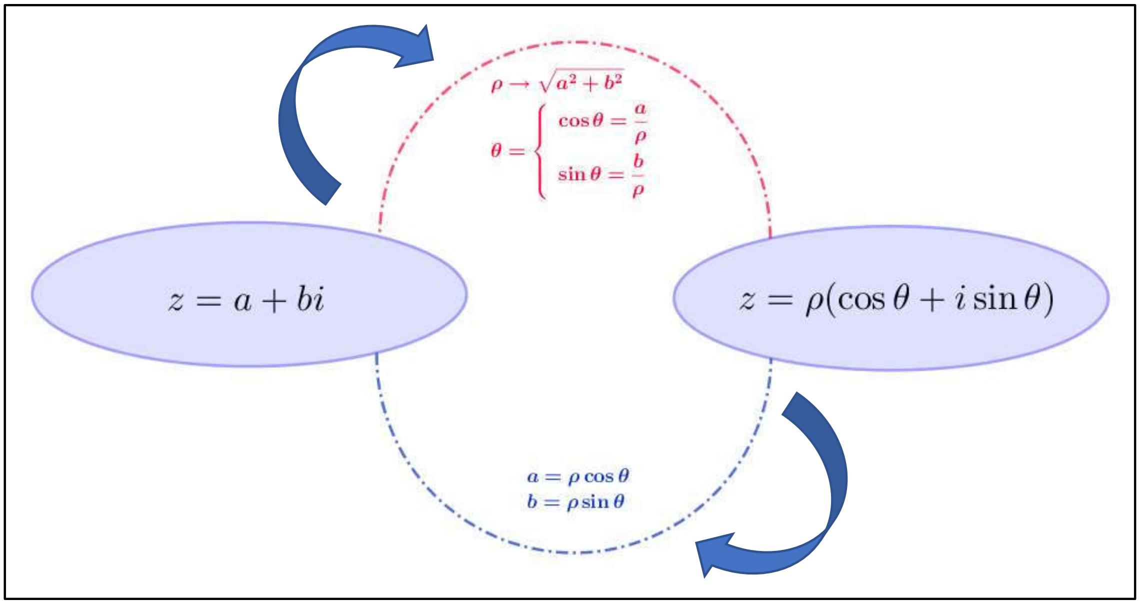
A partir desse instante far-se-á uma análise sobre as transformações que podem ocorrer entre as representações semióticas elencadas, serão analisadas as correspondências entre as unidades significativas e, ao final, uma análise conjunta das representações.

As representações oriundas do registro algébrico revelam quatro maneiras de acessar os números complexos, a própria representação geral algébrica $z = a + bi$ que define formalmente um número complexo, o afixo $z = (a, b)$ no plano Argand-Gauss, a forma polar $z = \rho(cos\theta + i \cdot sen\theta)$ e a forma exponencial $z = \rho\, e^{i\theta}$. Cabe destacar que algumas destas representações podem exigir um custo semiótico e cognitivo maior ou menor dependendo da tarefa a ser realizada. Para exemplificar toma-se as operações de adição e subtração, geram custos cognitivos diferenciados quando abordados na representação algébrica ou na representação polar. Assim, torna-se de inteira importância praticar a conversão entre as representações do próprio registro algébrico ou do registro gráfico e uma forma de justificar essa conversão pode ser atendo-se às limitações de cada representação.

As distintas representações do registro algébrico apontam para a existência de unidades significativas distintas. Isso traz uma discussão sobre as transformações que ocorrem sobre essas representações, ao afirmar que são representações diferentes então ocorre uma conversão, pois segundo a teoria de Duval quando uma representação se transforma em outra diferente da de partida temos então uma conversão. Caso contrário, um simples tratamento é realizado dentro desta representação.

No esquema a seguir é possível visualizar as representações juntamente com suas unidades significativas; observem na figura 2 os conhecimentos que são requeridos na passagem destas representações[6].

Figura 2: Conversão entre as representações algébrica e polar.



Fonte: Elaborado pelo pesquisador, 2018.

Para ir de uma representação à outra é exigido uma conversão das unidades significativas no registro algébrico (parte real e imaginária) em outras novas unidades significativas (módulo e argumento) na representação polar. Embora as duas representações sejam discursivas (vide Quadro 3) a coordenação entre essas representações pode ser diferente dependendo do registro de partida e de chegada escolhido.

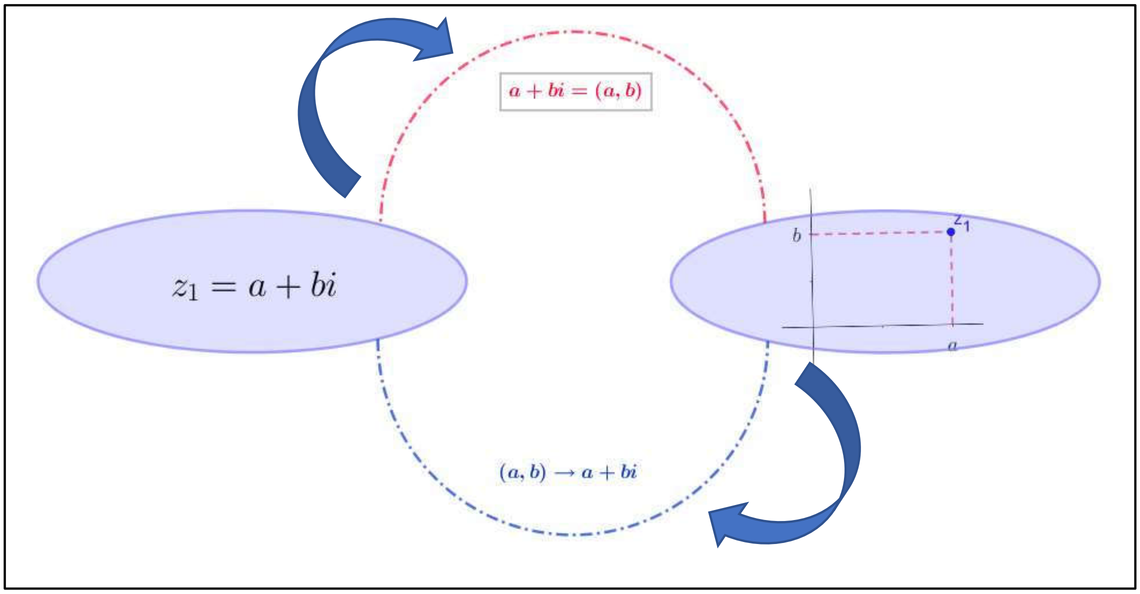
Dito isto, não se pode analisar o quão congruentes são essas representações sem o conhecimento dos estudantes que vão articulá-las, em outras palavras, o fenômeno da congruência entre as representações não depende apenas de uma análise semiótica, mas sim da capacidade dos conhecimentos disponíveis dos estudantes para executar esta tarefa.

---

[6] As relações do argumento e do módulo expressa na Figura 2 são obtidas a partir da construção do triângulo retângulo no plano complexo.

Considerando que Duval aponta uma distância cognitiva entre os registros discursivos (algébrico) e os não discursivos (gráficos) no tocante aos números complexos, acredita-se que essas representações sejam facilmente convertidas, pois como ilustra a figura 3, as unidades significativas de cada representação têm correspondência direta entre os registros.

Figura 3: Conversão entre as representações algébrica e gráfica.

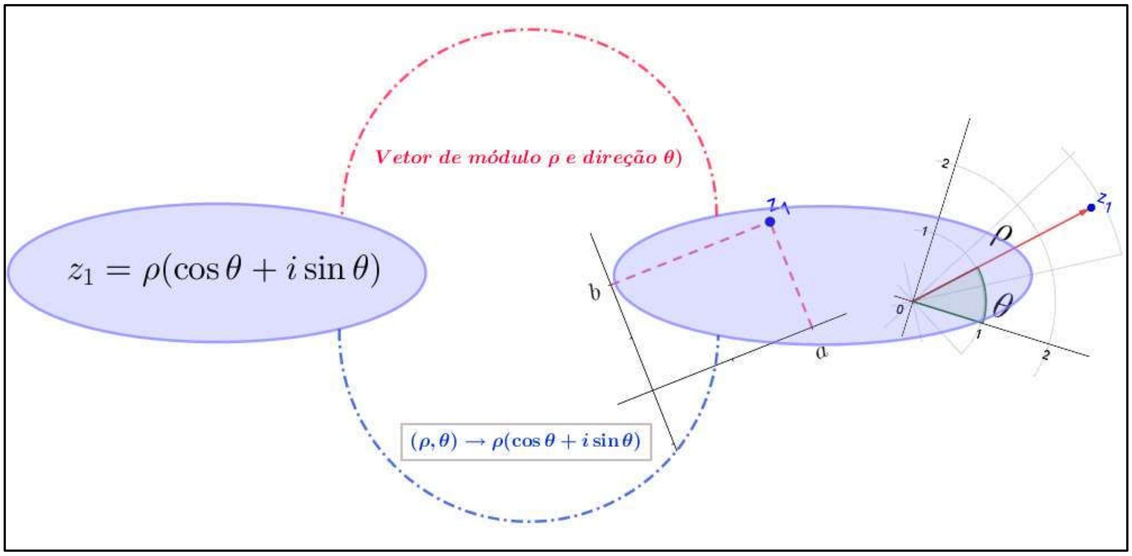


Fonte: Elaborado pelo pesquisador, 2018.

Cabe destacar que para essa conversão é requerido que o estudante que mobiliza essas representações saiba que no registro gráfico os eixos indicam a parte real e imaginária do número complexo na forma algébrica, neste caso é necessário reconhecer e corresponder as unidades significativas de cada representação, não é necessário (mas nada impede) desenvolver algoritmos ou tratamentos para coordenar essas representações.

Em relação a representação polar e a representação gráfica, estas podem também ser convertidas sem requererem outras representações auxiliares, desde que alguns tratamentos sejam aplicados, principalmente, quando se tem como registro de partida uma representação na forma polar. Para que exista algum grau de congruência entre estas representações é necessário realizar um tratamento no sistema de coordenadas que se pretende representar. Observe a figura 4, se realizar a conversão da representação polar para a gráfica no sistema de coordenadas cartesiano as unidades significativas de cada representação não serão postas em correspondência e, portanto, poderá causar certa incompreensão do objeto nestes registros de representação.

Figura 4: Conversão entre as representações polar e gráfica.



Fonte: Elaborado pelo pesquisador, 2018.

No entanto, não é suficiente apenas modificar o sistema de coordenadas no registro gráfico, isto porque, as unidades que significam a representação nesse registro requerem um tratamento vetorial. Com a utilização do vetor as unidades significativas são melhor evidenciadas, até porque para se obter um ângulo (argumento) são necessárias duas semirretas, da mesma forma que um segmento exige uma distância (módulo).

Diante dessa análise semio-cognitiva dos registos de representação inerentes aos números complexos, revela-se o quão sutil é o trabalho de explorar as representações que permitem o acesso a este objeto. E que uma transformação se faz necessário quando o registro de representação não permite o acesso a certos aspectos do objeto representado, ou ainda, dependendo do que se necessita evidenciar do objeto em estudo, uma representação se revela mais potente que outra, tornando importante ao estudante conhecer estas representações para efetuar suas escolhas diminuindo os custos cognitivos.

Ao se realizar uma análise no registro de representação gráfica dos números complexos evidencia-se sua versatilidade, pois nessa representação é possível realizar as operações entre os números complexos. No entanto, a escolha por representar num registro de representação gráfica nem sempre é preferível por parte dos estudantes, pois a organização das unidades de sentido no caso visuais são diferentes. Duval (2011) explica essa questão quando responde a seguinte pergunta “O que há de comum entre a escrita das equações e a visualização gráfica das retas, curvas ou superfícies em função dos eixos graduados e orientados?”:

> Não são nem as mesmas unidades de sentido que os constituem, nem o mesmo modo de organização. Em um caso, as unidades de sentido são os termos e, no outro, as qualidades visuais de um traçado. Em um caso, a organização é fundamentada na sucessão de uma sequência de termos e em seu reagrupamento em unidades mais globais. No outro, a organização é fundamentada em uma apreensão bidimensional simultânea, na qual não há nenhuma ordem de <<leitura>>. (DUVAL, 2011, p. 25).

Isto é, nas representações do registro algébrico existe uma linearidade na leitura e interpretação, as próprias unidades de sentido de cada representação são lidas em uma certa ordem. No registro gráfico não se tem um ponto de partida para analisar as unidades visuais que a compõe, os estudantes se deparam com todas essas unidades dispostas de uma maneira diferente das outras representações. Por isso, mais uma vez é importante ressaltar durante à abordagem dos objetos a correspondência entre as unidades significativas das distintas representações.

3. TECNOLOGIAS DIGITAIS E OS REGISTROS DINÂMICOS NO GEOGEBRA

As pesquisas relacionadas às Tecnologias da Informação e Comunicação (TICs) se presentificaram nos últimos 20 anos, estas mostraram a importância e o impacto com que as mídias afetaram a sociedade, pois como pontua Borba e Penteado (2016, p. 47) “a história da humanidade está sempre impregnada de mídias” bem como, a própria construção e divulgação do conhecimento está ligado a elas. No entanto, a mutação que as TICs vêm sofrendo no decorrer dos anos possibilitaram a criação de inúmeros ramos de pesquisa que em consonância com a nova sociedade, chamada de Sociedade da Informação, convergem para as mais diversas formas de aprendizagem.

E, a área da Educação abarca amplas pesquisas e investigações na busca de inovações em sala de aula. A Matemática, como disciplina curricular, também se preocupa em atualizar seus processos de ensino revelando tais preocupações nas tendências em Educação Matemática. Para isso, tem-se enfatizado o ensino da matemática por meio de diversos pontos de vista das tendências em Educação Matemática, incluindo as tecnologias digitais na prática pedagógica.

Embora seja notável o crescimento de trabalhos que objetivam a inserção da tecnologia digital nas aulas de matemática, pesquisas apontam algumas inconsistências na incorporação de tais tecnologias em sala. Primeiramente, como discorre Almeida (2008) o maior gargalo é ainda universalizar o acesso às TICs no país, principalmente nas escolas. Outro aspecto importante que necessita ser considerado é a formação inicial e continuada dos professores que precisam aliar em seu processo de formação as diferentes tecnologias tornando-se mais uma possibilidade para o processo de ensino. Ainda que os equipamentos e recursos sejam acessíveis é necessária uma tomada de consciência para entender como e de que forma estas tecnologias modificam os ambientes sociais, isto é, a escola precisa se reorganizar em toda sua dinâmica para não correr o risco de subutilizar tamanho potencial que engloba estes artefatos tecnológicos quando inseridos ao ambiente escolar.

Pesquisas recentes realizadas por Stormowski, Gravina e Lima (2013) apontam que no contexto escolar e, principalmente nas aulas de matemática, as tecnologias digitais não são incorporadas adequadamente. Segundo os autores, são reflexos da falta de formação e interação que os professores têm com os artefatos tecnológicos. Isso tem ressonância direta com a crítica realizada por Borba e Penteado (2016), onde qualquer aula expositiva seguida de exemplos utilizando recursos computacionais, parece ser uma das muitas formas de domesticar essas mídias.

Acredita-se que dois fatores corroboram para que os docentes se sintam inabilitados de utilizar com expressividade os recursos digitais disponíveis, são eles:

> Primeiro, o domínio do técnico e do pedagógico não deve acontecer de modo estanque, um separado do outro. É irrealista pensar em primeiro ser um especialista em informática ou em mídia digital para depois tirar proveito desse conhecimento nas atividades pedagógicas. [...] O segundo aspecto diz respeito à especificidade de cada tecnologia com relação às aplicações pedagógicas. O educador deve conhecer o que cada uma dessas facilidades tecnológicas tem a oferecer e como pode ser explorada em diferentes situações educacionais. Em uma determinada situação, a TV pode ser mais apropriada do que o computador. Mesmo com relação ao computador, existem diferentes aplicações que podem ser exploradas, dependendo do que está sendo estudado ou dos objetivos que o professor pretende atingir. (VALENTE, 2005, p. 23).

Considerando que na atualidade os estudantes têm acesso a diferentes tecnologias e permanecem interconectados praticamente o tempo todo, causa preocupação aos professores em relação a sua prática docente, que em sua maioria não são ou não foram preparados para desenvolver suas atividades nesta nova realidade que a sociedade está imersa. No entanto este novo cenário educacional que de um certo modo causa desconforto aos professores também traz à luz um novo paradigma educacional de desenvolvimento das práticas pedagógicas, vislumbrando assim outras possibilidades metodológicas que podem proporcionar novas aprendizagens.

É neste contexto atual de acesso a uma gama de recursos digitais disponíveis para o planejamento da ação docente que se inserem os *softwares* matemáticos, enquanto possibilidades para facilitar a mediação dos objetos matemáticos em sala. Alguns *softwares* apresentam uma dinamicidade em suas interfaces que permitem visualizar, mover, arrastar e animar as representações dos diferentes objetos matemáticos. Os mais conhecidos são *softwares* de Matemática Dinâmica (MD) que ofertam ambientes de geometria dinâmica, como por exemplo, o GeoGebra, Cabri Géomètre, Cinderella, The Geometer's SketchPad, entre outros.

Especificamente para esta pesquisa, os ambientes de geometria dinâmica comportam parte essencial para o alcance dos objetivos envolvendo o estudo dos números complexos e suas distintas representações semióticas. Uma vez que se apresenta a hipótese de que tais ambientes potencializam e/ou oferecem outras possibilidades de representar, tratar e converter, de um ponto de vista das representações semióticas os objetos matemáticos.

Para conduzir as investigações propostas neste estudo utilizou-se o programa GeoGebra, pois este apresenta janelas com funções que serão necessárias ao desenvolvimento da pesquisa, além disso, trata-se de um *software* livre, multiplataforma e com aplicativos para celulares inteligentes. Assim, torna-se necessário uma discussão entre o programa GeoGebra e registros de representação semiótica, suscitando a potencialidade que os ambientes dinâmicos oferecem para acessar os objetos matemáticos em suas distintas representações, bem como transitar entre as mesmas por meio das diferentes janelas que o *software* apresenta.

Pois bem, ao elaborar o estado do conhecimento das pesquisas que visam investigar os ambientes de geometria dinâmica conjuntamente com os registros de representação semiótica, pode-se averiguar que ambas áreas emanam profundas inquietações, em consequências, tornaram-se objetos de pesquisa. Os trabalhos de Viana e Boiago (2015), Stormowski, Gravina e Lima (2013), Bernd (2016), entre outros, são exemplos de propostas que evidenciaram o campo fértil resultante dos então nominados registros dinâmicos de representação.

Contudo, vale destacar um trabalho em específico, que de certa forma, divulgou a necessidade de incorporar os ambientes de geometria dinâmica no contexto escolar. Esta tese foi defendida em 2001, pela professora Maria Alice Gravina, intitulada “Os ambientes de geometria dinâmica e o pensamento hipotético-dedutivo”.

Nesta obra a autora aplica uma engenharia didática para explorar o pensamento hipotético-dedutivo emergido pelos ambientes de geometria dinâmica na busca de compreender como estes ambientes operam nas demonstrações exigidas pela matemática e como os estudantes podem utilizar tais ambientes para a construção de suas próprias demonstrações.

Gravina (2015) destaca e vislumbra o potencial semiótico que estes ambientes de geometria dinâmica possuem. Segundo a autora, um recurso como o GeoGeobra traz:

> Complexidade para o processo de ensino da matemática, pois ele não se limita a expandir nossas possibilidades de pensamento. Ele transforma, de forma concomitante, as formas de pensar e as formas de veicular o conhecimento [...] o que já temos certeza é que um software de geometria dinâmica pode provocar o espírito de investigação matemática. Sua interface interativa, aberta à exploração e à experimentação, provoca experimento de pensamento, diferentes daqueles que acontecem com o suporte do lápis e papel. (GRAVINA, 2015, p. 252).

Como discutido anteriormente, as produções semióticas são formas de representações ou cópias imperfeitas dos objetos idealizados mentalmente, todavia é notável que os recursos digitais permitam uma aproximação das representações de tais objetos, pois além de representá-los permitem uma interação dinâmica destas representações.

Cabe nesse momento discutir – o que de fato são os *registros dinâmicos de representação? Seria um novo tipo de registro, além dos classificados por Duval?* Objetivamente não se trata de um novo registro, mas sim, de uma potencialização das unidades que compõem os registros de representação classificados por Duval. Sendo assim, a partir do momento que as representações são vislumbradas em algum ambiente dinâmico e, que dele emergem experimento de pensamento (parafraseando Gravina (2001)), esse registro de representação se torna dinâmico.

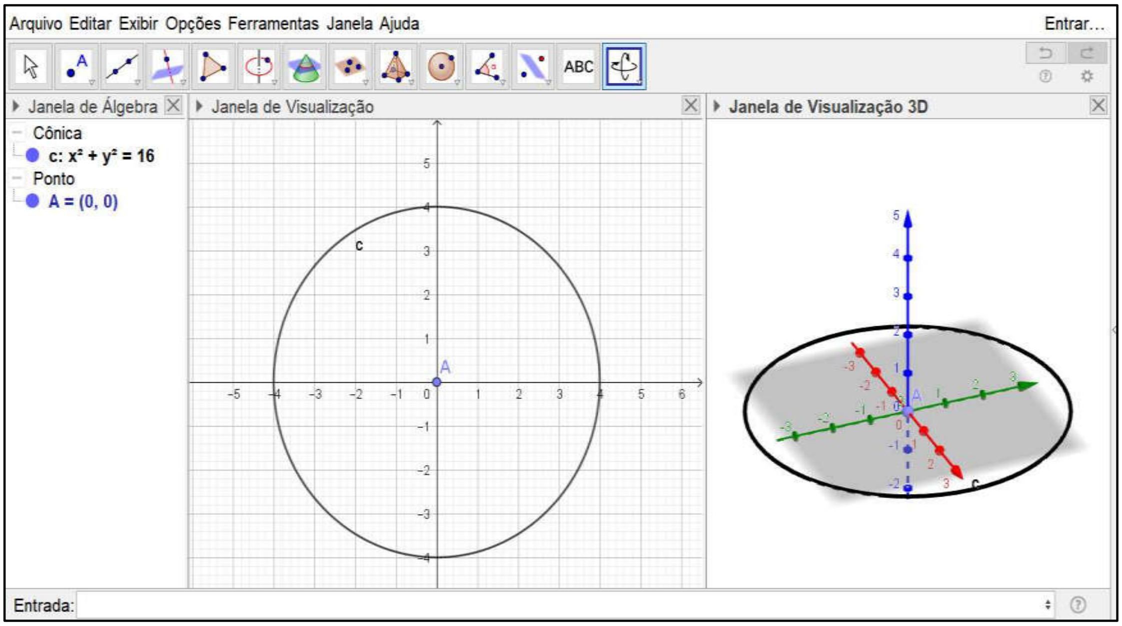
Embora que Duval discuta sua teoria sem apontar em que ambiente se desenvolve as produções semióticas, o mesmo revela que “os computadores não constituem um novo registro de representação. E isso por uma razão simples: *as representações que eles exibem são as mesmas que aquelas produzidas graficamente no papel para uma apreensão visual*” (DUVAL, 2011, p. 137). No entanto:

> *Eles constituem um modo fenomenológico de produção radicalmente novo, fundamentado na aceleração dos tratamentos.* Eles exibem no monitor tão rapidamente quanto à produção mental, mas com uma potência de tratamento ilimitada em comparação com as possibilidades da modalidade gráfico-visual. Obtemos, imediatamente, muito mais que tudo o que poderíamos obter à mão livre após, talvez, vários dias de escritas e cálculos ou construção de figuras. [...] A novidade fenomenológica mais espetacular se deve ao fato de que *as representações semióticas não discursivas* tornam-se manipuláveis como objetos reais. Podemos deslocá-las, fazê-las rodar, ou estendê-las a partir de um ponto. (DUVAL, 2011, p. 137, grifo do autor).

Dessa forma, os registros dinâmicos se mostram capazes de potencializar as transformações requeridas durante a coordenação das representações, sejam pelos tratamentos ilimitados ou pela instantânea conversão em sua interface.

Adentrando especificamente no ambiente de geometria dinâmica do *software* GeoGebra tem-se numa única plataforma diversas janelas que permitem visualizar diferentes representações de um mesmo objeto matemático. Veja o exemplo da figura 5, na janela de álgebra o registro algébrico e na "janela de visualização" e "janela de visualização 3D" o registro figural em duas dimensões.

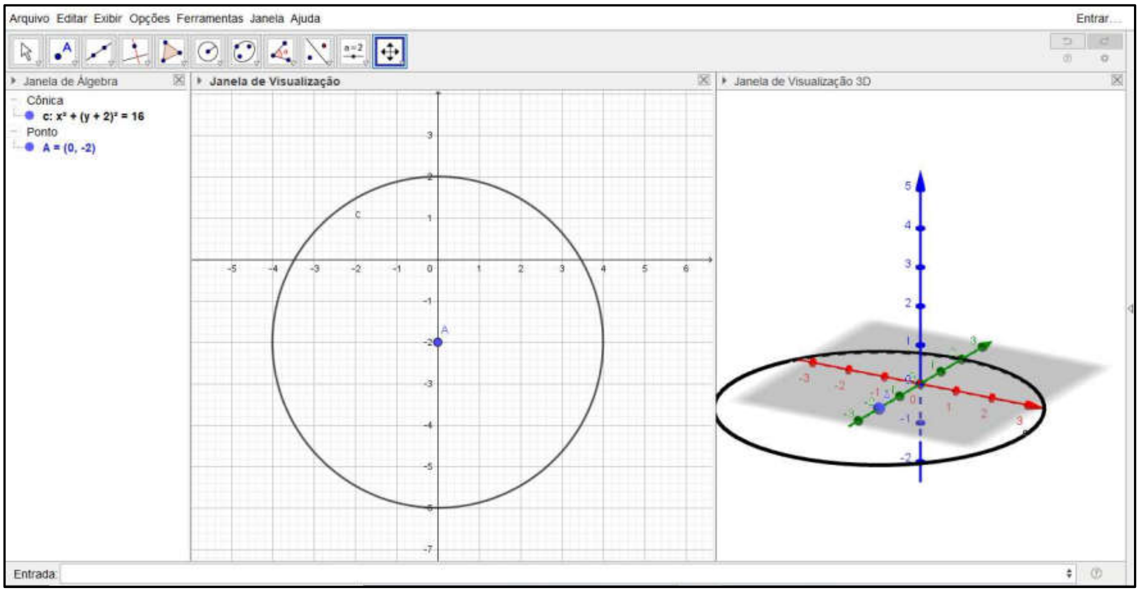
Figura 5: Diferentes representações semióticas de uma circunferência



Fonte: Elaborado pelo pesquisador, 2018.

O aspecto dinâmico referido nesse ambiente é a possibilidade de mover e/ou arrastar, se deslocar o centro da circunferência (ponto A) para baixo duas unidades instantaneamente o registro algébrico e o registro em 3D também se modificam, conforme ilustrado na figura 6.

Figura 6: Ferramenta mover do GeoGebra



Fonte: Elaborado pelo pesquisador, 2018.

Essa possibilidade que um ambiente de geometria dinâmica oferece é importante quando se trata de um ponto de vista semiótico, pois essa diversidade de representação lado a lado permite visualizar a correspondência entre as unidades significativas de cada registro.

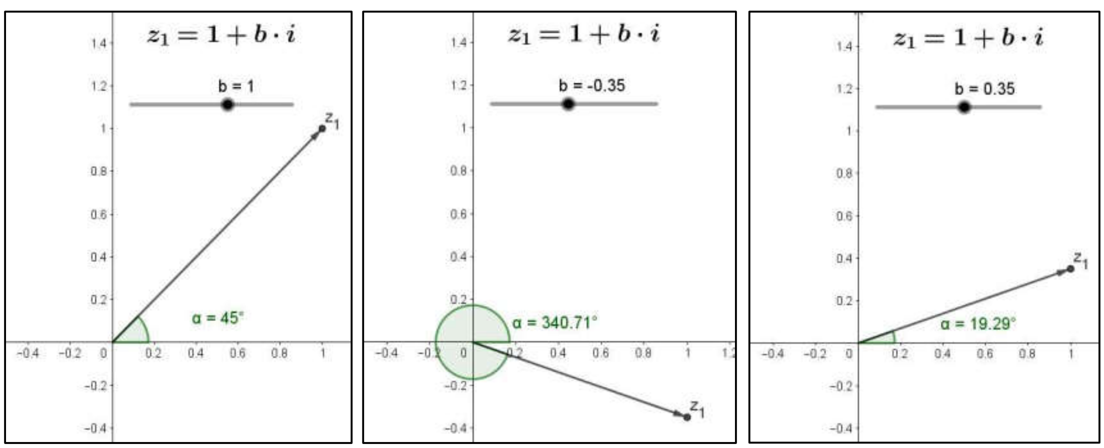
Nos exemplos esboçados nas figuras 5 e 6 pode-se verificar que conforme a ordenada do centro da circunferência se altera, uma alteração ocorre na janela de álgebra. E essa coordenação instantânea e dinâmica entre representações permitem visualizar e compreender como as unidades significativas de cada representação se relacionam.

Uma reflexão emerge quando Duval (2003, p.14) afirma que a "originalidade da atividade matemática está na mobilização simultânea de ao menos dois registros de representação ao mesmo tempo, ou na possibilidade de trocar a todo o momento de registro de representação". Quando o autor utiliza os termos "ao mesmo tempo" e "a todo o momento" é inevitável pensar que isso ocorre apenas num ambiente de geometria dinâmica, pois no lápis e papel a conversão, ou melhor, o tempo de mobilização das representações se daria num espaço de tempo maior.

No que tange os números complexos, trabalha-se na hipótese de que os ambientes de geometria dinâmica também oferecem subsídios para melhor acessar os objetos matemáticos concernentes a esse conteúdo. De um ponto de vista semiótico os registros de representação mobilizados no ensino dos números complexos variam entre: discursivos e multifuncionais (língua natural); discursivos e monofuncionais (escrita algébrica) e; não discursivos e monofuncionais (gráficos cartesianos). Na seção 2.3 foi apresentado os fenômenos de congruência entre registros, no qual Duval destaca a distância existente entre as representações discursivas e não discursivas. E, como já mencionado que os números complexos detêm fortes relações algébrica-gráfica é suscetível defrontar-se com a não-congruência entre algumas unidades significativas nas representações utilizadas.

Um ambiente de geometria dinâmica permite estabelecer relações entre aspectos do registro algébrico com o registro gráfico, conforme a figura 7; se representou o número complexo $z_1 = 1 + b \cdot i$ e aplicou um controle deslizante[7] para variar a parte imaginária (b), ao fazer essa mesma análise representando no lápis e papel apenas o deslocamento vertical do número complexo z_1 seria notado, ou seja, a relação entre a parte imaginária e o argumento não seria percebida.

Figura 7: Variação da parte imaginária de um número complexo.



Fonte: Elaborado pelo pesquisador, 2018.

Obviamente que o contato direto com o ambiente de geometria dinâmica oferece múltiplas variações do parâmetro escolhido, despertando a curiosidade e o pensamento hipotético, conforme ressalta Gravina (2001). É investigando a relação com esses ambientes de geometria dinâmica que se pretende responder à questão norteadora levantada, bem como, se aproximar do objeto de pesquisa, os números

[7] Ferramenta do GeoGebra.

complexos. Em relação a este objeto de pesquisa, na próxima seção se aborda de maneira mais explicativa vários aspectos que tratam desse objeto de ensino.

4. ASPECTOS EPISTEMOLÓGICOS DOS NÚMEROS COMPLEXOS

O pesquisador apresenta nesta seção uma análise sobre diferentes aspectos que perpassam os números complexos; na primeira subseção faz um levantamento de alguns fatos históricos relevantes sobre a descoberta desses números e a importância do mesmo para o avanço da matemática como ciência. Na segunda subseção discute as diretrizes de ensino que constam nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) e livros do Plano Nacional do Livro Didático (PNLD). Ele reserva a terceira subseção para realizar um levantamento das pesquisas que versam sobre os processos de ensino e aprendizagem dos números complexos. E, por fim, faz um fechamento relacionando a interseções desses aspectos com a presente pesquisa.

