

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PELOTAS
Instituto de Física e Matemática
Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática



Dissertação

Otimização Topológica Aplicada em um Braço Robótico Flexível

Daniela Dalla Chiesa

Pelotas, 2016

Daniela Dalla Chiesa

Otimização Topológica Aplicada em um Braço Robótico Flexível

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática da Universidade Federal de Pelotas, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Modelagem Matemática

Orientador: Prof. Dr. Valdecir Bottega
Coorientadora: Prof.^a Dr.^a Rejane Pergher

Pelotas, 2016

Universidade Federal de Pelotas / Sistema de Bibliotecas
Catalogação na Publicação

C532o Chiesa, Daniela Dalla

Otimização topológica aplicada em um braço robótico flexível / Daniela Dalla Chiesa ; Valdecir Bottega, orientador ; Rejane Pergher, coorientador. — Pelotas, 2016.
114 f. : il.

Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática, Instituto de Física e Matemática, Universidade Federal de Pelotas, 2016.

1. Braço robótico flexível. 2. Elementos finitos. 3. Otimização topológica. I. Bottega, Valdecir, orient. II. Pergher, Rejane, coorient. III. Título.

CDD : 003.3

Daniela Dalla Chiesa

Otimização Topológica Aplicada em um Braço Robótico Flexível

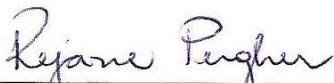
Dissertação aprovada, como requisito parcial, para obtenção do grau de Mestre em Modelagem Matemática, Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática, Instituto de Física e Matemática, Universidade Federal de Pelotas.

Data da Defesa: 15 de fevereiro de 2016.

Banca examinadora:



Prof. Dr. Valdecir Bottega (Orientador)
Doutor em Engenharia Mecânica pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Brasil



Prof.^a Dr.^a Rejane Pergher (Co-orientadora)
Doutora em Engenharia Mecânica pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Brasil



Prof. Dr. Germán Ramón Canahualpa Suazo
Doutor em Matemática pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Brasil
Doutor em Engenharia Mecânica pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Brasil



Prof. Dr. Leslie Darien Pérez Fernández
Doutor em Matemática pelo Instituto de Cibernética, Matemática e Física, Cuba

Dedico este trabalho a minha avó e aos meus pais.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, inicialmente, aos meus pais Luís Henrique Dalla Chiesa e Alda Spadini Dalla Chiesa e a minha tia Fátima Arlei Dalla Chiesa por todo o incentivo, ajuda, paciência e compreensão e em especial a minha avó Eva Maria Mayer Dalla Chiesa que sempre me incentivou a prosseguir nos estudos, que me deu coragem e não me deixou desistir diante das dificuldades. Ao meu orientador Valdecir Bottega pela amizade, pelas horas de pesquisa e estudo, pela paciência e compreensão e a minha coorientadora Rejane Pergher. Aos amigos de Pelotas que me ajudaram e, finalmente, à CAPES pelo apoio financeiro.

RESUMO

DALLA CHIESA, Daniela. **Otimização Topológica Aplicada em um Braço Robótico Flexível**. 2016. 114 f. Dissertação (Mestrado em Modelagem Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática, Instituto de Física e Matemática, Universidade Federal de Pelotas, Pelotas, 2016.

Este trabalho tem por objetivo aplicar o método de otimização topológica, para encontrar a melhor distribuição de material em um braço robótico flexível, que maximize ou minimize uma função objetivo e que satisfaça uma restrição de volume preestabelecida. Primeiramente adota-se um modelo estático com a minimização da flexibilidade e posteriormente o estudo é estendido para o caso dinâmico, com a minimização da flexibilidade dinâmica e com a maximização de frequência natural da estrutura. Para os três problemas, idealiza-se o braço robótico como uma viga situada em um domínio bidimensional, sendo que, no modelo estático, estende-se o estudo, também, para o caso tridimensional. Discretizam-se esses domínios em um número finito de subdomínios denominados elementos finitos, optando-se, devido à geometria da estrutura, por elementos finitos quadrilaterais (domínio bidimensional) e cúbicos (domínio tridimensional). Na formulação dos problemas utiliza-se, ainda, o modelo de material SIMP (*Solid Isotropic Material with Penalization*), o qual admite como variáveis de projeto as pseudodensidades dos elementos finitos. As variáveis de projeto do problema estático são atualizadas através do método heurístico denominado Critério Ótimo, e para os problemas dinâmicos, utiliza-se a Programação Linear Sequencial. Aplica-se, também, o filtro de sensibilidade para evitar que possíveis complicações numéricas interfiram nas topologias ótimas. Resultados numéricos foram obtidos através de algoritmos desenvolvidos em *software Matlab*. As simulações realizadas mostram que as topologias ótimas encontradas estão bem definidas, atendem os critérios de estabilidade numérica definidos nos algoritmos, podem ser utilizadas em projetos de fabricação de estruturas e os resultados estão de acordo com trabalhos similares desenvolvidos na literatura.

Palavras-chave: Braço Robótico Flexível, Elementos Finitos, Otimização Topológica.

ABSTRACT

DALLA CHIESA, Daniela. **Applied Topology Optimization in a Flexible Robotic Arm**. 2016. 114 f. Dissertação (Mestrado em Modelagem Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática, Instituto de Física e Matemática, Universidade Federal de Pelotas, Pelotas, 2016.

This work aims to apply the topology optimization method, to find the best distribution of material in a flexible robotic arm, which maximize or minimize an objective function and meeting a pre-established volume restriction. First we adopt a static model minimizing the compliance and further the study is extended to the dynamic case with the minimization of the dynamic compliance and maximizing natural frequency of the structure. For the three problems, the robotic arm is idealized as a beam located in a two-dimensional domain and in the static model extends the study also for three-dimensional case. These domains are discretized in a finite number of subdomains called finite elements, choosing, due to the geometry of the structure, by the quadrilateral finite elements (two-dimensional domain) and cubic finite elements (three-dimensional domain). In the formulation of problems the SIMP (Solid Isotropic Material with Penalization) material model is used, which admits pseudo-density finite elements as design variables. Design variables in the static problem updated by heuristic method called Optimality Criteria and dynamic problems we use the Sequential Linear Programming. It applies also the sensitivity filter to prevent possible numerical complications interfere with the optimal topologies. Numerical results were obtained through algorithms developed in Matlab software. The accomplished simulations show that the optimal topologies found are well defined, meet the convergence criteria set in the algorithms, can be used as designs in the manufacture of structures and agree with the results similar work done in the literature.

Keywords: Robotic Arm Flexible, Finite Elements, Topology Optimization.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Domínio de projeto. Fonte: Bendsoe e Kikuchi, 1988, p. 214.	23
Figura 2	a) Discretização 1 com malha de 16x10. b) Discretização 2 com malha de 32x20. Fonte: Bendsoe e Kikuchi, 1988, p. 216.	23
Figura 3	Sólido elástico linear.	26
Figura 4	Sólido elástico caracterizado no estado plano de tensão.	30
Figura 5	Discretização de uma viga 2D utilizando o MEF.	35
Figura 6	Elemento finito retangular de 4 pontos nodais.	36
Figura 7	Função de interpolação N_3 . Adaptada de Soriano, 2009, p. 179 . .	38
Figura 8	Discretização de uma viga 3D utilizando o MEF.	39
Figura 9	Elemento finito cúbico de 8 pontos nodais.	39
Figura 10	a) Exemplo de malha de elementos finitos com numeração de deslocamentos nodais globais. b) Elementos finitos com numeração de deslocamentos nodais locais.	44
Figura 11	Referenciais global e local das componentes da matriz de rigidez do elemento 1.	45
Figura 12	Referenciais global e local das componentes da matriz de rigidez do elemento 2.	45
Figura 13	Categorias da otimização estrutural. a) OD. b) OF. c) OT. À esquerda o domínio do problema e à direita a solução otimizada. Fonte: Bendsoe e Sigmund, 2003, p. 2.	48
Figura 14	Procedimento típico de projeto estrutural por OT. Fonte: Silva, 2003, p. 142.	49
Figura 15	Distribuição de material em um domínio de referência fixo.	50
Figura 16	Inversão de autovalores. Fonte: Porto, 2006, p. 72.	54
Figura 17	Eliminação da inversão dos autovalores. Fonte: Porto, 2006, p. 73.	55
Figura 18	Relação entre os diferentes valores de p e os valores de x_e	58
Figura 19	Relação entre o volume V e o multiplicador de Lagrange λ . Adaptada de PORTO, 2006, p. 88	65
Figura 20	a) Malha discretizada em 600 elementos. b) Malha discretizada em 5400 elementos. Fonte: Sigmund e Peterson, 1998, p. 70.	69
Figura 21	Instabilidade de tabuleiro de xadrez.	70
Figura 22	Filtro de sensibilidade.	72
Figura 23	Idealização de um braço robótico flexível em 2D. Problema de minimização da flexibilidade.	75

Figura 24	Resultados topológicos. a) Simulação 1 correspondente a malha de 90x18 elementos finitos. b) Simulação 2 correspondente a malha de 110x22 elementos finitos. c) Simulação 3 correspondente a malha de 150x30 elementos finitos.	76
Figura 25	Flexibilidade da viga ao longo das iterações, referente a simulação 1, correspondente a malha de 90x18 elementos finitos.	76
Figura 26	Flexibilidade da viga ao longo das iterações, referente a simulação 2, correspondente a malha de 110x22 elementos finitos.	77
Figura 27	Flexibilidade da viga ao longo das iterações, referente a simulação 3, correspondente a malha de 150x30 elementos finitos.	78
Figura 28	Alterações no volume ao longo das iterações, referente a simulação 1, correspondente a malha de 90x18 elementos finitos.	79
Figura 29	Alterações no volume ao longo das iterações, referente a simulação 2, correspondente a malha de 110x22 elementos finitos.	79
Figura 30	Alterações no volume ao longo das iterações, referente a simulação 3, correspondente a malha de 150x30 elementos finitos.	80
Figura 31	Idealização de um braço robótico flexível em 3D. Problema de minimização da flexibilidade.	80
Figura 32	Resultados topológicos. a) Simulação 4 correspondente a malha de 60x12x6 elementos finitos. b) Simulação 5 correspondente a malha de 80x16x8 elementos finitos. c) Simulação 6 correspondente a malha de 100x20x10 elementos finitos.	81
Figura 33	Cortes verticais, referente a simulação 4, correspondentes a malha com 60x12x6 elementos finitos.	82
Figura 34	Cortes verticais, referente a simulação 5, correspondentes a malha com 80x16x8 elementos finitos.	82
Figura 35	Cortes verticais, referente a simulação 6, correspondentes a malha com 100x20x10 elementos finitos.	83
Figura 36	Flexibilidade da viga ao longo das iterações, referente a simulação 4, correspondente a malha de 60x12x6 elementos finitos.	84
Figura 37	Flexibilidade da viga ao longo das iterações, referente a simulação 5, correspondente a malha de 80x16x8 elementos finitos.	84
Figura 38	Flexibilidade da viga ao longo das iterações, referente a simulação 6, correspondente a malha de 100x20x10 elementos finitos.	85
Figura 39	Alterações no volume ao longo das iterações, referente a simulação 4, correspondente a malha de 60x12x6 elementos finitos.	86
Figura 40	Alterações no volume ao longo das iterações, referente a simulação 5, correspondente a malha de 80x16x8 elementos finitos.	86
Figura 41	Alterações no volume ao longo das iterações, referente a simulação 6, correspondente a malha de 100x20x10 elementos finitos.	87
Figura 42	Idealização de um braço robótico flexível em 2D. Problema de maximização da primeira frequência natural.	87
Figura 43	Resultado topológico obtido a partir da simulação 7.	88
Figura 44	Idealização de um braço robótico flexível em 2D, com a adição de uma massa não estrutural em sua extremidade. Problema de maximização da primeira frequência natural.	88
Figura 45	Resultado topológico obtido a partir da simulação 8. Domínio de projeto com a adição de uma massa não estrutural.	89

Figura 46	Estabilidade numérica da função objetivo, referente a simulação 8.	89
Figura 47	Comportamento da 1ª frequência natural da estrutura ao longo das iterações, referente a simulação 8.	90
Figura 48	Comportamento do 1ª, 2ª e 3ª autovalores da estrutura ao longo das iterações, referente a simulação 8.	90
Figura 49	Alterações no volume ao longo das iterações, referente a simulação 8.	91
Figura 50	1º, 2º e 3º modos de vibração da estrutura original (à esquerda) e da estrutura otimizada (à direita), referente a simulação 8.	91
Figura 51	Idealização de um braço robótico flexível em 2D. Problema de minimização da flexibilidade dinâmica.	92
Figura 52	Resultados topológicos. a) Simulação 9 correspondente a uma frequência de excitação de 0Hz. b) Simulação 10 correspondente a uma frequência de excitação de 50Hz. c) Simulação 11 correspondente a uma frequência de excitação de 110Hz.	93
Figura 53	Flexibilidade dinâmica da viga ao longo das iterações, referente a simulação 9, correspondente a uma frequência de excitação de 0Hz.	94
Figura 54	Flexibilidade dinâmica da viga ao longo das iterações, referente a simulação 10, correspondente a uma frequência de excitação de 50Hz.	94
Figura 55	Flexibilidade dinâmica da viga ao longo das iterações, referente a simulação 11, correspondente a uma frequência de excitação de 110Hz.	95
Figura 56	Comportamento da 1ª frequência natural ao longo das iterações, referente a simulação 9, correspondente a uma frequência de excitação de 0Hz.	95
Figura 57	Comportamento da 1ª frequência natural ao longo das iterações, referente a simulação 10, correspondente a uma frequência de excitação de 50Hz.	96
Figura 58	Comportamento da 1ª frequência natural ao longo das iterações, referente a simulação 11, correspondente a uma frequência de excitação de 110Hz.	96
Figura 59	Alterações no volume ao longo das iterações, referente a simulação 9, correspondente a uma frequência de excitação de 0Hz.	97
Figura 60	Alterações no volume ao longo das iterações, referente a simulação 10, correspondente a uma frequência de excitação de 50Hz.	97
Figura 61	Alterações no volume ao longo das iterações, referente a simulação 11, correspondente a uma frequência de excitação de 110Hz.	98
Figura 62	Domínio de projeto.	100
Figura 63	Resultados topológicos. a) MIN; NISHIWAKI; KIKUCHI (2000). b) Nesta dissertação.	100
Figura 64	Domínio de projeto.	100
Figura 65	Resultados topológicos. a) MIN; NISHIWAKI; KIKUCHI (2000). b) Nesta dissertação.	101
Figura 66	Domínio de projeto.	101
Figura 67	Resultados topológicos. a) MIN; NISHIWAKI; KIKUCHI (2000). b) Nesta dissertação.	102
Figura 68	Domínio de projeto.	103
Figura 69	Resultados topológicos. a) MA; KIKUCHI; CHENG (1995). b) Nesta dissertação.	103

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	Propriedades do material base isotrópico utilizado	74
Tabela 2	Modelo de elementos finitos correspondente as simulações 1, 2 e 3.	75
Tabela 3	Comparação dos resultados entre as simulações 1, 2 e 3.	78
Tabela 4	Modelo de elementos finitos correspondente as simulações 4, 5 e 6.	81
Tabela 5	Comparação dos resultados entre as simulações 4, 5 e 6.	85
Tabela 6	Modelo de elementos finitos correspondente as simulações 9, 10 e 11.	92
Tabela 7	Resultados das simulações 9, 10 e 11.	98
Tabela 8	Propriedades do material base isotrópico utilizado por MIN; NISHIWAKI; KIKUCHI (2000).	99
Tabela 9	Propriedades do material base isotrópico utilizado por MA; KIKU- CHI; CHENG (1995).	102

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CO	Critério Ótimo.
EF	Elemento Finito.
MEF	Método dos Elementos Finitos.
OD	Otimização Dimensional.
OF	Otimização de Forma.
OT	Otimização Topológica.
PLS	Programação Linear Sequencial.
PTV	Princípio dos Trabalhos Virtuais.
SIMP	Material Sólido Isotrópico com Penalização (sigla em inglês).
2D	Bidimensional.
3D	Tridimensional.