4.1 História dos números complexos, do impossível ao imaginário.

A imaginação do homem é indiscutivelmente uma habilidade que nos diferencia não apenas em relação a outras espécies, mas, sobretudo, entre nós mesmos. Tal competência pode ser, por exemplo, a explicação mais fascinante para a existência do conjunto numérico conhecido como os números complexos. Historicamente os números impossíveis, como foram chamados inicialmente, emergiram quando por volta de 1510 os matemáticos como Tartaglia e Cardano estudavam métodos para resolução de equações de segundo e terceiro grau. Seguidamente os estudos foram publicados por Cardano na sua obra Ars Magna e nessa obra é mostrada a resolução das equações cúbicas do tipo $x^3 = ax + b$, como mostra a fórmula abaixo.

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3} + \frac{b}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3} - \frac{b}{2}}$$

Em meados do século XVI, o matemático italiano Rafael Bombelli utilizou a fórmula acima para resolver uma equação de terceiro grau $x^3 = 15x + 4$, obtendo a seguinte expressão:

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{2^2 - 5^3} + 2} - \sqrt[3]{\sqrt{2^2 - 5^3} - 2}$$

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{-121} + 2} - \sqrt[3]{\sqrt{-121} - 2}$$

Bombelli evidenciou que uma das raízes dessa equação é x = 4, e que as outras raízes poderiam ser encontradas pela diferença entre duas raízes cúbicas de números imaginários (EVES, 2004). Anos mais a frente, por volta de 1629, Girard e Descartes iniciaram a tarefa de quantificar o número de raízes de uma equação, este estudo levou ao que hoje é conhecido como Teorema Fundamental da Álgebra. Nos seus escritos, Girard denomina as raízes de números imaginários como impossíveis e, admite essas raízes impossíveis, pois quando perguntado para que servem essas soluções se elas não são possíveis? Girard argumenta que servem por três motivos, segundo Roque (2012), para a certeza da regra geral, para a certeza que não há outra solução e para garantir a generalidade do resultado. O próprio Girard afirma que algumas raízes podem ser falsas ou menos que nada e conclui dizendo:

> Tanto as verdadeiras raízes quanto as falsas não são sempre reais, mas às vezes apenas imaginárias; o que quer dizer que podemos sempre imaginar tantas quanto dissemos em cada equação, mas às vezes não há nenhuma quantidade que corresponda àquelas que imaginávamos. (ROQUE, 2012, p. 427).

Ainda sem muitas descrições lógicas os números imaginários tornavam alguns cálculos mais simples, fáceis e os resultados abarcavam soluções que no campo dos reais eram ignoradas. Diante disso, uma questão primordial era posta em discussão, como representar o quadrado de um número que resulta em menos um? Somente em 1770 o ilustre matemático Leonard Euler dedicou seu tempo a investigar os números imaginários, em sua obra Elementos de Álgebra. Euler reconhecia a importância de se operar com estes números, embora os matemáticos precedentes a essa época já tinham se deparado com os imaginários considerando que sua legitimidade frente aos negativos e irracionais era parca. Na referida obra o autor descreve noções que repercutem em contextos atuais no que diz respeito ao ensino dos números complexos na Educação Básica:

> §140 “Quando pois acontecer o querer-se extrair a raiz de um número negativo, necessariamente haverá muito embaraço, por não poder existir

> número algum assinalável, cujo quadrado seja negativo. Por tanto, pretender por exemplo extrair a raiz de -4, seria querer achar um número, que multiplicado por si mesmo desse -4; o qual não poderia ser nem +2 nem -2; porque o quadrado de qualquer destes é +4, e não -4".
>
> §141: "Convém por tanto concluir, que a raiz quadrada de um número negativo não pode ser número positivo, nem negativo; pois que também os quadrados dos negativos tomam o sinal mais. É por isso de necessidade, que a raiz, de que se trata, pertença a uma espécie de números totalmente particular; pois não pode ser contada, nem entre os negativos, nem entre os positivos". (Euler, 1840, p. 42 – versão 1840 apud SILVA, 2009, p. 46).

Como referenciado acima, Euler já conjecturava a necessidade de um novo conjunto numérico, no qual continha esse nominado "número totalmente particular". E a denotação de $i = \sqrt{-1}$ foi cunhada por ele nos anos finais de sua vida, embora Euler tenha utilizado o símbolo i em seus manuscritos datados de 1777 "foi por Gauss ter adotado esse símbolo em seu clássico Disquisitiones arithmeticae de 1801 que seu lugar ficou assegurado entre as notações matemáticas" (BOYER, 2002, p. 305). Assim, a unidade imaginária foi mais uma de outras notações importantes criadas por Euler, como por exemplo, símbolo π, a base para o logaritmo natural e e a igualdade que envolve também a unidade imaginária $e^{\pi i} + 1 = 0$.

Retornando para meados do século XVII, o matemático britânico John Wallis (1616-1703) sugeriu a representação do número imaginário de uma maneira diferente – pense em $x + iy$ como um ponto localizado ao lado de uma reta, a uma distância y do ponto x (STEWART, 2013) e, partindo dessa ideia, mesmo que embora outros matemáticos anteriores a isso desenvolveram estudos em escritura algébrica sobre os números imaginários, foi Wallis quem primeiro teve a noção de representar tais números sobre uma reta.

Em seguida, três famosos matemáticos (Wessel, Argand e Gauss) surgiram com ideias muito próximas, Wessel representava os complexos utilizando apenas um eixo, conhecido atualmente como eixo real, já Argand e Gauss adicionaram um eixo vertical e denominaram de eixo imaginário e, até hoje o plano utilizado para representar um número complexo com par ordenado se chama Argand-Gauss.

Apesar de dispor diferentes formas de representar os números complexos foi o irlandês William Rowan Hamilton (1805-1865) que definiu que um número complexo se reduz a um par de números reais; a partir desse momento os cálculos já estavam impregnados de números complexos e a igualdade $i^2 = -1$ revolucionou não apenas a álgebra como todas as áreas que dela se utilizam.

Na atualidade, as aplicações reconhecidas para os números complexos abarcam as tecnologias modernas, a compreensão de ondas, estudos de corrente alternada na física, eletromagnetismo e, mais importante, proporcionou o desenvolvimento da análise complexa, muito difundida nos cursos de exatas, principalmente as engenharias. E, mesmo assim, segundo Stewart (2013, p. 98) “poucos adultos, mesmo cultos, estão cientes de quão profundamente a sociedade depende de números que não representam quantidades, comprimentos, áreas ou somas de dinheiro”. Assim, o conjunto dos números complexos veio trazer respostas e soluções para o que era desconhecido e, logo foi implementado e transposto da ciência para o meio acadêmico.

4.2 PCNs e PNLD

Diferentemente da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB) que rege a legalidade do cenário Educacional brasileiro os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) foram formulados para orientar as práticas escolares e discutir o currículo elencando competências necessárias para formação integral dos estudantes. Em 2002, o Ministério da Educação (MEC) publicou as Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+), este documento abrange todas as disciplinas que compõe o ensino médio dividas em três áreas, são elas: Ciências da Natureza e Matemática, Ciências Humanas, Linguagens e Códigos. Além de atualizar os dados sobre a Educação no Brasil é notório a ênfase dada sobre os estudantes com alguma vulnerabilidade social, dessa forma a escola de ensino médio pode estabelecer uma oportunidade ímpar de orientação para a vida comunitária e política, econômica e financeira, cultural e desportiva (BRASIL, 2002).

Neste documento o ensino de Matemática é dividido em três eixos: álgebra – números e funções; geometria e medidas e; análise de dados. Especificamente no eixo da álgebra – números e funções é possível encontrar orientações para o ensino dos números complexo, porém “os objetos de estudo são os campos numéricos dos números reais e, eventualmente, os números complexos e as funções e equações de variáveis ou incógnitas reais" (BRASIL, 2002, p. 120). O que leva a flexibilização dos números complexos, conforme explicita o PCN+, é que:

> A Matemática do ensino médio trata da ampliação do conjunto numérico, introduzindo os números complexos. Como esse tema isolado da resolução de equações perde seu sentido para os que não continuarão seus estudos na área, ele pode ser tratado na parte flexível do currículo das escolas. (Brasil, 2002, p. 122).

A despretensão pelo ensino dos números complexos frente aos demais conjuntos estudados é pelo fato de que "a criação dos números complexos não se deve a nenhum problema do cotidiano das pessoas, mas sim a necessidade de dar um significado a soluções de equações onde apareciam raízes quadradas de números negativos" (BRASIL, 2006a, p. 25). Em 2006, as orientações curriculares para o ensino médio ratificam a importância da ampliação dos conjuntos numéricos, mas ao invés de utilizar o termo "eventualidade" coloca-os como tema complementar, conforme destacado:

> [...] Devem ser apresentados como uma histórica necessidade de ampliação do conjunto de soluções de uma equação, tomando-se, para isso, uma equação bem simples, a saber, $x^2 + 1 = 0$.
> [...] Outro tópico que pode ser tratado como tema complementar é o estudo mais aprofundado dos números complexos. Por um lado, podem-se explorar os aspectos históricos da introdução dos números complexos e de seu papel fundamental no desenvolvimento da álgebra. Por outro lado, podem-se explorar as conexões entre as operações com números complexos e as transformações geométricas no plano. (BRASIL, 2006b, p. 71-94).

Diante do exposto, uma análise sobre a abordagem dos números complexos nos livros didáticos se faz necessário para averiguar como se reverberam as orientações destes documentos oficiais. Assim, fez-se a escolha de três livros didáticos que foram distribuídos pelo PNLD nos anos de 2006, 2009 e 2013. As obras são de autores e editoras diferentes e foram analisadas sob os seguintes critérios:

- Qual o conteúdo precedente aos números complexos?
- Qual a motivação inicial apresentada na introdução do capítulo?
- Como estão organizados os tópicos do conteúdo?
- Quais definições que envolvem os números complexos foram apresentadas?
- Utiliza ou propõe atividades que envolve o uso de tecnologias digitais?

Os critérios escolhidos serão elencados a seguir e, ao final da descrição das três obras, será feita uma análise conjunta da abordagem dos números complexos.

Iniciando por ordem cronológica com a obra de Paiva (2004)[8] publicada pela editora Moderna, contendo 217 páginas das quais 26 se remetem ao conteúdo dos números complexos e é precedido pelo capítulo intitulado Lugar Geométrico. O autor inicia o assunto relembrando os conjuntos numéricos já estudados, partindo dos naturais até os reais e na primeira página já define a unidade imaginária no registro algébrico da seguinte forma:

$$i^2 = i \cdot i = -1$$

E, logo após já enuncia os números complexos na sua forma algébrica, onde o conjunto dos números complexos é indicado por $\mathbb{C}$, isto é:

$$\mathbb{C} = \{a + bi, com\ a\ e\ b\ reais\}$$

O assunto é organizado em dois capítulos, sendo que o primeiro retrata os seguintes tópicos: número complexo; operações elementares com números complexos; potências de números complexos com expoente inteiro; representação geométrica do conjunto dos números complexos e; módulo de um número complexo.

O primeiro capítulo se dedica a estudar os números complexos na sua forma algébrica apresentando as propriedades existentes para esse novo conjunto numérico e sugere no final do capítulo uma leitura sobre aplicação dos números complexos na geometria dos fractais, conforme ilustrado na figura 8.

[8] Livro do PNLEM (Programa Nacional do Livro Didático para o Ensino Médio), 2006.

Figura 8: Historicização apresentada em Paiva (2004)

Descoberta ou criação?

Os objetos matemáticos existem concretamente ou são apenas idealizações mentais? Um exemplo notável que pode ajudar a responder a essa questão é o **conjunto de Mandelbrot**. O matemático americano-polonês Benoit Mandelbrot foi o primeiro cientista a estudar as estranhas estruturas às quais deu o nome de **fractais**.

Ao iniciar o estudo dessas estruturas, Mandelbrot não tinha a concepção prévia do que seria um fractal.

Quando as primeiras imagens de seu trabalho apareceram na tela do computador, ele achou que as estruturas imprecisas que via eram provocadas por um defeito da máquina. Descobriu, contudo, que aquelas figuras tinham existência própria, jamais conhecida e tampouco elaborada por algum ser humano.

Para um matemático, a construção de um fractal é simples. Por exemplo, consideremos a seqüência de infinitos números complexos $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$, em que $a_1 = 0$, $a_2 = c$ e $a_{n+1} = (a_n)^2 + c$, para $n \geqslant 2$ e c um número complexo fixo. Cada número c determina uma seqüência:

- quando $c = 0$, temos a seqüência $(0, 0, 0, \ldots)$;
- quando $c = \mathrm{i}$, temos a seqüência $(0, \mathrm{i}, \mathrm{i} - 1, -\mathrm{i}, \ldots)$;
- quando $c = 1$, temos a seqüência $(0, 1, 2, 5, 26, \ldots)$.

Fractal *Magnificent*

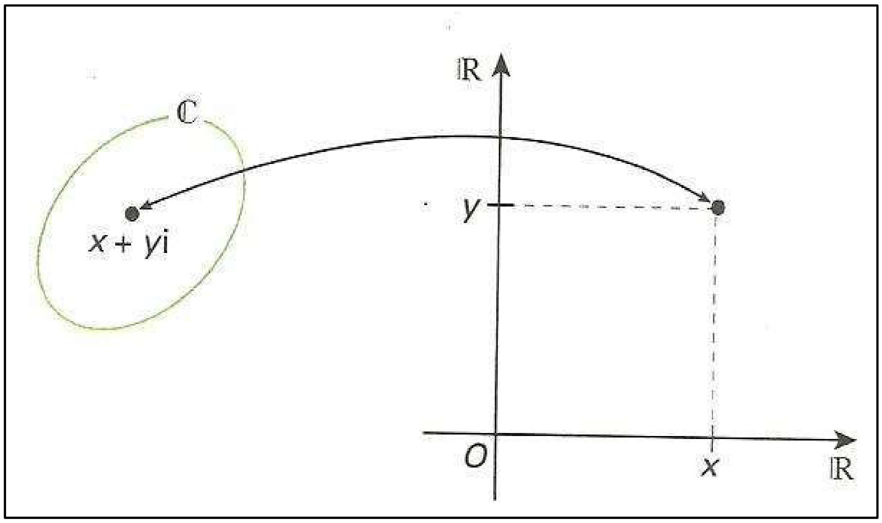
Para certos valores de c, todas as imagens dos termos da seqüência no plano de Argand-Gauss ficam limitadas por uma determinada distância à origem $O(0, 0)$; e para outros valores de c as imagens dos termos da seqüência no plano de Argand-Gauss se distanciam indefinidamente da origem O. Por exemplo, a distância entre a imagem de cada termo da seqüência $(0, 0, 0, \ldots)$ e a origem O é zero; a distância entre a imagem de cada termo da seqüência $(0, \mathrm{i}, \mathrm{i} - 1, -\mathrm{i}, \ldots)$ e a origem O é no máximo $\sqrt{2}$; as imagens dos termos da seqüência $(0, 1, 2, 5, 26, \ldots)$, por sua vez, se distanciam indefinidamente da origem O. Um fractal é a região do plano determinada por todos os números c para os quais os módulos dos termos da seqüência permanecem limitados.

Fonte: Paiva, 2006, p.108.

.

Ainda nesse capítulo, não há sugestões para a utilização de recursos digitais e, de um ponto de vista semiótico apenas uma conversão é mostrada (Figura 9), onde cada número complexo $x + yi$ corresponde a um afixo no plano complexo.

Figura 9: Conversão da representação algébrica para a gráfica em Paiva (2004)



Fonte: Paiva, 2006, p.104.

Partindo para o segundo capítulo chamado de "Forma trigonométrica de um Número Complexo" são abordados os seguintes tópicos: coordenadas polares no plano complexo; argumento de um número complexo; forma trigonométrica de um número complexo; operações na forma trigonométrica e; resolução de equações do 2º grau em complexos.

No primeiro tópico tem-se uma conversão da representação polar de um número complexo na representação algébrica, utilizando as relações seno e cosseno no triângulo retângulo. Após a conversão, o autor explana como é encontrado o argumento de um Número Complexo, definindo da seguinte forma:

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Em seguida, relaciona que todo número complexo na forma $z = a + bi$ pode ser escrito na forma $z = \rho(\cos\phi + i \cdot sen\ \phi)$ que é chamada de forma trigonométrica ou forma polar.

Em outro tópico, dedicado às operações com números complexos na forma polar, são abordados a multiplicação, a divisão, a potenciação e radiciação. Apenas a multiplicação e a divisão são demonstradas gerando os seguintes teoremas apresentados:

Se $z = \rho(cos \quad + i \cdot sen\ \phi)$ e $w = \beta(cos \quad + i \cdot sen\ \alpha)$ são as formas trigonométricas dos complexos z e w, então:

$$zw = \rho\beta[c \quad (\phi + \alpha) + i \cdot sen(\phi + \alpha)]$$

Se $z = \rho(cos \quad + i \cdot sen\ \phi)$ e $w = \beta(cos\, \alpha + i \cdot sen\ \alpha)$ são as formas trigonométricas dos complexos z e w, então:

$$\frac{z}{w} = \frac{\rho}{\beta}[cos(\phi - \alpha) + i \cdot sen(\phi - \alpha)]$$

Na potenciação, são realizados cálculos com potências pequenas para constatar que o módulo se eleva na mesma potência, enquanto o argumento é multiplicado pelo valor da potência. É dito que estas observações podem ser generalizadas num teorema no qual foi o matemático francês Abraham de Moivre que demonstrou:

Se $z = \rho(cos \quad + i \cdot sen\ \phi)$ é a forma trigonométrica do número complexo z e n é um inteiro, então:

$$z^n = \rho^n(cos\, n\phi + i \cdot sen\ n\phi)$$

A última operação abordada foi a radiciação, entrando diretamente com a seguinte definição:

Sejam z e w números complexos e n um número inteiro positivo, tal que:

$$w^n = z$$

Nessas condições, o número w é raiz n-ésima de z.

A segunda lei de Moivre não é apresentada, apenas uma interpretação geométrica das raízes, onde as imagens das raízes n-ésimas no plano Argand-Gauss são vértices do polígono regular de n vértices cujo centro é a origem do plano complexo.

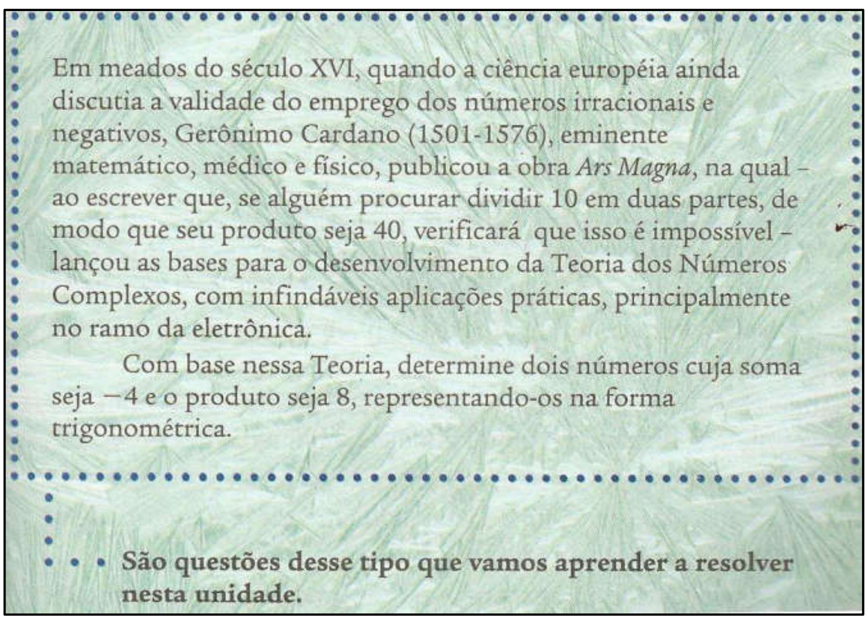
O último tópico, sobre a resolução de equações do segundo grau em complexos, trabalha as soluções de equações do segundo grau com discriminante negativo no universo dos complexos, aplicando na resolução de alguns exercícios e finaliza o capítulo apresentando uma leitura sobre a história dos números imaginários conforme Anexo A.

A segunda obra analisada intitulada “Matemática Completa” de Giovanni e Bonjorno (2005)[9] apresenta os números complexos precedido do capítulo da Geometria Analítica: cônicas, das suas 400 páginas são dedicadas 28 para o ensino dos números complexos. O assunto é divido em 5 seções abordando os seguintes tópicos: o número i; forma algébrica de um número complexo; operações com complexos na forma algébrica; forma trigonométrica de um número complexo e; operações com complexos na forma trigonométrica.

Já na primeira página o autor elenca alguns fatos históricos da obra Ars Magna (Anexo B) de Cardano (1501-1576) e levanta uma questão (Figura 10) para ser resolvida ao longo do capítulo. Assim, o tópico sobre o número i é enfatizado um viés histórico e definido a unidade imaginária:

$$i^2 = -1$$

Figura 10: Introdução do conteúdo de números complexos Giovanni e Bonjorno (2005)



Em meados do século XVI, quando a ciência européia ainda discutia a validade do emprego dos números irracionais e negativos, Gerônimo Cardano (1501-1576), eminente matemático, médico e físico, publicou a obra *Ars Magna*, na qual – ao escrever que, se alguém procurar dividir 10 em duas partes, de modo que seu produto seja 40, verificará que isso é impossível – lançou as bases para o desenvolvimento da Teoria dos Números Complexos, com infindáveis aplicações práticas, principalmente no ramo da eletrônica.

Com base nessa Teoria, determine dois números cuja soma seja −4 e o produto seja 8, representando-os na forma trigonométrica.

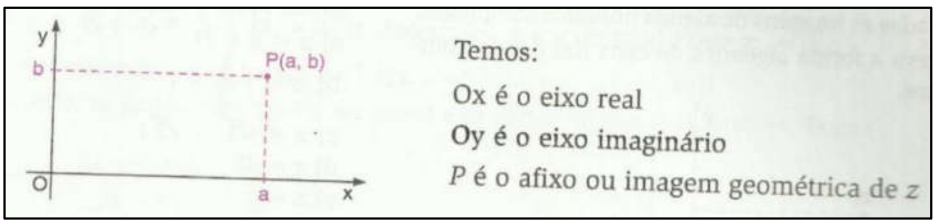
São questões desse tipo que vamos aprender a resolver nesta unidade.

Fonte: Giovanni e Bonjorno, 2005, p. 135.

9 Livro do PNLEM (Programa Nacional do Livro Didático para o Ensino Médio), 2009.

No tópico seguinte é mostrada a forma algébrica de um número complexo, indicando da seguinte forma: $z = a + bi$, sendo a a parte real $Re(z)$ e b a parte $Im(z)$. Seguidamente é apresentado a representação do número complexo como afixo no plano Argand-Gauss (Figura 11), a noção do conjunto dos complexos $(\mathbb{C})$ aparece logo abaixo do plano complexo e, ainda nesse tópico, são apresentados a igualdade de números complexos (na forma algébrica) e o conjugado de um número complexo (na forma algébrica).

Figura 11: Representação no plano Argand-Gauss



Fonte: Giovanni e Bonjorno, 2005, p. 139.

As operações com números complexos na forma algébrica são apresentadas somente na forma algébrica, ou melhor, não são abordadas as operações por meio das transformações no plano complexo. Segue as fórmulas para as operações:

Seja $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$ temos

$$z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

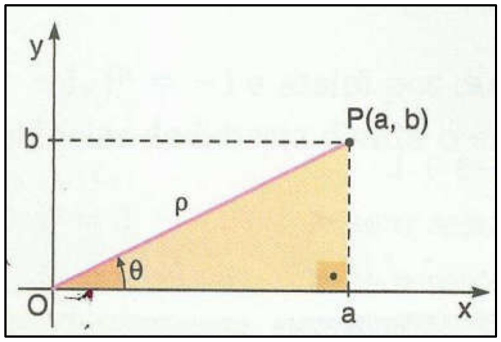
$$z_1 - z_2 = (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

$$z_1 \cdot z_2 = (a + bi) \cdot (c + di) = (ac - b \quad) + (ad + bc)i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}}$$

No tópico 4 é abordado a forma trigonométrica, apresentando as seguintes estruturas na (Figura 12):

Figura 12: Representação polar no plano complexo



Fonte: Giovanni e Bonjorno, 2005, p. 148.

Do triângulo acima, são destacadas as seguintes estruturas:

$$\rho^2 = a^2 + b^2 \rightarrow \rho = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$|z| = |a + bi| = \rho$$

$$\theta = \arg(z)$$

$$\cos(\theta) = \frac{a}{\rho} \qquad e \qquad \sin(\theta) = \frac{b}{\rho}$$

Após extrair essas relações apresenta-se a conversão da representação algébrica binomial para a representação algébrica na forma trigonométrica:

$$z = \rho(cos\theta + i \cdot sin\theta)$$

No final desse tópico é mostrado as operações geométricas com vetores (Anexo C) enfatizando que a multiplicação de um vetor pela unidade imaginária ocasiona uma rotação de 90^o no sentido anti-horário.

O último tópico aborda as operações trigonométricas, onde são apresentadas as demonstrações da multiplicação e divisão de números complexos na forma trigonométrica, já as operações de potenciação e radiciação apenas a fórmula é mostrada e, na resolução de exemplos a representação geométrica das raízes são representadas no plano complexo.

A última obra analisada intitulada “Matemática - contextos & aplicações” de Dante (2013) retrata os números complexos em 24 páginas distribuídas nas seguintes seções: Retomando: conjuntos numéricos; Conjunto dos números complexos; Conjugado de um número complexo; Divisão de números complexos; Representação geométrica dos números complexos; Módulo de um número complexo; Forma trigonométrica dos números complexos e; Aplicação à Geometria. Precedido pelo conteúdo de Geometria Analítica a obra contém 344 páginas.

Na página de abertura do capítulo o autor sugere um assunto opcional (Anexo D) que mostra um pouco da história dos números imaginários, citando famosos matemáticos que contribuíram com estudos nessa área, são eles: Girolamo Cardano, Johann Carl Friedrich Gauss, Leonard Euler, entre outros. Especificamente na primeira seção é retomado os conjuntos numéricos, partindo dos naturais até os reais e, para averiguar a insuficiência dos reais são apresentadas equações de segundo grau com discriminante negativo, cujas soluções são vazias. A partir dessa constatação, apresenta-se na próxima seção o conjunto dos números complexos, definindo a forma algébrica ou forma binomial.

$$z = a + bi \quad (a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \; e \; i^2 = -1)$$

Ainda nessa seção são apresentadas as classificações dos números complexos como reais, imaginários e imaginários puros. As operações na forma algébrica são tomadas como intuitivas e nos exercícios resolvidos aborda-se as potências da unidade imaginária.

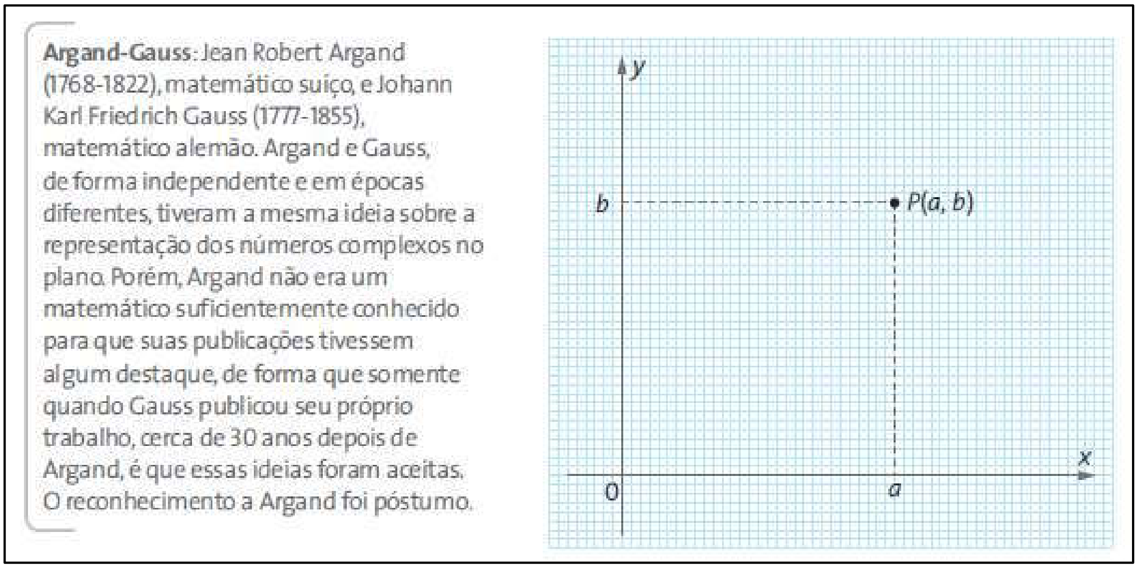
Nas duas seções seguintes apresentam-se o conjugado de um número complexo na forma algébrica e a divisão de dois números complexos utilizando o conceito anteriormente estudado.

$$z = a + bi \rightarrow \bar{z} = a - bi$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \overline{z_2}}{z_2 \overline{z_2}}$$

Após isso, são apresentadas graficamente as representações geométricas dos conceitos estudados até o momento; a seção intitulada “Representação Geométrica dos números complexos” inicia apresentando a história por traz do plano complexo e associa um número complexo a um ponto nesse plano (Figura 13).

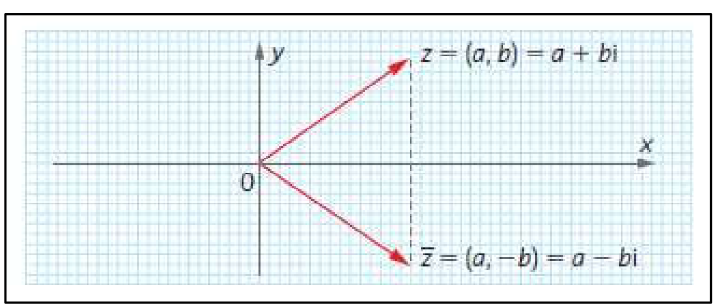
Figura 13: Representação geométrica de um número complexo



Fonte: Dante, 2013, p.151.

Ainda nessa seção é feita uma interpretação geométrica do conjugado (Figura 14) como elemento simétrico em relação ao eixo x.

Figura 14: Conjugado de um número complexo

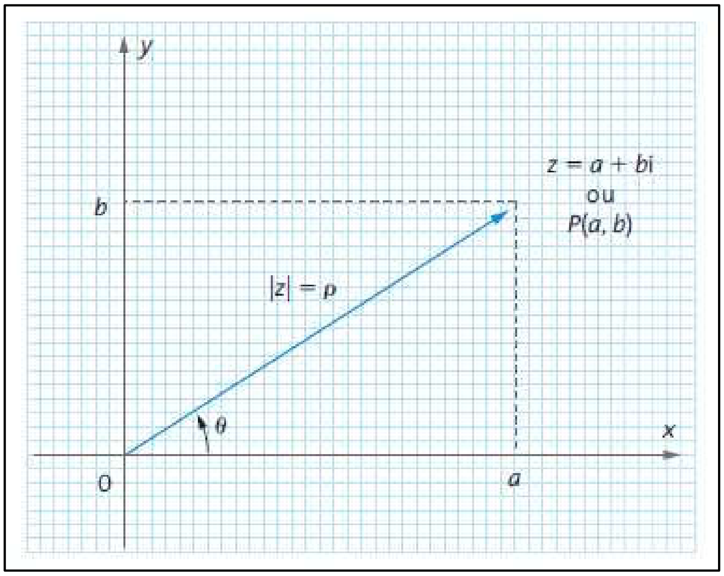


Fonte: Dante, 2013, p.152.

Na penúltima seção aborda-se a forma trigonométrica dos números complexos, mostrando graficamente (Figura 15) as unidades que compõe essa nova representação que pode ser chamada de forma trigonométrica ou polar.

$$z = |z|(\cos\theta + i \cdot sin\theta)$$

Figura 15: Representação polar em Dante (2013)



Fonte: Dante, 2013, p. 154.

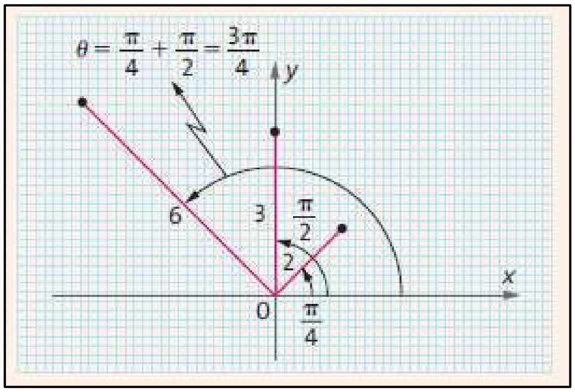
Quanto as operações que podem ser apresentadas na forma polar o autor trata da multiplicação, divisão, potenciação e radiciação. Tanto na multiplicação como na divisão são demonstradas as fórmulas, tomando $z_1 = |z_1|(cos\theta_1 + i \cdot sin\theta_1)$ e $z_2 = |z_2|(co \quad {}_2 + i \cdot si \quad {}_2)$ tem-se:

$$z_1 z_2 = |z_1||z_2|[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \cdot \sin(\theta_1 - \theta_2)]$$

Na resolução de um exercício o autor faz a interpretação da multiplicação na forma trigonométrica (Figura 16) com transformações no plano.

Figura 16: Multiplicação na forma polar de um número complexo



Fonte: Dante, 2013, p.158.

São apresentadas a primeira e a segunda fórmula de De Moivre para o cálculo de potências e raízes de números complexos na forma polar, são elas:

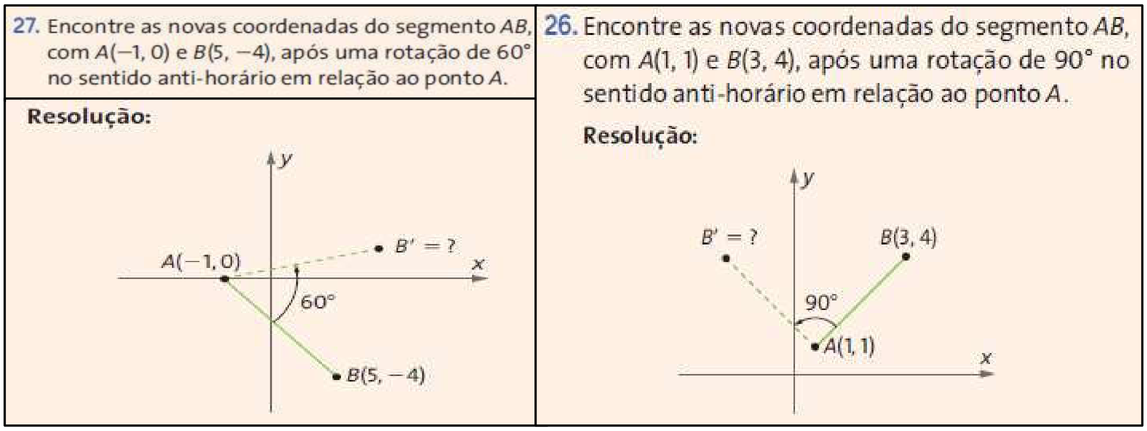
$$z^n = |z|[\cos(n\theta) + i \cdot \sin(n\theta)]$$

$$\omega_k = \sqrt[n]{|z|}\left[cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i \cdot sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right]$$

Além disso, é dito que geometricamente as n raízes são vértices de um polígono regular de n lados.

Na última seção que visa aplicação na geometria são propostos exercícios que utilizam os números complexos para rotações no plano, conforme ilustrados na figura 17.

Figura 17: Rotações no plano complexo



Fonte: Dante, 2013, 165.

Finalizado a descrição dos principais tópicos abordados nas obras fez-se uma análise sob o ponto de vista semiótico (registros de representação) e, também os recursos tecnológicos utilizados.

Em todas as obras os números complexos aparecem precedidos dos tópicos que discorrem sobre a Geometria Analítica, assunto este trabalhado geralmente no terceiro ano do ensino médio. A história dos números complexos é abordada tanto como motivação inicial do capítulo ou como leitura complementar. Cabe destacar na obra de Dante (2013) a utilização das transformações geométricas para trabalhar rotações no plano complexo.

Os registros de representações que aparecem com maior frequência são os de caráter algébrico e gráfico. Além disso, as obras não apontam uso de Tecnologias Digitais (TD) para articular as diferentes representações, nem mesmo para a própria visualização no plano complexo. Dessa forma, a escolha pelo uso de *softwares* de Matemática Dinâmica fica a cargo do professor, bem como, a pesquisa em como utilizá-los em sala de aula.

4.3 O que apontam as pesquisas? Um breve estado do conhecimento

A fim de verificar as nuances das pesquisas brasileiras que discorrem sobre a temática dos Números Complexos, fez-se um levantamento das principais pesquisas em nível de pós-graduação *strictus sensu* no banco de Teses e Dissertações CAPES[10].

Para garimpar os trabalhos que melhor conversam com a presente pesquisa foram escolhidas as seguintes palavras-chave: (i) **números complexos,** devido a especificidade do conteúdo elegido para este estudo; (ii) **semiótica**, referente a uma das teorias que fundamenta esta pesquisa e; (iii) **dinâmico (a)**, para abarcar as pesquisas que utilizam algum ambiente de geometria dinâmica ou que faz menção aos registros dinâmicos de representação que está contemplado nas sequências didáticas desta investigação, sendo essa última palavra opcional.

Além dos termos de busca utilizados foi estabelecido um recorte temporal no período de 2010 a 2017 (ano que se fez o presente estado do conhecimento), totalizando 4 (quatro) trabalhos, que estão dispostos em ordem cronológica no quadro 6.

Quadro 6: Relação dos trabalhos que compõe o estado do conhecimento

Autor(a)	**Título**	**Ano**	**IES**	**(T)ese (D)issertação**
Oliveira	Números Complexos - um estudo dos registros de representação e de aspectos gráficos	2010	PUC – SP	D
Monzon	Números complexos e funções de variável complexa no ensino médio uma proposta didática com uso de objeto de aprendizagem	2012	UFRGS	D
Amorim	O estudo dos números complexos no ensino médio: uma abordagem com a utilização do Geogebra	2014	UFSCAR	D
Contini	Um diagnóstico da aprendizagem das conversões de registro, no caso dos Números Complexos	2016	UNIAN	D

Fonte: Elaborado pelo pesquisador, 2018.

Com intuito de conhecer o perfil das pesquisas selecionadas fez-se um breve relato de cada trabalho destacando os seguintes pontos que interessam a essa pesquisa, são eles:

- Como a teoria dos Registros de Representação Semiótica fora articulada com a pesquisa?
- Qual metodologia de pesquisa foi empregada?

[10] CAPES - Disponível em: <https://catalogodeteses.capes.gov.br>. Acesso em:12 de dezembro de 2018.

- Qual a profundidade com que os ambientes de geometria dinâmica foram utilizados?
- Qual(is) objetivo(s) elencado(s)?
- Principais conclusões apontadas ao fim da pesquisa.

Oliveira (2010) aplicou uma sequência didática explorando os aspectos gráficos dos números complexos juntamente com função de variável complexa, tomando por referências autores franceses com os Registros de Representação Semiótica, de Raymond Duval e a Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau junto com a metodologia da Engenharia Didática de Artigue. Desse modo, o autor teve por objetivo investigar se a abordagem dos números complexos, com ênfase nos aspectos gráficos corresponderia a uma aprendizagem mais significativa.

Em suma, foram fortemente utilizadas as transformações no plano para evidenciar as relações entre as representações nos registros algébrico e gráfico. Utilizou-se da teoria de Duval para apontar como o pensamento matemático por detrás desse conteúdo pode ser clarificado em situações de ensino.

Ainda que o ambiente de geometria dinâmica fora explorado com profundidade, alguns recursos dinâmicos não foram abordados. Por fim, a pesquisa ressaltou que há possibilidades de se resgatar um ensino expressivo e uma aprendizagem significativa para os números complexos, desde que se promova a articulação entre os registros de representação desses números.

Monzon (2012) apresentou uma proposta para o ensino de números complexos e funções de variável complexa por meio de Objetos de Aprendizagem. A autora propôs analisar uma sequência didática para o ensino dos números complexos, fundamentou-se nas teorias interacionista e construtivista. Dedicou a escrita em parte para relacionar os conceitos da teoria de Duval com as tecnologias digitais, enunciando os objetos "concretos-abstratos" que corroboram com ferramentas de mediação semiótica.

Tal mediação se preocupa na utilização dos recursos digitais para além da simples visualização; a autora observa que ao manipular um recurso digital o estudante constrói significados diferentes e individuais que merecem atenção no processo de aprendizagem. É notória a utilização de recursos dinâmicos no ambiente escolhido na elaboração dos objetos de aprendizagem. A pesquisa também procedeu aplicando uma engenharia didática que permitiu integrar o uso do objeto de aprendizagem "Números Complexos" e, a decorrência deste trabalho, resultou em Objetos de Aprendizagem na forma de animações interativas, vídeos, entre outros.

O trabalho de Amorim (2014) teve como objetivo viabilizar o estudo do conteúdo de números complexos na Educação Básica, enfocando um contexto geométrico utilizando o *software* Geogebra. O percurso teórico se fundamentou nos registros de representação semiótica de Raymond Duval, juntamente com uma análise de documentos curriculares para o Ensino Médio no estado de São Paulo. As principais ideias da teoria foram exemplificadas a partir do conteúdo em estudo, com uma análise do teor semiótico presente nos documentos curriculares. E, também fez uso dos pressupostos da Engenharia Didática.

Além de viabilizar as tarefas para os estudantes do ensino médio (a autora não chamou de sequências de ensino), ela também buscou aplicar atividades no ensino superior. Segundo autora, o foco das atividades no ensino superior serviu de base para responder uma das questões de investigação, como por exemplo – *Que saberes sobre números complexos, alunos do Ensino Superior trazem como bagagem do Ensino Médio*?

Os resultados obtidos na pesquisa apontaram o seguinte: (a) no ensino superior os conhecimentos dos alunos são ínfimos em relação a necessidade daqueles que seguirão seus estudos, no campo das exatas. Já na educação básica a utilização do GeoGebra revelou-se eficiente para uma visualização geometrizada do conteúdo em relação a construção de seus conceitos.

Contini (2016) se interessou em desenvolver uma pesquisa diagnóstica sobre a aprendizagem da passagem entre os registros gráfico, algébrico e da língua materna, no caso dos números complexos. O autor fez também a utilização dos registros de representação semiótica para analisar as produções dos estudantes do terceiro ano do ensino médio. Além das transformações semióticas muito evidenciadas pelos pesquisadores que utilizam esta teoria, Contini (2016) introduziu uma análise sobre os casos de congruência e não-congruência entre os registros de representação utilizados para representar os números complexos.

O autor optou por não analisar as transformações para o registro trigonométrico. Embora tenha mobilizado representações no registro gráfico, utilizou-se do GeoGebra apenas para construção e ilustração de questões. Ou seja, em nenhum momento os estudantes manipularam representações nesse ambiente e, por consequência, o estudo não evidenciou de que forma o ambiente de geometria dinâmica contribui na aprendizagem.

Realizou-se a construção de várias tabelas que mostraram quantitativamente quais conversões eram mais recorrentes e quais delas os estudantes tinham dificuldade de articular. Ao final da pesquisa foi relatado que as conversões para o registro gráfico evidenciaram uma preocupação devido às dificuldades encontradas e, que dessa forma, uma abordagem mais contundente dos números complexos valorizando aspectos gráficos se faz necessário.

Ao findar este estado do conhecimento verifica-se que o conteúdo dos números complexos conversa com diferentes esferas da Educação Matemática, seja pela sua importância história e científica, pelas teorias de aprendizagem que explicam as dificuldades encontradas e, também, pelos recursos tecnológicos digitais que podem oferecer outra via aos obstáculos enfrentados na *práxis*.

Além disso, com a revisão desses trabalhos justifica-se que as representações do registro gráfico configuram parte importante no entendimento deste assunto pelos estudantes. A partir disso, o presente trabalho que vislumbra verificar **como o ambiente de geometria dinâmica interfere na abordagem dos números complexos quando se mobilizam distintas representações semióticas em situações de ensino**, também se preocupa em compreender, estudar e apontar rumos que amenizem os problemas concernentes ao ensino e aprendizagem das principais representações semiótica dos números complexos.

5. UMA ENGENHARIA DIDÁTICA NO ENSINO DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Para as pesquisas que pretendem de algum modo investigar a aprendizagem com vistas a constituir propostas didáticas, há encaminhamentos específicos como a Engenharia Didática que se caracteriza, segundo Pais (2015), num formato particular que organiza e sistematiza os procedimentos e técnicas de pesquisas em didática da matemática. A pesquisadora francesa Michèle Artigue (1995) foi quem idealizou e desenvolveu estudos para formular a teoria e a metodologia conhecida mundialmente como Engenharia Didática, segundo a autora recebe esse nome pois:

> Equiparable con el trabajo del ingeniero quien, para realizar un proyecto determinado, se basa en los conocimientos científicos de su dominio y acepta someterse a un control de tipo científico. Sin embargo, al mismo tiempo, se encuentra obligado a trabajar con objetos mucho más complejos que los objetos depurados de la ciencia y, por lo tanto, tiene que abordar prácticamente, con todos los medios disponibles, problemas de los que la ciencia no quiere o no puede hacerse cargo. (ARTIGUE, 1995, p. 33-34).

É uma metodologia complexa que pode assumir duas perspectivas, a primeira é tomando-a como metodologia de pesquisa e, para isso, alguns autores a definem como técnica de pesquisa; e a segunda é pela especificidade das realizações didáticas que são inerentes na sua abordagem, tornando-a em parte uma metodologia de ensino. Contudo, aplica-se uma engenharia didática quando os estudos teóricos não são mais suficientes para responder a determinado problema ou fenômeno, isto é, a busca de novas informações e dados é obtida pela experimentação. Logo, tem pressupostos metodológicos de uma pesquisa de procedimento experimental com intervenções didáticas diretas em sala de aula pelo professor-pesquisador (ALMOULOUD, 2007). Difere-se das demais metodologias, pois Artigue (1995) argumenta que:

> De hecho, las investigaciones que recurren a la experimentación en clase se sitúan por lo general dentro de un enfoque comparativo con validación externa, basada en la comparación estadística del rendimiento de grupos experimentales y grupos de control. Este no es el caso de la ingeniería didáctica que se ubica, por el contrario, en el registro de los estudios de caso y cuya validación es en esencia interna, basada en la confrontación entre el análisis a priori y a posteriori. (ARTIGUE, 1995, p. 37).

Como dito, a validação dos resultados não ocorre por meio de comparações ou cruzamento de referências externas (podendo realizar), apenas uma comparação interna entre as suas diferentes fases de execução. As fases para execução da pesquisa compõem diferentes aspectos que envolvem o conteúdo das realizações didáticas: análises preliminares, análises *a priori*, experimentação e análises *a posteriori*.

A primeira fase nominada de análises preliminares é composta por revisões teóricas que visam fundamentar as realizações didáticas com o objeto da pesquisa. Estas revisões podem assumir dimensões epistemológicas, cognitivas e didáticas que, segundo Artigue (1995), no plano epistemológico prima-se pelas características dos saberes que envolvem o conteúdo, o plano cognitivo diz respeito às características dos participantes da pesquisa e o aporte teórico elegido e, no plano didático são evidenciados os aspectos que serão observados nas realizações didáticas propostas.

Na segunda fase, análises *a priori*, são tomadas as variáveis que serão condicionadas na pesquisa, para isso, na elaboração das sequências didáticas são descritos os objetivos da realização didática em jogo, consequentemente, hipóteses surgirão para serem confrontadas na última fase, atestando e validando os objetivos.

A experimentação (terceira fase) é o momento de implementar o que teoricamente foi planejado e conjecturado em sala de aula e, embora as fases sejam taxadas, elas podem sofrer revisões e adendos durante a fase, pois na prática algumas situações desencadeiam perspectivas que as sequências posteriores não abarcam.

E, por fim, a fase da análise *a posteriori* confronta o produto das sequências didáticas com as hipóteses levantadas e, verificando nas observações e registros realizados durante a fase da experimentação, pode-se validar ou não as hipóteses da análise *a priori*, bem como, relevar as dificuldades encontradas na execução da pesquisa. Cada uma dessas fases será detalhada em consonância com o objeto e conteúdo da pesquisa. Dessa forma, as próximas duas subseções deste capítulo apresentam as três primeiras fases e, nos próximos capítulos uma análise *a posteriori* de cada atividade é realizada juntamente com a validação que se encontra nas considerações finais.

5. 1 Análises preliminares

Para descrever e organizar os tópicos levantados nesta fase da engenharia didática o pesquisador deve ressaltar e analisar as dimensões que cercam o objeto da pesquisa e, se tratando de pesquisas voltadas para área da educação podem ser abordadas, como dito anteriormente, as dimensões epistemológicas, cognitivas, didáticas, entre outras. Uma vez que o objeto visa investigar como os ambientes de geometria dinâmica interferem na mobilização dos registros de representação semióticas no ensino dos números complexos, torna-se necessário discutir como este assunto se comporta enquanto saber científico e como é transposto em um saber escolar (estudo epistemológico), que já fora abordado no capítulo anterior. A dimensão cognitiva que está contemplada e embasada na teoria de Duval fora dissertada no capítulo 2 e a abordagem didática é encontrada no detalhamento das atividades que são apresentadas na segunda seção deste capítulo. No entanto, é necessário ainda nessa fase, efetuar um levantamento dos participantes da pesquisa bem como o ambiente que em a mesma se desenvolverá. Sendo assim, a próxima subseção aborda tais aspectos.

5.2 Ambiente e participantes da pesquisa

A pesquisa se realizou no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Sul-rio-grandense – IFSul, localizado no estado do Rio Grande do Sul, município de Pelotas. O IFSul é composto por uma rede federal de educação pública, dividida em 14 *campi* por todo estado. Especificamente, o *campus* de Pelotas, onde a pesquisa se desenvolveu, atende em média 4 mil estudantes por ano, distribuídos em diferentes modalidades de ensino. Atualmente, a instituição oferta 16 cursos técnicos de nível médio, 6 cursos superiores de tecnologia e 2 engenharias e 8 cursos de pós-graduação, além de cursos de formação pedagógica e educação a distância.

Para aplicação da pesquisa foram selecionadas duas turmas (A e B) de dois cursos técnicos diferentes: a turma A composta por 27 alunos e a turma B por 22 alunos. Cada semestre é dividido em duas etapas, sendo que o conteúdo de números complexos é visto no segundo semestre, na etapa 2, do primeiro ano do ensino médio. No total são 4 aulas de matemática semanais, cada aula com 50 minutos e, o tempo reservado para o ensino dos números complexos e para aplicação da pesquisa serão de nove semanas incluindo os procedimentos avaliativos.

Para a descrição geral das turmas foram realizadas observações *in loco* de 16 aulas (8 em cada turma), nestas aulas os professores abordaram o assunto de Trigonometria, perpassando os seguintes tópicos:

- triângulos retângulos;
- circunferência trigonométrica;
- relações trigonométricas fundamentais;
- equações trigonométricas;
- operações com arcos;
- funções trigonométricas.

Segundo relatos dos professores, os estudantes possuem em sua maioria bom desempenho nos conteúdos que foram trabalhados até o momento, além disso, os professores dedicam 2 horas semanais para auxiliar os estudantes e, também, são ofertadas monitorias semanais com estudantes-monitores.

Por fim, as salas de aula são equipadas com apenas um quadro branco, telões para projeção e ar-condicionado, os professores têm à disposição lousas digitais portáteis e dois laboratórios de informática. Partindo destas observações, o planejamento das sequências didáticas da presente pesquisa adequou-se aos recursos disponíveis dentro da ementa prevista pela instituição.

5.3 Concepção e análises a priori

Nesta seção apresenta-se a sequência de ensino elaborada para aplicação *in loco*, sendo que a mesma contém uma descrição de cada atividade seguida da análise *a priori*, onde serão expostos os objetivos e as hipóteses levantadas de acordo com as considerações preliminares realizadas. A mesma se divide em 6 atividades que visam evidenciar o cenário que interessa à pesquisa, no entanto, cabe destacar que estas atividades estão contidas num plano de aula que visa, além de abordar estas atividades, os demais tópicos previstos na ementa do conteúdo. No tocante, segue a descrição das atividades planejadas (cada atividade está dividida por uma subseção) e as análises *a priori* correspondentes.

5.3.1 Representando um “número complexo”

Consiste em entregar aos estudantes dois pedaços de papeis com cores distintas e pedir que num deles escreva um número qualquer e no outro um número complexo.

Análise *a priori* – O objetivo dessa atividade é fazer o aluno perceber que todos os números podem ser classificados como complexos. A atividade foi aplicada com outra turma e se mostrou válida, pois quando se pede para escrever um número complexo os estudantes que ainda não tiveram contato com este conjunto associam a números de outros conjuntos, por exemplos, números irracionais e/ou notações científicas (números com muitos algarismos). Isso acontece por dois motivos: o primeiro é porque o enunciado da atividade foi de maneira intencional ao dizer que os números complexos não são números quaisquer; e o segundo motivo refere-se ao termo “complexo” que é entendido como algo difícil e complicado, levando os estudantes a uma representação pessoal desse número.

No entanto, essa confusão permite ao professor criar uma situação que leve os estudantes a constatar que todos os números são complexos, ao argumentar no final da atividade que todos representaram (caso tenham escrito qualquer número para representar os complexos) de forma correta o que foi solicitado na atividade. Além disso, espera-se com essa atividade enunciar a noção de conjunto numérico aos números complexos e ao mesmo tempo averiguar se os participantes da pesquisa já tiveram contato com a unidade imaginária (i).

Hipótese(s): Almeja-se que os estudantes entendam que os números complexos se referem à um conjunto numérico.

5.3.2 Operando na reta real

Essa atividade consiste em definir o conjunto dos números complexos trabalhando com operações básicas de adição, subtração e multiplicação sobre o eixo real. Na atividade os estudantes, juntamente com o pesquisador, farão uso do GeoGebra, seguindo os seguintes procedimentos:

(i) Fixa-se um ponto no marco zero (A);
(ii) Na janela de visualização esconder o eixo vertical deixando apenas o eixo real visível (eixo das abcissas);
(iii) Plotar dois pontos (B e C) sobre a reta e criar um quarto ponto (D) que seja a soma ou a diferença de B e C;
(iv) Utilizar a ferramenta *mover* para mostrar a variação do ponto D quando B ou C são arrastados sobre a reta.

Para explicar a multiplicação, os seguintes passos:

(i) Fixa-se um ponto no marco zero (A);
(ii) Cria-se um outro ponto móvel (B) juntamente com um controle deslizante "n" variando de -2 a 2;
(iii) Solicitar aos estudantes que digitem no campo de entrada o produto de B por "n" e que movimentem o controle deslizante para observar como se comporta esse novo ponto (C) criado a partir de $B \cdot n$.

Análise *a priori:* No desenvolvimento dessa atividade espera-se que os estudantes percebam que as operações entre números reais se referem ao deslocamento sobre o eixo real. E, especificamente, na multiplicação de um número real por um número negativo pode-se trabalhar tanto com a reflexão em torno da origem como a rotação de 180^o também em relação à origem, ou seja, a multiplicação por (-1) acarreta numa rotação de meia volta. Nesse momento uma pergunta se levanta aos alunos: qual número podemos multiplicar para que o ponto rotacione apenas 90^o? Após os estudantes verificarem que nenhum número real ocasiona uma rotação diferente de 180º enunciar a unidade imaginária (i) solicitando que agora multipliquem por i qualquer ponto da reta real. Com isso, os estudantes têm noção de que os números complexos abrangem outros números que estão fora da reta real. Ao trabalhar com as operações relacionando pontos sobre a reta real o estudante pode evidenciar, comparando as coordenadas do ponto na *janela de álgebra* com a posição do ponto na *janela de visualização*, que os números reais estão associados a pontos na forma $(a, 0), a \in \mathbb{R}$ e, após a multiplicação envolvendo a unidade imaginária tem-se pontos na forma $(0, b)$ $b \in \mathbb{R}$. Desse modo, as unidades significativas no registro algébrico serão colocadas em correspondência com o registro gráfico e, trabalha-se na hipótese de que tal correspondência seja percebida pelo movimento das coordenadas do ponto.

Hipótese(s): (a) entender as operações sobre a reta real; (b) verificar o comportamento da unidade imaginária no plano; (c) perceber a correspondência entre as unidades significativas nas representações apresentadas.

5.3.3 Rotacionando a unidade imaginária

Essa atividade visa articular os seguintes tópicos: potências da unidade imaginária com expoentes inteiros e rotação no plano complexo. Para isso executará os seguintes passos:

(i) Solicitar que os estudantes plotem um ponto (A) no plano e construam um vetor $(\vec{u})$ da origem do plano complexo até o ponto A;
(ii) Criar um controle deslizante (n) com números inteiros de 0 até 30 e criar outro ponto com a seguinte característica $C = A * i^n$.;
(iii) Digitar no campo de entrada a palavra “vetor” e selecionar dentre as opções que aparecerão Vetor (<Ponto Inicial>, <Ponto Final>), no ponto inicial inserir a origem $(0,0)$ e no ponto final o ponto C. Dessa forma, o GeoGebra vai criar um vetor $(\vec{v})$ para cada potência expressa no controle deslizante;
(iv) Habilitar rastro no vetor $(\vec{v})$ e em seguida animar o controle deslizante. Isso permitirá aos estudantes visualizarem a rotação de 90º toda vez que a unidade imaginária multiplica um vetor associado ao ponto A. Solicitar

também que arraste o ponto A para outra posição, a fim de verificar que rotação se mantém independentemente da posição do ponto;

(v) Modificar o controle deslizante englobando também os inteiros negativos, depois de um tempo os estudantes poderão perceber que quando o n for positivo a rotação acontece no sentido anti-horário e, quando n for negativo, no sentido horário. Nesse momento, pedir aos mesmos que tentem explicar operando no ambiente lápis e papel os seguintes questionamentos: (1) Por que o sentido da rotação modificou? (2) Como se calcula algebricamente potências de i com inteiros negativos?

Análise *a priori*: Durante a execução dessa atividade acredita-se que os estudantes consigam relacionar o ciclo gerado pelas potências de i no registro algébrico com as rotações no plano complexo, pois a cada potência de i tem-se uma rotação de 90^o, e para tanto, são então necessárias quatro vezes para voltar ao ponto de partida (uma volta completa). Para responder a segunda pergunta os estudantes podem tomar o ponto A como a representação da unidade imaginária, deslocando-o para $A = (0,1)$. Nesse momento o estudante precisa efetuar um tratamento para verificar que o inverso da unidade imaginária é exatamente o oposto da unidade imaginária, pois:

$$i^{-1} = \frac{1}{i} \cdot \frac{i}{i} = \frac{i}{i^2} = \frac{i}{-1} = -i$$

Dessa forma, para o cálculo de i^{-23} tem-se:

$$i^{-23} = (i^{-1})^{23} = (-i)^{23} = (-1)^{23} \cdot i^{23}$$

Através dessa relação pode-se estabelecer duas definições. Se n é par $i^{-n} = i^n$ e se n for ímpar $i^{-n} = -i^n$. E isso se ratifica quando o estudante percebe analiticamente no ambiente de geometria dinâmica.

Hipótese(s): (a) entender de um ponto de vista gráfico porque existe um padrão nas potências da unidade imaginária com expoentes inteiros; (b) verificar que o inverso da unidade imaginária corresponde ao seu oposto; (c) mostrar utilizando o GeoGebra com calcular potências de i com expoentes inteiro negativos.

5.3.4 Descobrindo a sua personalidade

Descobrindo a sua personalidade tem por objetivo classificar os números complexos em reais, imaginários e imaginários puros. Para isso, utilizar-se-á uma estratégia/brincadeira elaborada pelo pesquisador chamada de 'personalidade dos números complexos', com base no seguinte: efetua-se a soma de i elevado no dia, mês e ano de nascimento dos estudantes, por exemplo, alguém que nasceu no dia 09/08/1994 terá que resolver a seguinte expressão:

$$z = i^9 + i^8 + i^{1994} = i + 1 - 1 = i$$

Se o número complexo resultante for um imaginário puro, conforme o exemplo, se caracteriza como um purista. Para as outras duas variações, caso seja um número real é dito realista e, se for imaginário um(a) sonhador(a). Para aplicação será solicitado que alguns estudantes calculem na lousa suas personalidades e o professor irá classificar em purista, realista ou sonhador(a) sem revelar as características de cada personalidade. Após alguns cálculos os estudantes perceberão que um purista resulta na expressão apenas com a unidade imaginária, os realistas são aqueles que aparecem apenas números reais e os sonhadores devem conter tantos números reais como a unidade imaginária. Em seguida, solicitar que os estudantes definam essas classificações utilizando duas representações: binomial ($z = a + bi$) e gráfica (plano complexo). Por fim, questionar os estudantes se ao longo dos anos a personalidade pode mudar?

Análise *a* priori: Essa atividade visa criar uma situação que leve o aluno a refletir e relacionar diferentes representações dos números complexos, pois para classificação dos números complexos em suas diversas representações é necessário relacionar as unidades significativas de cada representação. No registro algébrico ($z = a + bi$) espera-se que os estudantes definam:

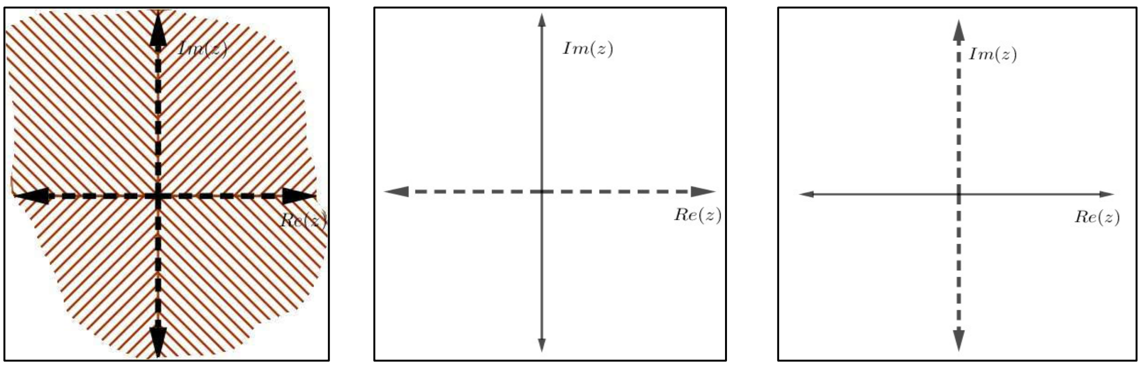
Sonhador → Imaginário → $z = a + bi,$ com $b \neq 0$

Purista → Imaginário puro → $z = a + bi$, com $a = 0$ e $b \neq 0$

Realista → Real → $z = a + bi$, com $b = 0$

Na representação no registro gráfico (Figura 18) têm-se na imagem à esquerda os imaginários, ao meio os imaginários puros e à direita os reais[11].

Figura 18: Representações gráficas da classificação dos números complexos.



Fonte: Elaborado pelo pesquisador, 2018.

Acredita-se que a conversão para a representação gráfica não seja tão óbvia para os estudantes, pois requer um conhecimento prévio sobre como representar as unidades significativas $a \neq 0$ e $b \neq 0$ que estão no registro algébrico binomial para a representação no registro gráfico, tendo então, um problema de dimensão como cita Duval em sua teoria. Nesse momento, será observado como os estudantes utilizam o ambiente de geometria dinâmica para tentar representar a classificação.

E, para responder à pergunta espera-se que os estudantes utilizem o GeoGebra para visualizar todas combinações que podem aparecer, basta criar um controle deslizante com números inteiros compreendidos entre o ano de nascimento e último ano que fez aniversário. No campo de entrada digitar o número complexo na forma $z = i^{dia} + i^{mês} + i^{n}$, em seguida habilitar rastro e arrastrar o controle deslizante. Logo, a pessoa que nasceu na data 09/08/1994 inicialmente é purista,

---

[11] Na figura 18, os pontos sobre os eixos pontilhados não estão contidos nos referidos conjuntos e/ou subconjuntos mencionados.

em seguida se torna realista e nos próximo dois anos sonhador e o ciclo repete (devido ao ciclo das potências de i).

Hipótese(s): reconhecer e classificar os números complexos nos registros de representação gráfica e algébrica.