LISTA DE SÍMBOLOS

B	Matriz que relaciona os componentes das matrizes P e N .
b	Vetor de forças de corpo.
\mathbf{b}_e	Vetor de forças de corpo do elemento finito.
b_x	Componente do vetor de força de corpo na direção do eixo x .
b_y	Componente do vetor de força de corpo na direção do eixo y .
b_z	Componente do vetor de força de corpo na direção do eixo z .
C	Matriz de cossenos diretores de componentes c_{d1} , c_{d2} e c_{d3} .
c	Função objetivo do problema de mínima flexibilidade.
c_d	Flexibilidade dinâmica.
D ₀	Matriz constitutiva elástica do material base isotrópico.
d	Vetor de deslocamentos nodais do elemento finito.
$\dot{\mathbf{d}}$	Vetor de velocidades nodais do elemento finito.
$\ddot{\mathbf{d}}$	Vetor de acelerações nodais do elemento finito.
$dist$	Distância entre os centros de dois elementos distintos.
E_0	Módulo de Young do material sólido linear e homogêneo.
E_e	Módulo de Young do elemento finito.
F	Vetor de carregamento total global dado pelo MEF.
\mathbf{F}_a	Vetor de amplitude do carregamento externo harmônico.
\mathbf{F}_e	Vetor de carregamento total do elemento finito.
f_i	Frequências naturais de vibração.
f_o	Função objetivo.
g	Função objetivo do problema de mínima flexibilidade dinâmica.
\hat{H}	Operador de convolução.
$H(\Omega)$	Espaço de Sobolev.
h	Restrição de igualdade.
K	Matriz de rigidez global dada pelo MEF.

\mathbf{K}_d	Matriz de rigidez dinâmica global.
\mathbf{K}_e	Matriz de rigidez do elemento finito.
\mathbf{K}_S	Matriz de rigidez global dada pelo MEF e pela formulação do SIMP.
\mathbf{K}_{dS}	Matriz de rigidez global dinâmica dada pela formulação do SIMP.
k	Contador para o número de iterações.
L	Função Lagrangeana.
\mathbf{M}	Matriz de massa global dada pelo MEF.
\mathbf{M}_e	Matriz de massa do elemento finito.
\mathbf{M}_S	Matriz de massa global dada pelo MEF e pela formulação do SIMP modificado.
m	Limite móvel utilizado no Critério Ótimo.
\mathbf{N}	Matriz das funções de interpolação do elemento finito.
N_e	Número total de elementos finitos da malha.
N_{dof}	Número de modos de vibração.
N_n	Função de interpolação local no ponto nodal n .
n	Ponto nodal.
\mathbf{P}	Operador de derivação matricial.
p	Parâmetro de penalização do SIMP.
p_{max}	Valor máximo admissível a p .
\mathbf{q}	Vetor de forças de superfície.
q	Metade do lado do elemento finito cúbico.
\mathbf{q}_e	Vetor de forças de superfície do elemento finito.
q_x	Componente do vetor de força de superfície na direção do eixo x .
q_y	Componente do vetor de força de superfície na direção do eixo y .
q_z	Componente do vetor de força de superfície na direção do eixo z .
r	Metade do maior lado do elemento finito quadrilateral.
r_{min}	Raio do filtro de sensibilidade.
s	Metade do menor lado do elemento finito quadrilateral.
t	Tempo.
\mathbf{U}	Vetor que define o campo de deslocamento global dado pelo MEF.
$\ddot{\mathbf{U}}$	Vetor que define o campo de aceleração global dado pelo MEF.
\mathbf{U}_a	Vetor de amplitude do deslocamento.
\mathbf{u}	Vetor que define o campo de deslocamentos.
u_x	Componente do vetor de deslocamento na direção do eixo x .

u_y	Componente do vetor de deslocamento na direção do eixo y .
u_z	Componente do vetor de deslocamento na direção do eixo z .
$\ddot{\mathbf{u}}$	Vetor que define o campo de acelerações.
\ddot{u}_x	Componente do vetor de aceleração na direção do eixo x .
\ddot{u}_y	Componente do vetor de aceleração na direção do eixo y .
$\bar{\mathbf{u}}$	Vetor que define os deslocamentos prescritos.
u_{2n}	Deslocamentos locais na direção do eixo y do ponto nodal n , utilizados em 2D.
u_{2n-1}	Deslocamentos locais na direção do eixo x do ponto nodal n , utilizados em 2D.
u_{3n-2}	Deslocamentos locais na direção do eixo x do ponto nodal n , utilizados em 3D.
u_{3n-1}	Deslocamentos locais na direção do eixo y do ponto nodal n , utilizados em 3D.
u_{3n}	Deslocamentos locais na direção do eixo z do ponto nodal n , utilizados em 3D.
\mathbf{u}_e	Vetor de deslocamento do elemento finito.
$\dot{\mathbf{u}}_e$	Vetor de velocidade do elemento finito.
$\ddot{\mathbf{u}}_e$	Vetor de aceleração do elemento finito.
u_{ex}	Componente do vetor de deslocamento do elemento finito na direção do eixo x .
u_{ey}	Componente do vetor de deslocamento do elemento finito na direção do eixo y .
u_{ez}	Componente do vetor de deslocamento do elemento finito na direção do eixo z .
V	Volume do material sólido.
V^*	Volume ótimo do material sólido.
V_0	Volume do domínio de referência fixo.
ν_0	Coeficiente de Poisson.
x, y, z	Coordenadas cartesianas.
x_n, y_n, z_n	Coordenadas cartesianas locais do ponto nodal n .
\mathbf{x}	Vetor de variáveis de projeto.
\mathbf{x}^*	Vetor de variáveis de projeto em um ponto específico.
x_e	Variáveis de projeto representando as pseudodensidades de cada elemento finito.
x_e^{novo}	Variáveis de projeto atualizadas.
x_{min}	Valor mínimo admissível às variáveis de projeto.

\mathbf{x}_{max}	Valor máximo admissível ao vetor de variáveis de projeto.
x_e^l	Limite móvel mínimo admissível às variáveis de projeto, utilizado na PLS.
x_e^s	Limite móvel máximo admissível às variáveis de projeto, utilizado na PLS.
α_e	Multiplicadores de Lagrange associados as restrições laterais inferiores.
β_e	Multiplicadores de Lagrange associados as restrições laterais superiores.
Γ	Contorno de Ω .
Γ_e	Contorno do elemento finito.
Γ_q	Parcela do contorno Γ , submetida às forças de superfície.
Γ_u	Parcela do contorno Γ , aonde os deslocamentos prescritos são definidos.
Γ_q^e	Parcela do contorno do elemento finito aonde atuam as forças de superfície.
γ_v	Tolerância da restrição de volume.
γ_{xy}	Componente de cisalhamento no plano xy , do vetor de deformação.
γ_{xz}	Componente de cisalhamento no plano xz , do vetor de deformação.
γ_{yz}	Componente de cisalhamento no plano yz , do vetor de deformação.
$\delta \mathbf{d}$	Vetor de deslocamentos virtuais nodais.
δ_{nm}	Delta de Kronecker.
$\delta \mathbf{u}$	Vetor de deslocamento virtual.
$\delta \mathbf{u}_e$	Vetor de deslocamento virtual do elemento finito.
δu_x	Componente do vetor de deslocamento virtual na direção do eixo x .
δu_y	Componente do vetor de deslocamento virtual na direção do eixo y .
$\delta \epsilon$	Vetor de deformação virtual.
$\delta \epsilon_e$	Deformação virtual do elemento finito.
ϵ	Vetor de deformação.
ϵ_e	Vetor dos componentes de deformação do elemento finito.
ϵ_x	Componente longitudinal na direção do eixo x , do vetor de deformação.
ϵ_y	Componente longitudinal na direção do eixo y , do vetor de deformação.
ϵ_z	Componente longitudinal na direção do eixo z , do vetor de deformação.
ζ	Calibrador da região de linearização utilizado na PLS.
η	Limitador para o uso de material a ser utilizado na geração da topologia ótima.
κ_i	Autovalores.
Λ	Função objetivo do problema de maximização de frequência natural.
λ	Multiplicador de Lagrange associado a restrição de volume.
λ^m	Valor médio entre λ^{min} e λ^{max} .
λ^{min}	Valor mínimo de λ .

λ^{max}	Valor máximo de λ .
λ^*	Valor ótimo para λ .
μ	Multiplicador de Lagrange associado à restrição de equilíbrio.
Φ_i	Autovetor associado ao i -ésimo autovalor.
$\chi(x, y)$	Função característica que define a presença ou não de material em um ponto do domínio Ω .
ξ	Parâmetro de amortecimento utilizado no Critério Ótimo.
ρ_{min}	Valor mínimo admissível a ρ .
ρ_e	Densidade de cada elemento finito.
ρ_0	Densidade inicial do material sólido linear e homogêneo.
σ	Vetor de tensão.
σ_e	Vetor de tensão do elemento finito.
σ_x	Componente normal na direção do eixo x , do vetor de tensão.
σ_y	Componente normal na direção do eixo y , do vetor de tensão.
σ_z	Componente normal na direção do eixo z , do vetor de tensão.
τ_{xy}	Componente de cisalhamento no plano xy , do vetor de tensão.
τ_{xz}	Componente de cisalhamento no plano xz , do vetor de tensão.
τ_{yz}	Componente de cisalhamento no plano yz , do vetor de tensão.
Ψ	Espaço dos campos de deslocamento cineticamente admissíveis.
Ω	Domínio Contínuo.
Ω_e	Subdomínios discretos (elementos finitos).
Ω_m	Subdomínio de Ω com material.
$\Omega \setminus \Omega_m$	Subdomínio de Ω sem material.
ω_c	Frequência de excitação.
ω_i	Coefficiente de ponderação associado ao i -ésimo autovalor.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	20
1.1	Revisão bibliográfica da otimização topológica	22
2	ELASTICIDADE LINEAR	26
2.1	Noções da teoria de elasticidade linear	26
2.2	Noções da teoria de elasticidade plana linear - estado plano de tensão	29
2.3	Princípio dos trabalhos virtuais	31
3	MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS	34
3.1	Discretização de uma viga utilizando método dos elementos finitos	35
3.1.1	Discretização de uma viga bidimensional utilizando método dos elementos finitos	35
3.1.2	Discretização de uma viga tridimensional utilizando método dos elementos finitos	38
3.2	Relação entre deformação e deslocamentos nodais	41
3.3	Obtenção da matriz de rigidez e do vetor de carregamento do elemento finito	41
3.4	Montagem da matriz de rigidez e do vetor de carregamento total global	43
3.5	Obtenção da matriz de massa do elemento finito e montagem da matriz de massa global - problema dinâmico	46
4	OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA	48
4.1	Problema de otimização topológica	50
4.1.1	Formulação do problema de otimização topológica de mínima flexibilidade	51
4.1.2	Formulação do problema de otimização topológica de maximização de frequência natural	52
4.1.3	Formulação do problema de otimização topológica de mínima flexibilidade dinâmica	55
4.2	Modelo de material SIMP	57
4.3	Modos de vibração localizados	58
4.4	Reformulação do problema de otimização topológica de minimização da flexibilidade utilizando o MEF e o SIMP	58
4.5	Reformulação do problema de otimização topológica de maximização de frequência natural utilizando o MEF e o SIMP	59
4.6	Reformulação do problema de otimização topológica de minimização da flexibilidade dinâmica utilizando o MEF e o SIMP	59
4.7	Análise de sensibilidade	60
4.7.1	Sensibilidades do problema de mínima flexibilidade	60

4.7.2	Sensibilidades do problema de maximização de frequência natural . . .	61
4.7.3	Sensibilidades do problema de mínima flexibilidade dinâmica	62
4.8	Critério Ótimo	63
4.9	Programação Linear Sequencial	66
4.10	Instabilidades numéricas na otimização topológica	69
4.10.1	Dependência da malha	69
4.10.2	Tabuleiro de xadrez	70
4.10.3	Mínimos locais	71
4.11	Filtro de sensibilidade	71
5	MODELAGEM MATEMÁTICA DE UM BRAÇO ROBÓTICO FLEXÍVEL . . .	74
5.1	Dados gerais utilizados nas simulações	74
5.2	Crítérios de estabilidade numérica	74
5.3	Problema de minimização da flexibilidade (2D)	75
5.4	Problema de minimização da flexibilidade (3D)	80
5.5	Problema de maximização da primeira frequência natural	87
5.6	Problema de minimização da flexibilidade dinâmica	91
6	EXTENSÃO DA METODOLOGIA UTILIZADA NESTE TRABALHO A OUTRAS ESTRUTURAS	99
6.1	Problema de otimização topológica de minimização da flexibilidade (2D) e (3D)	99
6.2	Problema de otimização topológica de maximização de frequência natural	101
6.3	Problema de otimização topológica de minimização da flexibilidade dinâmica	102
7	CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	104
	REFERÊNCIAS	107
ANEXO A	VIBRAÇÃO EXCITADA HARMONICAMENTE EM UMA ESTRUTURA SEM AMORTECIMENTO	113

1 INTRODUÇÃO

Com o desenvolvimento da ciência da computação, da engenharia mecânica, engenharia elétrica e eletrônica, o setor de robótica tem crescido e ganhado relevância, tanto em nível acadêmico quanto em nível industrial e de serviços. Existem, atualmente, robôs em diversos setores da sociedade, principalmente na indústria. Conforme último levantamento realizado, pela INTERNATIONAL FEDERATION OF ROBOTICS (2015), é possível verificar que, nos últimos anos, houve um expressivo crescimento, em nível mundial, na aquisição de robôs, com destaque para a indústria automotiva, que de longe é o setor com a maior demanda¹. Ainda, segundo último levantamento estatístico realizado pela federação, existe uma perspectiva de aumento nas vendas, em média de 12% ao ano, entre os anos de 2015 a 2017 (INTERNATIONAL FEDERATION OF ROBOTICS, 2015). Essa tendência de crescimento incentiva futuros investimentos no setor, assim como, impulsiona engenheiros e projetistas a projetarem robôs de excelente qualidade e desempenho.

Ainda que haja uma previsão positiva para o setor robótico, existem, no entanto, uma série de fatores que devem ser melhorados, em termos de desenvolvimento de projetos e fabricação de robôs e seus componentes. Um exemplo disso é o custo de produção de um robô que em geral, utiliza braços e motores pesados (ROSÁRIO, 2010). Uma alternativa simples para resolver essa situação seria a redução do peso do braço. Entretanto, essa opção pode implicar em uma diminuição da sua rigidez e, conseqüentemente, as vibrações induzidas pela ação de controle acontecem em frequências mais baixas e com maiores amplitudes, prejudicando a precisão na execução de tarefas (BOTTEGA et al., 2009). Dessa forma, uma estratégia para resolver inconvenientes como esse é a criação de projetos que utilizem métodos mais rigorosos para a tomada de decisões. Dentre estes métodos, a otimização topológica (OT) é uma alternativa que vem ganhando preferência nos últimos anos, pois com ela é possível determinar a melhor distribuição de material em estruturas, conseqüentemente diminuindo o seu peso, com as mais diversas geometrias e sujeitas a diferentes tipos

¹ Segundo ROSÁRIO (2010) o índice de automação em algumas tarefas de produção da indústria automotiva chega a 100%, mas no geral representa 90%.

de restrições e carregamentos, em busca da topologia ótima, que objetive o atendimento de um critério, para as mais diversas aplicações.

A OT não é um método novo, muito pelo contrário, em 1904 é possível encontrar os primeiros indícios de sua aplicação. Contudo, somente na década de 80, é que ela se revelou ao mundo com o trabalho pioneiro de BENDSOE; KIKUCHI (1988) que, com a aplicação de um método de homogeneização, permitiu distribuir material em um domínio de referência fixo. Após este trabalho, inúmeros surgiram o que permitiu que a OT, ao longo dos anos, tenha se desenvolvido, sendo assim, aplicada na resolução dos mais diversos tipos de problemas estruturais. Segundo SILVA (2003), já na década de 90, a OT era utilizada largamente no projeto de peças mecânicas das indústrias automotiva e aeronáutica do Japão, Estados Unidos e Europa e, posteriormente, seu uso foi estendido para outras áreas da engenharia no meio acadêmico, como no projeto de mecanismos flexíveis e atuadores piezoelétricos, entre outros.

O presente trabalho tem, portanto, o objetivo de aplicar a OT para encontrar a melhor distribuição de material em um braço robótico flexível, que otimize uma função objetivo e que atenda a uma restrição de volume final predetermined. Num primeiro momento é considerado o caso estático com minimização da flexibilidade e, posteriormente, o estudo é estendido para o caso dinâmico com a minimização da flexibilidade dinâmica e com a maximização de frequência natural da estrutura. Para o problema estático, idealiza-se o braço como uma viga situada, inicialmente, em um domínio bidimensional (2D) e, posteriormente, trabalha-se em um domínio tridimensional (3D). Nos problemas dinâmicos trabalha-se, somente, em um domínio bidimensional. Utiliza-se como ferramenta de cálculo estrutural o método dos elementos finitos (MEF). Na formulação do problema adota-se como modelo de material o SIMP² (Material Sólido Isotrópico com Penalização), que define as pseudodensidades dos elementos finitos como as variáveis de projeto do problema, ou seja, a melhor distribuição de material consiste na melhor distribuição das pseudodensidades de cada elemento finito, admitindo-se, por simplificação, que cada elemento finito tenha uma pseudodensidade constante. As variáveis de projeto para o caso estático são atualizadas através do método heurístico clássico denominado Critério Ótimo (CO) e as variáveis de projeto para os casos dinâmicos são atualizadas através da Programação Linear Sequencial (PLS) e possíveis instabilidades numéricas são evitadas com o uso do filtro de sensibilidade. As simulações numéricas foram realizadas, a partir da modificação dos algoritmos desenvolvidos por SIGMUND (2001) e LIU; TOVAR (2014), com o auxílio do *software Matlab*.

A fim de realizar o estudo proposto e com o objetivo, também, de que este trabalho sirva como referência para pesquisas acadêmicas na área, a presente dissertação é organizada da seguinte maneira: no capítulo 2 é feita uma breve exposição de algumas

²Sigla em inglês.

equações básicas da teoria de elasticidade linear que serão utilizadas no desenvolvimento do MEF e na formulação dos problemas de OT. No capítulo 3 explica-se com detalhes como é desenvolvido o MEF. Procura-se inicialmente dar uma visão geral do método através de sua definição e de alguns procedimentos necessários para a sua aplicação. Posteriormente, apresenta-se a discretização de uma viga, mostrando quais elementos são utilizados e como, matematicamente, é desenvolvido o método até a obtenção da equação de equilíbrio estático e da equação de equilíbrio dinâmico. No capítulo 4, é apresentada a OT, iniciando com uma breve introdução e definição de alguns conceitos básicos. Expõe-se a formulação dos problemas de minimização da flexibilidade, minimização da flexibilidade dinâmica e de maximização de frequência natural e, com a introdução do modelo de material SIMP, procede-se a reformulação dos mesmos. Ainda, neste capítulo, mostra-se como obter as sensibilidades das funções objetivos e da restrição de volume, a fórmula para a atualização das variáveis de projeto, via método do CO e PLS, assim como, enfatiza-se algumas complicações que podem surgir no decorrer do processo de OT e o método de filtragem utilizado para evitá-las. No capítulo 5 é realizada a modelagem de um braço robótico flexível, apresentando os parâmetros adotados e definindo as propriedades do material utilizado. Também, neste capítulo, são apresentados os resultados topológicos ótimos, obtidos a partir de simulações numéricas realizadas com o *software Matlab*, e os gráficos de estabilidade numérica. No capítulo 6 são realizadas algumas simulações numéricas, considerando domínios com características similares a estrutura utilizada nesta dissertação, com o objetivo de verificar a eficiência da metodologia utilizada neste trabalho. E, por fim, no capítulo 7, relata-se as conclusões e os sugestões para trabalhos futuros.

1.1 Revisão bibliográfica da otimização topológica

No início do século XX, Michell desenvolveu um trabalho que tinha por objetivo inicial utilizar a teoria de elasticidade para calcular o campo de tensão mecânica de uma força aplicada em um ponto de um domínio, sujeito a restrições de deslocamento em outros pontos. Após ter obtido as linhas de isotensão principais, ele sugeriu uma estrutura de barras nesse domínio, sendo que cada barra deveria estar alinhada com as direções principais de tensão calculadas no domínio (MICHELL, 1904). Atualmente sabe-se que esse critério de projeto fornece o mesmo resultado que o critério de máxima rigidez com mínimo volume e que a configuração ótima para esse critério é uma estrutura de treliças. As estruturas de Michell são ainda hoje referência na teoria moderna de OT (GUILHERME, 2006).

Após esse estudo a otimização estrutural passou por décadas sem nenhum avanço significativo. Entre a década de 60 e até o final da década de 80 haviam alguns estudos

que envolviam a otimização paramétrica e a otimização de forma, contudo, ambos os métodos começaram a ser questionados quando levavam em conta a distribuição de material (SILVA, 2003).

No final da década de 80 BENDSOE; KIKUCHI (1988) desenvolveram uma técnica pioneira que transforma problemas de otimização de forma em problemas de distribuição de material, utilizando um método de homogeneização. Com esse intuito duas fases constituintes são consideradas: material e vazio. No estudo Bendsoe e Kikuchi adotaram uma estrutura, tratada como um problema de elasticidade plana, sujeita a trações de superfície, conforme mostrado na figura 1. Os autores procuravam encontrar a melhor distribuição de material nessa estrutura, que minimizasse a flexibilidade e que estivesse sujeita a uma restrição de volume. Devido à simetria, foi considerado somente a parte superior do domínio para a realização das simulações computacionais. Na figura 2 são mostrados os resultados topológicos obtidos a diferentes discretizações. Na figura 2a tem-se uma malha de 16x10 elementos finitos e na figura 2b uma malha com 32x20 elementos finitos e, em ambas as discretizações, a distribuição de material representa, respectivamente, 91%, 64% e 36% do volume original da estrutura.

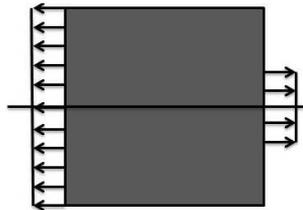


Figura 1: Domínio de projeto. Fonte: Bendsoe e Kikuchi, 1988, p. 214.

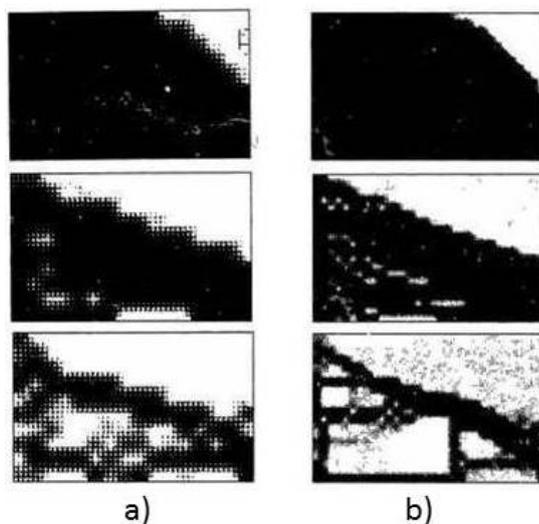


Figura 2: a) Discretização 1 com malha de 16x10. b) Discretização 2 com malha de 32x20. Fonte: Bendsoe e Kikuchi, 1988, p. 216.

Alguns trabalhos que precederam e estão correlacionados à técnica de OT proposta por Bendsoe e Kikuchi são os trabalhos de CHENG; OLHOFF (1981), CHENG; OLHOFF (1982), KOHN; STRANG (1986) e ROZVANY et al. (1987). CHENG; OLHOFF (1981) pesquisaram a maximização da rigidez de placas sólidas elásticas sujeitas a uma dada distribuição de carga transversal. Assumiram como conhecidos o domínio, o volume e as condições de contorno das placas e restringiram os valores mínimos e máximos admissíveis para a função de espessura das placas, as quais foram tomadas como variáveis de projeto. Eles concluíram que uma solução ótima global, geralmente não existe dentro da classe de funções suaves, ou dentro da classe de funções suaves com um número finito de descontinuidades e que o problema tem uma série de soluções ótimas locais. CHENG; OLHOFF (1982) deram continuação ao trabalho anterior com o objetivo de determinar uma possível solução ótima global para o projeto de placas sólidas elásticas assimétricas. Nesse trabalho os autores reformularam o modelo utilizando simultaneamente duas variáveis de projeto e mostraram que a solução obtida era superior às encontradas até o momento. KOHN; STRANG (1986) estudaram a otimização de placas e a colocação de dois materiais, em barras de torção, em diferentes proporções volumétricas, introduzindo o conceito de 'relaxamento' para trabalhar com o problema variacional mal-posto. O 'relaxamento' possibilita uma solução ótima com a introdução da microestrutura e a utilização de um método de homogeneização. Posteriormente, ROZVANY et al. (1987), também, utilizaram o 'relaxamento' no estudo sobre a otimização de placas utilizando a espessura como variável de projeto.

Após Bendsoe e Kikuchi surgiram vários estudos na área de OT. OLHOFF; BENDSOE; RASMUSSEN (1991) começaram a considerar a integração dos métodos de OT com a otimização de forma e a otimização paramétrica em um sistema, de forma que a topologia serve como um pré-processador das otimizações de forma e paramétrica, conduzindo assim, a um resultado bem mais eficiente. THOMSEN (1992) estudou estruturas compostas por mais de um material sugerindo uma extensão do método de homogeneização. MA; KIKUCHI; CHENG (1995), SIENZ; HINTON (1997) e TANG; CHANG (2001) maximizaram a frequência de ressonância de estruturas, obtidas a partir de meios contínuos. ANANTHASURESH; KOTA; GIANCHANDANI (1994) formularam um método sistemático para o projeto de mecanismos flexíveis utilizando a técnica de OT. NISHIWAKI et al. (1998) a fim de otimizar o projeto de mecanismos flexíveis, empregaram a OT usando um método de homogeneização. A formulação de otimização multiobjetivo, também, foi introduzida no estudo. DÍAZ; KIKUCHI (1992) maximizaram a frequência natural de estruturas, utilizando um método de homogeneização, e mostraram a aplicação da OT na amenização de vibrações.