5.3.5 Operando no plano complexo

Essa atividade contempla as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão de números complexos no registro de representação algébrica e no registro de representação gráfica. Para isso, será empregado um tratamento vetorial aos números complexos representados e as devidas transformações no plano complexo, a fim de relacionar as unidades significativas e visuais de cada registro de representação.

Adição: Após os estudantes verificarem essa operação no registro de representação algébrico será solicitado que:

(i) Escolham dois números complexos (z_1 e z_2), preferencialmente imaginários (não puros), e que digitem no campo de entrada do GeoGebra esses números ou utilize a ferramenta número complexo disponível no menu superior;

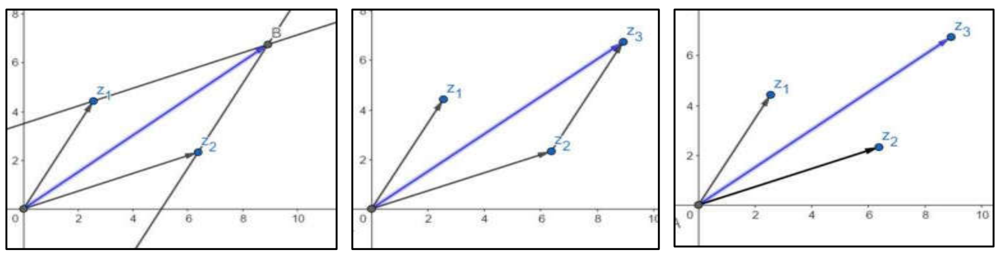
(ii) Utilizar a ferramenta vetor para criar dois vetores, ambos iniciando na origem e terminando nos números complexos plotados;

(iii) Encontrar o vetor soma por translação de três maneiras distintas: (1) utilizando as ferramentas *reta paralela* e *interseção de Dois objetos*, criar uma reta que seja paralela ao vetor de z_1 passando por z_2 e, outra reta paralela ao vetor z_2 passando agora por z_1. Em seguida, com a ferramenta *intersecção de Dois objetos* selecionar as duas retas que foram criadas, por fim criar um vetor da origem até o ponto da intersecção das retas paralelas e, esse vetor representa a soma geométrica de dois números complexos, onde na extremidade do vetor se encontra as coordenadas do número complexo resultante; (2) utilizando a ferramenta vetor a partir de um ponto, basta clicar sobre o vetor de z_1 e selecionar o ponto z_2, dessa forma será transladado o vetor associado a z_1 com origem em z_2 e, esse vetor transladado aponta na direção da soma desses números complexos, basta por fim, criar o vetor resultante partindo da origem até onde aponta vetor transladado; (3) utilizando a ferramenta Translação por um vetor, com a ferramenta selecionada basta escolher um dos números complexos e clicar, em seguida escolha o vetor associado do outro número complexo e clique, assim o vetor será transladado da mesma forma apontando para o número complexo resultante da operação.

Na Figura 19 abaixo segue as três formas de realizar a operação de adição entre números complexos.

F

Figura 19: Adição de números complexos por translação de vetores.

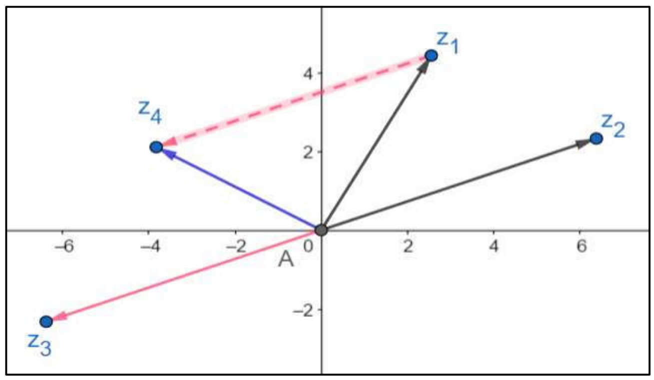


Fonte: Elaborado pelo pesquisador, 2018.

Em seguida mostrar as diferentes formas de operar a adição entre os números complexos e será solicitado que realizem a adição de quatro números complexos, ou seja, $z = z_1 + z_2 + z_3 + z_4$.

Subtração: Para realizar a diferença entre dois números complexos envolvendo transformações no plano serão mostradas duas maneiras, analogamente adição será solicitado que os estudantes plotem dois números complexos, de preferência imaginários (não puros), bem como, seus respectivos vetores. Assim, para efetuar, por exemplo, a diferença entre $z_1 - z_2$ pode-se mostrar de duas maneiras: (1) reescrevendo essa diferença como uma soma do oposto, da seguinte forma, $z_1 + (-z_2)$. Desse modo, será necessário encontrar o vetor oposto de z_2 para em seguida realizar a adição conforme já explanado. O vetor oposto pode ser encontrado pela rotação de 180^o em torno da origem ou pela reflexão em torno da origem. Após encontrar o vetor oposto, basta escolher uma das formas de adição já mostrada e adicionar o vetor z_1 com vetor $z_3 = -z_2$ conforme ilustra a figura 20. Repare que o vetor em azul aponta para o resultado da operação (z_4), o vetor em vermelho é a reflexão de z_2 (ou seja, o oposto) e o vetor vermelho pontilhado a translação do vetor oposto sobre o vetor z_1.

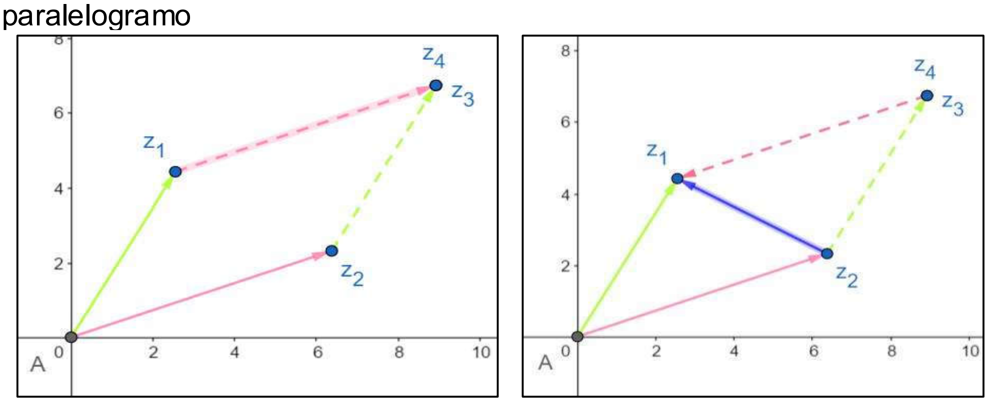
Figura 20: Subtração entre números complexos pela adição do oposto.



Fonte: Elaborado pelo pesquisador, 2018.

Já a segunda forma (2) consiste em representar a diferença entre números complexos pela diagonal menor do paralelogramo formado pelas translações dos vetores associados aos números complexos (Figura 21).

Figura 21: Subtração de números complexos utilizando a diagonal menor do paralelogramo



Fonte: Elaborado pelo pesquisador, 2018.

Na imagem da esquerda têm-se as translações dos vetores de z_1 e z_2, já na imagem da direita perceba que o vetor $(\overrightarrow{z_1 z_4})$ se transformou em $\overrightarrow{z_4 z_1}$ que representa o oposto do vetor associado a z_2 transladado em z_1. Dessa forma, os vetores pontilhados da imagem à direita representam $z_1 - z_2$ e o resultado dessa operação o vetor em azul com origem em z_2 até z_1. Por fim, solicitar aos estudantes a que efetuem a diferença com mais números complexos.

Multiplicação: Essa operação será explicada e realizada por soma de vetores com auxílio de algumas transformações no plano. Portanto, dados os números complexos $z_1 = 1 + 3i$ e $z_2 = 2 + i$ pode-se verificar a seguinte expressão:

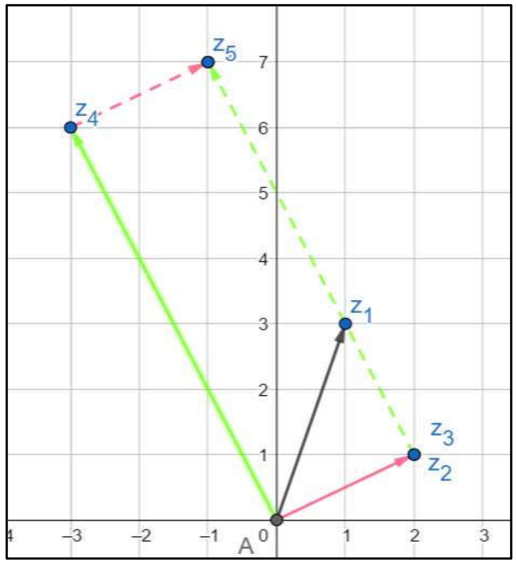
$$z_1 z_1 = (1 + 3i)(2 + i)$$

Dessa forma, será representado no GeoGebra o número complexo z_2 juntamente com seu vetor partindo da origem, distribuindo a parte real e imaginário de z_1 sobre o z_2 temos a seguinte expressão:

$$z_1 z_2 = 1(2 + i) + 3i(2 + i)$$

Assim, tem-se $z_3 = 1(2 + i)$ e $z_4 = 3i(2 + 1)$, como 1 é o elemento neutro na multiplicação $z_2 = z_3$, mas para encontrar z_4 é necessário utilizar duas transformações, a homotetia de razão 3 sobre z_2 juntamente com uma rotação de 90º no sentido anti-horário devido a unidade imaginária que faz parte do produto. Logo, basta os estudantes escolherem uma das formas de translação para efeituarem $z_3 + z_4$, ou seja, o produto de $z_1 z_2$ conforme ilustra a figura 22.

Figura 22: Multiplicação de dois números complexos no registro de representação gráfico



Fonte: Elaborado pelo pesquisador, 2018.

Os vetores pontilhados na imagem anterior são as translações dos vetores associados à z_2 e z_4, onde z_5 é o número complexo resultante do produto de z_1 e z_2.

Divisão: A divisão será abordada de duas formas, a primeira trabalhando com igualdade de números complexos, e a segunda com o conjugado do número complexo divisor. Para exemplificar as duas formas vamos escolher os números complexos $z_1 = 2 + i$ e $z_2 = 3 + 2i$. A divisão pode ser expressa do seguinte modo:

$$\frac{z_1}{z_2} = z_3$$

Onde z_3 é um número complexo na forma $a + bi$, efetuando um tratamento na equação acima, podemos representar da seguinte maneira:

$$z_1 = z_3 z_2$$

$$2 + i = (a + bi)(3 + 2i)$$

$$2 + i = (3a - 2b) + (2a + 3b)i$$

Comparando os números complexos temos um sistema:

$$\begin{cases} 3a - 2b = 2 \\ 2a + 3b = 1 \end{cases}$$

Resolvendo no GeoGebra será necessário plotar os números complexos z_1, z_2 e z_3. No entanto, o z_3 necessita de dois controles deslizantes, um para a parte real a e outro para parte imaginária b. Os parâmetros a e b serão encontrados quando o número complexo resultante de $z_3 z_2$ coincidir com z_1. A ideia é transformar a divisão numa multiplicação e aplicar os conceitos estudados anteriormente. Assim, z_4 representa o produto de z_2 e z_3 e para encontrar o número complexo resultante da divisão o estudante precisa movimentar o controle deslizante[12] até $z_1 = z_4$ (pontos coincidentes), onde os valores mostrados no controle deslizante é o número complexo resultante da operação.

A segunda forma que opera com o conjugado exprime também a divisão como uma multiplicação, assim a divisão dos complexos tomados como exemplo fica da seguinte forma:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \overline{z_2}}{z_2 \overline{z_2}}$$

Assim, os estudantes podem transformar $z_1 \overline{z_2}$ numa soma (conforme já explicado na operação de multiplicação) e quando aplicar a transformação da homotetia tomar cuidado para dividir a razão pelo número real resultante da multiplicação de z_2 pelo seu conjugado:

$$\frac{z_1 \overline{z_2}}{z_2 \overline{z_2}} = \frac{(2+i)(3+2i)}{(3+2i)(3-2i)} = \frac{2}{13}(3+2i) + \frac{i}{13}(3+2i)$$

Análise *a priori*: Essa atividade visa evidenciar a relação entre as representações semióticas na forma algébrica e gráfica utilizando algumas transformações no plano (rotação, reflexão, translação e homotetia). Na operação de

---

[12] https://ggbm.at/JZrnXFAt

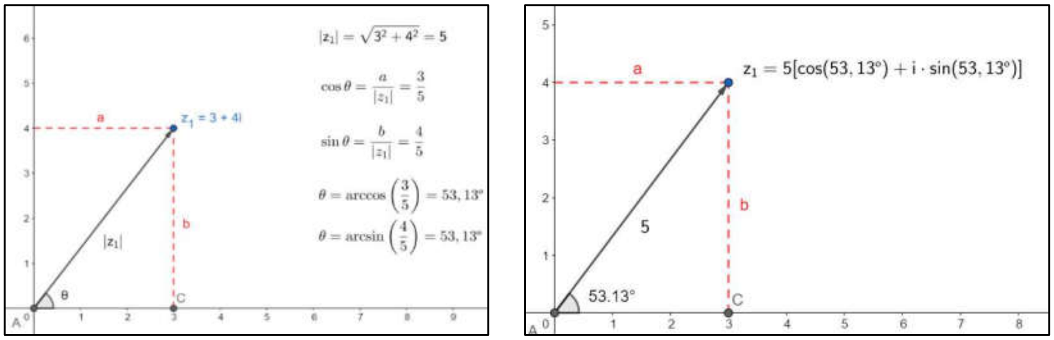
adição, que envolve apenas uma transformação (translação), acredita-se que os estudantes consigam entender que o número complexo ligado ao vetor soma é o par ordenado resultante da soma algébrica da parte real e da parte imaginária de dois números complexos. Além disso, espera-se que os mesmos percebam que o símbolo "+" (unidade significativa) no registro algébrico corresponde a uma transformação no plano complexo, a saber, uma translação. Já na subtração envolve duas transformações, reflexão ou rotação e translação. Serão requeridas tais transformações pois, é necessário um tratamento na representação algébrica que se relacionará de duas maneiras com a representação geométrica. Na descrição das atividades, foram elencadas duas maneiras de operar a subtração no plano complexo, a primeira trata o subtraendo como vetor oposto realizando uma reflexão ou rotação em torno da origem, portanto o estudante pode relacionar "-" como sinal do subtraendo e não como sinal da operação, pois na atividade 2 foi trabalhado que quando tem-se uma multiplicação por (-1) ocorre uma rotação de 180^o, dessa forma o estudante pode evidenciar e acrescentar correspondência entre a unidade significativa do "-" como oposto. A segunda aborda a subtração como sendo a diagonal menor do paralelogramo das translações dos vetores, a ordem das transformações no plano se altera; para fazer desse modo primeiro se faz a translação e em seguida muda apenas o sentido do vetor sem rotacionar ou refletir, conforme ilustra a figura 21. No entanto, o vetor azul (Figura 21) não aponta para o número complexo resultante da operação, é necessário trasladar esse vetor para origem. É esperado que os estudantes escolham realizar essa operação pelo primeiro modo, pois requer um custo de tratamento menor das unidades significativas mobilizadas. Na multiplicação serão requeridas três transformações, são elas: rotação ou reflexão, translação e homotetia. Nessa operação será possível evidenciar se as unidades significativas trabalhadas nas operações anteriores foram entendidas, pois ao distribuir a parte real e imaginária de um número complexo sobre o outro, a multiplicação se converte em uma das operações anteriores. Antes de efetuar a adição ou subtração os estudantes precisam rotacionar em 90 graus (sentido anti-horário) o vetor que está sendo multiplicado pela unidade imaginária e multiplicar os vetores pelos escalares distribuídos utilizando a ferramenta homotetia, na qual aplica a razão (o escalar) sem modificar a orientação dos vetores. Além de evidenciar a utilização das transformações, essa atividade será de suma importância para o estudante perceber que há representações em que algumas operações se tornam mais simples, mais à frente será tratado a operação de multiplicação na representação trigonométrica que evidenciará a importância de mobilizar diferentes representações, não apenas para facilitar as operações, mas sim, vislumbrar outras unidades significativas que nessa representação torna-se de difícil compreensão. Por fim, a operação de divisão requer as mesmas transformações abordadas na multiplicação, no entanto, foram mostradas duas maneiras de dividir dois números complexos, a primeira utilizando igualdade de números complexos que recai num sistema linear na representação algébrica, mas o estudante percebera que não é tão simples encontrar o número complexo por meio da igualdade no plano complexo. O que pode acarretar a escolha da divisão pela multiplicação do conjugado, devido ao menor custo de tratamento nas duas representações (algébrica binomial e geométrica). E, analogamente à multiplicação, essas diferentes abordagens para a divisão prima pela necessidade da conversão num registro que minimize os tratamentos entre as unidades significativas. Em suma, a representação geométrica em coordenadas retangulares exige maior tratamento das unidades significativas nas operações de multiplicação e divisão.

Hipótese(s): (a) entender as operações de adição e subtração a partir das transformações geométricas no plano; (b) apontar dificuldades nas operações de multiplicação e divisão na forma gráfica (retangular).

5.3.6 Transformação de coordenadas no plano complexo e operações na representação polar

Essa atividade objetiva converter duas representações importantes no tocante aos números complexos. Para isso, inicialmente fará uma abordagem convertendo afixos na forma retangular em coordenadas polares. Assim, será solicitado aos estudantes que plotem um número complexo no plano (coordenadas retangulares) e construa o triângulo retângulo a partir das projeções ortogonais do vetor associado ao número complexo. Dessa forma, dado o afixo $z_1 = 3 + 4i$ solicitar aos estudantes que utilizem as ferramentas *distância entre pontos* e *ângulo* para encontrarem o módulo e o argumento e, posteriormente, escrevam o número complexo na forma trigonométrica, conforme ilustra a figura 23.

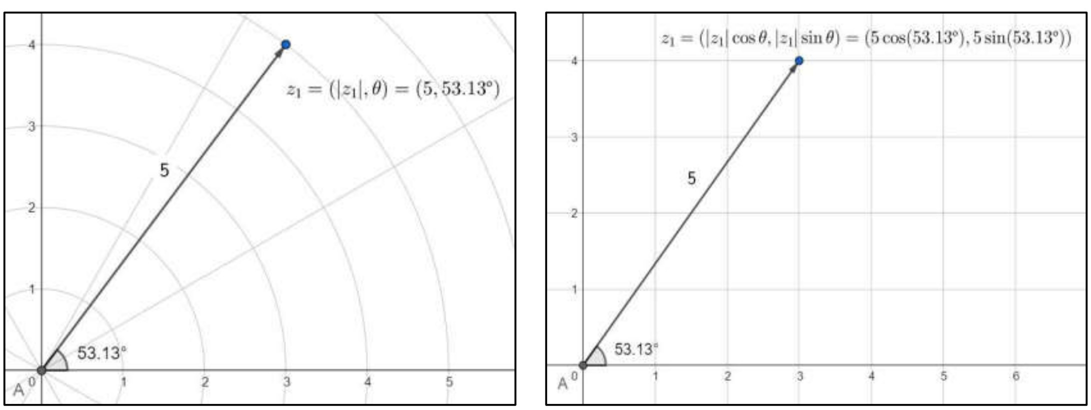
Figura 23: Transformando coordenadas retangulares para polares.



Fonte: Elaborado pelo pesquisador, 2018.

Após encontrar o módulo e o argumento, modificar a malha do plano de retangular para polar e solicitar que os estudantes plotem o mesmo número complexo na malha polar. Assim, tem-se lado a lado na (Figura 24) o mesmo número complexo em coordenadas distintas (representações).

Figura 24: Plano complexo nas malhas polar e cartesianas



Fonte: Elaborado pelo pesquisador, 2018.

Após essa construção será elaborado juntamente com os alunos dois *applets*[13][14] no GeoGebra que converte números complexos da forma retangular para polar e vice-versa.

---

[13] Animação disponível em: https://ggbm.at/KUkBqVzv

Para a multiplicação e divisão far-se-á o uso exclusivo da malha polar em todas as representações no plano complexo. A fim de evidenciar as unidades significativas da representação polar e para entender o comportamento das mesmas quando da realização das operações de multiplicação e divisão. Assim, será solicitado que os estudantes formem duplas e que um faça a multiplicação e outro a divisão, seguindo os passos abaixo:

(i) Solicitado aos estudantes efetuarem a multiplicação e divisão dos seguintes números complexos utilizando o GeoGebra:

$$z_1 = 2 + 2i \qquad \text{e} \qquad z_2 = 3 + 0i$$

(ii) Plotar os números complexos acima, bem como associar um vetor a cada um deles;

(iii) Apontar os ângulos entre o eixo real e vetor dos números complexos (argumentos) utilizando a ferramenta *ângulo* e o comprimento de vetor (módulos) utilizando a ferramenta *distância entre dois pontos*;

(iv) Inserir no campo de entrada $z_3 = z_1 \cdot z_2$ e $z_4 = \frac{z_1}{z_2}$;

(v) Analogamente ao item (iii) apontar as unidades significativas dos complexos resultantes das operações.

Ao final dessa atividade perguntar aos estudantes como podemos efetuar a adição e a subtração desses dois números complexos (os que foram trabalhados nas operações anteriores).

Análise *a priori*: A realização dessa atividade prima por colocar em correspondência algumas unidades significativas nas representações algébricas binomial, trigonométrica e na representação gráfica. Ao relacionar as formas algébricas com a forma gráfica fica evidente a correspondência direta entre as unidades significativas da parte real (a) e da parte imaginária (b), pois correspondem ao afixo representado no plano complexo, portanto a variação dos parâmetros acarreta deslocamentos horizontais (quando a se modifica) e deslocamentos verticais (quando b se modifica). Ao relacionar a representação trigonométrica com a representação gráfica (polar) também torna possível a visualização da correspondência entre o módulo e argumento nas duas

[14] Animação disponível em: https://ggbm.at/KmX7BaTB

representações. No entanto, converter as representações algébricas (retangular e polar) sem a utilização do registro gráfico, ou seja, sem o ambiente de geometria dinâmica, os estudantes poderão encontrar dificuldades na correspondência entre as unidades significantes.

Durante a abordagem das operações acredita-se que os estudantes perceberão de imediato que na multiplicação ocorre a soma dos argumentos e na divisão a subtração entre os mesmos. No entanto, não se espera que os estudantes percebam facilmente como o módulo resultante das operações se relacionam com os módulos dos números complexos utilizados na operação.

Quanto às operações de adição e subtração na forma polar, espera-se que os estudantes relembrem essas operações em coordenadas retangulares e façam essas operações a partir das transformações geométricas no plano complexo.

Hipótese(s): (a) entender as relações que existem entre as unidades significativas nas representações algébricas utilizadas; (b) perceber que ambas as representações algébricas utilizadas tratam do mesmo número complexo; (c) entender que no registro gráfico podem ser realizadas todas as operações até o momento estudadas; (d) perceber que no registro gráfico-polar as operações de multiplicação e divisão exigem menos tratamentos que no registro gráfico-retangular.

5.4 Experimentação

Realizadas as devidas análises preliminares, bem como *a priori* relata-se a partir desta seção a operacionalização das atividades planejadas e a execução *in loco*.

A pesquisa aconteceu entre os meses de maio e julho de 2018, totalizando 38 encontros de 50 minutos de duração. Embora tenham sido destinadas uma quantidade expressiva de aulas para abordar os números complexos, algumas eventualidades se fizeram presentes durante o período, como discriminadas no quadro 7, juntamente com os motivos e os períodos destinados.

Quadro 7: Distribuição das aulas durante a pesquisa

38 períodos	4 períodos	Revisão de conteúdo e aplicação de exames
	4 períodos	Atividade interna – Intercursos
	4 períodos	Greve dos motoristas
	2 períodos	Jogos da Copa do Mundo FIFA
	4 períodos	Atividades avaliativas
	20 períodos	Aplicação das sequências de ensino

Fonte: Elaborado pelo pesquisador, 2018.

Os participantes da pesquisa foram selecionados de acordo com os seguintes critérios: (a) frequência na disciplina de matemática maior ou igual a 80%, dessa forma os estudantes participaram de maioria das atividades propostas; (b) entrega dos termos de assentimento (Apêndice A) e Termo de Consentimento e Livre Esclarecido (TCLE) até o final da pesquisa. Da interseção desses dois critérios 12 estudantes tornaram-se sujeitos desta pesquisa. Cabe destacar que os mesmos não foram informados sobre tais critérios para a participação da pesquisa, os termos foram entregues aos estudantes sem a obrigatoriedade de entrega. Para manter a identidade preservada, os estudantes mencionados na pesquisa foram identificados pelo seguinte código: Estudante 1 (E1), Estudante 2 (E2) até o Estudante 12 (E12). Também foram ocultados dos registros dos estudantes e dos registros do caderno de campo do pesquisador qualquer rótulo, especificação, data[15] ou informação que de alguma forma permitisse revelar direta e indiretamente a identidade do participante.

As sequências de ensino planejadas em cada atividade não foram aplicadas conforme discorrida na seção anterior, as mesmas foram diluídas no planejamento de cada aula (remanejadas em planos de aulas). O motivo é pelo fato de que as atividades não contemplam todos os tópicos relacionados para o ensino dos números complexos, isto é, tais atividades foram criadas para proporcionar situações que melhor evidenciam a utilização do ambiente de geometria dinâmica do GeoGebra e, por consequência, as representações que se manifestam nesse ambiente.

[15] Como participaram dessa pesquisa duas turmas com horários distintos, a data de aplicação poderia indicar quais participantes pertencem a turma A ou B.

É notório que as atividades, com exceção da primeira, têm no seu escopo a utilização do GeoGebra, mas cabe destacar que foram realizadas outras abordagens para contemplar o ensino dos números complexos, como por exemplo a historicização do conteúdo, listas de atividades e a resolução de problemas.

As atividades não eram precedidas de avaliações pontuais, isso por dois motivos: (i) devido a uma questão organizacional de uma das turmas, a turma A foi dividida em dois subgrupos onde uma parte ficou com o professor titular e a outra com o pesquisador (a turma continha no total 54 estudantes). A fim de sistematizar o conteúdo das atividades avaliativas o professor, juntamente com o pesquisador, se organizaram para convergir o mesmo número de atividades avaliativas, bem como o peso de cada uma delas, pois ao final do semestre as notas e os conteúdos de cada avaliação devem estar discriminados no sistema de notas da instituição; (ii) acredita-se que ao avaliar uma atividade imediatamente após a execução revele apenas um sucesso imediato, ofuscando de certa forma os interesses reais, pois o objetivo é analisar como o ambiente de geometria dinâmica infere numa percepção mais ampla sobre as representações dos números complexos, e não, em situações de ensino isoladas e pontuais.

Dessa forma, os dados a serem analisados nesta pesquisa não são oriundos de nenhuma avaliação específica ao término de cada atividade, mas sim, pelas representações produzidas pelos estudantes no decorrer das aulas. Para isso, fez-se a digitalização de todas as listas de exercícios, trabalhos, provas e cadernos dos estudantes participantes da pesquisa, além das produções realizadas no ambiente de geometria dinâmica[16]. Embora no TCLE (Apêndice A) mencionar o registro de áudio das atividades, os estudantes que não participaram da pesquisa se sentiram inseguros e incomodados, fato este que corroborou para eliminar esse instrumento de coleta de dados. Contudo, para coletar as discussões realizadas durante as aulas fez-se uso de anotações no caderno de campo do pesquisador, as quais se encontram no Apêndice B.

Finalizada a fase que relata os detalhes durante a execução da pesquisa, encontra-se no próximo capítulo os resultados evidenciados durante a experimentação da investigação, isto é, uma análise posterior à pesquisa.

[16] Foi solicitado que os estudantes compartilhassem o arquivo .ggb (extensão utilizada pelo GeoGebra), assim é possível verificar de que forma os estudantes utilizaram as ferramentas do aplicativo.

6. ANÁLISE *A POSTERIORI*: RESULTADOS E DISCUSSÃO

Esta seção reserva-se para expor os resultados, bem como, a análise das atividades aplicadas durante a pesquisa. Deste modo, optou-se por fazer uma análise individual de cada atividade planejada e aplicada a teoria dos registros de representação semiótica e das tecnologias digitais. No capítulo das considerações finais apresenta-se uma visão mais ampla e geral sobre o conjunto das atividades.

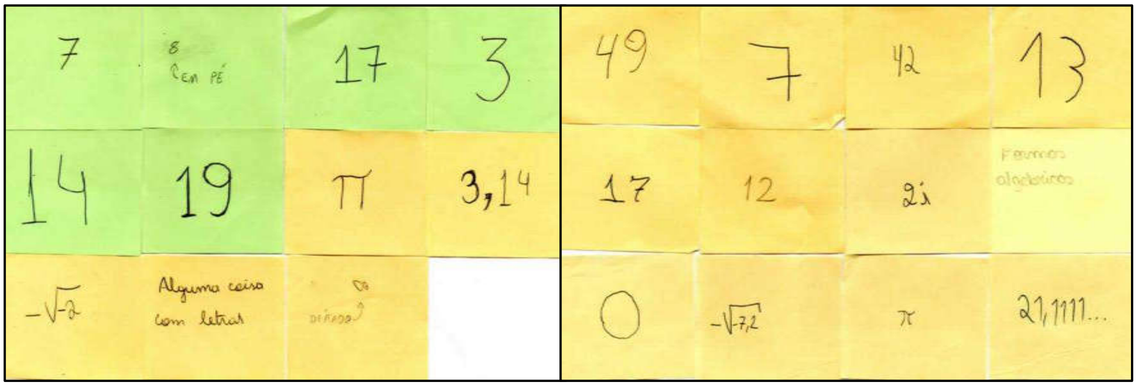
Como mencionado no capítulo anterior, as imagens e materiais apresentados a partir deste momento foram autorizadas pelos responsáveis dos participantes da pesquisa. Sendo assim, fez-se utilização explícita das produções destes estudantes-participantes, no entanto, cabe ressaltar que os comentários retirados do caderno de campo do pesquisador são fatos e discussões gerais das turmas, ou seja, não são falas ligadas diretamente aos 12 participantes.

Atividade 1

Esta atividade teve duração de aproximadamente meio período (25 minutos) e participaram 39 estudantes incluindo os sujeitos de pesquisa. Foi aplicada conforme estava previsto no planejamento, onde se fez a entrega de dois pedaços de papeis coloridos (verde e laranja) e foi solicitado a uma turma que escrevesse no papel laranja um número qualquer e no papel verde[17] um número complexo e, para a outra turma o contrário, no papel laranja um número complexo e no verde um número qualquer (apenas para fim de organização). Na Figura 25 se encontram as representações desses números pelos sujeitos de pesquisa: à direita a turma A e à esquerda a turma B.

[17] Na imagem à direita (Figura 25) a cor ficou esmaecida, dessa forma refere-se aos papéis que estão escritos *2i*, *formas algébricas, 0,* $-\sqrt{-7{,}2}$, π e *21,1111...*

Figura 25: Produções dos participantes referentes a atividade 1.



Fonte: Elaborado pelo pesquisador, 2018.

Em ambas as turmas a representação de um número qualquer recaiu no conjunto dos naturais, seguidamente fora perguntado aos estudantes o motivo por representar esses números. As respostas foram:

- Usamos no dia a dia.

- São os números mais fáceis.

- Usamos para contar.

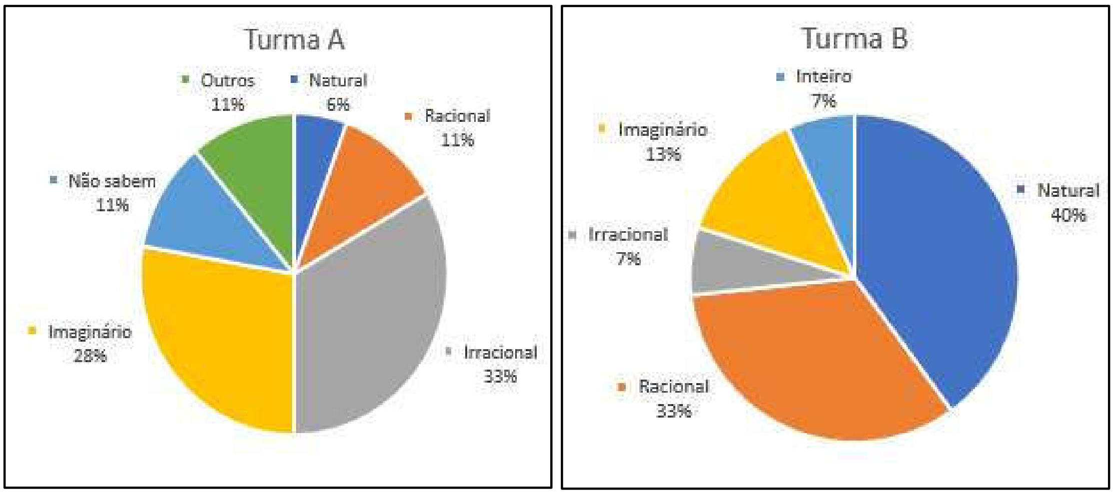
Alguns ainda responderam que colocaram aleatoriamente esses números. No entanto, ao olhar as representações dos demais estudantes, não apenas dos participantes, verifica-se que todos representaram números naturais.