Com o desenvolvimento da metodologia da OT, inúmeros trabalhos foram surgindo, no sentido de melhorar e ampliar o uso da técnica em diferentes meios. Artigos edu-

cacionais foram escritos devido à dificuldade de aplicação da OT, entre eles, pode-se citar os trabalhos de SIGMUND (2001), SURESH (2010), ANDREASSEN et al. (2011), LIU; TOVAR (2014), TAVAKOLI; MOHSENI (2014), AAGE et al. (2013) e JORGENSEN et al. (2015). SIGMUND (2001) escreveu em *Matlab* um código que contém 99 linhas para resolver o problema de maximização da rigidez com restrição de volume, em um domínio bidimensional sujeito a cargas estáticas. SURESH (2010), inspirado no trabalho de SIGMUND (2001), implementou um código em *Matlab*, com 199 linhas, para alcançar a solução de problemas multiobjetivos. Em 2011 ANDREASSEN et al. (2011) melhorou o código 99 linhas aumentando a eficiência computacional e reduzindo-o para 88 linhas. Recentemente LIU; TOVAR (2014) constuíram um código com 169 linhas, em *Matlab*, para a resolução de problemas de otimização de mínima flexibilidade em um domínio tridimensional. TAVAKOLI; MOHSENI (2014), introduziram um algoritmo de 115 linhas, em *Matlab*, para resolver problemas de OT multifásico. AAGE et al. (2013) desenvolveram um aplicativo, para dispositivos portáteis com o sistema iOS ou Android, denominado TopOpt que resolve problemas de OT cujo o objetivo é minimizar a flexibilidade de uma estrutura em um domínio bidimensional. Há pouco tempo JORGENSEN et al. (2015) criaram um aplicativo, denominado TopOpt3D, que também resolve problemas de OT de mínima flexibilidade, contudo esse aplicativo foi desenvolvido para encontrar a topologia de estruturas tridimensionais. Ambos os aplicativos estão disponíveis pelo endereço eletrônico: <http://www.topopt.dtu.dk>.

2 ELASTICIDADE LINEAR

2.1 Noções da teoria de elasticidade linear

Considere o sólido elástico linear, figura 3, de domínio Ω e contorno Γ , composto por Γ_q e Γ_u , caracterizado por:

$$\begin{aligned}\Gamma &= \Gamma_u \cup \Gamma_q, \\ \Gamma_u \cap \Gamma_q &= \emptyset,\end{aligned}\quad (1)$$

onde Γ_q corresponde a parcela de Γ que é submetida às forças de superfície e Γ_u corresponde a parcela de Γ aonde os deslocamentos prescritos são definidos. O sólido está sujeito a forças de superfície $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^3$, na parcela de contorno Γ_q , a forças de corpo $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$, no domínio Ω , e a deslocamentos prescritos $\bar{\mathbf{u}}$ na parcela de contorno correspondente a Γ_u .

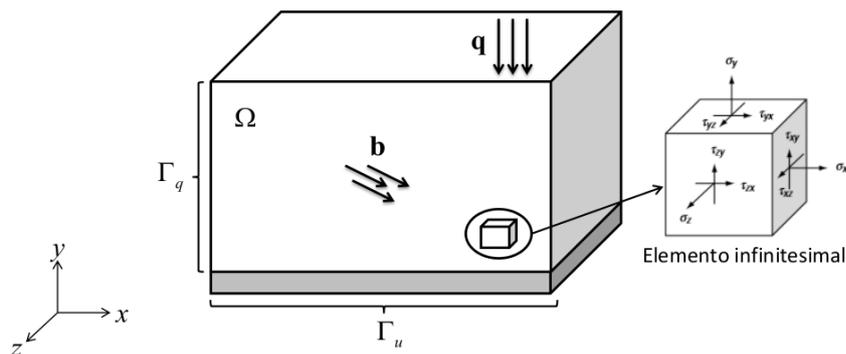


Figura 3: Sólido elástico linear.

Mediante a caracterização feita acima do sólido elástico linear segue na sequência as equações básicas da teoria de elasticidade linear que servirão como base no desenvolvimento do MEF e para a formulação do problema de OT. Primeiramente são escritos os componentes de deslocamento, de forças externas, de tensão e de deformação, para então formular as relações entre deformações e os deslocamentos e entre tensões e deformações e finaliza-se com as equações diferenciais de equilíbrio

e com as condições geométricas e mecânicas de contorno.

Vale ressaltar que o presente trabalho não tem como objetivo estudar a teoria da elasticidade linear, portanto, são apenas apresentadas algumas equações necessárias, sem realizar um desenvolvimento detalhado do processo de obtenção das mesmas. A partir dos textos de SADD (2005) e TIMOSHENKO; GOODIER (1951) é possível encontrar um desenvolvimento completo da teoria da elasticidade, em complementação ao que será abordado na sequência.

As grandezas vetoriais de deslocamento $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y, z)$ e de forças $\mathbf{q} = \mathbf{q}(x, y, z)$ e $\mathbf{b} = \mathbf{b}(x, y, z)$ são expressas, respectivamente, no domínio Ω , como os seguintes vetores:

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \left\{ u_x \quad u_y \quad u_z \right\}^T, \\ \mathbf{q} &= \left\{ q_x \quad q_y \quad q_z \right\}^T, \\ \mathbf{b} &= \left\{ b_x \quad b_y \quad b_z \right\}^T,\end{aligned}\tag{2}$$

onde u_x é a componente de deslocamento na direção do eixo x , u_y é a componente de deslocamento na direção do eixo y , u_z é a componente de deslocamento na direção do eixo z , q_x é a componente de força de superfície na direção do eixo x , q_y é a componente de força de superfície na direção do eixo y , q_z é a componente de força de superfície na direção do eixo z , b_x é a componente de força de corpo na direção do eixo x , b_y é a componente de força de corpo na direção do eixo y e b_z é a componente de força de corpo na direção do eixo z .

As forças internas são definidas pelo vetor de tensão $\boldsymbol{\sigma}$, especificado por σ_x , σ_y e σ_z que representam as componentes normais de tensão nas direções dos eixos x , y e z , respectivamente, e pelas componentes de cisalhamento τ_{xy} no plano xy , τ_{xz} no plano xz e τ_{yz} no plano yz :

$$\boldsymbol{\sigma} = \left\{ \sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{xz} \quad \tau_{yz} \right\}^T.\tag{3}$$

As componentes de deformação são definidas pelo vetor de deformação $\boldsymbol{\epsilon}$ como:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \left\{ \epsilon_x \quad \epsilon_y \quad \epsilon_z \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{xz} \quad \gamma_{yz} \right\}^T,\tag{4}$$

em que ϵ_x é a componente de deformação longitudinal na direção do eixo x , ϵ_y é a componente de deformação longitudinal na direção do eixo y , ϵ_z é a componente de deformação longitudinal na direção do eixo z , γ_{xy} é a componente de deformação de cisalhamento no plano xy , γ_{xz} é a componente de deformação de cisalhamento no plano xz e γ_{yz} é a componente de deformação de cisalhamento no plano yz .

As relações entre os deslocamentos e as deformações são dadas por:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{P}\mathbf{u}, \quad (5)$$

em que \mathbf{P} é o operador de derivação matricial.

Assumindo que o sólido tem a propriedade de isotropia, isto é, que independentemente da direção as propriedades elásticas são as mesmas. (TIMOSHENKO; GOODIER, 1951) as relações entre as tensões e as deformações, escritas pela Lei de Hooke são dadas, na forma matricial, pela seguinte equação:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \frac{E_0}{(1 + \nu_0)(1 - 2\nu_0)} \begin{bmatrix} 1 & -\nu_0 & -\nu_0 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_0 & 1 & -\nu_0 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_0 & -\nu_0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1 + \nu_0) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1 + \nu_0) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1 + \nu_0) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}_0\boldsymbol{\epsilon}, \quad (6)$$

onde E_0 é o módulo de Young do material sólido linear e homogêneo, ν_0 é o coeficiente de Poisson e \mathbf{D}_0 corresponde a matriz constitutiva elástica do material base isotrópico.

Como a matriz constitutiva deve ser obrigatoriamente definida positiva (possui todos os autovalores maiores do que zero) tem-se as seguintes propriedades para os coeficientes elásticos E_0 e ν :

$$\begin{aligned} E_0 &> 0, \\ -1 &< \nu_0 < \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (7)$$

A equação de equilíbrio é expressa por:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{P}^T\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = \mathbf{0} \text{ em } \Omega. \quad (8)$$

O conjunto de equações apresentado constituem algumas equações básicas da te-

oria da elasticidade linear. Essas equações necessitam de condições geométricas de contorno e condições mecânicas de contorno. As condições geométricas de contorno são dadas por:

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \text{ em } \Gamma_u. \quad (9)$$

Para as condições mecânicas de contorno é importante observar que, na parte do contorno Γ_q deve haver um equilíbrio entre as forças internas expressas por $\boldsymbol{\sigma}$ e as forças de superfície \mathbf{q} . Esse equilíbrio fornece a seguinte relação:

$$\begin{Bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{d1} & 0 & 0 & c_{d2} & c_{d3} & 0 \\ 0 & c_{d2} & 0 & c_{d1} & 0 & c_{d3} \\ 0 & 0 & c_{d3} & 0 & c_{d1} & c_{d2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{q} = \mathbf{C}\boldsymbol{\sigma} \text{ em } \Gamma_q, \quad (10)$$

onde \mathbf{C} é a matriz dos cossenos diretores da normal externa ao contorno e c_{d1} , c_{d2} e c_{d3} são os cossenos diretores da normal externa ao contorno.

2.2 Noções da teoria de elasticidade plana linear - estado plano de tensão

O estado plano de tensão se caracteriza em um sólido elástico linear de espessura pequena, se comparada as outras dimensões, superfície média e de domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ aonde ocorrem a ação de forças externas e deslocamentos prescritos, conforme mostrado na figura 4 (SORIANO, 2009). Um ponto de Ω é especificado por (x, y) e seu contorno é definido por Γ (composto por Γ_q e Γ_u) que é caracterizado por:

$$\begin{aligned} \Gamma &= \Gamma_u \cup \Gamma_q, \\ \Gamma_u \cap \Gamma_q &= \emptyset. \end{aligned} \quad (11)$$

O sólido está sujeito a forças de superfície $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^2$, na parcela de contorno Γ_q , a forças de corpo $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$, no domínio Ω , e a deslocamentos prescritos $\bar{\mathbf{u}}$ na parcela de contorno correspondente a Γ_u .

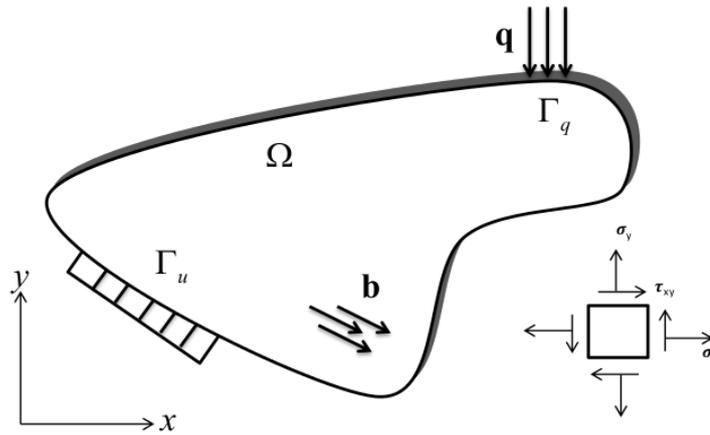


Figura 4: Sólido elástico caracterizado no estado plano de tensão.

As equações básicas da teoria da elasticidade linear, apresentadas na seção 2.1, serão reescritas considerando o estado plano de tensão.

As grandezas vetoriais de deslocamento $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y)$ e de forças $\mathbf{q} = \mathbf{q}(x, y)$ e $\mathbf{b} = \mathbf{b}(x, y)$ são expressas, respectivamente, no domínio Ω , como os seguintes vetores:

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \left\{ \begin{matrix} u_x & u_y \end{matrix} \right\}^T, \\ \mathbf{q} &= \left\{ \begin{matrix} q_x & q_y \end{matrix} \right\}^T, \\ \mathbf{b} &= \left\{ \begin{matrix} b_x & b_y \end{matrix} \right\}^T.\end{aligned}\quad (12)$$

O vetor de tensão $\boldsymbol{\sigma}$, é especificado pelas componentes:

$$\boldsymbol{\sigma} = \left\{ \begin{matrix} \sigma_x & \sigma_y & \tau_{xy} \end{matrix} \right\}^T. \quad (13)$$

As componentes de deformação são definidas por:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \left\{ \begin{matrix} \epsilon_x & \epsilon_y & \gamma_{xy} \end{matrix} \right\}^T. \quad (14)$$

As relações entre os deslocamentos e as deformações são dadas por:

$$\left\{ \begin{matrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{matrix} \right\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} u_x \\ u_y \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow \boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{P}\mathbf{u}. \quad (15)$$

As relações entre as tensões e as deformações, escritas pela Lei de Hooke são

dadas, na forma matricial, pela seguinte equação:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E_0}{1-\nu_0^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu_0 & 0 \\ \nu_0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu_0}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}_0 \boldsymbol{\epsilon}. \quad (16)$$

A equação de equilíbrio é expressa por:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{P}^T \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = 0 \text{ em } \Omega. \quad (17)$$

A equação (17) se estende ao caso dinâmico com a incorporação das forças de inércia (SORIANO, 2009):

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \end{Bmatrix} - \rho_0 \begin{Bmatrix} \ddot{u}_x \\ \ddot{u}_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{P}^T \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} - \rho_0 \ddot{\mathbf{u}} = 0 \text{ em } \Omega, \quad (18)$$

em que ρ_0 é a densidade inicial do material sólido linear e homogêneo e $\ddot{\mathbf{u}}$ é o vetor que define o campo de acelerações, \ddot{u}_x é a componente de aceleração na direção do eixo x e \ddot{u}_y é a componente de aceleração na direção do eixo y .

As condições geométricas de contorno são dadas por:

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \text{ em } \Gamma_u. \quad (19)$$

As condições mecânicas de contorno são expressas por:

$$\begin{Bmatrix} q_x \\ q_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{d1} & 0 & c_{d2} \\ 0 & c_{d2} & c_{d1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{q} = \mathbf{C} \boldsymbol{\sigma} \text{ em } \Gamma_q. \quad (20)$$

2.3 Princípio dos trabalhos virtuais

O Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV) estabelece que com a suposição de um deslocamento virtual de um objeto em equilíbrio estático, o trabalho virtual é zero, ou seja, o trabalho virtual das forças internas é igual ao trabalho virtual das forças externas. O PTV é condição necessária e suficiente para garantir o equilíbrio de um sólido. Segundo SORIANO (2009), o PTV dá origem a teoremas importantes e pode ser aplicado tanto a comportamentos lineares como não lineares, assim como a comportamentos geométricos e físicos.

A fim de formular a equação do PTV considere que o sólido elástico linear, fi-

gura 4, tenha um campo de deslocamento arbitrário definido por $\delta \mathbf{u} = \delta \mathbf{u}(x, y) = \left\{ \begin{array}{l} \delta u_x(x, y) \\ \delta u_y(x, y) \end{array} \right\}$ que atenda as condições geométricas de contorno e as relações de deformação-deslocamentos.