O motivo pela escolha de um único conjunto numérico para representar “um número qualquer” reflete a intenção da atividade, pois ao solicitar que eles fizessem a representação de um “número qualquer” e um “número complexo” induz os estudantes a pensarem que “número qualquer” não é complexo e nem um número complexo é qualquer número. Para representar um número qualquer, os alunos fizeram a escolha de conjunto que não seja “tão complexo” para eles, levando a escolha dos números naturais (inteiros positivos).

Isto revela que os números naturais se encontram disponíveis e, por consequência, operáveis para o reconhecimento solicitado nesta atividade. E, não reflete a capacidade de representar outro conjunto numérico, haja visto que no reconhecimento de “um número complexo” foram mencionados outros conjuntos.

No que diz respeito à representação de um número complexo, as escolhas entre os conjuntos numéricos foram semelhantes, mas a distribuição apresentou variações significativas entre as turmas conforme ilustram os gráficos da figura 26:

Figura 26: Distribuição das representações de um número complexo



Fonte: Elaborado pelo pesquisador, 2018.

A turma A atestou o esperado conforme mencionado na análise *a priori,* concentrando a maioria no conjunto dos Irracionais (basicamente o número π e raízes não exatas), seguido pelo conjunto (subconjunto) dos imaginários (foram representados pelos estudantes como raízes quadradas com radicando negativo, isto é, nenhum estudante representou a unidade imaginária). Nessa turma foram enquadrados como Outros os casos, conforme aparecem na figura 25 à esquerda, "Alguma coisa com letras" e o "8 deitado" (infinito).

Já na turma B a representação de um número complexo foi associada fortemente a dois conjuntos, os naturais (números com muitas casas decimais e repetidas vezes o 0 (zero)) e os racionais (números decimais e dízimas periódicas). No mais, apenas nesta turma um estudante utilizou a unidade imaginária para representar um número complexo, como demonstrado na figura 25 à direita.

Quando perguntados o motivo pelas escolhas desses números os estudantes responderam o seguinte:

- Números "grandes"

- Raiz negativa

- Difícil de fazer conta

- Quando a parábola não toca no "chão"

A discussão realizada durante a aula revelou dois vieses que foram utilizados para responder que números são esses, o primeiro se caracteriza por uma representação pessoal de um número complexo (aqui a palavra complexo é entendida num contexto literal, algo complicado e difícil) visto que respostas como "números grandes" e "difícil de fazer conta" apontam nesse sentido. Além disso, alguns estudantes questionaram se após a representação desse "número complexo" se o mesmo seria utilizado para fazer outros cálculos, motivo esse que os levou a representar um número que costumeiramente não tenham dificuldade de operar.

O segundo caminho aponta para um entendimento de conjunto numérico, até porque foram mencionadas as raízes complexas de uma equação de segundo grau, indicando que os números complexos já foram estudados nos tópicos de função quadrática. Evidencia-se não apenas pelo comentário de um estudante sobre a parábola não tocar no "chão", mas também pela utilização de raízes quadradas com radicando negativo. Num ponto de vista semiótico, apenas a representação de uma unidade significativa (unidade imaginária) do objeto maior – número complexo – era desconhecida pela maioria dos estudantes.

No final desta atividade foi observado junto aos estudantes que boa parte dos alunos conseguiram representar um número complexo (exceto os que não souberam, juntamente com os Outros mostrado na figura 26), ao receberem essa afirmação os estudantes entenderam que todos os números estudados até o momento podem ser classificados como complexos, algumas falas foram direcionadas neste sentido pelos mesmos:

- Todos são complexos então!

- Conjunto maior.

Deste modo, a atividade teve um objetivo lateral, na qual consistiu em introduzir os números complexos investigando os conhecimentos prévios dos estudantes e sem relembrar de maneira abrupta os conjuntos numéricos ou utilizar-se de fatos históricos relacionados a este conteúdo (tal abordagem se tornou comum nos livros didáticos analisados). Cabe destacar, que é de suma importância relembrar os conjuntos numéricos, bem como a historicização desses conjuntos, mas que podem ser articulados em momentos diferentes, não apenas como questão motivadora ou para iniciar o conteúdo.

Além disso, esta atividade tem uma abordagem didática que direciona os estudantes a refletirem de maneira autônoma, sendo resultante de uma *situação adidática* que segundo Almouloud (2007, p. 33) “é uma situação na qual a intenção de ensinar não é revelada ao aprendiz, mas foi imaginada, planejada e construída pelo professor para proporcionar a estes condições favoráveis para a apropriação do novo saber que deseja ensinar”.

Embora a atividade teve por objetivo verificar o entendimento dos estudantes acerca de um novo conjunto, a mesma apenas exigiu a representação de números. Ao analisar desta maneira, verifica-se que do ponto de vista das representações não se articulou ou realizou nenhuma transformação, o que nos leva a acreditar que a atividade cognitiva requerida para realizar esta tarefa é ínfima. No entanto, Duval explica a importância de tarefas de reconhecimento:

> O nível de compreensão matemática que um aluno pode ser capaz de alcançar e o grau de iniciativa ou de exploração do qual ele pode dispor na resolução de um problema dependem do conjunto do que ele pode reconhecer rapidamente. **Tarefas de estrito reconhecimento** são, então, tão importantes para a aprendizagem quanto as tarefas de produção. [...] Os únicos conhecimentos disponíveis e mobilizáveis por um indivíduo – e, portanto, operatórios para ele – são aqueles que permitem reconhecimento relativamente rápido. (DUVAL, 2003, p. 28, grifo nosso).

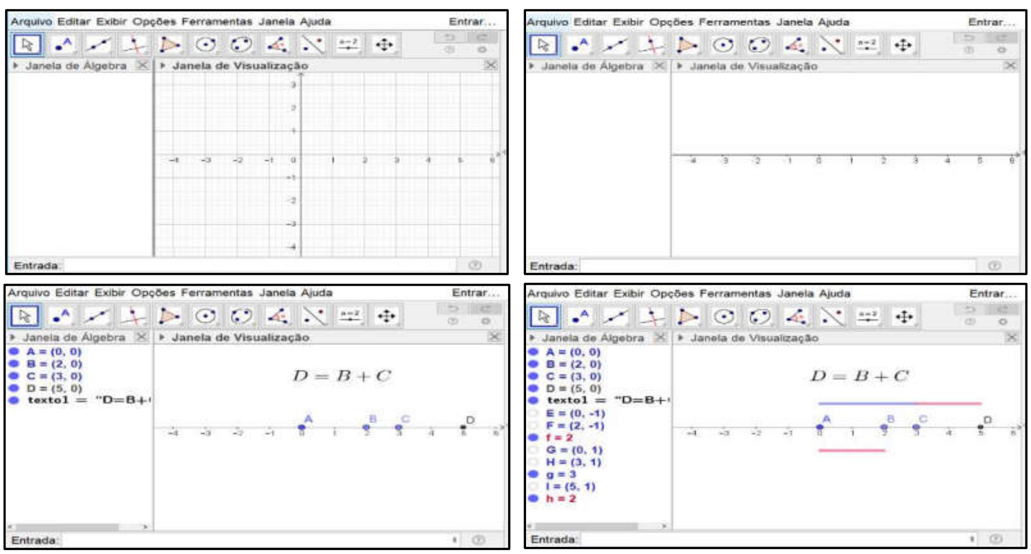
Desta forma, o reconhecimento por parte dos estudantes na atividade proposta situou o nível de conhecimentos sobre os conjuntos numéricos, revelando que alguns participantes da pesquisa não dispõem das representações sobre este conjunto e outra parte já sinaliza o contato com as mesmas. Portanto, a utilização desta sequência de ensino para introduzir o conjunto dos números complexos se mostrou apropriada, ratificando a hipótese levantada inicialmente para tal atividade.

Atividade 2

Para esta atividade foram utilizados o GeoGebra na versão *desktop*, juntamente com o aplicativo nos celulares dos estudantes, pois este foi o primeiro contato com as ferramentas do *software* pelos mesmos, assim, foram inseridos os comandos conforme mencionados na análise *a priori* da respectiva atividade. Os alunos, observando a projeção da versão *desktop* na lousa, começaram a manipular os menus e ferramentas do ambiente dinâmico do GeoGebra em seus próprios celulares. Cabe ressaltar, que nenhum estudante teve contato com esse aplicativo em momentos anteriores de sua formação, dessa forma fez-se a escolha de ensinar as funções, os recursos e ferramentas durante a execução das atividades, isto é, não foi dedicado nenhum momento a parte para explorar[18] o GeoGebra, a cada nova ferramenta requerida era explicado ao estudante seu propósito e o motivo pelo qual seu uso se faria necessário.

Nesta atividade foram trabalhadas as operações de adição, subtração e multiplicação sobre a reta real, e os estudantes executaram junto com o professor os seguintes passos como ilustra a sequência de quatro imagens da figura 27:

Figura 27: Sequência de construção da atividade 2



Fonte: Elaborado pelo pesquisador, 2018.

A primeira imagem (superior esquerda) ilustra a interface inicial do GeoGebra que foi projetada aos estudantes na lousa, ainda nessa imagem pode-se observar a janela de álgebra que permite a visualização dos pontos no registro algébrico e a direita dela a janela de visualização que ilustra graficamente em duas dimensões os mesmos pontos. Já na segunda imagem (superior direita) encontra-se a mesma

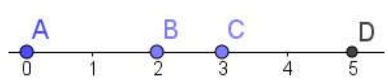
[18] Apenas foram discutidas as configurações da tela, como por exemplo, esconder e mostrar malha, eixos e pontos.

interface apenas com o eixo real, foram escondidos a malha retangular juntamente com o eixo das ordenadas, isto para evidenciar as operações sobre a reta real que se encontram na próxima imagem (inferior esquerda).

Na terceira imagem (inferior esquerda) foram inseridos os pontos A que demarca a origem, em seguida os pontos B e C que foram utilizados na operação de adição e, por fim o ponto D que mostra a soma dos dois pontos anteriores (inserindo o comando $D = B + C$ no campo de entrada). Já a última imagem (inferior direita) mostra por meio da translação de segmentos a operação de adição no registro figural, para isso fez-se a translação do segmento que corresponde a de distância de A até B a partir da extremidade do seguimento que determina a distância de A até C. Assim, o resultado é módulo (distância) de A até o extremo do segmento transladado de B, resultando exatamente sobre o ponto D na reta real.

Ao realizar apenas esta primeira operação pode-se trabalhar com três representações de registros diferentes, como ilustra o quadro 8.

Quadro 8: Registros requeridos durante a atividade 2

Registro numérico	Registro gráfico	Registro figural
A = (0, 0) B = (2, 0) C = (3, 0) D = (5, 0)		

Fonte: Elaborado pelo pesquisador, 2018.

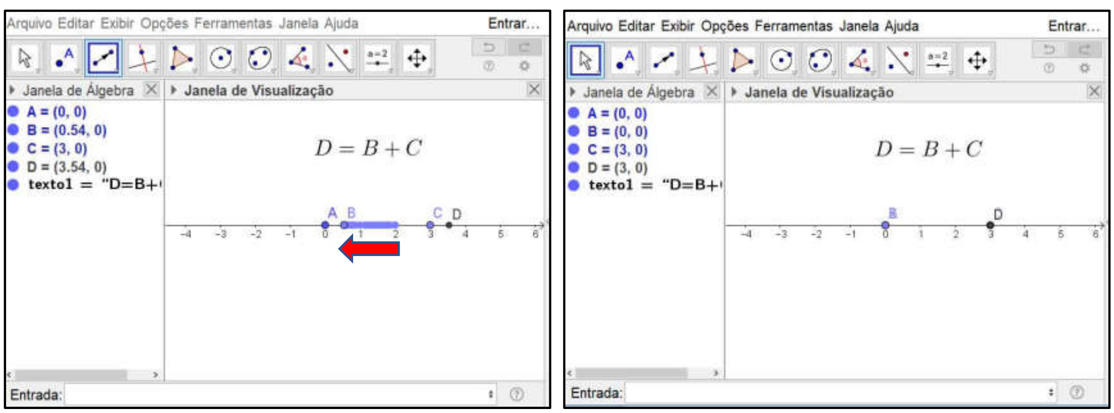
Cabe neste instante relembrar conceitos essenciais da semiótica para ratificar a importância de se abordar um objeto por distintas representações. Pois bem, ao analisar a representação no registro algébrico observa-se a variação de apenas uma unidade significativa (a outra seria a ordenada do ponto)[19], a saber, a abscissa do ponto. O interessante é observar a correspondência destas unidades significativas nas outras representações, no registro gráfico a abscissa reflete a posição do ponto sobre a reta e o fato da ordenada ser nula em todas as representações no registro algébrico indica a dimensão gráfica e figural dos registros, revelando a dimensão $\mathbb{R}^1$.

[19] Sendo que por unidade significativa se entende, segundo Cardoso (2015, p. 42), “as letras, símbolos, eixos, desenhos [...] constituem-se em diversos registros de representações semiótica capazes de representar certos aspectos do objeto”. Isto é, as unidades significativas de cada registro compõem propriamente o objeto representado.

Já no registro figural a unidade significativa “abscissa” se revela como distância em relação à origem e, não mais posição como é o caso da representação gráfica. Isto corrobora para o entendimento de que cada registro revela uma face do objeto e, portanto, necessário recorrer a diferentes registros de representação para entender melhor o objeto que se deseja ensinar e aprender.

Para melhor clarificar a importância de se articular estes registros de representação relata-se uma situação que surgiu durante aplicação desta primeira parte da atividade 2, um estudante gostaria de efetuar a adição de dois números sobre a reta real, porém um deveria ser zero. Para explicar ao estudante a adição com uma parcela nula foi utilizado a ferramenta *mover* que permite deslocar qualquer ponto sobre a reta real (configurando assim um registro dinâmico nessa representação), assim foi solicitado que o estudante movesse, por exemplo, o ponto B até o marco zero conforme ilustrado na figura 28.

Figura 28: Recurso dinâmico do GeoGebra, ferramenta mover.



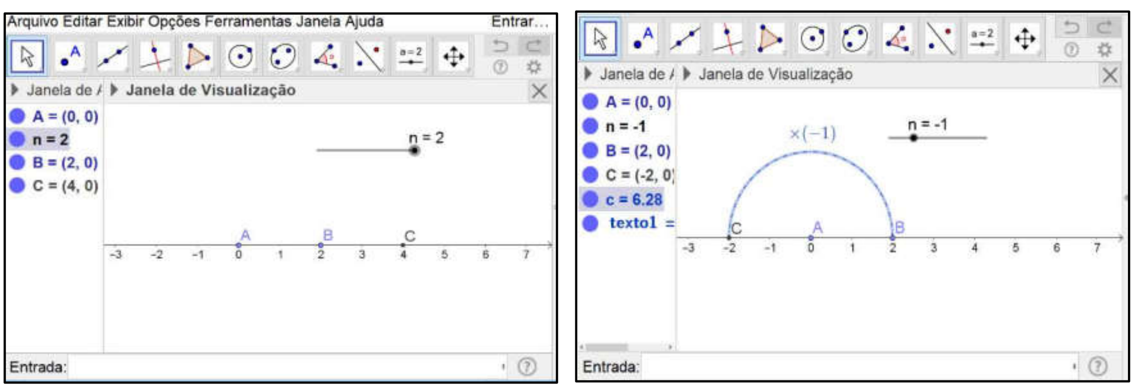
Fonte: Elaborado pelo pesquisador, 2018.

Com a utilização do registro dinâmico o estudante percebeu que à medida que B se aproxima de A (que seria a parcela nula) o ponto D também se aproxima de C e, na imagem à esquerda observa-se que quando o ponto B coincide com A o ponto D sobrepõem C. Isso revela que quando uma parcela é nula o resultado equivale a outra parcela. Já na representação figural fica ainda mais evidente, pois o módulo do segmento de B também é nulo e a translação dos segmentos recai apenas sobre o ponto C, que no caso específico da atividade é a outra parcela.

Embora a correspondência entre as unidades significativas nas representações podem ser evidenciadas sem uso de recursos dinâmicos, como fora relatada em parágrafos anteriores, para os estudantes pode não se revelar claramente, isto porque, para relacioná-las em diferentes registros de representação é necessário, primeiramente, saber representá-las de um ponto de vista semiótico (simbolicamente) e, também saber coordenar as diferentes representações de cada registro exigindo, assim, além da atividade de produção semiótica, o desenvolvimento da atividade cognitiva. Mas com a utilização do ambiente de geometria dinâmica, ocorre simultaneamente a correspondência entre a produção semiótica (na imagem à esquerda da figura 28 mostra que ao mover o ponto B para esquerda na janela de visualização, altera o valor da abscissa na janela de álgebra) e, instantaneamente uma transformação semiótica acontece, a conversão. Segundo Duval (2003), é durante estas transformações semióticas que ocorre a atividade cognitiva.

A última operação desta atividade foi a multiplicação, para isso fez-se a construção junto aos estudantes da sequência de comandos descrita na análise *a priori*, conforme observada na figura 29.

Figura 29: Multiplicação na reta real



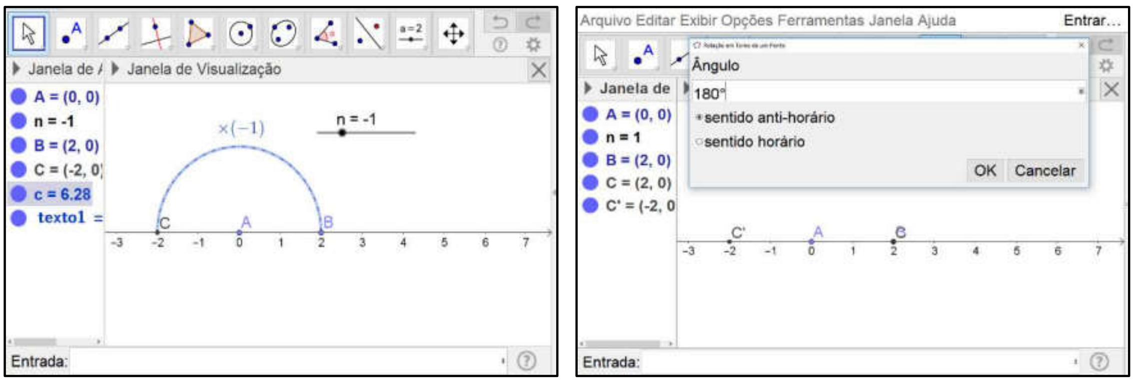
Fonte: Elaborado pelo pesquisador, 2018.

Na imagem à esquerda tem-se a origem indicada pelo ponto A, o ponto B móvel sobre a reta e o controle deslizante[20] n que varia de -2 a 2. Ainda nessa imagem é possível observar a multiplicação $2 \cdot 2 = 4$, onde um fator é representado

[20] Esta é uma das principais ferramentas no GeoGebra que permite tratar as representações de maneira dinâmica.

pelo ponto B e o outro fator é a variação do *controle deslizante* (onde nessa imagem foi arrastado até 2 também). Na imagem à direita é possível observar a multiplicação do mesmo fator B pelo fator (-1) indicado na barra do *controle deslizante*. Para atestar que de fato ocorreu uma rotação de 180^o em relação à origem fez a utilização de outra ferramenta chamada de *Rotação em relação a um ponto*, assim foi solicitado que estudantes em duplas comparassem a transformação realizada, conforme ilustrado na figura 30.

Figura 30: Rotação em relação ao um ponto



Fonte: Elaborado pelo pesquisador, 2018.

Na imagem à direita a rotação aconteceu via *controle deslizante*, já na imagem à esquerda o ponto C' indica a rotação do ponto C (que coincide com B) com a origem de 180^o no sentido indicado na imagem. Desta forma, os estudantes puderam averiguar a transformação que ocorre na reta real quando se multiplica por (-1)[21].

Após explorar essas duas ferramentas (controle deslizante e rotação em relação a um ponto) fez-se a seguinte pergunta aos estudantes:

Será que existe algum número real que multiplica o ponto B e ocasiona uma rotação diferente de 180^o, por exemplo, 90^o?

As respostas foram direcionadas da seguinte maneira:

21 Também se mostrou via registro gráfico o porquê dois fatores menores que zero resultam num produto maior que zero.

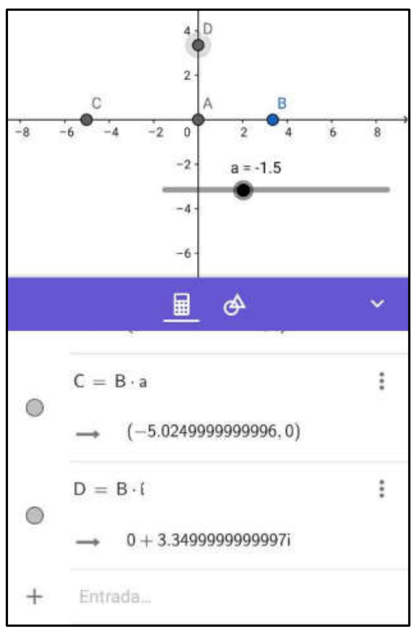
- Como faz para alterar os valores do controle deslizante?

- Acho que basta multiplicar pela metade (-1)*, se* (-1) *rodou* 180^o *a metade vira só* 90^o*.*

- A mudança acontece quando passa de positivo para negativo, seria um número que não é positivo nem negativo, tem um meio termo?

Os alunos colocaram outros valores no *controle deslizante,* não somente inteiros e após muito arrastarem perceberam que nenhum fator real faria o produto (no registro gráfico é um ponto) desgrudar da reta real. Assim, foi pedido que na mesma tela em que estavam tentando digitassem no campo de entrada um outro ponto, agora sendo multiplicado por i, foi sugerido $D = B \cdot i$. Veja a multiplicação de um ponto pela unidade imaginária (Figura 31) no celular do participante E7.

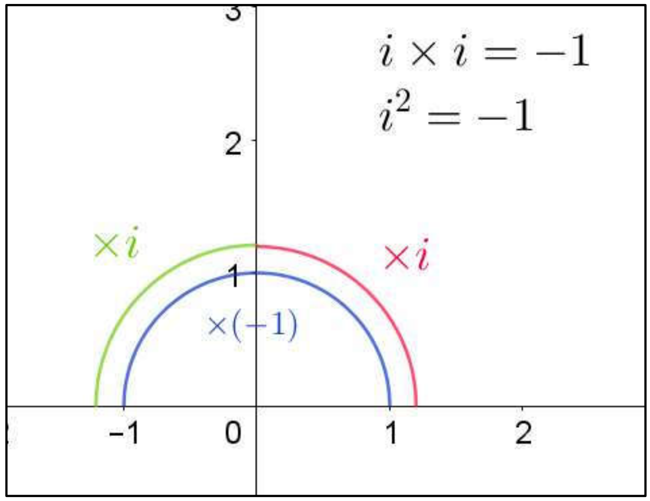
Figura 31: Multiplicação de um ponto pela unidade imaginária



Fonte: Acervo do pesquisador, 2018.

Após os estudantes verificarem que a multiplicação pela unidade imaginária rotaciona o ponto em 90^o em relação à origem foi utilizado essa construção no GeoGebra para definir a unidade imaginária no registro de representação gráfica e posteriormente no registro de representação algébrica. Observe como o ambiente (Figura 32) foi utilizado para atestar que $i^2 = -1$.

Figura 32: Definindo a unidade imaginária no registro de representação gráfica.



Fonte: Elaborado pelo pesquisador, 2018.

Esta atividade de multiplicação na reta real ofereceu aos estudantes o primeiro contato com a unidade imaginária. Optou-se por primeiro representar no registro de representação gráfica utilizando o ambiente dinâmico do GeoGebra por dois motivos: o primeiro é mostrar aos estudantes o comportamento dessa unidade significativa (i) no plano complexo e, segundo, para introduzir o próximo tópico, a saber, as potências da unidade imaginária. Além disso, acredita-se que ao definir a unidade imaginária na representação gráfica explica de uma maneira lúdica como o quadrado de um número resulta em um valor negativo, pois comumente os livros didáticos definem a unidade imaginária na representação algébrica e argumentam que por definição $i^2 = -1$.

Cabe ressaltar que a definição da unidade imaginária utilizando o registro de representação gráfica como partida aumenta a congruência entre as representações nos registros gráfico e algébrico binomial. Em contrapartida, ao utilizar uma representação algébrica binomial como registro de partida pode ocorrer as seguintes situações:

- Partindo que $i^2 = -1$

$$i^2 = -1 \leftrightarrow \sqrt{i^2} = \sqrt{-1} \leftrightarrow |i| = \sqrt{-1} \leftrightarrow i = \pm\sqrt{-1}$$

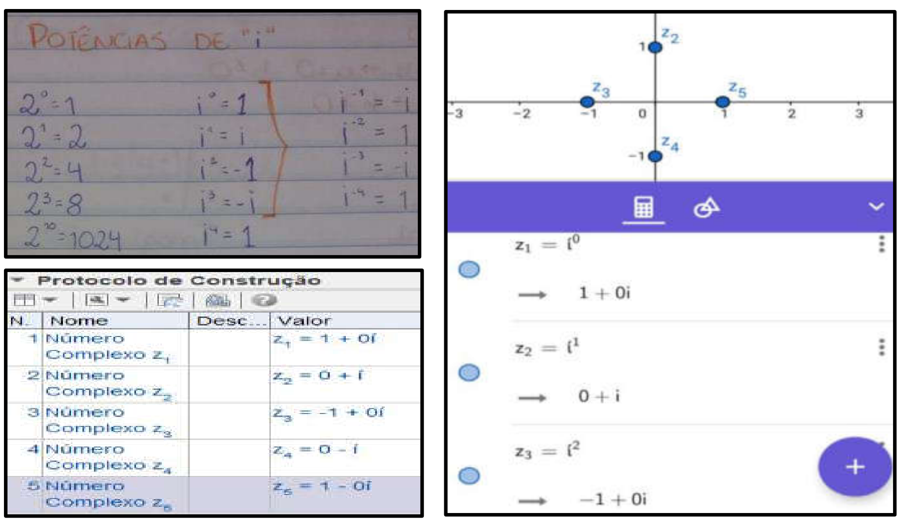
- Partindo que $i = \sqrt{-1}$

$$i = \sqrt{-1} \leftrightarrow i^2 = \left(\sqrt{-1}\right)^2 \leftrightarrow i^2 = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{(-1)^2} = 1$$

A questão aqui não discutir qual das situações está correta[22], mas sim que a escolha dessa representação de partida pode favorecer o surgimento de algumas incompreensões.

Após a definição da unidade imaginária no plano complexo e na representação algébrica binomial fez-se a utilização do ambiente de geometria dinâmica para estudar as potências da unidade imaginária (i). Para a abordagem inicial das potências o registro algébrico binomial escolhido foi que os alunos registrassem no seu caderno o valor das seguintes potências: i^0, i^1, i^2, i^3 e i^4. Em seguida, eles deveriam utilizar o GeoGebra para relacionar as potências nas representações algébrica binomial e gráfica. Veja os registros do estudante E5 (Figura 33).

Figura 33: Potência da unidade imaginária no GeoGebra



Fonte: Acervo do pesquisador, 2018.

Dos participantes da pesquisa, 8 alunos utilizaram os registros de representação algébrica e gráfica (no GeoGebra nenhum utilizou recursos dinâmicos para simular várias potências, inseriram potência por potência para conferir os valores com as representações algébricas), 3 utilizaram apenas o registro algébrico e 1 não soube encontrar as potências da unidade imaginária. Na figura 33 é possível verificar que o estudante associou em parte as potências da unidade imaginária com

[22] Apesar de pouco abordada nos livros didáticos, pode-se definir $i = -\sqrt{-1}$ ou $i = \sqrt{-1}$. Já na segunda situação mostrada, existe um erro de definição, pois as operações em reais que envolvem radical só se aplicam para radicandos maiores que zero.

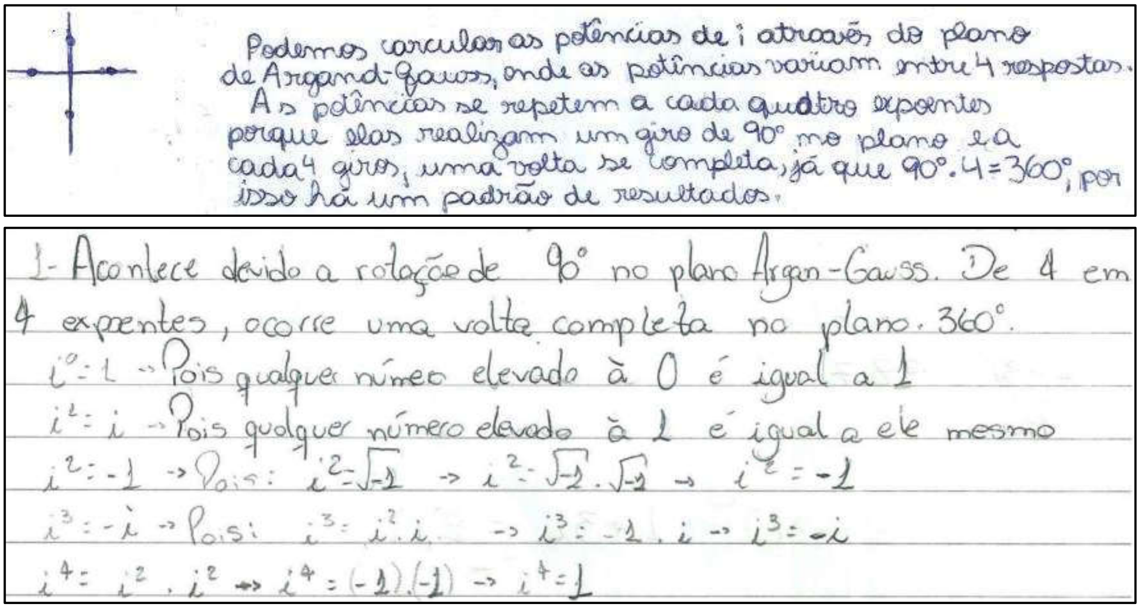
as potências de base 2 e percebeu o padrão quando calculou a última potência i^3. Nas demais imagens da figura pode-se visualizar de que maneira o estudante se utilizou do GeoGebra para conferir as potências, o mesmo inseriu as potências de 0 até 4 no campo de entrada e observou os números complexos gerados. Um detalhe interessante é que na medida que o estudante inseria as potências no campo de entrada o *software* tratava o resultado na forma $a + bi$, assim alguns tratamentos no registro de representação algébrico foram antecipados quando da utilização do GeoGebra em algumas atividades.

Para finalizar a análise desta atividade foi evidenciado por partes dos estudantes uma preferência na utilização de representações gráficas em detrimento das representações algébricas para responder algumas tarefas solicitadas, por exemplo, numa atividade avaliativa foi perguntado o seguinte:

Durante as nossas aulas estudamos vários tópicos relacionados aos números complexos, dentre eles, as potências da unidade imaginária (i). Explique como podemos calcular as potências de i com expoentes inteiros e por que as potências se repetem em todos os expoentes?

A seguir (Figura 34), destacam-se algumas respostas que evidenciaram uma preferência gráfica para explicar o solicitado.

Figura 34: Potências de "i", argumento dos estudantes E2 e E5 respectivamente.


Podemos carcular as potências de i através do plano de Argand-Gauss, onde as potências variam entre 4 respostas. As potências se repetem a cada quatro expoentes porque elas realizam um giro de 90° no plano e a cada 4 giros, uma volta se completa, já que 90°.4=360°, por isso há um padrão de resultados.

1- Acontece devido a rotação de 90° no plano Argan-Gauss. De 4 em 4 expoentes, ocorre uma volta completa no plano. 360°.