Multiplicando a equação de equilíbrio (17) por $\delta \mathbf{u}$ e integrando sobre o volume V do sólido obtém-se:

$$\begin{aligned} \int_V (\mathbf{P}^T \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b})^T \delta \mathbf{u} dV &= 0 \\ \int_V (\mathbf{P}^T \boldsymbol{\sigma})^T \delta \mathbf{u} dV + \int_V \mathbf{b}^T \delta \mathbf{u} dV &= 0 \\ \int_V \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{P} \delta \mathbf{u} dV + \int_V \mathbf{b}^T \delta \mathbf{u} dV &= 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Aplicando o Teorema de Green na integral $\int_V \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{P} \delta \mathbf{u} dV$, tem-se:

$$\begin{aligned} \int_V \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{P} \delta \mathbf{u} dV &= \int_{\Gamma} (\mathbf{C} \boldsymbol{\sigma})^T \delta \mathbf{u} d\Gamma - \int_V (\mathbf{P}^T \boldsymbol{\sigma})^T \delta \mathbf{u} dV \\ \int_V (\mathbf{P}^T \boldsymbol{\sigma})^T \delta \mathbf{u} dV &= \int_{\Gamma} (\mathbf{C} \boldsymbol{\sigma})^T \delta \mathbf{u} d\Gamma - \int_V \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{P} \delta \mathbf{u} dV. \end{aligned} \quad (22)$$

Substituindo a equação (22) na equação (21) obtém-se:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} (\mathbf{C} \boldsymbol{\sigma})^T \delta \mathbf{u} d\Gamma - \int_V \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{P} \delta \mathbf{u} dV + \int_V \mathbf{b}^T \delta \mathbf{u} dV &= 0 \\ \int_{\Gamma} (\mathbf{C} \boldsymbol{\sigma})^T \delta \mathbf{u} d\Gamma + \int_V \mathbf{b}^T \delta \mathbf{u} dV &= \int_V \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{P} \delta \mathbf{u} dV. \end{aligned} \quad (23)$$

Como $\delta \mathbf{u}$ atende as condições geométricas de contorno, o domínio de integração do contorno Γ pode ser trocado por Γ_q e definindo o campo de deformações virtuais por $\delta \boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{P} \delta \mathbf{u}$ a equação (23) pode ser reescrita como:

$$\int_{\Gamma_q} \mathbf{q}^T \delta \mathbf{u} d\Gamma + \int_V \mathbf{b}^T \delta \mathbf{u} dV = \int_V \boldsymbol{\sigma}^T \delta \boldsymbol{\epsilon} dV. \quad (24)$$

O trabalho virtual considera o trabalho realizado por todas as forças, incluindo as forças de inércia ao adotar um problema dinâmico, devido a um deslocamento virtual. A partir da formulação realizada anteriormente, pode-se estender o resultado ao caso dinâmico, considerando a incorporação das forças de inércia.

Multiplicando a equação de equilíbrio (18) por $\delta \mathbf{u}$ e integrando ao longo do volume

V do sólido obtém-se:

$$\begin{aligned} \int_V (\mathbf{P}^T \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} - \rho_0 \ddot{\mathbf{u}})^T \delta \mathbf{u} dV &= 0 \\ \int_V (\mathbf{P}^T \boldsymbol{\sigma})^T \delta \mathbf{u} dV + \int_V \mathbf{b}^T \delta \mathbf{u} dV - \int_V \rho_0 \ddot{\mathbf{u}}^T \delta \mathbf{u} dV &= 0 \\ \int_V \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{P} \delta \mathbf{u} dV + \int_V \mathbf{b}^T \delta \mathbf{u} dV - \int_V \rho_0 \ddot{\mathbf{u}}^T \delta \mathbf{u} dV &= 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Aplicando o Teorema de Green ao primeiro termo da equação (25), alterando o domínio de integração do contorno Γ por Γ_q ($\delta \mathbf{u}$ atende as condições geométricas de contorno) e definindo o campo de deformações virtuais por $\delta \boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{P} \delta \mathbf{u}$ a equação (25) pode ser reescrita como:

$$\int_{\Gamma_q} \mathbf{q}^T \delta \mathbf{u} d\Gamma + \int_V \mathbf{b}^T \delta \mathbf{u} dV = \int_V \boldsymbol{\sigma}^T \delta \boldsymbol{\epsilon} dV + \int_V \rho_0 \ddot{\mathbf{u}}^T \delta \mathbf{u} dV \quad (26)$$

ou

$$\int_{\Gamma_q} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{q} d\Gamma + \int_V \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b} dV = \int_V \delta \boldsymbol{\epsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV + \int_V \delta \mathbf{u}^T \rho_0 \ddot{\mathbf{u}} dV. \quad (27)$$

3 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

O MEF é um método numérico, utilizado para a discretização de meios contínuos. O método é aplicado em problemas de mecânica dos fluídos, transmissão de calor, eletromagnetismo, entre outros, mas, segundo SORIANO (2009), ele vem sendo amplamente utilizado na discretização de problemas de Mecânica do Contínuo e mais especificamente de Mecânica dos Sólidos Deformáveis, uma vez que ele possibilita a modelagem de estruturas com geometrias diversas, carregamentos e condições de contorno gerais. Conforme afirma AKIN (2005), na engenharia moderna é muito difícil encontrar um projeto que não necessite de algum tipo de cálculo que envolva o MEF.

A ideia do MEF é encontrar a solução de um problema complicado através da substituição desse problema por um mais simples (RAO, 2005). Aproxima-se a solução de um modelo contínuo pela solução de um modelo discreto, isto é, parte-se de um problema de valor de contorno e inicial cujo comportamento é descrito por um sistema de equações diferenciais e substitui-se esse sistema por um sistema de equações algébricas, que permite descrever o comportamento aproximado da estrutura, simplificando consideravelmente a solução.

Para o desenvolvimento do MEF é necessário seguir alguns procedimentos. Segundo COOK; MALKUS; PLESHA (1989) é importante observar os seguintes passos:

1. Dividir a estrutura em elementos finitos, gerando a malha;
2. Formular as propriedades de cada elemento finito (EF);
3. Realizar a montagem das matrizes e vetores globais da estrutura;
4. Aplicar os carregamentos prescritos;
5. Especificar os deslocamentos nodais prescritos;
6. Resolver simultaneamente as equações algébricas lineares para determinar os deslocamentos nodais;
7. Calcular as deformações e tensões do elemento.

3.1 Discretização de uma viga utilizando método dos elementos finitos

A discretização pelo MEF consiste em dividir um domínio contínuo Ω ($\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$) em um número finito de subdomínios Ω_e denominados elementos finitos, com $e = 1, 2, \dots, N_e$, onde N_e é o número total de elementos finitos da malha. Esses elementos são interconectados por pontos denominados nós ou pontos nodais, onde é determinado o campo de deslocamentos e aonde são atribuídas as condições geométrica e mecânica de contorno.

3.1.1 Discretização de uma viga bidimensional utilizando método dos elementos finitos

Na figura 5 foi exemplificada a discretização de uma viga utilizando o MEF. À esquerda é idealizada uma viga, de domínio bidimensional Ω , com condição geométrica e mecânica de contorno, representando o problema contínuo, e à direita tem-se o problema discreto, discretizado por uma malha de 6 elementos finitos quadrilaterais bilineares, interligados por pontos nodais localizados nos vértices dos elementos. Ainda para o caso discreto é interessante observar que, somente em alguns pontos nodais são atribuídas as condições geométrica e mecânica de contorno.

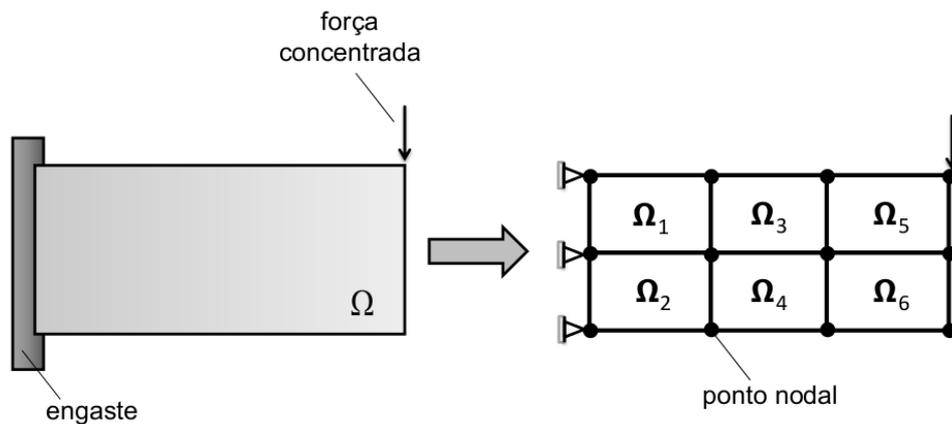


Figura 5: Discretização de uma viga 2D utilizando o MEF.

O EF, que foi utilizado na discretização, está em um sistema de coordenadas cartesianas (x, y) de origem em seu centróide, tem dimensões $2r \times 2s$, onde r e s representam, nesta ordem, a metade do maior e do menor lado do EF, e possui 4 pontos nodais, posicionados em seus vértices e numerados no sentido anti-horário pelos números 1, 2, 3 e 4, conforme ilustrado na figura 6. Cada ponto nodal possui coordenadas (x_n, y_n) as quais referem-se a um sistema de coordenadas locais do ponto nodal n e deslocamentos nodais u_{2n-1} e u_{2n} , que correspondem, respectivamente, aos deslocamentos

locais, nas direções dos eixos x e y , do ponto nodal n , o que indica que cada EF possui 8 graus de liberdade.

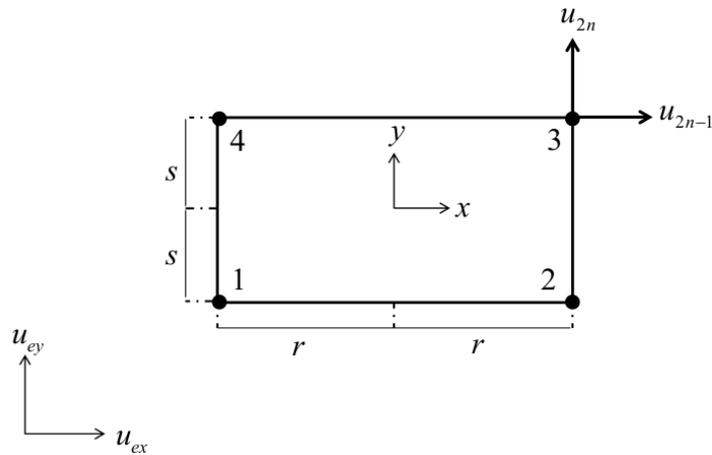


Figura 6: Elemento finito retangular de 4 pontos nodais.

O vetor que define o campo de deslocamentos $\mathbf{u}_e = \mathbf{u}_e(x, y)$, para cada EF é dado em função dos deslocamentos $u_{ex} = u_{ex}(x, y)$ e $u_{ey} = u_{ey}(x, y)$ conforme segue:

$$\mathbf{u}_e = \begin{Bmatrix} u_{ex} \\ u_{ey} \end{Bmatrix}. \quad (28)$$

onde u_{ex} é o deslocamento do EF na direção do eixo x e u_{ey} é o deslocamento do EF na direção do eixo y .

A ideia básica do MEF é a obtenção de uma solução aproximada para o problema contínuo e sua formulação parte do princípio de que o vetor do campo de deslocamentos para cada EF, é dado em função dos deslocamentos nodais u_{2n} e u_{2n-1} e das funções de interpolação local $N_n = N_n(x, y)$ do elemento, no ponto nodal n , de modo que:

$$\begin{aligned} u_{ex} &= \sum_{n=1}^4 N_n u_{2n-1}, \\ u_{ey} &= \sum_{n=1}^4 N_n u_{2n}. \end{aligned} \quad (29)$$

Armazenando os deslocamentos nodais, do EF, no vetor \mathbf{d} obtém-se:

$$\mathbf{d} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \end{Bmatrix}. \quad (30)$$

Assim a equação (29) pode ser reescrita como:

$$\begin{Bmatrix} u_{ex} \\ u_{ey} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \end{Bmatrix}, \quad (31)$$

ou em notação matricial reduzida por:

$$\mathbf{u}_e = \mathbf{N}\mathbf{d}, \quad (32)$$

onde \mathbf{N} é a matriz das funções de interpolação.

As funções de interpolação são polinômios que devem satisfazer a seguinte condição: para o ponto nodal n a função de interpolação N_n terá que assumir o valor unitário no ponto nodal n e se anular em todos os outros pontos nodais (BECKER; CAREY; ODEN, 1981; AKIN, 2005), isto significa que as funções de interpolação devem satisfazer a propriedade da função delta de Kronecker,¹ o que indica que estas

¹ $N_n(x_m, y_m) = \delta_{nm}$ com valor unitário no caso de $n = m$ e valor nulo no caso de $n \neq m$ (SADD, 2005).

funções são da forma de Lagrange e são dadas por:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4rs} (r - x) (s - y), \\ N_2 &= \frac{1}{4rs} (r + x) (s - y), \\ N_3 &= \frac{1}{4rs} (r + x) (s + y), \\ N_4 &= \frac{1}{4rs} (r - x) (s + y). \end{aligned} \quad (33)$$

Como observado na equação (33) as funções de interpolação encontradas são produtos de polinômios lineares unidimensionais, o que segundo COOK et al. (2002) caracteriza a bilinearidade do elemento. Construindo os gráficos de tais funções, figura 7, é possível verificar que elas são lineares no contorno do elemento e quadráticas no seu interior.