$i^0 = 1$ → Pois qualquer número elevado à 0 é igual a 1

$i^1 = i$ → Pois qualquer número elevado à 1 é igual a ele mesmo

$i^2 = -1$ → Pois: $i^2 = \sqrt{-1}$ → $i^2 = \sqrt{-1}.\sqrt{-1}$ → $i^2 = -1$

$i^3 = -i$ → Pois: $i^3 = i^2.i$ → $i^3 = -1.i$ → $i^3 = -i$

$i^4 = i^2.i^2$ → $i^4 = (-1).(-1)$ → $i^4 = 1$

Fonte: Acervo do pesquisador, 2018.

Dos participantes, 9 sinalizaram que o padrão das potências ocorre pela repetição das rotações no plano complexo; os demais observaram a repetição dos valores numéricos de cada potência, argumentando assim, que bastaria dividir o expoente por 4 e o resto da divisão indicaria o valor da respectiva potência de i.

Cabe ao final desta atividade discutir o papel do ambiente de geometria dinâmica na realização das tarefas acima narradas e analisadas. Frente a isso, uma pergunta se levanta para elucidar o potencial semiótico e cognitivo abarcado nesta atividade - *seria possível averiguar que as sucessivas potências da unidade imaginária correspondem a rotações no plano complexo sem o uso de um ambiente de geometria dinâmica?* A resposta não necessita de objetividade para que se possa constatar que o referido ambiente provoca, segundo Gravina (2001), pensamento de experimento, a disponibilidade de ferramentas neste ambiente atina o desejo de exploração e investigação. Assim, a capacidade de responder a uma tarefa (ou pergunta) não se limita as capacidades individuais, mas sim, ao confronto do que já se compreende com as potencialidades de cada ferramenta deste ambiente.

O professor poderia, por exemplo, utilizar-se de um registro de representação discursivo, como é o caso da língua natural, para afirmar aos estudantes que as potências da unidade imaginária se comportam de tal maneira, pois ocorrem rotações de 90^o em torno da origem, sendo assim, ao completar 4 rotações tem-se uma volta completa e os valores passam a se repetirem. No entanto, a forma como as potências da unidade imaginária e a identidade $i^2 = -1$ foram conduzidas no ambiente dinâmico, propiciaram de antemão aos estudantes verificarem a visualização do objeto e o comportamento das unidades significantes que o compõe.

As hipóteses levantadas foram parcialmente respondidas; quanto à primeira acredita-se que as operações foram facilmente compreendidas com o auxílio do GeoGebra (nenhum questionamento ou dúvida foi apontada). A segunda hipótese foi nitidamente verificada pelas próprias produções dos estudantes que perceberam as rotações que acontecem no plano quando da multiplicação pela unidade imaginária. Por fim, a última hipótese, que diz respeito a percepção das unidades significativas e/ou visuais nos diferentes registros de representação não foi observada inicialmente. Pois os estudantes se concentraram mais na visualização do registro gráfico em detrimento do registro numérico e/ou algébrico. Ao constatar isso, o pesquisador mediou a situação mostrando aos estudantes a correspondência entre as mesmas.

Atividade 3

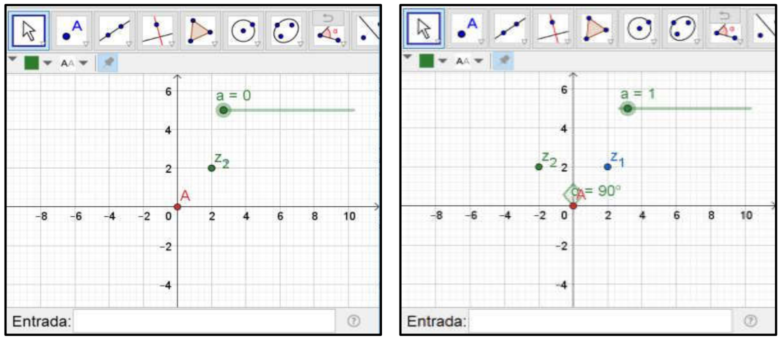
Esta atividade foi desenvolvida e aplicada para explorar uma característica das potências da unidade imaginária que não é abordada com veemência nos livros didáticos[23], a saber, as potências que englobam os inteiros negativos. Portanto, fez a execução dos passos descritos para tal atividade e, diferentemente da atividade anterior, a abordagem dos números complexos ganhou um tratamento vetorial no registro de representação gráfico. Pois, nas atividades posteriores fariam uso das transformações no plano e, para isso, necessitavam associar a um afixo no plano um vetor.

Também nesta atividade fez-se a utilização de outros recursos do GeoGebra, como *controle deslizante*, ferramenta *ângulo* e *vetor.* É possível perceber na figura 35 os comandos inicialmente solicitados aos estudantes.

---

[23] Inclusive nas obras que foram abordadas na seção 4.2 desta pesquisa.

Figura 35: Construção da terceira atividade pelo E3



N.	Nome	Descrição	Valor
1	Número Complexo z_1		z<sub>1</sub...
2	Número a		a = 1
3	Número Complexo z_2	z_1 i^a	z<sub>2</sub...
4	Ponto A	Interseção de EixoX, EixoY	A = (0, 0)
5	Ângulo α	Ângulo entre z_1, A, z_2	α = 90°

Fonte: Acervo do pesquisador, 2018.

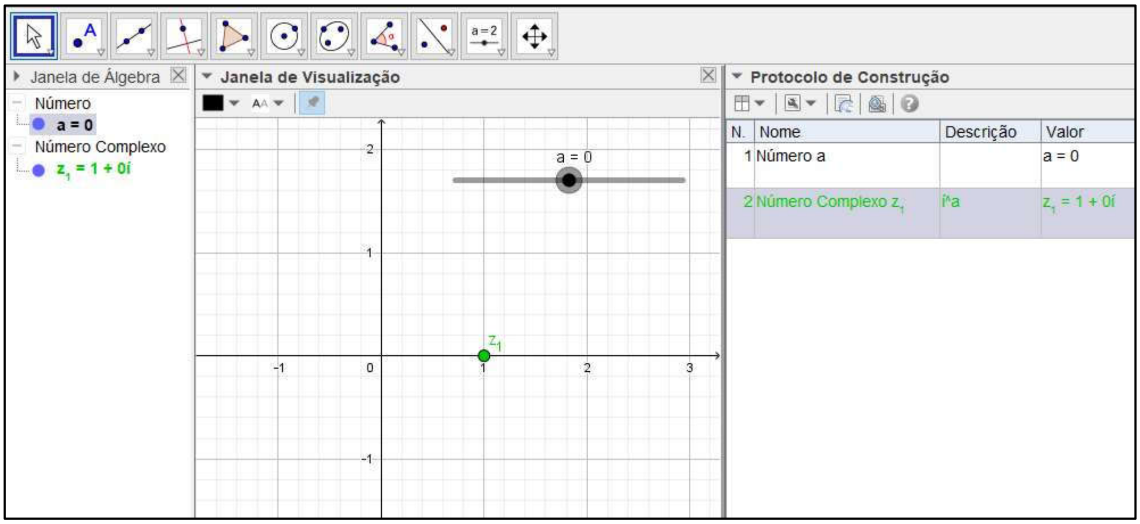
A parte inicial desta atividade foi desenvolvida facilmente pelos participantes, visto que na atividade anterior foram utilizados comandos semelhantes para verificar a rotação que acontece quando da multiplicação pela unidade imaginária. No entanto, esta atividade permite verificar que independentemente de onde esteja o afixo ocorre a referida rotação; bastou os estudantes movimentarem o afixo $\boldsymbol{z_1}$ em diferentes posições no plano complexo e arrastar o controle deslizante para verificar que isso se aplica a todos os afixos no plano complexo**.**

Para investigar as potências inteiras e negativa, inicialmente foi mostrado aos estudantes que o inverso da unidade imaginária equivale ao seu oposto (vide demonstração no item 5.2.3). Como tarefa para casa, os participantes teriam que mostrar utilizando o GeoGebra porque tais potências se comportam da seguinte maneira:

$$i^{-n} \Rightarrow \begin{cases} i^{-n} = i^n, se\ n\ for\ par \\ i^{-n} = -i^n, se\ m\ for\ ímpar \end{cases}$$

Também foi solicitado que os participantes compartilhassem o arquivo *.ggb* contendo a construção no GeoGebra e um breve relato de como responderam a tarefa. A figura 36 demonstra o modo mais frequente utilizado pelos participantes e, no Anexo E, encontra-se a forma discursiva que o estudante E2 desenvolveu para essa tarefa.

Figura 36: Tarefa da atividade 3 realizada pelo participante E2

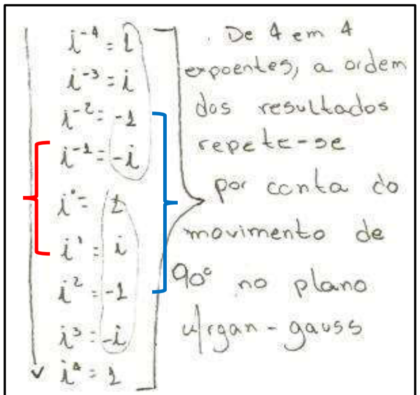


Fonte: Acervo do pesquisador, 2018.

Dos participantes, 11 utilizaram uma construção semelhante às potências de expoentes inteiros positivos, apenas acrescentaram no controle deslizante os inteiros negativos. No entanto, a forma como os mesmos relatam, revela maneiras distintas de compreender o comportamento desta unidade significativa (i). Tomando como exemplo o relado do participante E2 (Anexo E) na escrita foram levantadas duas observações importantes que diferenciam a natureza do expoente. A primeira é o sentido de rotação apontada pelo participante, quando se refere que “expoentes positivos giram para esquerda” e “expoentes negativos giram para direita”, o mesmo percebe a correspondência entre a natureza do expoente e o sentido rotação[24]; em segundo lugar, o valor das potências é explicado pela quantidade de rotações que acontece dependendo a natureza do expoente. Veja o recorte a seguir (Figura 37) retirado do Anexo E.

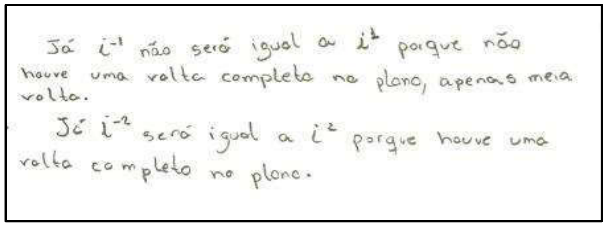
[24] Nas frases acima o participante utilizou os termos para esquerda se referindo ao sentido horário e para direita ao sentido anti-horário.

Figura 37: Recorte da atividade 3 retirada do anexo E.



$i^{-4} = 1$
$i^{-3} = i$
$i^{-2} = -1$
$i^{-1} = -i$
$i^{0} = 1$
$i^{1} = i$
$i^{2} = -1$
$i^{3} = -i$
$i^{4} = 1$

De 4 em 4 expoentes, a ordem dos resultados repete-se por conta do movimento de 90° no plano argan-gauss



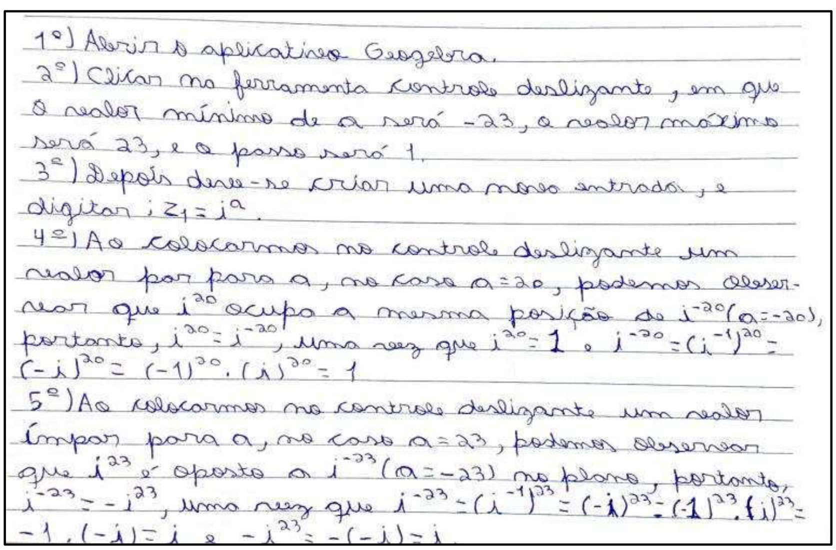
Já i^{-1} não será igual a i^{1} porque não houve uma volta completa no plano, apenas meia volta.
Já i^{-2} será igual a i^{2} porque houve uma volta completa no plano.

Fonte: Acervo do pesquisador, 2018.

Na Figura 37 à direita o participante afirma que i^{-1} não igual i^{1}, pois não se completou uma volta, fato este indicado pela chave em vermelho na Figura 37 à esquerda, onde se fez apenas duas multiplicações por i (ocasionado uma meia volta, indicando que tais números são opostos). Na segunda afirmação da imagem à direita é dito que $i^{-2} = i^{2}$ porque são utilizadas 4 rotações e isso, anteriormente, foi discutido para ressaltar padrão ocorrido nas potências da unidade imaginária.

Outro participante (E3) fazendo uso dos mesmos passos no GeoGebra relatou as seguintes percepções sobre a tarefa, conforme ilustra a Figura 38.

Figura 38: Relato discursivo do participante E3 sobre a tarefa da atividade 3.



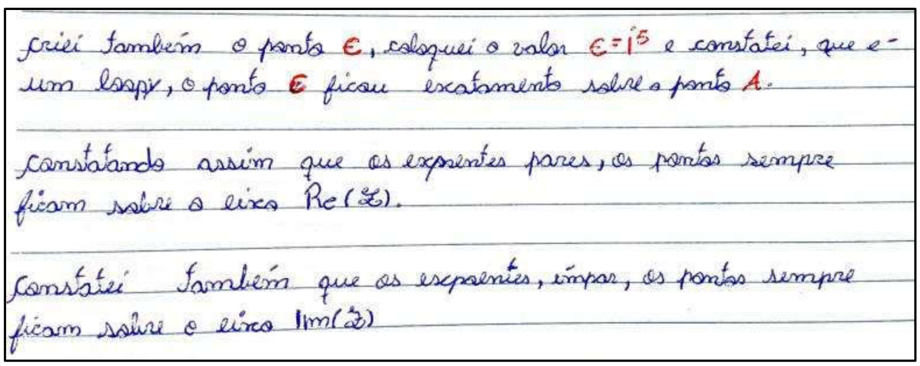
1°) Abrir o aplicativo Geogebra.
2°) Clicar na ferramenta controle deslizante, em que o valor mínimo de a será −23, o valor máximo será 23, e o passo será 1.
3°) Depois deve-se criar uma nova entrada, e digitar ; $z_1 = i^a$.
4°) Ao colocarmos no controle deslizante um valor par para a, no caso a = 20, podemos observar que i^{20} ocupa a mesma posição do i^{-20} (a = −20), portanto, $i^{20} = i^{-20}$, uma vez que $i^{20} = 1$ e $i^{-20} = (i^{-1})^{20} = (-i)^{20} = (-1)^{20} \cdot (i)^{20} = 1$
5°) Ao colocarmos no controle deslizante um valor ímpar para a, no caso a = 23, podemos observar que i^{23} é oposto a i^{-23} (a = −23) no plano, portanto, $i^{-23} = -i^{23}$, uma vez que $i^{-23} = (i^{-1})^{23} = (-i)^{23} = (-1)^{23} \cdot (i)^{23} = -1 \cdot (-i) = i$ e $-i^{23} = -(-i) = i$.

Fonte: Acervo do pesquisador, 2018.

Embora este participante tenha feito uso dos mesmos comandos no GeoGebra para resolver a atividade, utilizou-se de tratamentos no registro de representação algébrico para responder a tarefa e juntamente com a posição em que ocupa cada afixo no plano dada a variação do controle deslizante, onde para valores ímpares estavam opostos pela origem e quando da paridade os afixos se coincidiam.

Além disso, outras observações foram apontadas durante a execução desta tarefa, por exemplo, o participante E9 ratificou o padrão que ocorre com as potências de i utilizando o termo "*loopy*"[25], também verificou que a natureza do expoente indica a sua posição nos eixos do plano Argand-Gauss (Figura 39).

Figura 39: Observações do participante E9.


criei também o ponto E, coloquei o valor $E = i^5$ e constatei, que é um loopy, o ponto E ficou excatamente sobre o ponto A.

constatando assim que os expoentes pares, os pontos sempre ficam sobre o eixo Re(Z).

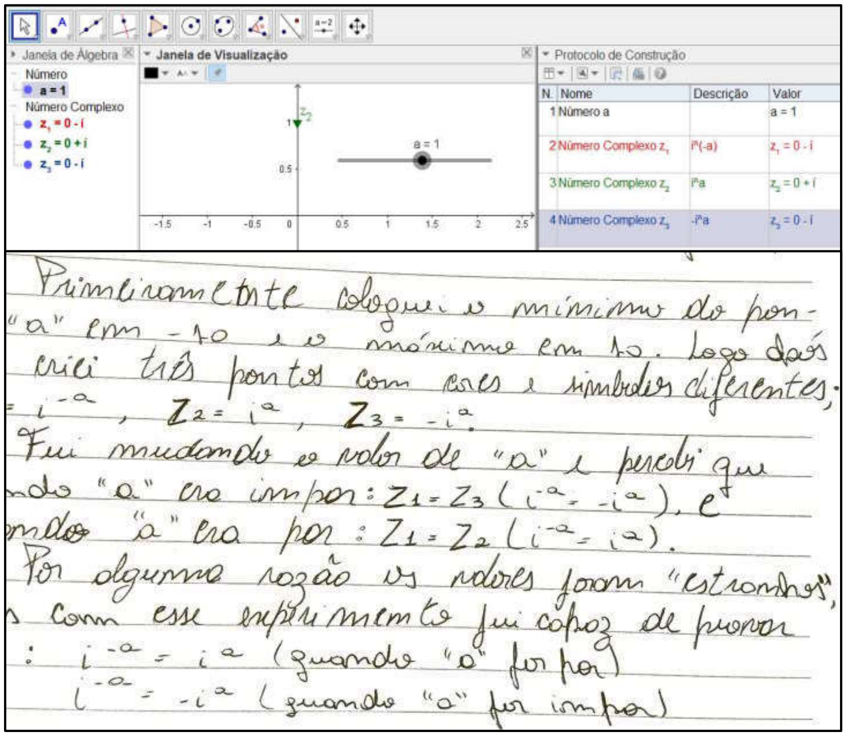
Constatei também que os expoentes, ímpar, os pontos sempre ficam sobre o eixo Im(Z)

Fonte: Acervo do pesquisador, 2018.

Para finalizar a análise desta atividade apresentam-se os comandos e maneira que participante E7 desenvolveu a tarefa. Observe na Figura 40 a construção no GeoGebra[26] e a descrição da atividade feita por este estudante.

[25] A escrita correta desse termo seria *loop* ou *loops* que significa laço, rotações ou circuito.
[26] No endereço a seguir encontra-se a construção realizada pelo E7: https://ggbm.at/vrzmxgmv

Figura 40: Raciocínio feito pelo E9 na resolução da atividade 3



Fonte: Acervo do pesquisador, 2018.

Este participante representou três números complexos variando o sinal expoente e da base; observe que na captura de tela ficou marcado no controle deslizante $a = 1$, assim o estudante verificou que $i^{-a} = -i^{a}$ pois os números complexos z_1 e z_3 que correspondem respectivamente a estas potências estão sobrepostas no registro gráfico e, também, é possível verificar a igualdade observando na janela de álgebra os mesmo valores no registro de representação algébrico.

Ao findar tal atividade foi possível observar que os estudantes conseguiram entender o comportamento das potências da unidade imaginária com expoentes inteiros, tanto no registro de representação algébrico como no gráfico. Além disso, a atividade evidenciou como a interface do ambiente de geometria dinâmico do GeoGebra corrobora para conjecturar, mostrar e simular o comportamento dos objetos matemáticos em diferentes registros de representação.

Duval (2011) demonstra (Quadro 9) as nuances que ocorrem no pensamento matemático quando da representação dos objetos no computador.

Quadro 9: Análise das tarefas cognitivas requeridas para a utilização de um computador

Menu de comando	**Ação**	**Atividade cognitiva mobilizada**
- Uma lista de termos designando os objetos matemáticos e as operações matemáticas ou não. - Lugar vazio para uma equação. - Uma tabela de ícones. - O *mouse* ou o *tablet.*	- Escolher um termo para instrução ou compor uma sequência de várias instruções. - Escrever uma equação. - Apoiar sobre um ícone. - Deslocar manualmente o *mouse.*	- Conhecimento dos termos matemáticos e DECOMPOSIÇÃO DA FIGURA ESPERADA EM FUNÇÃO DA ESCOLHA DOS TERMOS DO MENU. - Conversão automática de uma equação também já dada, ou COORDENAÇÃO PRELIMINAR PARA ESCOLHER O TIPO DE EQUAÇÃO A FIM DE OBTER O TIPO DE CURVA OU A SUPERFÍCIE ESPERADA. - Reconhecimento do ícone que codifica a instrução correspondente ao pedido. - Coordenação do gesto e da visão para manipular a figura obtida.

Fonte: Duval, 2011, p.138.

Pode-se então, utilizar a tarefa requisitada aos estudantes para ratificar o que foi mencionando nesse quadro, o menu de comando corresponde as ferramentas que o GeoGebra dispõe para formar, tratar e representar os aspectos que se deseja do objeto. A ação refere-se a dinâmica empregada nos termos e ícones para visualizar características do objeto quando algum parâmetro sofre alteração, no exemplo da tarefa, podemos apontar as ferramentas *mover* e *controle deslizante* que exercem exatamente a função de ação do objeto. E, a atividade cognitiva mobilizada refere-se ao reconhecimento ou correspondência entre as unidades que compõe o objeto nos registros de representação que o *software* é capaz de mostrar. No entanto, Duval (2011) argumenta que a mobilização requerida para a atividade cognitiva se agrava nesse ambiente:

> Difícil fazer um trabalho de observação ou de comparação sobre as variações de representações gráficas em relação às variações de formas escritas das equações. *Esse trabalho de observação e de comparação exige uma visão sinóptica de todas as variações feitas*. Em outros termos, é preciso que coapareçam no campo da visão as exibições sucessivas das variações de representações que requisitamos. (DUVAL, 2011, p. 138).

Diante disso, e com a realização das atividades até o momento, uma forma de evidenciar a *visão sinóptica* argumentada é utilizar-se de registros dinâmicos de representação na abordagem dos objetos, pois é por meio do movimento de parâmetros (ponto, reta, afixo, ângulo, entre outros) que as variações das representações podem ser melhor percebidas pelo observador. Assim, as hipóteses para esta atividade foram atendidas.

Atividade 4

Esta atividade foi planejada e aplicada com intuito de classificar os números complexos em: real, imaginário e imaginário puro. Para isso, fez-se a utilização de uma estratégia criada pelo pesquisador chamada *descobrindo a sua personalidade*, cujos objetivos foram a referida classificação dos números complexos e o primeiro contato com a representação de um número complexo com parte real e imaginária diferentes de zero, visto que nas atividades anteriores foram enfatizados aspectos referentes a unidade imaginária. Desta forma, a atividade marca o surgimento de outros números complexos, não apenas reais ou imaginários puros.

Inicialmente, o pesquisador argumentou aos estudantes que era possível verificar traços de personalidade em um referido ano utilizando as potências da unidade imaginária, como já explicado na análise *a priori*, resolvendo a seguinte expressão:

$$z = i^{dia} + i^{mês} + i^{ano}$$

Em seguida, dependendo da classificação dos números era dito que se tratava de um sonhador (caso resultasse em um número imaginário), purista (caso resultasse em um imaginário puro) e realista (caso resultasse num número real). Foram chamados alguns estudantes para encontrar o número complexo resultante da expressão acima na lousa e, em seguida, o pesquisador apontava a personalidade dos mesmos sem revelar o critério de classificação. Após um tempo os estudantes começam a entender e expressaram as seguintes conclusões:

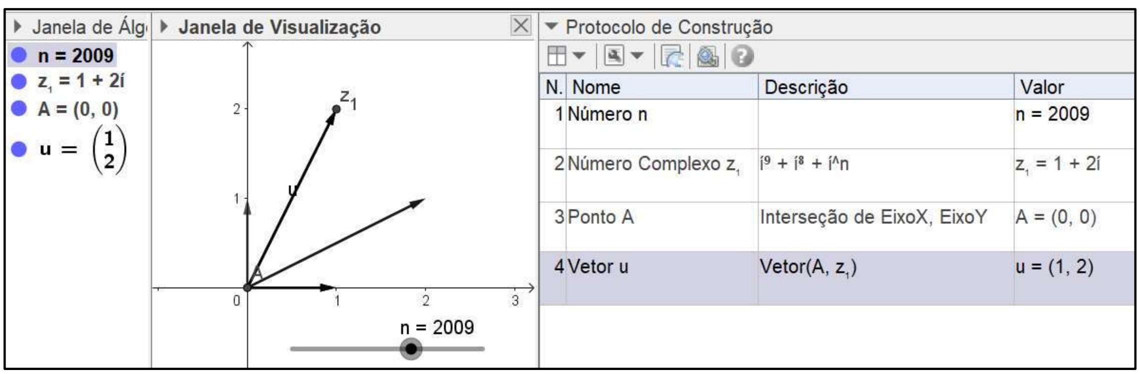
- Realista é só tem número.

- Sonhador tem que ter os dois.

-Purista só a parte imaginária.

Antes de realizar esta discussão sobre a classificação nos diferentes registros de representação, os alunos responderam à pergunta levantada na análise *a priori*, aquela que questionava se ao passar dos anos a personalidade mudaria. Para responder este questionamento os estudantes utilizaram o ambiente de geometria dinâmico para simular todas as personalidades desde o ano que nasceu até o momento. Assim, eles inseriram no campo de entrada a expressão $z = i^{dia} + i^{mês} + i^{n}$, onde n representar o intervalo dos anos, desde o nascimento até o momento. Desta forma, o estudante que nasceu 09/08/1994 (exemplo utilizado em sala) tem os seguintes rastros mostrados no GeoGebra (Figura 41).

Figura 41: Comandos para representar as variações de personalidades ao longo dos anos.



Fonte: Acervo do pesquisador, 2018.

Os estudantes realizaram esta construção no GeoGebra e compararam com os demais colegas, assim, percebam que nem todos perpassavam as 3 personalidades, pois ao animar a variação dos anos era possível visualizar no plano complexo o rastro dos números complexos. Quando questionados o motivo pelo qual alguns tinham apenas duas personalidades e não três, logo perceberam que não tinha relação com o ano de nascimento, mas sim, o dia e o mês. Juntamente com o pesquisador os estudantes começaram a testar diferentes valores na soma das potências do dia e mês chegando à seguinte conclusão, conforme demonstrado no quadro 10.

Quadro 10: Combinações das possíveis personalidades segundo a classificação dos números complexos

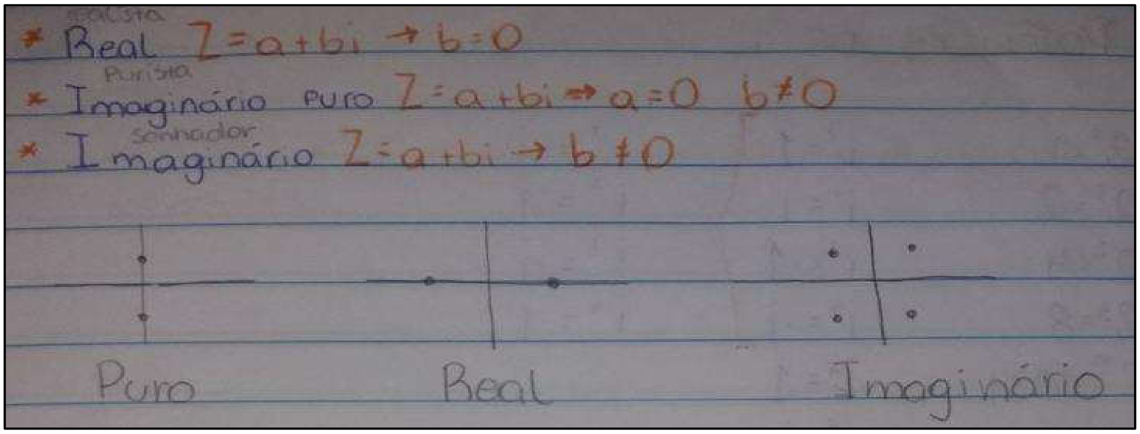
Classificação	$i^{dia} + i^{mês}$	i^{ano}	**Personalidades**
Imaginário puro	$2i$ ou $-2i$	$1, i, -1$ e $-i$	Sonhador e Purista
Imaginário	$1+i$, $1-i$, $-1+i$ ou $-1-i$		Todas
Real	2 ou -2		Sonhador e Realista
Zero	$1-1$, $-1+1$, $i-i$ ou $-i+i$		Purista ou Realista

Fonte: Elaborado pelo pesquisador, 2018.

Após a montagem desta tabela os estudantes ficaram curiosos em saber qual das quatro variações de personalidades era mais frequente. Embora seja um problema interessante para abordar probabilidade, a análise não foi realizada em sala devido ao tempo designado para outras atividades. No entanto, foram dados alguns apontamentos caso os alunos desejassem calcular, sendo assim, deveriam ser calculados todas as combinações de dia e mês e calculado as potências, em seguida, a classificação com maior frequência corresponderia às personalidades mais recorrentes.

Como previsto no planejamento os estudantes rapidamente conseguiram entender e apontar a classificação dos números complexos, todavia faltava rigor matemático para expressar as ideias. Assim, foi solicitado que representassem esta classificação utilizando forma algébrica ($z = a + bi$) e gráfica (plano Argand-Gauss). Na figura 42, segue a classificação sugerida pelo participante E5.

Figura 42: Classificação dos números complexos nos registros de representação algébrico e gráfico.



Fonte: Acervo do pesquisador, 2018.

A partir das representações dos estudantes foram realizadas algumas revisões de conjunto e redefinido certos conceitos, por exemplo, a escolha por representar da maneira como demonstrado na figura 42 é suficiente para os alunos que estão iniciando os estudos acerca desse novo conjunto. Apesar de algebricamente o estudante verificar que os imaginários puros são um subconjunto dos imaginários, no registro gráfico não ficou tão evidente esta percepção. Cabe nesse momento, a construção sugerida na análise *a priori* (vide Figura 18) utilizando o ambiente do GeoGebra.

Para ratificar o entendimento da classificação fez-se a elaboração da seguinte questão em uma das atividades avaliativas (não ocorreu após essa atividade e, sim após a atividade precedente a essa):

Sabendo que z_1 é um imaginário puro, z_2 um imaginário e z_3 um número real. Escolha valores para esses números complexos respeitando a sua classificação e calcule as seguintes operações: (a) $2z_1 + z_2$, (b) $(z_1 + z_3) \cdot z_2$ e (c) $\frac{z_2}{z_1}$

Dos participantes, 11 usaram um número imaginário com $a \neq 0$ e $b \neq 0$, ou seja, não utilizaram nenhum imaginário puro para representar um número imaginário. Houve uma exceção entre os participantes que fez a seguinte escolha:

$z_1 = i$ $\quad z_2 = 2i$ $\quad z_3 = 2$

a) $2z_1 + z_2$ $4i$

b) $(z_1 + z_3)\cdot z_2$ $-2+4i$

c) $\frac{z_2}{z_1}$ $\frac{2}{1}$

Quando questionados o motivo pelo qual não escolheram dois imaginários puros para representar z_1 e z_2 os participantes argumentaram que não se lembraram, mas sabiam que poderiam utilizar. Com intuito de verificar melhor o entendimento sobre a classificação dos números complexos foi solicitado, nos momentos finais da pesquisa, que os participantes estabelecessem a classificação dos complexos na forma polar, assim a seguinte questão foi levantada:

Questão 5 - (0,5) Explique como podemos classificar os números complexos (real, imaginário e imaginário puro) a partir de sua representação trigonométrica.

O motivo por escolher outra representação para classificar os números complexos vem ao encontro dos conceitos estudados da teoria de Duval, pois a compreensão de um objeto matemático está ligada a capacidade de acessá-lo em distintas representações semióticas. Observe algumas respostas a seguir (Figura 43).