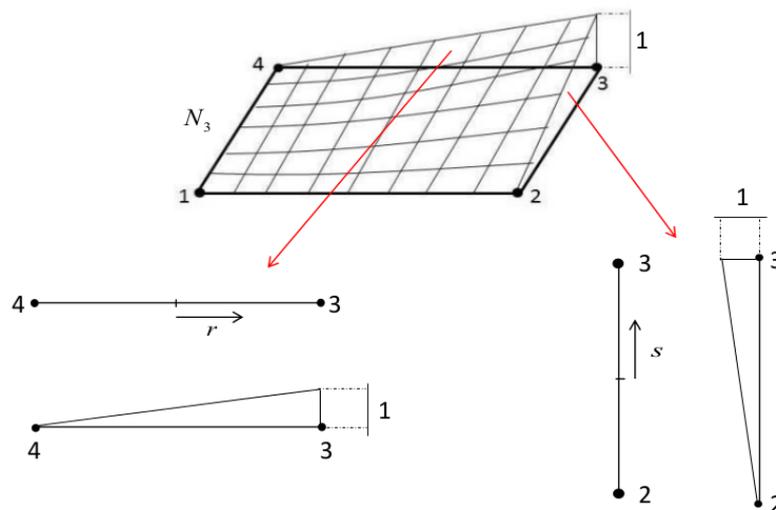


Figura 7: Função de interpolação N_3 . Adaptada de Soriano, 2009, p. 179

3.1.2 Discretização de uma viga tridimensional utilizando método dos elementos finitos

Na figura 8 foi exemplificada a discretização de uma viga utilizando o MEF. À esquerda é idealizada uma viga, de domínio tridimensional Ω , com condição geométrica e mecânica de contorno, representando o problema contínuo, e à direita tem-se o problema discreto, discretizado por uma malha de 6 elementos finitos cúbicos, interligados por pontos nodais localizados nos vértices dos elementos.

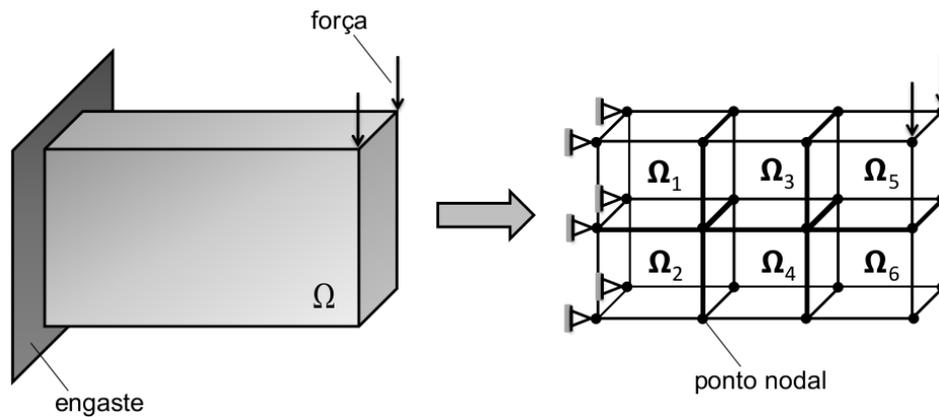


Figura 8: Discretização de uma viga 3D utilizando o MEF.

O EF, que foi utilizado na discretização, está em um sistema de coordenadas cartesianas (x, y, z) de origem em seu centróide, tem dimensões $2q \times 2q \times 2q$, em que q representa a metade do lado do cubo, e possui 8 pontos nodais, posicionados em seus vértices e numerados de 1 a 8, conforme ilustrado na figura 9. Cada ponto nodal possui coordenadas (x_n, y_n, z_n) as quais referem-se a um sistema de coordenadas locais do ponto nodal n e deslocamentos nodais u_{3n-2} , u_{3n-1} e u_{3n} , que correspondem, respectivamente, aos deslocamentos locais, nas direções x , y e z , do ponto nodal n , o que indica que cada EF possui 24 graus de liberdade.

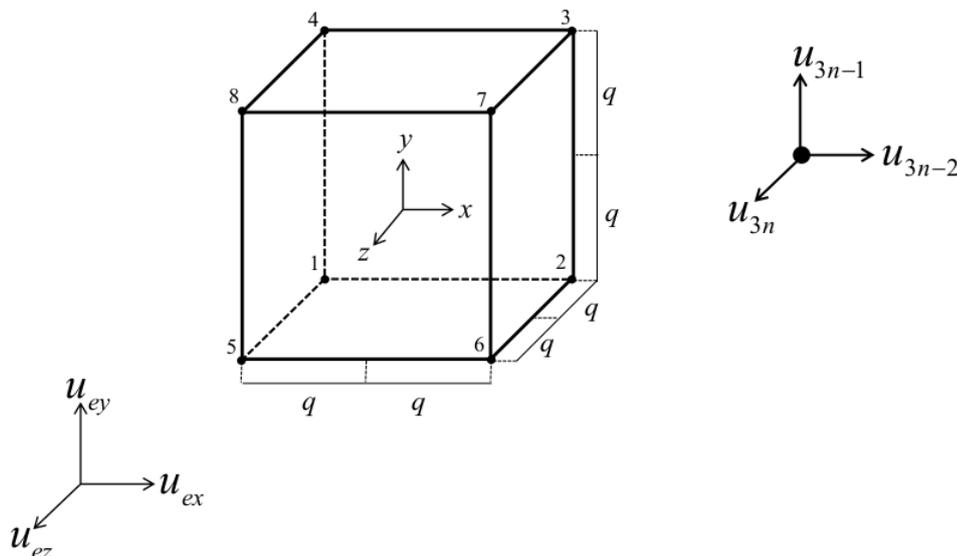


Figura 9: Elemento finito cúbico de 8 pontos nodais.

O vetor que define o campo de deslocamentos $\mathbf{u}_e = \mathbf{u}_e(x, y, z)$, para cada EF é dado em função dos deslocamentos $u_{ex} = u_{ex}(x, y, z)$, $u_{ey} = u_{ey}(x, y, z)$ e $u_{ez} =$

$u_{ez}(x, y, z)$ conforme segue:

$$\mathbf{u}_e = \begin{Bmatrix} u_{ex} \\ u_{ey} \\ u_{ez} \end{Bmatrix}. \quad (34)$$

em que u_{ez} é o deslocamento do EF na direção do eixo z .

O vetor do campo de deslocamentos para cada EF, é dado em função dos deslocamentos nodais u_{3n-2} , u_{3n-1} e u_{3n} e das funções de interpolação local $N_n = N_n(x, y, z)$ do elemento, no ponto nodal n , de modo que:

$$\begin{aligned} u_{ex} &= \sum_{n=1}^4 N_n u_{3n-2}, \\ u_{ey} &= \sum_{n=1}^4 N_n u_{3n-1}, \\ u_{ez} &= \sum_{n=1}^4 N_n u_{3n}. \end{aligned} \quad (35)$$

No caso tridimensional o vetor \mathbf{d} é dado por:

$$\mathbf{d} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_{24} \end{Bmatrix}. \quad (36)$$

Assim a equação (35) pode ser reescrita como:

$$\begin{Bmatrix} u_{ex} \\ u_{ey} \\ u_{ez} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & \cdots & N_8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_{24} \end{Bmatrix}, \quad (37)$$

em que as funções de interpolação são dadas por:

$$\begin{aligned}
 N_1 &= \frac{1}{8q^3} (q-x)(q-y)(q-z), \\
 N_2 &= \frac{1}{8q^3} (q+x)(q-y)(q-z), \\
 N_3 &= \frac{1}{8q^3} (q+x)(q+y)(q-z), \\
 N_4 &= \frac{1}{8q^3} (q-x)(q+y)(q-z), \\
 N_5 &= \frac{1}{8q^3} (q-x)(q-y)(q+z), \\
 N_6 &= \frac{1}{8q^3} (q+x)(q-y)(q+z), \\
 N_7 &= \frac{1}{8q^3} (q+x)(q+y)(q+z), \\
 N_8 &= \frac{1}{8q^3} (q-x)(q+y)(q+z).
 \end{aligned} \tag{38}$$

3.2 Relação entre deformação e deslocamentos nodais

Continuando o desenvolvimento do MEF, pode-se determinar o vetor dos componentes de deformação do EF, tomando como base a equação de deformação da teoria da elasticidade linear e reescrevendo-a para o EF como:

$$\epsilon_e = \mathbf{P}\mathbf{u}_e \Leftrightarrow \epsilon_e = \mathbf{P}\mathbf{N}\mathbf{d}, \tag{39}$$

onde ϵ_e representa o vetor dos componentes de deformação do EF.

Construindo uma matriz que relaciona os componentes das matrizes \mathbf{P} e \mathbf{N} tem-se:

$$\mathbf{B} = \mathbf{P}\mathbf{N}. \tag{40}$$

Assim a equação (39) pode ser expressa por:

$$\epsilon_e = \mathbf{B}\mathbf{d}, \tag{41}$$

3.3 Obtenção da matriz de rigidez e do vetor de carregamento do elemento finito

A formulação do MEF é deduzida, mais frequentemente, pelos métodos aproximados clássicos de Rayleigh-Ritz e de Galerkin. O método de Rayleigh-Ritz se baseia em princípios variacionais e o método de Galerkin procede de equações integrais de resíduos ponderados e é mais geral do que o anterior, uma vez que, não exige o

conhecimento ou existência de um princípio variacional (SORIANO, 2009).

Nesta dissertação optou-se por utilizar, na formulação de deslocamentos do MEF, o PTV, que é amplamente utilizado em análise de estruturas e nada mais é do que a forma fraca do método de Galerkin. O PTV estabelece que com a suposição de um deslocamento virtual de um objeto em equilíbrio estático, o trabalho virtual é zero, ou seja, o trabalho virtual das forças internas é igual ao trabalho virtual das forças externas. Escrevendo a formulação do PTV, para um EF, considerando o caso 2D e desconsiderando as forças de inércia, tem-se:

$$\int_{\Omega_e} (\delta \mathbf{u}_e^T \mathbf{b}_e) dx dy + \int_{\Gamma_q^e} (\delta \mathbf{u}_e^T \mathbf{q}_e) d\Gamma_e = \int_{\Omega_e} (\delta \boldsymbol{\epsilon}_e^T \boldsymbol{\sigma}_e) dx dy, \quad (42)$$

onde \mathbf{b}_e é o vetor de forças de corpo atuando no EF, $\delta \mathbf{u}_e$ é o vetor de deslocamento virtual do EF, \mathbf{q}_e é o vetor de forças de superfície, atuando na parcela do contorno Γ_q^e , do EF, $\boldsymbol{\sigma}_e$ é o vetor de tensão do EF, Γ_e representa o contorno do EF e $\delta \boldsymbol{\epsilon}_e$ é a deformação virtual do EF.

As equações de deslocamento virtual, de deformação virtual e de tensão, do EF são expressas, respectivamente, por:

$$\delta \mathbf{u}_e = \mathbf{N} \delta \mathbf{d}, \quad (43)$$

$$\delta \boldsymbol{\epsilon}_e = \mathbf{B} \delta \mathbf{d}, \quad (44)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_e = \mathbf{D}_0 \boldsymbol{\epsilon}_e = \mathbf{D}_0 \mathbf{B} \mathbf{d}, \quad (45)$$

onde $\delta \mathbf{d}$ é o vetor de deslocamentos virtuais nodais.

Substituindo (43), (44) e (45) em (42) obtém-se:

$$\int_{\Omega_e} (\delta \mathbf{d}^T \mathbf{N}^T \mathbf{b}_e) dx dy + \int_{\Gamma_q^e} (\delta \mathbf{d}^T \mathbf{N}^T \mathbf{q}_e) d\Gamma_e = \int_{\Omega_e} (\delta \mathbf{d}^T \mathbf{B}^T \mathbf{D}_0 \mathbf{B} \mathbf{d}) dx dy. \quad (46)$$

A equação (46) pode ser reescrita com os vetores de deslocamentos virtuais nodais $\delta \mathbf{d}$ e com o vetor de deslocamento nodal \mathbf{d} para fora da integral pois os mesmos não dependem de x e y , assim:

$$\delta \mathbf{d}^T \int_{\Omega_e} (\mathbf{N}^T \mathbf{b}_e) dx dy + \delta \mathbf{d}^T \int_{\Gamma_q^e} (\mathbf{N}^T \mathbf{q}_e) d\Gamma_e = \delta \mathbf{d}^T \left(\int_{\Omega_e} (\mathbf{B}^T \mathbf{D}_0 \mathbf{B}) dx dy \right) \mathbf{d}. \quad (47)$$

Conforme o PTV, a equação (47) é verdadeira para qualquer conjunto de deslocamentos virtuais, então:

$$\int_{\Omega_e} (\mathbf{N}^T \mathbf{b}_e) dx dy + \int_{\Gamma_q^e} (\mathbf{N}^T \mathbf{q}_e) d\Gamma_e = \left(\int_{\Omega_e} (\mathbf{B}^T \mathbf{D}_0 \mathbf{B}) dx dy \right) \mathbf{d}. \quad (48)$$

No desenvolvimento dos problemas de elementos finitos, supondo um comportamento linear elástico tem-se que:

$$\mathbf{K}_e \mathbf{d} = \mathbf{F}_e, \quad (49)$$

onde \mathbf{K}_e é a matriz de rigidez do EF e \mathbf{F}_e é o vetor de carregamento total do EF. Comparando-se a equação (48) com a equação (49) obtém-se:

$$\mathbf{K}_e = \int_{\Omega_e} (\mathbf{B}^T \mathbf{D}_0 \mathbf{B}) dx dy, \quad (50)$$

$$\mathbf{F}_e = \int_{\Omega_e} (\mathbf{N}^T \mathbf{b}_e) dx dy + \int_{\Gamma_q^e} (\mathbf{N}^T \mathbf{q}_e) d\Gamma_e. \quad (51)$$

3.4 Montagem da matriz de rigidez e do vetor de carregamento total global

Posteriormente à obtenção da matriz de rigidez e do vetor de carregamento total de cada EF é necessário realizar o cálculo da matriz de rigidez global \mathbf{K} e do vetor de carregamento total global \mathbf{F} , de forma que:

$$\mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{F}, \quad (52)$$

onde \mathbf{U} é o vetor que define o campo de deslocamento global.

A matriz \mathbf{K} é uma matriz simétrica e semidefinida positiva (os autovalores são maiores ou iguais a zero) e é obtida mediante a inserção de todas as matrizes de rigidez dos elementos finitos na matriz de rigidez global, de forma que:

$$\mathbf{K} = \sum_{e=1}^{N_e} \mathbf{K}_e. \quad (53)$$

De forma análoga é obtido o vetor \mathbf{F} :

$$\mathbf{F} = \sum_{e=1}^{N_e} \mathbf{F}_e. \quad (54)$$

Segundo RAO (2005) para realizar a montagem das matrizes e vetores globais deve-se observar a compatibilidade dos pontos nodais dos elementos, ou seja, os elementos conectados por um ponto nodal possuem o mesmo valor correspondente ao grau de liberdade desconhecido que é localizado nesse ponto nodal. Quando os deslocamentos generalizados possuem um ponto nodal comum, as rigidezes nodais e carregamentos nodais de cada um dos elementos, que são conectados por esse ponto

nodal, devem ser adicionados para se obter as rigidezes e carregamentos globais nesse nó.