Figura 43: Classificação dos números complexos apontada pelo E9, E7 e E6.

real: $Z = \rho\cdot(\cos(0) + i\,sen(0))$; $\rho \neq 0$ $\quad x \neq \{0; 90\}$
imaginário: $Z = \rho\cdot(\cos(x) + i\,sen(x))$; $\rho \neq 0$
imaginário puro: $Z = \rho\cdot(\cos(90) + i\,sen(90^\circ))$; $\rho \neq 0$

5. Real = quando o argumento for 0/360° ou 180°
Imaginario puro = quando o argumento for 90° ou 270°
Imaginario = quando o argumento for um ângulo entre 1° e 359°, exceto 90° e 270° e 180°.

5 - (0,5) Explique como podemos classificar os números complexos (real, imaginário
aginário puro) a partir de sua representação trigonométrica.
$y \neq 0^\circ$ e 180°
real $= x\cdot(\cos(0^\circ) + i\,sen(0^\circ))$ ou $\theta = 180^\circ$ $\quad x \neq 0$
imaginária $= x\cdot(\cos(y) + i\,sen(y))$
imaginário puro $= x\cdot(\cos(90^\circ) + i\,sen(90^\circ))$ ou $\theta = 270^\circ$

Fonte: Acervo do pesquisador, 2018.

Dos participantes, 4 conseguiram classificar os números complexos na forma polar (como é o caso do E6), 4 se aproximaram da resposta (cita-se por exemplo os estudantes E7 e E9) e, os demais definiram no registro de representação algébrico e não conforme solicitado na pergunta. Dessa maneira, o tópico mereceu um tempo extra para sanar as incompreensões antes de findar os estudos deste conteúdo.

Ao final desta atividade pode-se verificar que o ambiente de geometria dinâmica auxiliou na visualização das classificações dos números complexos, no entanto, o entendimento sobre conjunto e subconjunto não foi evidenciado pelas representações apresentadas no GeoGebra. Requerendo, assim, um tempo maior, pois foram exploradas três representações para o melhor entendimento e, consequentemente um custo cognitivo maior devido a articulação entre os registros de representação. Porém, cabe lembrar que na análise *a priori* foi dito que a correspondência entre as unidades significativas ($a = 0$, $b = 0$, $a \neq 0$ e $b \neq 0$) nas representações algébrica e gráfica não seria tão óbvia, pois requer o reconhecimento prévio dessas unidades visuais na representação gráfica.

Contudo, o ambiente de geometria dinâmica se tornou necessário nesta atividade para explorar os aspectos que compõem o quadro 10, utilizou-se para efetuar as simulações das potências da unidade imaginária e constatar as possíveis personalidades. Desta maneira, fica evidente que as contribuições do GeoGebra ganham notoriedade quando os registros dinâmicos de representação aparecem, conforme ilustrado na figura 41.

A hipótese levantada foi parcialmente atingida, pois no planejamento esperava-se que os registros de representação algébrico e gráfico seriam suficientes para o entendimento da classificação dos números complexos, porém houve a necessidade de se utilizar um novo registro (o gráfico) para sanar as lacunas existentes na classificação algébrico-gráfico.

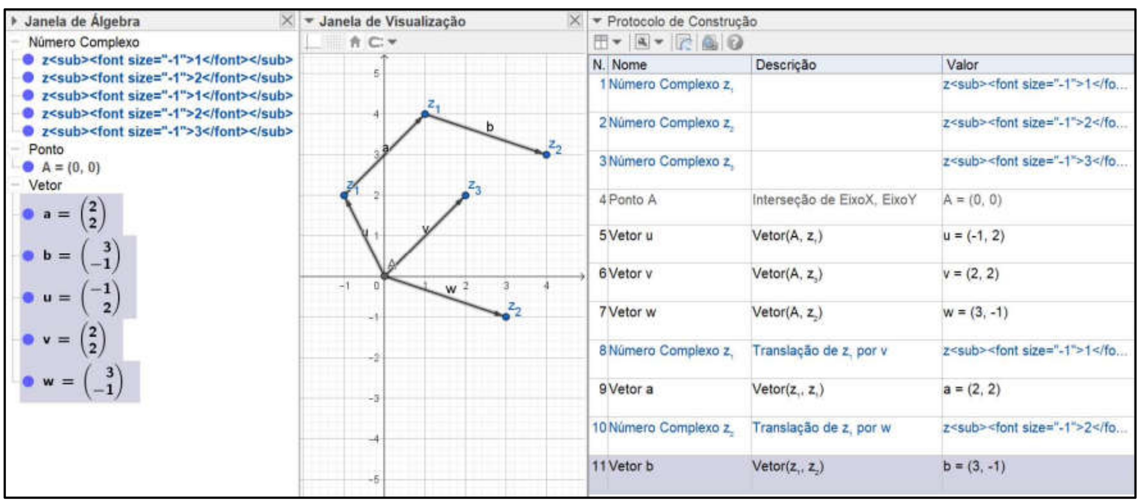
Atividade 5

Nesta atividade foram exploradas as operações com números complexos em dois registros: o algébrico e gráfico. Optou-se por explorar as operações no registro gráfico por dois motivos: (i) para mostrar que analogamente à atividade 2, os números complexos podem ser operados de um ponto de vista gráfico; (ii) para revelar características diferentes do objeto, apesar do registro polar não ser explorado nesta atividade, os estudantes podem perceber algumas unidades significativa de maneira implícita, como por exemplo, módulo e argumento (a partir de tratamento vetorial).

Devido a abordagem das quatro operações, esta atividade demandou mais tempo em detrimento das demais. Cabe relembrar, que as operações que serão apresentadas a seguir na forma gráfica foram antecedidas pelas respectivas operações na representação algébrica.

Iniciando pela adição, os estudantes conseguiram encontrar a soma no registro gráfico com facilidade, inclusive pelas três maneiras levantadas na análise *a priori.* Observe (Figura 44)[27] por exemplo a adição de três números complexos feito pelo participante E1.

Figura 44: Adição no registro gráfico realizada pelo participante E5.



Fonte: Acervo do pesquisador, 2018.

Assim, foi possível observar pelo protocolo de construção que o participante fez a translação dos afixos e depois criou os vetores, este modo representa a terceira opção que foi mostrada aos estudantes. Outros participantes realizaram todas as combinações de translação para verificarem se apontava para o mesmo

---

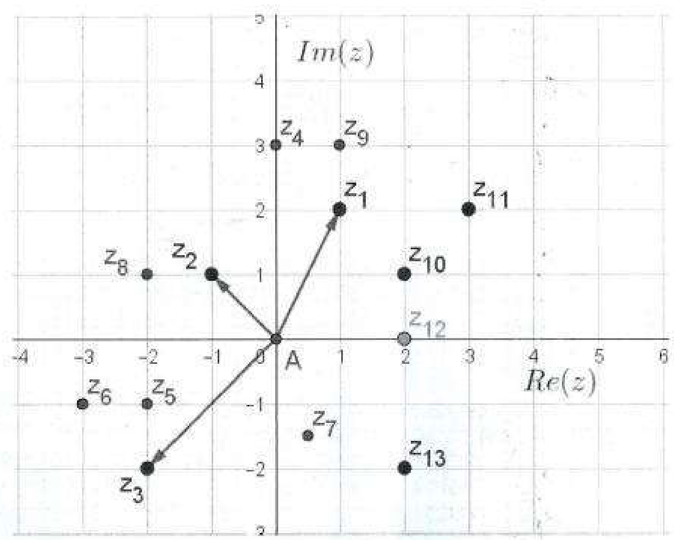
[27] A Figura 44 foi capturada na versão *desktop* do GeoGebra, no entanto a construção foi realizada pelo aplicativo e compartilhada com o pesquisador. Fez-se a opção abrir os arquivos .ggb no computador para conseguir na mesma tela mostrar as janelas de álgebra, visualização e protocolo de construção.

afixo[28]. Ainda nessa atividade foi proposto aos estudantes a construção de uma *calculadora gráfica*[29] que poderia calcular automaticamente a adição de dois números complexos.

Com intuito de verificar se os participantes entenderam essa operação tanto na representação algébrica como na gráfica foram propostos a resolução de alguns exercícios no ambiente lápis-papel, mas com auxílio de uma régua (instrumento físico). Uma das questões aplicadas foi a que está representada na Figura 45.

Figura 45: Questão relacionada à adição na representação gráfica.

Sendo z_1, z_2 e z_3 os números complexos correspondentes aos afixos no plano Argand-Gauss ilustrado abaixo.



Indique os afixos resultante das seguintes operações (mostre os cálculos ou descreva a estratégia que utilizou para responder):

a) $z_3 + z_1 + z_2$

b) $\frac{z_1}{z_2}$

c) $z_2 - z_3$

Fonte: Elaborado pelo pesquisador, 2018.

Dos participantes, nenhum realizou as operações utilizando apenas a representação gráfica, na totalidade os estudantes converteram os números complexos para a representação algébrica e efetuaram a soma, em seguida fizeram a utilização das transformações geométricas no plano, encontrando assim, os

[28] Construção disponível em: https://ggbm.at/fawnnjte.
[29] Observe a construção do participante E4 em: https://ggbm.at/g9yhawfb.

mesmos afixos. Um detalhe que chamou atenção durante a correção das respostas foi que todos os esboços da questão, realizada na malha quadriculada, foram apagados antes da versão a limpo. Durante a discussão realizada na correção em sala os estudantes argumentaram o seguinte:

- Usei a malha só para tirar a prova real.

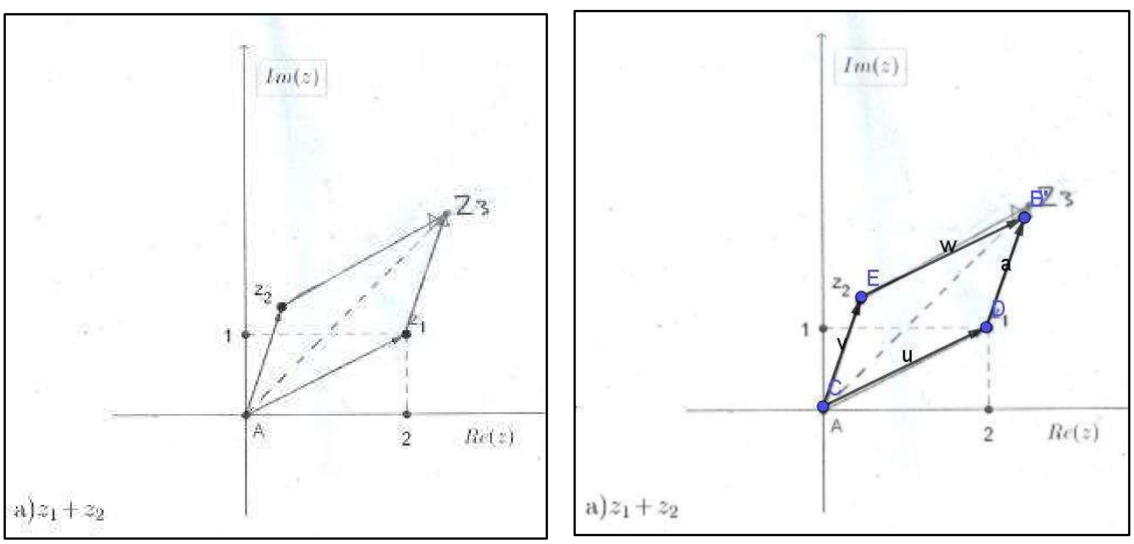
- Eu fiz no quadriculado primeiro, só que quis ver se estava certo.

- Não sabia como explicar usando os vetores, só sabia!

No planejamento desta questão foi levantada a hipótese de que a representação gráfica seria menos utilizada em detrimento do registro de representação algébrico, isto porque os afixos estavam sobre uma malha retangular, facilitando assim, a conversão para a representação algébrica.

No entanto, uma outra pergunta precedente a essa tinha por objetivo a adição de dois números complexos, porém a malha foi ocultada. Observe a resposta do participante E8 na figura 46.

Figura 46: Adição de números complexos no registro gráfico.



Fonte: Acervo do pesquisador, 2018.

Na imagem à esquerda encontra-se a construção do participante e na imagem à direita tem-se a verificação da soma utilizando o GeoGebra (verificação realizada pelo pesquisador). Assim, foi possível apurar que a operação de adição foi entendida pelos participantes, tanto na forma algébrica como na forma gráfica.

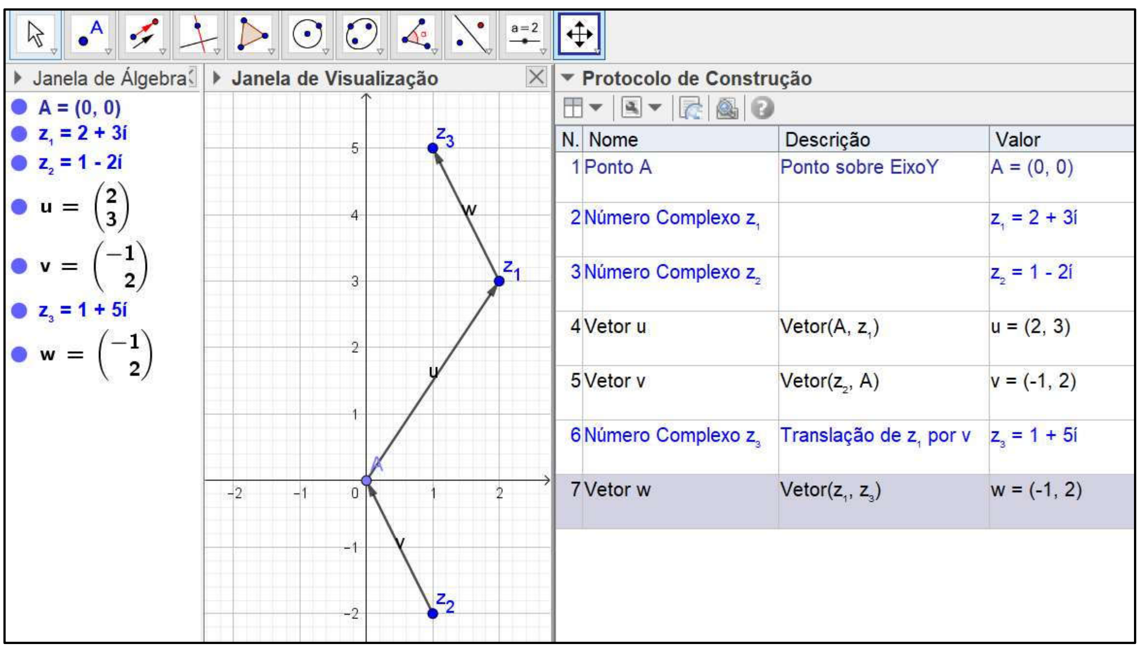
A subtração também foi facilmente assimilada pelos participantes, uma vez que todos esboçaram as transformações necessárias para encontrar o afixo resultante. Na análise *a priori* fez-se a abordagem dessa operação de duas formas, uma transformando a subtração numa adição e a outra utilizando a diagonal menor do paralelogramo (vide Figuras 20 e 21). A maioria dos estudantes, incluindo os participantes, utilizaram-se da primeira maneira (Figura 20), atestando a hipótese levantada, pois nela era requerido uma menor quantidade de transformações e, por consequência, minimiza os custos de operação e cognição nesta atividade.

No entanto, dois participantes modificaram aquela forma de calcular por meio da diagonal menor do paralelogramo. Foi solicitado que eles compartilhassem a construção no GeoGebra da seguinte operação:

$$(2+3i)-(1-2i)=???$$

Na figura 47 encontra-se a devida construção juntamente com seu protocolo.

Figura 47: Subtração apresentada pelo participante E6

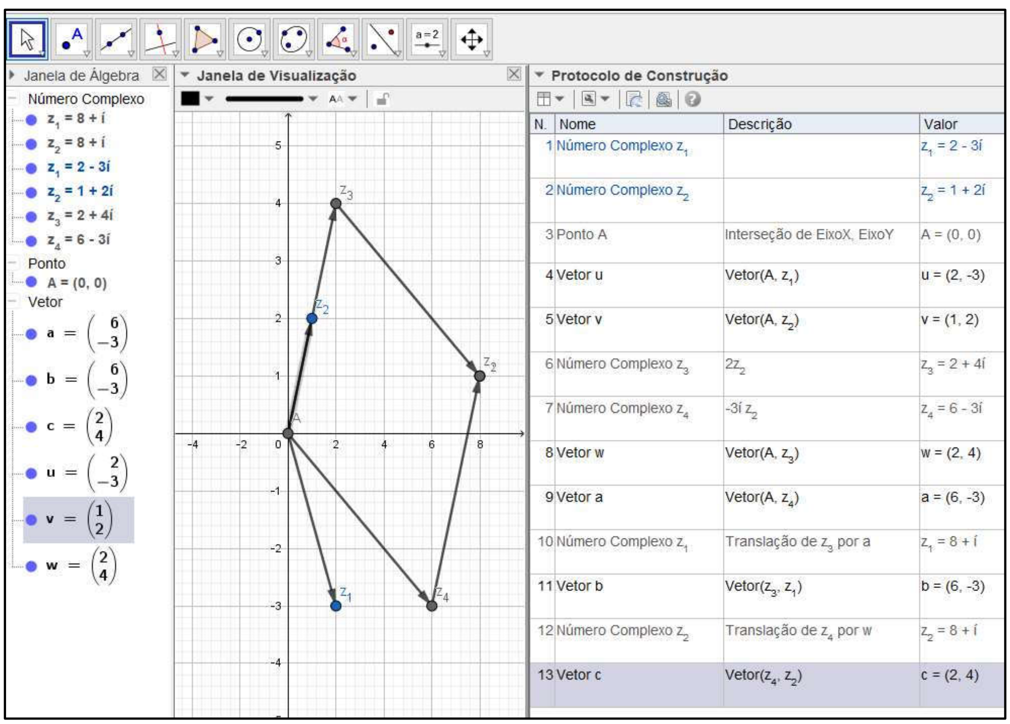


Fonte: Acervo do pesquisador, 2018.

Ao analisar à primeira vista casou estranheza a forma como foi realizada, visto que o vetor resultante não fora construído (seria o vetor $\overrightarrow{Az_3}$). Mesmo assim, era possível verificar que o afixo z_3 correspondia a solução correta da operação. Apenas com visualização do protocolo de construção foi possível entender o raciocínio do estudante, veja bem, o afixo z_1 corresponde ao número complexo $2 + 3i$ e o afixo z_2 ao número complexo $1 - 2i$, ao construir o vetor associado ao segundo afixo o estudante inverteu o sentido, assim, não foi necessário encontrar o vetor oposto. Daí fez-se a translação do vetor $\vec{v}$ em z_1, que apontou para o afixo z_3.

Diferentemente das operações anteriormente estudadas, a multiplicação no registro de representação gráfica foi de difícil acesso aos participantes, uma porque abarca mais duas transformações geométricas (rotação e homotetia) e, também, porque requer um tratamento no registro de representação algébrica antes de se utilizar o registro gráfico. Observe a multiplicação de dois números complexos (Figura 48) realizada pelo participante E11 para entender o tratamento necessário mencionado.

Figura 48: Multiplicação de dois números complexos no registro gráfico.



Fonte: Acervo do pesquisador, 2018.

Nesse exemplo o participante está multiplicando os números complexos $z_1 = 2 - 3i$ e $z_2 = 1 + 2i$. O estudante fez o seguinte tratamento em seu caderno antes de aplicar as transformações:

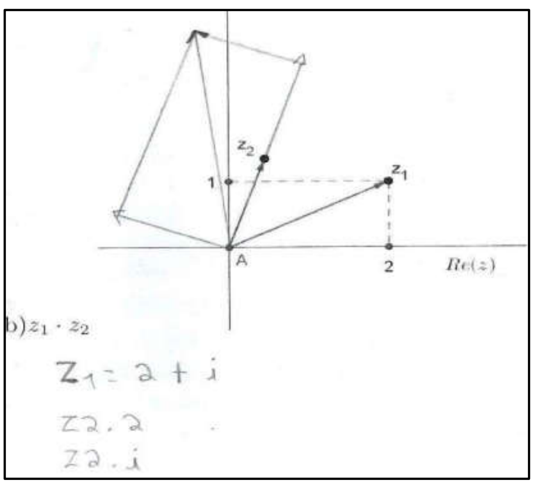
$$z_1 \cdot z_2 = (2 - 3i) \cdot z_2 = 2z_2 - 3iz_2$$

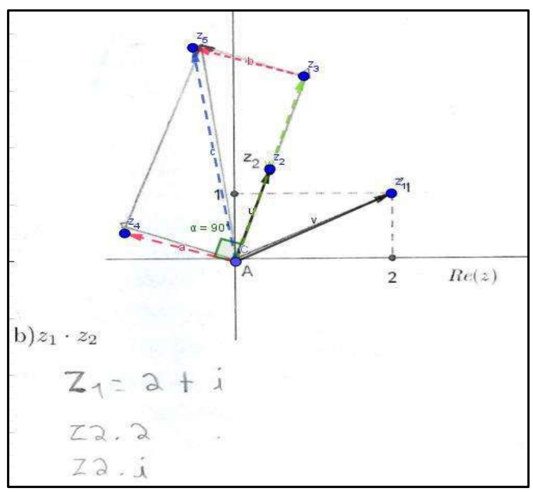
Observando a figura 48, o afixo z_3 representa $2z_2$ (homotetia 2) e o afixo z_4 corresponde a $-3iz_2$, ou seja, homotetia 3 juntamente com uma rotação de 90^o no sentido horário (devido a unidade imaginária negativa). Após isso, a multiplicação se transformou numa adição, que foi resolvida transladando os vetores.

Anteriormente a este exemplo foi construído junto aos estudantes a multiplicação por meio das transformações geométricas no plano, entretanto, maioria dos participantes não fizeram a utilização destes recursos. Perceba no protocolo de construção da Figura 50 que não foram utilizadas as transformações de rotação e homotetia para chegar ao resultado da multiplicação (deveriam ser utilizadas no passo 6 e 7). Apenas dois participantes compartilharam a atividade utilizando as transformações requerida e, coincidentemente, apenas esses conseguiram operar a multiplicação no registro gráfico fora do ambiente do GeoGebra.

Analogamente ao exercício da Figura 46, onde foi solicitado a adição dos números complexos no registro de representação gráfica, também foi pedido a multiplicação nesse mesmo registro. Observe a construção (Figura 49) do participante E3 que conseguiu efetuar a operação.

Figura 49: Multiplicação no registro gráfico-retangular feito pelo participante E3





Fonte: Acervo do pesquisador, 2018.

Na imagem à esquerda percebe-se o tratamento realizado pelo estudante antes de efetuar as transformações, a imagem à direita foi reconstruída pelo pesquisador no GeoGebra para evidenciar as transformações realizada no plano, note que o vetor em verde representa a homotetia 2 no número complexo z_2, o vetor em vermelho (que aponta para z_4) representa a rotação que acontece quando da multiplicação pela unidade imaginária, o outro vetor vermelho representa a translação realizada para efetuar a adição final e o vetor em azul representa o produto dos referidos números complexos.

Embora esta atividade tivesse em seu escopo a operação de divisão na forma gráfica, a mesma não foi aplicada devido à falta de tempo. Assim, a referida operação foi abordada apenas no registro de representação algébrico.

Ao final desta sequência de operações foi possível averiguar que o entendimento das operações no registro de representação gráfico-retangular se mostrou de melhor compreensão, quando desenvolvido dentro do ambiente de geometria dinâmica. Ainda que nessa atividade pouco se realizou a utilização de registros dinâmicos, o entendimento das transformações geométricas requerida nas operações foi evidenciada pelas ferramentas do GeoGebra, o que demonstra isso, foi a incapacidade da maioria dos participantes de conseguirem realizar as rotações, translações e homotetias no ambiente lápis-papel. Por outro lado, a utilização do GeoGebra para operar os números complexos proporcionou o conhecimento das transformações geométricas de maneira integrada a um conteúdo, não como tema isolado ou fora de contexto.

As hipóteses sugeridas foram evidenciadas nesta sequência, na primeira foi apontado que estudantes não encontrariam dificuldades de operar adição e subtração no registro de representação gráfico-retangular e, de fato, os participantes inclusive encontraram maneiras diferentes de operar no plano. Já a segunda hipótese foi parcialmente atendida, uma vez que a operação de divisão não foi executada no registro de representação gráfico e, segundo porque a operação de multiplicação foi facilmente executada no GeoGebra, porém no ambiente lápis-papel foram encontradas as dificuldades mencionadas no planejamento.

Atividade 6

Nesta última atividade foram abordados todos os registros de representações previstos para esta pesquisa, pois foram utilizados (registro de representação algébrica (binomial e polar) e registro de representação gráfica). A transformação entre as representações algébricas acontecera mediada pelas representações no registro gráfico, que por sua vez, ocorreram no ambiente de geometria de dinâmica. E, novamente, os registros dinâmicos de representação foram essenciais para esta atividade.

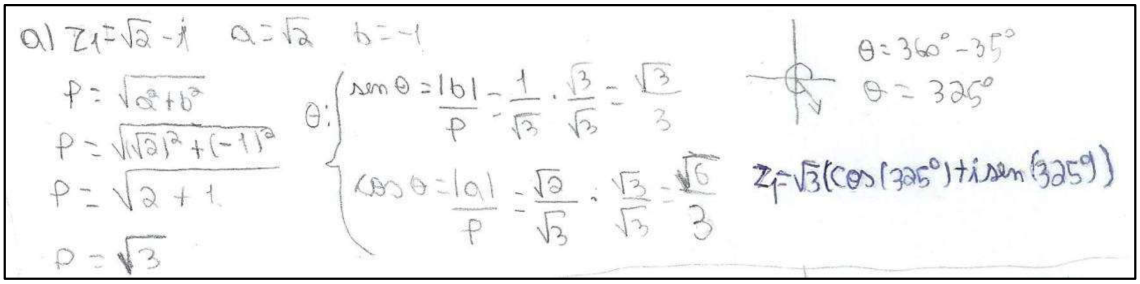
Pois bem, inicialmente foi discutido com os estudantes que há uma nova forma de representar os números complexos. Em seguida, foi solicitado a eles que modificassem a malha do GeoGebra de retangular para polar e foi perguntado como acontece a localização de um ponto neste sistema de coordenadas. Como nenhum estudante teve contato com coordenadas polares, nenhum conseguiu compreender quais unidades significativas e visuais compõem esse sistema de coordenadas.

Desta maneira, deu-se início a construção do protocolo das figuras 23 e 24, onde são abordadas a conversão de coordenadas. Após a realização do protocolo, tal como mostra as notas de rodapé 13 e 14, os estudantes perceberam rapidamente que as coordenadas polares relacionam o ângulo formado entre abscissa e o vetor associado ao número complexo, bem como a distância da origem até o afixo no plano complexo.

Em suma, os estudantes primeiro converteram as representações algébricas para a representação no registro gráfico, onde se atestou maior compreensão das unidades significativas destas representações. No entanto, ao realizar a mesma conversão entre as representações algébricas sem o uso das representações gráficas e fora do ambiente de geometria dinâmica, observou-se nitidamente um caso de dissimetria das unidades significativas, ou melhor, a não congruência entre as representações do registro algébrico (conforme Figura 2).

Isto fora percebido observando a conversão entre as representações algébricas binomial e polar, os estudantes que no ambiente lápis-papel utilizavam como rascunho (representação auxiliar) o registro gráfico tiveram uma alta taxa de sucesso entre as conversões (algébrico-polar) e, em contrapartida, aqueles que dispensavam a utilização da representação no registro gráfico apresentaram problemas em relacionar as unidades significativas das representações envolvidas. Observe (Figura 50), por exemplo, a resolução deste participante que utilizou como auxílio o registro gráfico.

Figura 50: Conversão entre as representações algébrica e polar



Fonte: Acervo do pesquisador, 2018.

A maior dificuldade por parte dos estudantes na conversão entre estas representações é determinar o valor do argumento, fora do GeoGebra os alunos não conseguiram entender que o quadrante em que se encontra o número complexo na forma polar está relacionado aos sinais da parte imaginária e real.

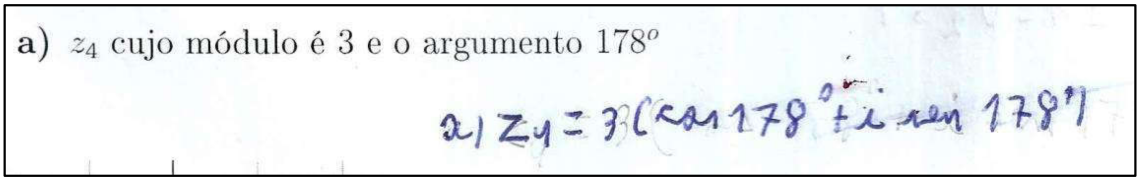
Uma forma para contornar este obstáculo foi abordar em módulo os valores de seno e cosseno (conforme ilustra a Figura 50, o estudante considerou a parte real e imaginária como valor absoluto) e depois utilizar a representação gráfica para auxiliar o estudante na visualização de qual quadrante se encontra o número complexo. Desta forma, o aluno obtém um argumento no primeiro quadrante e em seguida converte para o quadrante que se encontra o afixo (vide no canto direito superior da Figura 50).

Este exemplo clarifica exatamente o que discorre Duval (2009) sobre a não-congruência, onde "não apenas o tempo de tratamento aumenta, mas a conversão pode se revelar impossível de efetuar, ou mesmo de compreender". Neste caso, os estudantes buscaram recurso em outro registro de representação e realizaram um tratamento (o cálculo para redução de quadrante). Cita-se neste momento, que o problema enfrentado para tal conversão pode estar relacionado com a insuficiência de objetos alusivos ao conteúdo de trigonometria.

Diante disto, tornou-se necessário verificar se não havia mais casos de não-congruência que envolvessem outras transformações no registro de representação polar. Assim, foram estruturadas tarefas que exigiam que o estudante reconhecesse as unidades de sentido que compõem tal registro.

A primeira questão levantada tinha por objetivo identificar se os participantes conseguiam converter as representações da língua natural para o registro de representação polar. Observe (Figura 51) a pergunta juntamente com a resposta do participante E10.

Figura 51: Conversão da representação em língua natural para representação polar.


a) z_4 cujo módulo é 3 e o argumento 178^o

a) $Z_4 = 3(\cos 178^o + i \,\text{sen}\, 178^o)$

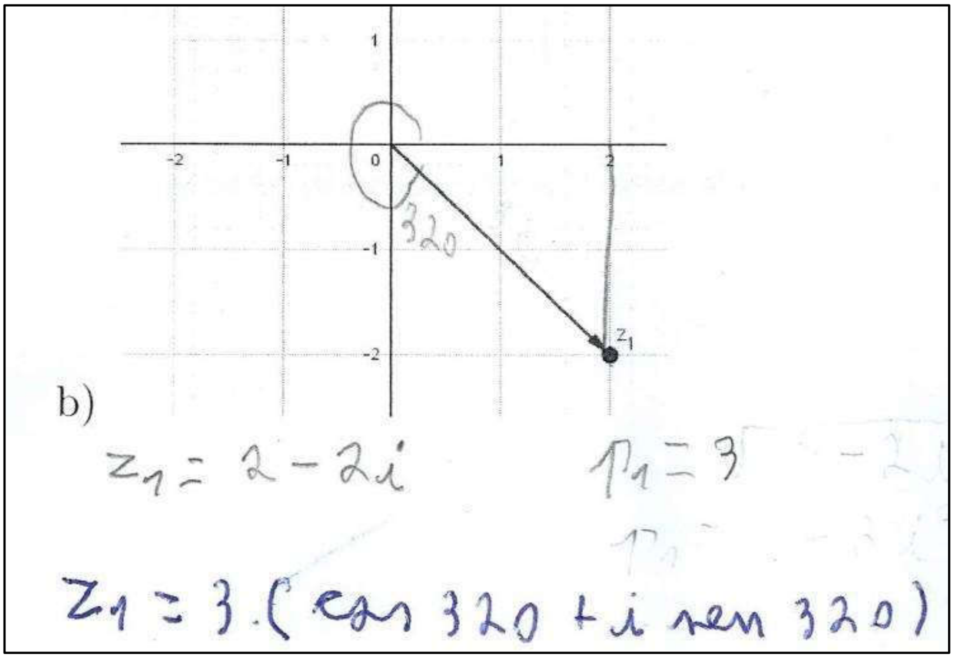
Fonte: Acervo do pesquisador, 2018.