Com o intuito de exemplificar o que foi dito anteriormente, considera-se a malha de elementos finitos e os elementos finitos, conforme mostrado na figura 10.

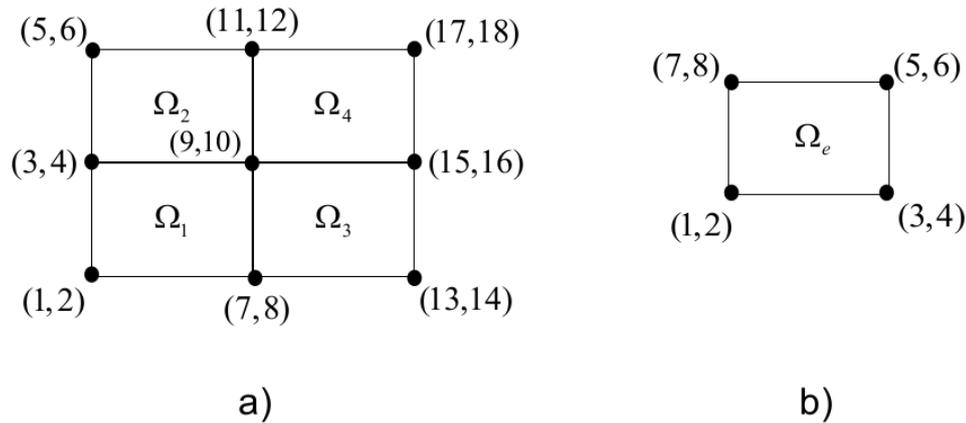


Figura 10: a) Exemplo de malha de elementos finitos com numeração de deslocamentos nodais globais. b) Elementos finitos com numeração de deslocamentos nodais locais.

A malha é formada por 4 elementos finitos e 9 pontos nodais, ambos, numerados coluna a coluna, da esquerda para a direita, iniciando na parte inferior esquerda do elemento 1, conforme mostrado na figura 10a. Os deslocamentos $2n$ e $2n - 1$ que correspondem aos deslocamentos globais, representam, respectivamente, os deslocamentos verticais e horizontais do ponto nodal n . Na figura 10b é ilustrado cada EF com 4 pontos nodais, numerados no sentido anti-horário, iniciando na parte inferior esquerda. Cada ponto nodal tem dois deslocamentos nodais, o que indica que são 8 graus de liberdade para cada EF e, portanto, têm-se uma matriz de rigidez de ordem 8 para cada EF. Para o elemento 1, mostrado na figura 10, tem-se uma relação entre os deslocamentos nodais locais e os deslocamentos nodais globais, esta relação pode ser observada na figura 11.

Como pode ser observado, na figura 11, cada componente da matriz de rigidez possui um referencial local e um referencial global, por exemplo, o componente k_{31} corresponde a posição (3, 1) na matriz de rigidez local do elemento 1, contudo, passará a corresponder na posição (7, 1) na matriz de rigidez global.

Global		1	2	7	8	9	10	3	4	
Local		1	2	3	4	5	6	7	8	
1	1	$\mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} & k_{17} & k_{18} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} & k_{27} & k_{28} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} & k_{37} & k_{38} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} & k_{47} & k_{48} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} & k_{57} & k_{58} \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} & k_{67} & k_{68} \\ k_{71} & k_{72} & k_{73} & k_{74} & k_{75} & k_{76} & k_{77} & k_{78} \\ k_{81} & k_{82} & k_{83} & k_{84} & k_{85} & k_{86} & k_{87} & k_{88} \end{bmatrix}$	k_{11}	k_{12}	k_{13}	k_{14}	k_{15}	k_{16}	k_{17}	k_{18}
2	2		k_{21}	k_{22}	k_{23}	k_{24}	k_{25}	k_{26}	k_{27}	k_{28}
7	3		k_{31}	k_{32}	k_{33}	k_{34}	k_{35}	k_{36}	k_{37}	k_{38}
8	4		k_{41}	k_{42}	k_{43}	k_{44}	k_{45}	k_{46}	k_{47}	k_{48}
9	5		k_{51}	k_{52}	k_{53}	k_{54}	k_{55}	k_{56}	k_{57}	k_{58}
10	6		k_{61}	k_{62}	k_{63}	k_{64}	k_{65}	k_{66}	k_{67}	k_{68}
3	7		k_{71}	k_{72}	k_{73}	k_{74}	k_{75}	k_{76}	k_{77}	k_{78}
4	8		k_{81}	k_{82}	k_{83}	k_{84}	k_{85}	k_{86}	k_{87}	k_{88}

Figura 11: Referenciais global e local das componentes da matriz de rigidez do elemento 1.

Para o elemento 2, mostrado na figura 10, tem-se outra relação entre os deslocamentos nodais locais e os deslocamentos nodais globais, conforme pode ser verificado na figura 12.

Global		3	4	9	10	11	12	5	6	
Local		1	2	3	4	5	6	7	8	
3	1	$\mathbf{K}_2 = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} & k_{17} & k_{18} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} & k_{27} & k_{28} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} & k_{37} & k_{38} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} & k_{47} & k_{48} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} & k_{57} & k_{58} \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} & k_{67} & k_{68} \\ k_{71} & k_{72} & k_{73} & k_{74} & k_{75} & k_{76} & k_{77} & k_{78} \\ k_{81} & k_{82} & k_{83} & k_{84} & k_{85} & k_{86} & k_{87} & k_{88} \end{bmatrix}$	k_{11}	k_{12}	k_{13}	k_{14}	k_{15}	k_{16}	k_{17}	k_{18}
4	2		k_{21}	k_{22}	k_{23}	k_{24}	k_{25}	k_{26}	k_{27}	k_{28}
9	3		k_{31}	k_{32}	k_{33}	k_{34}	k_{35}	k_{36}	k_{37}	k_{38}
10	4		k_{41}	k_{42}	k_{43}	k_{44}	k_{45}	k_{46}	k_{47}	k_{48}
11	5		k_{51}	k_{52}	k_{53}	k_{54}	k_{55}	k_{56}	k_{57}	k_{58}
12	6		k_{61}	k_{62}	k_{63}	k_{64}	k_{65}	k_{66}	k_{67}	k_{68}
5	7		k_{71}	k_{72}	k_{73}	k_{74}	k_{75}	k_{76}	k_{77}	k_{78}
6	8		k_{81}	k_{82}	k_{83}	k_{84}	k_{85}	k_{86}	k_{87}	k_{88}

Figura 12: Referenciais global e local das componentes da matriz de rigidez do elemento 2.

A fim de inserir na matriz de rigidez global \mathbf{K} as matrizes \mathbf{K}_1 e \mathbf{K}_2 , inicia-se colocando todos os componentes das matrizes locais, desses dois elementos, na posição de referencial global na matriz de rigidez global. Os elementos que são interconectados pelos mesmos pontos nodais terão na posição correspondente, da matriz global, uma soma entre os componentes das duas matrizes que estão nessa posição nodal, por exemplo, pode-se observar que os nós que conectam os elementos 1 e 2 são 3,

4, 9 e 10, conforme representado em vermelho nas figuras 11 e 12, isso significa que nas posições (3, 3), (3, 4), (3, 9), (3, 10), (4, 3), (4, 4), (4, 9), (4, 10), (9, 3), (9, 4), (9, 9), (9, 10), (10, 3), (10, 4), (10, 9) e (10, 10) da matriz global deve-se somar os respectivos componentes de cada matriz, ou seja, na posição (3, 9) da matriz global terá o resultado de $k_{75} + k_{13}$ e assim por diante até que todos os componentes sejam inseridos na matriz global. As posições, da matriz global, aonde não há componentes de nenhum elemento devem ser preenchidas com zero.

Tendo montado a matriz de rigidez \mathbf{K} e o vetor de carregamento² \mathbf{F} da equação (52) é necessário incluir os deslocamentos nodais e os carregamentos prescritos. Após essa etapa a matriz \mathbf{K} se torna simétrica e definida positiva (os autovalores são maiores que zero), permitindo então a resolução do sistema de equações lineares (52) por algum método numérico de solução como, por exemplo, Gauss-Jordan.

3.5 Obtenção da matriz de massa do elemento finito e montagem da matriz de massa global - problema dinâmico

Considerando-se um domínio 2D, em problemas dinâmicos, arbitra-se, respectivamente, o vetor do campo de deslocamentos \mathbf{u}_e , de velocidade $\dot{\mathbf{u}}_e$ e de aceleração $\ddot{\mathbf{u}}_e$, para cada EF, como:

$$\mathbf{u}_e(x, y, t) = \mathbf{N}\mathbf{d}, \quad (55)$$

$$\dot{\mathbf{u}}_e(x, y, t) = \mathbf{N}\dot{\mathbf{d}}, \quad (56)$$

$$\ddot{\mathbf{u}}_e(x, y, t) = \mathbf{N}\ddot{\mathbf{d}}, \quad (57)$$

onde t representa o tempo, $\dot{\mathbf{d}}$ é o vetor que define o campo de velocidades nodais e $\ddot{\mathbf{d}}$ é o vetor que define o campo de acelerações nodais.

Nas equações (55)-(57), as funções de interpolação da matriz \mathbf{N} são funções do espaço e os deslocamentos nodais do vetor \mathbf{d} são funções do tempo. Assim as equações (55)-(57) representam uma separação local de variáveis (COOK et al., 2002).

As equações de deslocamento virtual, de deformação virtual e de tensão do EF são expressas, respectivamente, por:

$$\delta\mathbf{u}_e(x, y, t) = \mathbf{N}\delta\mathbf{d}, \quad (58)$$

$$\delta\boldsymbol{\epsilon}_e(x, y, t) = \mathbf{B}\delta\mathbf{d}, \quad (59)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_e(x, y, t) = \mathbf{D}_0\boldsymbol{\epsilon}_e = \mathbf{D}_0\mathbf{B}\mathbf{d}. \quad (60)$$

A fim de obter a matriz de massa do EF, toma-se como base a equação do PTV

²O procedimento para montagem do vetor de carregamento é análogo ao procedimento aplicado na montagem da matriz \mathbf{K} .

para o problema dinâmico e escreve-se para um EF como:

$$\int_{\Gamma_q^e} (\delta \mathbf{u}_e^T \mathbf{q}_e) d\Gamma_e + \int_{\Omega_e} (\delta \mathbf{u}_e^T \mathbf{b}_e) dx dy = \int_{\Omega_e} (\delta \boldsymbol{\epsilon}_e^T \boldsymbol{\sigma}_e) dx dy + \int_{\Omega_e} (\delta \mathbf{u}_e^T \rho_e \ddot{\mathbf{u}}_e) dx dy, \quad (61)$$

onde ρ_e é a densidade do EF.

Substituindo as equações (57), (58), (59) e (60) em (61) e reorganizando os termos na equação, chega-se na seguinte expressão (COOK et al., 2002):

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{d}^T \left(\int_{\Omega_e} (\mathbf{B}^T \mathbf{D}_0 \mathbf{B}) dx dy \right) \mathbf{d} + \delta \mathbf{d}^T \left(\int_{\Omega_e} (\rho_e \mathbf{N}^T \mathbf{N}) dx dy \right) \ddot{\mathbf{d}} \\ - \delta \mathbf{d}^T \int_{\Omega_e} (\mathbf{N}^T \mathbf{b}_e) dx dy - \delta \mathbf{d}^T \int_{\Gamma_q^e} (\mathbf{N}^T \mathbf{q}_e) d\Gamma_e = 0. \end{aligned} \quad (62)$$

Uma vez que $\delta \mathbf{d}$ é arbitrário a equação (62) pode ser escrita como:

$$\mathbf{M}_e \ddot{\mathbf{d}} + \mathbf{K}_e \mathbf{d} = \mathbf{F}_e, \quad (63)$$

onde a matriz de massa do EF é dada por:

$$\mathbf{M}_e = \int_{\Omega_e} (\rho_e \mathbf{N}^T \mathbf{N}) dx dy. \quad (64)$$

A montagem da matriz de massa global \mathbf{M} é obtida mediante a inserção de todas as matrizes de massa dos elementos finitos na matriz de massa global, de forma que:

$$\mathbf{M} = \sum_{e=1}^{N_e} \mathbf{M}_e \quad (65)$$

e segue o mesmo procedimento que o adotado para a montagem da matriz \mathbf{K} , ou seja, a montagem é baseada na compatibilidade dos pontos nodais, conforme apresentado, em detalhes, na seção 2.4. A matriz de massa global é simétrica e definida positiva e como no caso estático, após serem inseridas as condições geométricas de contorno, é possível encontrar a solução do sistema global de equações diferenciais de equilíbrio dinâmico da estrutura:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{U}}(t) + \mathbf{K} \mathbf{U}(t) = \mathbf{F}(t), \quad (66)$$

em que $\ddot{\mathbf{U}}$ é o vetor que define o campo de aceleração global.

A resolução do sistema (66) fornece históricos de resposta que são sequências de valores, em instantes consecutivos do tempo, de variáveis características do comportamento vibratório da estrutura obtida a partir do modelo numérico (SORIANO, 2009).

4 OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA

A otimização estrutural tem como objetivo auxiliar na obtenção de uma estrutura com melhor desempenho. Ela busca obter um resultado otimizado, minimizando ou maximizando uma função objetivo através da melhor seleção das variáveis de projeto que satisfaça as restrições impostas à estrutura. A otimização estrutural é dividida em três categorias, conforme mostrado na figura 13: a otimização dimensional (OD) ou paramétrica, a otimização de forma (OF) e a OT.

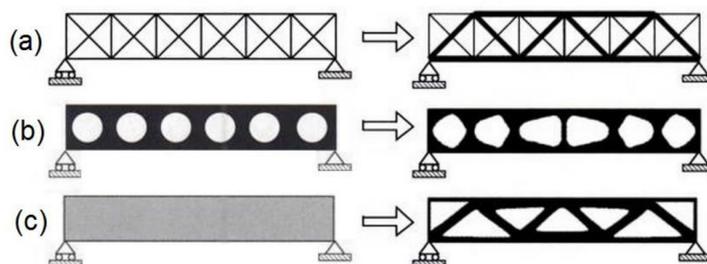


Figura 13: Categorias da otimização estrutural. a) OD. b) OF. c) OT. À esquerda o domínio do problema e à direita a solução otimizada. Fonte: Bendsoe e Sigmund, 2003, p. 2.