Dos 12 participantes, 9 conseguiram realizar a conversão exatamente da mesma forma como o E10 representou e os demais também converteram para a representação no registro polar, mas em seguida converteram para representação retangular (ambas são representações algébricas). Isto evidencia que estes 3 estudantes ainda não compreenderam que um número complexo pode ser representação de duas maneiras distintas.

Nesse momento, retomou-se aquelas construções realizadas no GeoGebra (Figura 24) e foi solicitado que os estudantes em duplas visualizassem no plano Argand-Gauss o mesmo número complexo nas representações gráfica-retangular e gráfica-polar. Somente no registro gráfico os estudantes perceberam que as distintas representações algébricas correspondem ao mesmo afixo no plano, isto é, o mesmo número complexo.

A segunda questão (Figura 52) apresentava um número complexo por meio de representação gráfica (retangular) e solicitava a representação polar. Para esta atividade os estudantes poderiam utilizar régua e transferidor.

Figura 52: Conversão entre as representações gráfica (retangular) e polar.

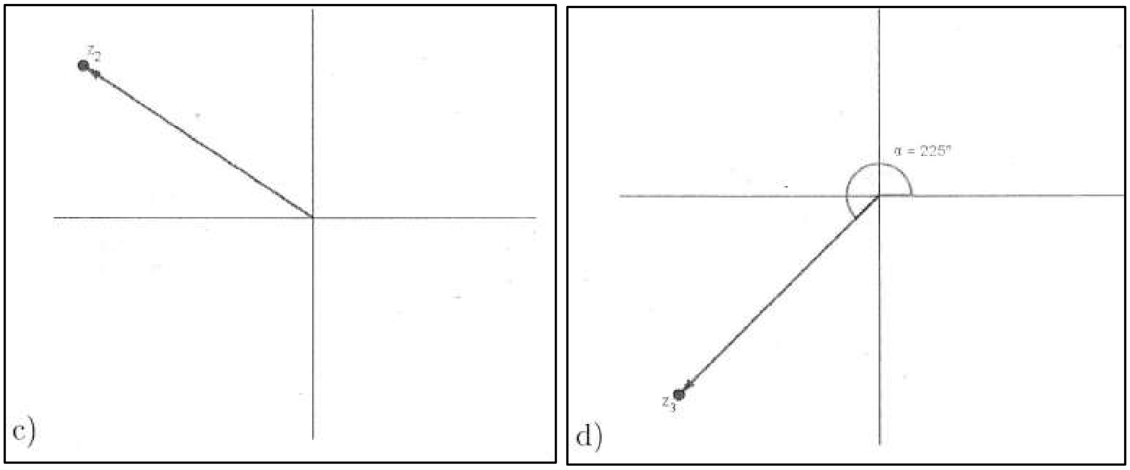


Fonte: Acervo do pesquisador, 2018.

Todos os participantes conseguiram efetuar esta conversão, alguns para a forma binomial ($z = a + bi$) e, em seguida, para a representação polar (efetuaram os cálculos para encontrar o módulo e argumento). Outros utilizam os instrumentos de medidas para verificar os valores do módulo e argumento. Perceba que o participante E10 encontrou valores próximos para o argumento (valor exato seria 315^o) e para o módulo (valor exato seria $2\sqrt{2}$). O importante é verificar que eles compreendem o sentido das unidades significantes e visuais nos registros utilizados.

As duas questões seguintes (Figura 53) apresentam os afixos no plano e revelam parcialmente as unidades significativas no registro gráfico.

Figura 53: Tarefas para converter as representações gráfica e polar.



Fonte: Elaborado pelo pesquisador, 2018.

Por meio desses questionamentos foi possível verificar que a conversão entre as representações do registro algébrico se demonstrou incongruente. No entanto, o auxílio da representação gráfica no ambiente de geometria dinâmica se lançou como uma alternativa para clarificar a correspondência entre as unidades significativas e visuais, mesmo que tenha demandado custos de tratamento, a representação gráfica tornou possível a conversão.

7. VALIDAÇÃO E CONSIDERAÇÕES FINAIS

As pesquisas de caráter qualitativo têm por efeito apontar conclusões baseadas numa tríade fundamentada em estudos preliminares, experimentação e validação. Por esta pesquisa utilizar uma metodologia que criva as etapas de execução, não dirime a complexa tarefa de atestar as hipóteses que nesta área (Educação) ganha tamanha complexidade e dimensão. Sendo assim, a maneira em que se apresenta as conclusões perpassa os instrumentos e critério de pesquisa, se debruça em explorar o processo e não apenas os resultados aqui apresentados.

Embora esta pesquisa busque analisar de forma relacional a interferência do ambiente de geometria dinâmica nas representações semióticas quando da abordagem dos números complexos, as hipóteses levantadas em cada atividade primam por revelar as contribuições dessa engenharia didática para o processo de ensino e aprendizagem, isto é, os objetivos de pesquisa serão elucidados a partir da ratificação parcial e/ou total das hipóteses apontadas.

Cabe destacar, também, que as produções dos participantes desta pesquisa merecem ser analisadas de acordo com certas condições: a primeira e mais importante diz respeito ao rol de objetos matemáticos conhecidos pelos mesmos, se observou e investigou estudantes do ensino médio que desconhecem conteúdos relacionados ao campo analítico e geométrico que podem interferir no objeto pesquisado. E segundo, os estudantes iniciaram as atividades desconhecendo o ambiente de geometria dinâmica elegido – o GeoGebra. Tais condições apontadas diferenciam a presente pesquisa em relação as demais levantadas no estado do conhecimento, mas que por outro lado, se pode mostrar o potencial dos ambientes dinâmicos mesmo desconhecendo os menus, as ferramentas e funções.

No que diz respeito às atividades aplicadas, as mesmas contemplam uma forma de abordar os números complexos que se utiliza de outros objetos matemáticos para clarificar sua relevância e importância, pois ao relembrar os conjuntos, as operações, o tratamento vetorial e geométrico os estudantes encaram como uma continuação, e não, como um conteúdo desgarrado de aplicações ou irrelevante frente aos outros conteúdos estudados.

De maneira geral, as atividades (sequências didáticas) desenvolvidas ratificaram próximo da totalidade as hipóteses levantadas. Levando a conclusão de que os participantes da pesquisa se apropriaram das representações e transformações semióticas inerentes do objeto em estudo e, isso revela o quão significativo torna o ensino mediado pela confluência entre as representações semióticas e os ambientes de geometria dinâmica.

A consolidação da definição e das operações com número complexo foram visivelmente impactadas pelo uso dos recursos digitais utilizados na grande maioria das atividades, cita-se por exemplo, a segunda e a terceira atividade que revelaram dentre alguns aspectos, a autonomia e a capacidade de investigação com que os participantes utilizaram do ambiente para satisfazer as dúvidas e questionamentos.

De maneira objetiva, o ambiente de geometria dinâmica do GeoGebra interferiu de duas formas nas representações utilizadas, sendo que a primeira foi na possibilidade de tornar os registros de representação dinâmico. E, a segunda, consequência da anterior, permitiu uma maior congruência entre os registros de representação utilizados nas atividades. A forma como os registros dinâmicos evidenciam o comportamento das unidades visuais e/ou significativas das representações imbrica na correspondência entre essas unidades. No entanto, uma nova forma é requerida ao conduzir o ensino e a aprendizagem, uma vez que o professor necessita aguçar, conforme afirma Duval (2011), uma visão sinóptica entre as representações expostas na tela do computador.

As atividades que utilizaram o GeoGebra, especificamente aquelas que se fez o uso de registros dinâmicos de representação, propiciaram aos estudantes evidenciar em múltiplas representações das unidades significativas/visuais que compõem os números complexos. Acredita-se que por dois motivos, ambos estão ligados às possibilidades recorrentes do ambiente de geometria dinâmica do GeoGebra, seja pela capacidade de virtualização[30] dos diferentes registros de representação, mas também pela capacidade de tornar as unidades significantes em unidades-significantes-visuais-dinâmicas.

Há uma distância na compreensão do comportamento das unidades significativas apresentada discursivamente pelo professor em relação ao comportamento dinâmico que acontece no GeoGebra, que não é apenas a ilustração na tela, mas sim o estudante perceber o comportamento antes mesmo de o professor revelá-lo. Dessa forma, percebe-se que situações *adidáticas* se

---

[30] Virtualização no sentido de Levy (2011) o que existe em potência não em ato.

presentificam com frequência no desenvolvimento de atividades realizadas nestes ambientes.

Por fim, cabe salientar que a presente pesquisa não primou esgotar os estudos referentes ao ensino dos números complexos, mas sim trazer outras contribuições, principalmente para utilização de recursos digitais na Educação Básica. Dessa forma, algumas indagações surgiram no decorrer da pesquisa, por exemplo, se evidenciou uma necessária discussão referente a realocação dos números complexos no atual currículo. A abordagem dos números complexos já no primeiro ano de ensino médio se faz necessário? Os tópicos teriam a mesma profundidade quando da abordagem no primeiro ano do ensino médio comparado ao ensino no último ano? Em relação ao uso de recursos digitais em situações de ensino, quais mudanças seriam necessárias?

Dito isso, espera-se que essa pesquisa evoque aos leitores outras discussões referentes aos números complexos, seja de um ponto de vista curricular, didático, semiótico ou metodológico. Pois um objeto rico em representações semióticas, sejam elas algébricas, geométricas, trigonométricas, gráficas, entre outras, merece se atualizar no currículo e ser visado como objeto de ensino nos mais diversos níveis da educação.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, M. E. B. Tecnologias na educação: dos caminhos trilhados aos atuais desafios. Bolema, Rio Claro, v.21, n.29, p.99-129, 2008.

ALMOULOUD, S. Fundamentos da didática da matemática. Curitiba: Editora UFPR, 2007.

AMORIM, T. M. O estudo dos números complexos no ensino médio: uma abordagem com a utilização do GeoGebra. 2014. 238 f. Dissertação (Mestrado em Ciências Exatas) – Universidade Federal de São Carlos, Sorocaba, 2014.

ARTIGUE, M. Ingeniería didáctica. In. GÓMEZ, P. (Editor). Ingeniería didáctica em educación matemática – un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica, p. 33-60, 1995.

BERND, A. B. Registros de representações semióticas e a utilização de ambiente de geometria dinâmica na aprendizagem de conceitos de geometria analítica. CINTED-UFRGS Novas Tecnologias na Educação, Porto Alegre, v.14, n. 2, dez. 2016.

BORBA, M. C; PENTEADO, M. G. Informática e Educação Matemática. Belo Horizonte: Autêntica, 2016.

BOYER, C. B. História da matemática. São Paulo: Edgard Blücher, 2002.

BRASIL, Secretaria de Educação Média e Tecnológica. PCN+: ensino médio – orientações educacionais complementares aos parâmetros curriculares nacionais. Brasília: MEC, 2002.

______, Ministério da Educação. Matemática e suas tecnologias: livro do estudante: ensino médio. Brasília: MEC: INEP, 2006a.

______, Ministério da Educação. Orientações curriculares para o ensino médio. Brasília: MEC/SEF, 2006b.

CARDOSO, M. C. Conciliação de metas, relevância e registros de representação semiótica em matemática. 2015. 173 f. Tese (Doutorado em Ciências da Linguagem) – Universidade do Sul de Santa Catarina, Tubarão, 2015.

CONTINI, F. Um diagnóstico da aprendizagem das conversões de registro, no caso dos números complexos. 2016. 199 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Anhanguera, São Paulo, 2015.

D'AMORE, B. Epistemologia e didática da matemática. São Paulo: Escrituras Editora, 2005.

DANTE, L. R. Matemática: contextos & aplicações. São Paulo: Ática, 2013.

______. Primeiros elementos de semiótica: sua presença e sua importância no processo de ensino-aprendizagem da matemática. São Paulo: Livraria da Física, 2015.

DUVAL, R. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: Machado, S. D. A. (Org.). Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica. Campinas: Papirus, p.11-33, 2003.

______. Semiósis e pensamento humano: registros semióticos e aprendizagens intelectuais. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

______. Ver e ensinar a matemática de outra forma: entrar no modo matemático de pensar: os registros de representação semióticas. São Paulo: PROEM, 2011,

FREITAS, J. L. M; REZENDE, V. Entrevista: Raymond Duval e a teoria dos registros de representação semiótica. Revista Paranaense de Educação Matemática, Campo Mourão, v.2, n.3, p.10-34, jul.-dez. 2013.

GIOVANNI, J. R; BONJORNO, J. B. Matemática completa. São Paulo: FTD, 2005.

GRAVINA, M. A. Os ambientes de geometria dinâmica e o pensamento hipotético-dedutivo. 2001. 277 f. Tese (Doutorado em Informática na Educação) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2001.

______. O potencial semiótico do GeoGebra na aprendizagem da geometria: uma experiência ilustrativa. VIDYA, Santa Maria, v. 35, n. 2, p. 237-253, jul.-dez. 2015.

LÉVY, P. O que é o virtual?. São Paulo: Editora 34, 2.ed, 2011.

MONZON, L. W. Números complexos e funções de variável complexa no ensino médio – uma proposta didática com uso de objeto de aprendizagem. 2012. 134 f. Dissertação (Mestrado Profissionalizante em Ensino de Matemática) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2012.

OLIVEIRA, C. N. C. Números complexos: um estudo dos registros de representação e de aspectos gráficos. 2010. 190 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2010.

PAIS, L. C. Didática da matemática: uma análise da influência francesa. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2015.

PAIVA, M. Matemática. São Paulo: Moderna, 2004.

ROQUE, T. História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

SILVA, C. M. S. O livro didático mais popular de Leonhard Euler e sua repercussão no Brasil. Revista Brasileira de História da Matemática, v. 9, n.17, p.33-52, 2009.

STEWART, I. Dezessete equações que mudaram o mundo. Rio de Janeiro: Zahar, 2013.

STORMOWSKI, V.; GRAVINA, M. A.; LIMA, J. V. Tecnologia na aula de matemática: a importância do potencial semiótico. CINTED-UFRGS Novas Tecnologias na Educação, v.11, n.3, 2013.

VALENTE, J. A. Pesquisa, comunicação e aprendizagem com o computador: o papel do computador no processo ensino-aprendizagem. In: Integração das tecnologias na educação. Secretaria de Educação a Distância. Brasília: Ministério da Educação, Seed, 2005.

VIANA, O. A.; BOIAGO, C. E. P. Registros de representação semiótica em atividades de desenho geométrico no GeoGebra. Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática, Florianópolis, v. 10, n. 1, p. 162-182, set. 2015.

APÊNDICES

Apêndice A – Termo de assentimento assinado pelos participantes da pesquisa

TERMO DE ASSENTIMENTO

Você está sendo convidado(a) como voluntário(a) a participar da pesquisa "Registros Dinâmicos de Representação: uma análise no ensino dos números complexos". Neste estudo pretendemos investigar o uso de tecnologias digitais no ensino de matemática e, para isso, será aplicado durante as aulas de matemática atividades que primam a utilização desses recursos, visando melhorias tanto no ensino quanto na aprendizagem.

Para este estudo adotaremos o(s) seguinte(s) procedimento(s): aplicação de atividades que visam implementar o uso de recursos digitais (computadores, smartphones, softwares, entre outros) no ensino dos números complexos. E, para formar uma base de dados e informações precisaremos de imagens do caderno, arquivos e imagens do software que será utilizado e registro de áudio do participante.

Para participar deste estudo, o responsável por você deverá autorizar e assinar um termo de consentimento. Você não terá nenhum custo, nem receberá qualquer vantagem financeira. Você será esclarecido(a) em qualquer aspecto que desejar e estará livre para participar ou recusar-se. O responsável por você poderá retirar o consentimento ou interromper a sua participação a qualquer momento. A sua participação é voluntária e a recusa em participar não acarretará qualquer penalidade ou modificação na forma em que é atendido(a) pelo pesquisador que irá tratar a sua identidade com padrões profissionais de sigilo. Você não será identificado em nenhuma publicação. Este estudo apresenta risco mínimo, isto é, o mesmo risco existente em atividades rotineiras como conversar, tomar banho, ler etc.

Os resultados estarão à sua disposição quando finalizada. Seu nome ou o material que indique sua participação não será liberado sem a permissão do responsável por você. Os dados e instrumentos utilizados na pesquisa ficarão arquivados com o pesquisador responsável por um período de 5 anos, e após esse tempo serão destruídos. Este termo de consentimento encontra-se impresso em duas vias, sendo que uma cópia será arquivada pelo pesquisador responsável e a outra será fornecida a você.

Eu, ____, portador(a) do documento de Identidade ___________________ , fui informado(a) dos objetivos do presente estudo de maneira clara e detalhada e esclareci minhas dúvidas. Sei que a qualquer momento poderei solicitar novas informações e o meu responsável poderá modificar a decisão de participar, se assim o desejar. Tendo o consentimento do meu responsável já assinado, declaro que concordo em participar desse estudo. Recebi uma cópia deste termo assentimento e me foi dada a oportunidade de ler e esclarecer as minhas dúvidas.

Pelotas, ____ de _____________ de 2018

____

Assinatura do(a) menor

____

Assinatura do pesquisador

Em caso de dúvidas com respeito aos aspectos éticos deste estudo, você poderá consultar:

PESQUISADOR RESPONSÁVEL: RAFAEL DOS REIS PAULO
FONE: (48)999958342
E-MAIL: drp.rafael@gmail.com

Apêndice B – Termo de Consentimento e Livre Esclarecido assinado pelos responsáveis dos participantes da pesquisa

TERMO DE CONSENTIMENTO E LIVRE ESCLARECIDO

Dados de identificação:

Título do Projeto: Registros Dinâmicos de Representação: uma análise no ensino dos números complexos
Pesquisador Responsável: Rafael dos Reis Paulo
Nome do participante:
Idade: R.G.:
Responsável legal:
R.G.:

Seu filho/filha está sendo convidado (a) para participar, como voluntário, do projeto de pesquisa “REGISTROS DINÂMICOS DE REPRESENTAÇÃO: UMA ANÁLISE NO ENSINO DOS NÚMEROS COMPLEXOS, de responsabilidade do pesquisador RAFAEL DOS REIS PAULO.

Leia cuidadosamente o que segue e me pergunte sobre qualquer dúvida que você tiver. Após ser esclarecido(a) sobre as informações a seguir, no caso aceite fazer parte do estudo, assine ao final deste documento, que consta em duas vias. Uma via pertence a você e a outra ao pesquisador responsável. Em caso de recusa você não sofrerá nenhuma penalidade.

Declaro ter sido esclarecido sobre os seguintes pontos:

1. O trabalho tem por finalidade investigar o uso de tecnologias digitais no ensino de matemática e, para isso, será aplicado durante as aulas de matemática atividades que primam a utilização desses recursos, visando melhorias tanto no ensino quanto à aprendizagem.

2. A participação nesta pesquisa consistirá em desenvolver as atividades propostas que estão em consonância com o conteúdo e a ementa prevista pela instituição de

ensino (IFSul-Pelotas). A pesquisa ocorrerá nos meses de maio e junho de 2018, durante as aulas de matemática. No decorrer das atividades serão solicitadas imagens do caderno, arquivos e imagens do software que será utilizado e registro de áudio do participante.

3. A pesquisa oferece risco mínimo ao participante, isto é, o mesmo risco existente em atividades rotineiras como conversar, tomar banho, ler etc. Apesar disso, você tem assegurado o direito a ressarcimento ou indenização no caso de quaisquer danos eventualmente produzidos pela pesquisa.

4. Ao participar desse trabalho o participante contribuirá para a pesquisa fornecendo dados e informações para posterior análise e, terá contato com outras metodologias de ensino que podem potencializar a aprendizagem.

6. O participante não terá nenhuma despesa e poderá deixar de participar ou retirar o consentimento a qualquer momento, sem precisar justificar e não sofrerá qualquer prejuízo.

7. Fui informado e estou ciente de que não há nenhum valor econômico, a receber ou a pagar, para participação.

8. O nome do participante será mantido em sigilo, assegurando assim a privacidade, e se desejar terá livre acesso a todas as informações e esclarecimentos adicionais sobre o estudo e suas consequências, enfim, tudo o que queira saber antes, durante e depois da participação.

9. Fui informado que os dados coletados serão utilizados, única e exclusivamente, para fins desta pesquisa.

10. Qualquer dúvida, pedimos a gentileza de entrar em contato com RAFAEL DOS REIS PAULO, pesquisador responsável pela pesquisa, telefone: (48) 999958342, e-mail: drp.rafael@gmail.com, com o orientador do pesquisador Dr. André Luis Andrejew Ferreira, telefone: (53) 991557277, e-mail: andrejew.ferreira@gmail.com.

Eu, ____, RG nº ______________________, responsável legal por ______________________________, nascido(a) em ____/____/______, declaro ter sido informado(a) e concordo com a participação, do participante, no Projeto de pesquisa “Registros Dinâmicos de Representação: uma análise no ensino dos números complexos”.

Pelotas, _____ de ___________________ de 2018.

____

Assinatura do responsável legal pelo menor

____

Assinatura do responsável pela pesquisa

ANEXOS

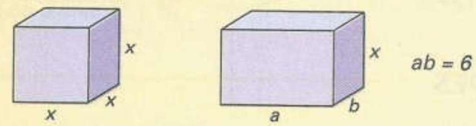
Anexo A – Leitura completar apresentada na obra de Paiva (2004)

Um nome impróprio

As expressões do tipo $a + bi$, com $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$ e $b \neq 0$, receberam de Descartes o nome de números imaginários; Cardano chamava-as de grandezas metafísicas. Esses nomes não são adequados, pois dão a falsa idéia de que esse tipo de número não faz parte do mundo concreto, quando, na verdade, muitos problemas do cotidiano recaem em equações cuja resolução envolve números imaginários. Por exemplo, observe o problema a seguir.

Um engenheiro projetou duas caixas-d'água de mesma altura: uma em forma de cubo e a outra em forma de paralelepípedo reto-retângulo, com 6 m² de área de base. O volume da caixa cúbica deve ter 4 m³ a menos que o volume da outra caixa. Qual deve ser a medida, em metros, da aresta da caixa cúbica?

Indicando por x a medida dessa aresta, temos:



Assim o valor de x é a raiz da equação $x^3 = 6x - 4$, ou seja, $x^3 - 6x + 4 = 0$, que é resolvida pela fórmula:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

em que p é o coeficiente de x ($p = -6$) e q é o termo independente ($q = 4$). Aplicando essa fórmula, obtemos:

$$x = \sqrt[3]{-2 + \sqrt{-4}} + \sqrt[3]{-2 - \sqrt{-4}}$$

Note, portanto, que a determinação do valor de x depende do cálculo de $\sqrt{-4}$. O fato de $\sqrt{-4}$ não ser real poderia nos levar à conclusão errada de que o problema é impossível; porém, operando com esses números, chegamos a $x = 2$, que é raiz da equação $x^3 - 6x + 4 = 0$. Observe: $2^3 - 6 \cdot 2 + 4 = 0$

Assim, a aresta da caixa cúbica deve medir 2 m. Concluindo, os números imaginários coexistem com os números reais no mundo concreto e no mundo abstrato.

Fonte: Paiva, 2004, p.122.

Anexo B – Historização apresentada em Giovanni e Bonjorno (2005)

Complexos: um pouco de história

"Raphael Bombelli (1526-1573) era um admirador da *Ars Magna* de Cardano, mas achava que seu estilo de exposição não era claro (ou, em suas próprias palavras, *ma nel dire fù oscuro*). Decidiu, então, escrever um livro expondo os mesmos assuntos, mas de forma tal que um principiante pudesse estudá-los sem necessidade de nenhuma outra referência. Publicou *l'Algebra*, em três volumes, em 1572, em Veneza, obra que viria a se tornar muito influente. No capítulo II dessa obra, ele estuda a resolução de equações de grau não superior a quatro. Em particular na página 294 e nas seguintes, ele considera a equação $x^3 = 15x + 4$. Ao aplicar a fórmula de Cardano para o cálculo de uma raiz, ele obtém:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

Seguindo Cardano, ele também chama essa expressão de *sofística* mas, por outro lado, ele percebe que $x = 4$ é, de fato, uma raiz da equação proposta.

Assim, pela primeira vez, nos deparamos com uma situação em que, apesar de termos radicais de números negativos, existe verdadeiramente uma solução da equação proposta. É necessário, então, compreender o que está acontecendo."

Bombelli concebe daí a existência de expressões da forma $a + \sqrt{-b}$ e $a - \sqrt{-b}$ que possam ser consideradas, respectivamente, como $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}}$ e $\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$.

Substituindo as expressões na igualdade acima, ele escreve $\left(a + \sqrt{-b}\right) + \left(a - \sqrt{-b}\right) = 4$.

Neste ponto, felizmente, as quantidades "não existentes" se cancelam e obtemos $a = 2$. Com esse resultado, pode-se voltar à equação $\left(a + \sqrt{-b}\right)^3 = 2 + \sqrt{-121}$ e deduzir que $b = 1$. Assim, ele obtém que:

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = 2 + \sqrt{-1}$$

$$\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = 2 - \sqrt{-1}$$

$$x = 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} = 4$$

"Faremos aqui um pequeno resumo da evolução dos números complexos, para que o leitor tenha uma visão global da história do assunto. Começaremos listando alguns progressos na notação para depois nos ocuparmos da evolução dos conhecimentos.

- O símbolo $\sqrt{-1}$ foi introduzido em 1629 por Albert Girard.
- O símbolo i foi usado pela primeira vez para representar $\sqrt{-1}$ por Leonhard Euler em 1777, apareceu impresso pela primeira vez em 1794 e se tornou amplamente aceito após seu uso por Gauss em 1801.
- Os termos *real* e *imaginário* foram empregados pela primeira vez por René Descartes em 1637.
- A expressão *número complexo* foi introduzida por Carl Friederich Gauss em 1832.

(...) a partir do trabalho de Bombelli, os números complexos começaram a ser utilizados devido à sua óbvia utilidade para resolver equações do terceiro grau mas, ao mesmo tempo, era claro que tais números não poderiam existir. A primeira tentativa de legitimação, via uma 'interpretação geométrica', é devida a John Wallis (1616-1703), contemporâneo de Newton e professor na Universidade de Oxford."

Fonte: César Polcino Milies. *Revista do Professor de Matemática*, nº 24, pp. 7 a 10, SBM, 1993.

Fonte: Giovanni e Bonjorno, 2005, p. 137.

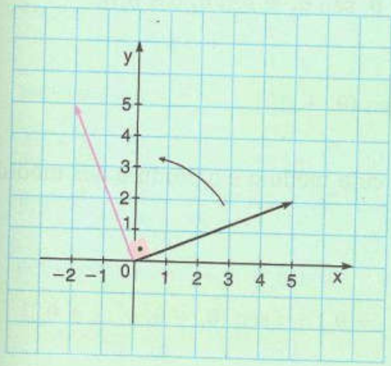
Anexo C – Discussão dos números complexos aplicados à Física.

Os números complexos e a Física

Os números complexos são úteis para realizar operações geométricas com vetores. Veja:

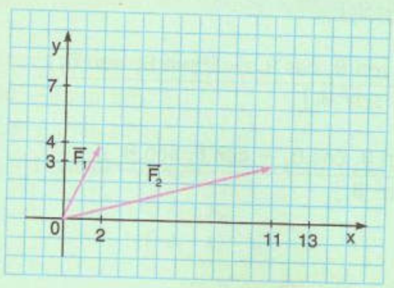
- Multiplicar por i corresponde a girar 90°, no sentido positivo ao redor da origem, a imagem do complexo pelo qual se multiplica i.

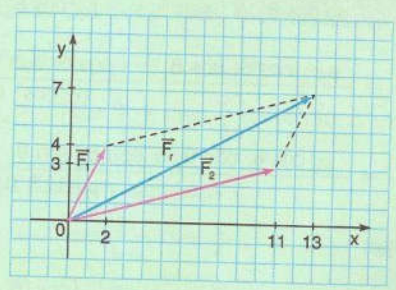
$$(5 + 2i) \cdot i = 5i + 2i^2 = -2 + 5i$$



Essa correspondência entre as operações com complexos e as transformações geométricas é muito útil na Física quando se trabalha com grandezas vetoriais como: força, velocidade, aceleração etc.

- Os números complexos podem ser usados para se determinar a força resultante que age sobre um corpo no qual atuam várias forças. Por exemplo, sobre o corpo situado na origem do sistema cartesiano atuam as forças $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ representadas pelos vetores da figura.





A força resultante dessas duas forças é representada pelo vetor soma $\vec{F}_r$ mediante a regra do paralelogramo.

$$\vec{F}_r = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \Rightarrow \vec{F}_r = (2 + 4i) + (11 + 3i) \Rightarrow \vec{F}_r = 13 + 7i$$

Fonte: Giovanni e Bonjorno, 2005, p. 153.

Anexo D – Introdução do capítulo dos números complexos em Dante (2013)

Girolamo Cardano

Johann Carl Friedrich Gauss

Os números complexos apareceram no século XVI motivados pelas resoluções de equações de terceiro e quarto graus. Em 1545, o matemático italiano Girolamo Cardano (1501-1576) publicou seu famoso livro *Ars Magna*, no qual tratava da resolução da equação de terceiro grau do tipo $x^3 + ax + b = 0$.

O problema "Qual é a medida x, comum à aresta de um cubo e à altura de um paralelepípedo com base 15 unidades de área, sabendo que a diferença entre seus volumes é de 4 unidades?" corresponderia à equação $x^3 - 15x = 4$, e, aplicando-se uma fórmula deduzida por ele, apareceria a solução 4, obtida da expressão $\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}}$. Cardano se perguntava como um número real poderia se originar de uma expressão que continha raízes de números negativos se estas não existiam. O mais curioso é que era possível operar com esses números "esquisitos", mesmo que não tivessem sentido, pois matematicamente os problemas davam certo.

Mais tarde, o matemático italiano Rafael Bombelli (1526-1572) estudou o trabalho de Cardano e verificou que realmente esses números "funcionavam". Sua representação sofreu variações no decorrer do tempo, até que foram escritos na forma de produto por $\sqrt{-1}$, como $\sqrt{-121} = 11\sqrt{-1}$.

No século XVIII, Leonhard Euler (1707-1783) introduziu o símbolo i para representar a raiz quadrada de -1. Assim, $\sqrt{-121}$ passou a ser expresso por 11i.

Finalmente, a representação geométrica dos números complexos elaborada pelo matemático, astrônomo e físico alemão Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855), no final do século XVIII, tornou mais significativo seu estudo e sua aplicabilidade.

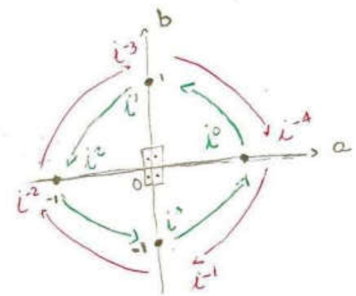
Neste capítulo estudaremos a construção do conjunto dos números complexos, definindo suas operações e representações, expandindo o que já foi estudado no capítulo 1 do volume 1.

Fonte: Dante, 2013, p.144

Anexo E – Relado do participante E2 referente a tarefa solicitada na atividade 3.

$i^{-4} = 1$
$i^{-3} = i$
$i^{-2} = -1$
$i^{-1} = -i$
$i^{0} = 1$
$i^{1} = i$
$i^{2} = -1$
$i^{3} = -i$
$i^{4} = 1$

De 4 em 4 expoentes, a ordem dos resultados repete-se por conta do movimento de 90° no plano Argan-gauss



↳ Expoentes positivos giram para a esquerda.

↳ Expoentes negativos giram para a direita.

↳ $i^0 = 1$ pois qualquer número elevado na potência 0 é igual a 1

$i^1 = i$ pois qualquer número elevado na potência 1 é igual a ele mesmo

$i^2 = -1$ pois : $i^2 = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1}$
$i^2 = (\sqrt{-1})^2$
$i^2 = -1$

Já i^{-1} não será igual a i^1 porque não houve uma volta completa no plano, apenas meia volta.

⇨ Já i^{-2} será igual a i^2 porque houve uma volta completa no plano.

Fonte: Acervo do pesquisador, 2018.