A OD assume uma forma predefinida à estrutura e essa forma é mantida ao longo do processo. Na OD as medidas, ou a razão entre as medidas, que caracterizam a geometria dessa estrutura são as variáveis de projeto (BENDSOE; SIGMUND, 2003). A OF busca encontrar a forma ou o contorno de uma parte do limite do domínio estrutural (CHRISTENSEN; KLARBRING, 2009). A OT consiste em determinar a topologia ótima de estruturas através da melhor distribuição de material dentro de um domínio. A OT atua em conjunto com algum método de cálculo estrutural a fim de obter os extremos de uma função objetivo e de forma a satisfazer as restrições impostas ao problema. Segundo CHRISTENSEN; KLARBRING (2009) esta é a forma mais geral de otimização estrutural. A OT permite o uso de estruturas sem qualquer forma preconcebida o que proporciona ao método uma grande capacidade para encontrar arranjos inovadores e de alta performance (LIU; TOVAR, 2014).

SILVA (2003) indica as seguintes etapas de um projeto estrutural utilizando a OT, figura 14:

- Domínio inicial: A primeira etapa consiste em definir o domínio estrutural.
- Domínio Discretizado: Aqui o domínio é discretizado em número finito de elementos finitos e são aplicadas as condições de contorno;
- Topologia obtida: Os dados do domínio são informados ao *software* de OT e a partir de um processo iterativo encontra-se a topologia que optimize a função objetivo. As regiões em preto indicam regiões com material e as regiões brancas indicam regiões sem material. Nessa topologia também podem surgir regiões com escala de cinza, que indicam a presença de material intermediário;
- Interpretação do resultado: A imagem obtida com a OT necessita ser interpretada para a obtenção do projeto final;
- Verificação do resultado: Aqui pode-se fazer uma verificação da estrutura final utilizando o MEF;
- Fabricação da estrutura: Técnicas como prototipagem rápida, entre outras, podem ser utilizadas para fabricar estruturas com formas complexas.

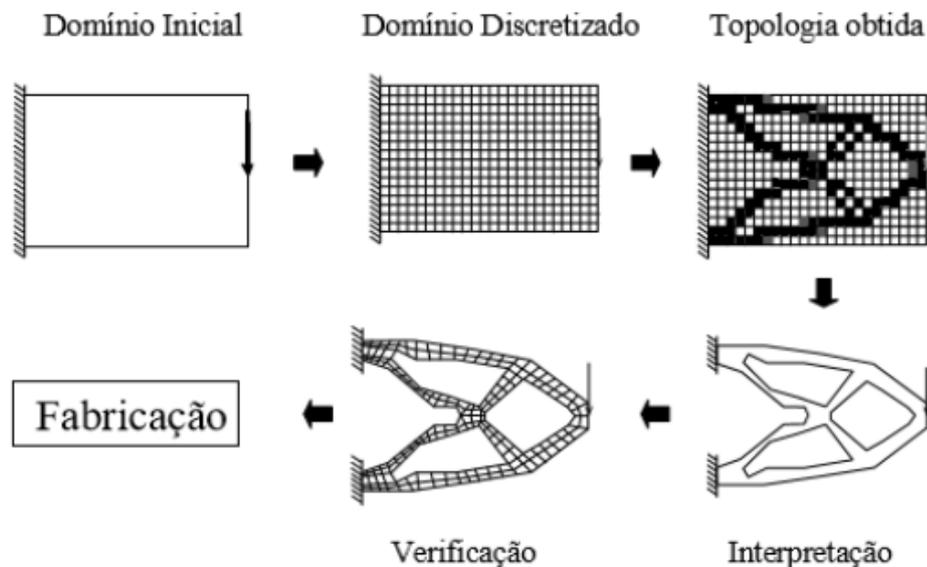


Figura 14: Procedimento típico de projeto estrutural por OT. Fonte: Silva, 2003, p. 142.

4.1 Problema de otimização topológica

Considere um elemento mecânico, conforme mostrado na figura 15, ocupando um domínio bidimensional Ω e cuja fronteira Γ é caracterizada por:

$$\begin{aligned}\Gamma &= \Gamma_u \cup \Gamma_q, \\ \Gamma_u \cap \Gamma_q &= \emptyset.\end{aligned}\tag{67}$$

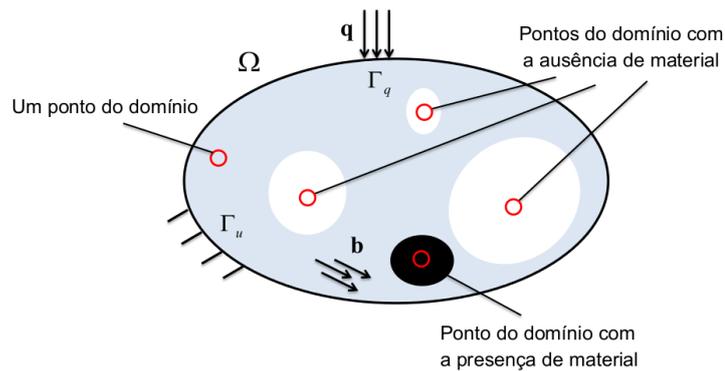


Figura 15: Distribuição de material em um domínio de referência fixo.

O objetivo da OT é encontrar dentro desse domínio, um subdomínio Ω_m com material ou um subdomínio $\Omega \setminus \Omega_m$ sem material que satisfaça um critério estabelecido, sem qualquer decisão a priori sobre sua conectividade (BECKERS, 1999). De forma inteligível a OT resume-se num problema de distribuição de material, no domínio fixo estendido¹, de maneira a determinar em quais pontos haverá, ou não, material, configurando num problema binário da forma $1 - 0$, onde 1 representa a total presença de material e 0 a ausência de material (vazio). Visualmente pode-se representar um problema de OT por uma imagem em preto e branco, aonde um ponto (x, y) , do domínio, com presença de material é definido pela cor preta e um ponto (x, y) , do domínio, aonde há a ausência de material é definido pela cor branca. Os pontos (x, y) do domínio Ω onde conterà, ou não, material podem ser expressos pela função característica $\chi(x, y)$:

$$\chi(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{se } (x, y) \in \Omega_m, \\ 0, & \text{se } (x, y) \in \Omega \setminus \Omega_m. \end{cases}\tag{68}$$

Tendo em vista que o problema de otimização (68) é mal posto, a existência da

¹O domínio fixo estendido corresponde a um domínio cuja forma é fixa e que é limitado pelos pontos de apoio e pelos pontos aonde são especificados os carregamentos. É um espaço que tem certa quantidade de material e aonde o algoritmo de OT constrói a estrutura otimizada. O domínio fixo estendido é discretizado pela malha de elementos finitos.

solução pode ser alcançada através do 'relaxamento' do problema (BENDSOE; KIKUCHI, 1988). O 'relaxamento' permite que as densidades assumam valores intermediários entre 0 e 1. A inserção desses valores pode ser feita pela escolha de um modelo de material. O modelo de material substitui a função característica $\chi(x, y)$ por uma função contínua. Um modelo de material utilizado em larga escala na literatura devido a sua facilidade de implementação e por não aumentar o número de variáveis do problema, é o modelo de material SIMP.

4.1.1 Formulação do problema de otimização topológica de mínima flexibilidade

Considere o domínio Ω , sujeito à aplicação de forças de superfície $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^2$, na parcela de contorno Γ_q , de forças de corpo $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$, no domínio Ω e a deslocamentos prescritos na parcela de contorno correspondente a Γ_u , conforme ilustrado na figura 15. A formulação do problema de mínima flexibilidade consiste em encontrar o melhor projeto da estrutura que minimize a flexibilidade (trabalho realizado pelas forças externas) e pode ser obtida a partir da equação de equilíbrio do problema estático que é definida pelo do PTV por:

$$\int_{\Gamma_q} \mathbf{q}^T \delta \mathbf{u} d\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{b}^T \delta \mathbf{u} d\Omega = \int_{\Omega} \boldsymbol{\epsilon}^T \mathbf{D}^T \delta \boldsymbol{\epsilon} d\Omega \quad \forall \delta \mathbf{u} \in \Psi, \quad (69)$$

onde \mathbf{u} é deslocamento que proporciona o equilíbrio, $\delta \mathbf{u}$ é o vetor de deslocamento virtual, $\Psi = \{\delta \mathbf{u} \in H(\Omega) \mid \delta \mathbf{u}|_{\Gamma_u} = 0\}$ é o espaço dos campos de deslocamento cineticamente admissíveis, onde $H(\Omega)$ é o espaço de Sobolev em que a energia de deformação da estrutura é finita e:

$$\mathbf{D} = \chi \mathbf{D}_0. \quad (70)$$

A flexibilidade é dada por:

$$\int_{\Gamma_q} \mathbf{q}^T \mathbf{u} d\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{b}^T \mathbf{u} d\Omega. \quad (71)$$

Incluindo uma restrição de volume expressa por:

$$\int_{\Omega} \rho d\Omega = \eta V_0, \quad (72)$$

onde η é um limitador do material a ser utilizado na geração da topologia ótima e V_0 é o volume do domínio de referência, o problema de OT de minimização da flexibilidade

pode ser escrito, na forma contínua, por:

$$\begin{aligned}
 & \min_{\mathbf{u} \in \Psi, \rho} \int_{\Gamma_q} \mathbf{q}^T \mathbf{u} \, d\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{b}^T \mathbf{u} \, d\Omega, \\
 \text{sujeito a: } & \int_{\Gamma_q} \mathbf{q}^T \delta \mathbf{u} \, d\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{b}^T \delta \mathbf{u} \, d\Omega = \int_{\Omega} \boldsymbol{\epsilon}^T \mathbf{D}^T \delta \boldsymbol{\epsilon} \, d\Omega \quad \forall \delta \mathbf{u} \in \Psi, \\
 & \mathbf{D} = \chi \mathbf{D}_0, \\
 & \int_{\Omega} \rho \, d\Omega = \eta V_0, \\
 & 0 < \rho_{min} \leq \rho \leq 1,
 \end{aligned} \tag{73}$$

em que ρ_{min} é o valor mínimo admissível a ρ .

Utilizando a abordagem do MEF, o problema (73) pode ser expresso da seguinte maneira (SIGMUND, 2001):

$$\begin{aligned}
 & \min_{\mathbf{x}} c = \mathbf{F}^T \mathbf{U}, \\
 \text{sujeito a: } & \mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{F}, \\
 & V = \eta V_0, \\
 & 0 < x_{min} \leq x_e \leq 1, \quad e = 1, \dots, N_e,
 \end{aligned} \tag{74}$$

onde $\mathbf{x} = \{x_e\}$ é o vetor de variáveis de projeto, c é a função objetivo que representa a flexibilidade, V é o volume do material sólido e x_{min} é o valor mínimo² admissível às variáveis de projeto, inserido a fim de evitar qualquer singularidade na resolução da equação de equilíbrio do MEF.

4.1.2 Formulação do problema de otimização topológica de maximização de frequência natural

Problemas dinâmicos, na prática, são mais importantes do que problemas estáticos (MA; KIKUCHI; HAGIWARA, 1993). Depois da minimização da flexibilidade, uma das primeiras aplicações da OT foi na otimização de autovalores para vibrações livres. Problemas de autovalor desempenham um papel fundamental na análise dinâmica estrutural e estão diretamente relacionados com as frequências naturais de vibração, conforme será visto adiante. As frequências naturais de vibração são muito importantes, pois representam características dinâmicas da estrutura (BELBLIDIA; BULMAN, 2001).

A formulação do problema de maximização de um autovalor κ_i , desconsiderando o amortecimento, pode ser obtida a partir do PTV. Sendo assim, se Φ_i é o autovetor associado a um determinado autovalor κ_i , a forma fraca para o problema de autovalor

²Neste trabalho $x_{min} = 10^{-3}$.

é dada por (MIN; NISHIWAKI; KIKUCHI, 2000):

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\epsilon}^T(\boldsymbol{\Phi}_i) \mathbf{D}^T \delta \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{\Phi}_i) d\Omega = \kappa_i \int_{\Omega} \rho \boldsymbol{\Phi}_i \delta \boldsymbol{\Phi}_i d\Omega \quad \forall \delta \boldsymbol{\Phi}_i \in \Psi, \quad (75)$$

com o autovetor normalizado e onde:

$$\rho = \chi \rho_0. \quad (76)$$

Dessa forma, o problema de OT de maximização de um determinado autovalor κ_i é escrito, na forma contínua, por:

$$\begin{aligned} & \max_{\boldsymbol{\Phi}_i \in \Psi, \rho} \kappa_i, \\ \text{sujeito a: } & \int_{\Omega} \boldsymbol{\epsilon}^T(\boldsymbol{\Phi}_i) \mathbf{D}^T \delta \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{\Phi}_i) d\Omega = \kappa_i \int_{\Omega} \rho \boldsymbol{\Phi}_i \delta \boldsymbol{\Phi}_i d\Omega \quad \forall \delta \boldsymbol{\Phi}_i \in \Psi, \\ & \mathbf{D} = \chi \mathbf{D}_0, \\ & \rho = \chi \rho_0, \\ & \int_{\Omega} \rho d\Omega = \eta V_0, \\ & 0 < \rho_{min} \leq \rho \leq 1, \end{aligned} \quad (77)$$

Utilizando a abordagem do MEF, o problema (77) pode ser escrito por:

$$\begin{aligned} & \max_{\mathbf{x}} \kappa_i, \\ \text{sujeito a: } & (\mathbf{K} - \kappa_i \mathbf{M}) \boldsymbol{\Phi}_i = 0, \quad i = 1, \dots, N_{dof}, \\ & \boldsymbol{\Phi}_i^T \mathbf{M} \boldsymbol{\Phi}_i = 1, \\ & V = \eta V_0, \\ & 0 < x_{min} \leq x_e \leq 1, \quad e = 1, \dots, N_e, \end{aligned} \quad (78)$$

onde N_{dof} indica o número de modos de vibração do problema de autovalor.

As frequências naturais de vibração f_i , em Hertz (Hz), se associam aos autovalores κ_i , da seguinte forma (SORIANO, 2009):

$$\kappa_i = (2\pi f_i)^2 \Rightarrow f_i = \frac{\sqrt{\kappa_i}}{2\pi}, \quad (79)$$

portanto, maximizar um determinado autovalor é equivalente a maximizar a frequência de vibração relacionada a ele, em Hertz, ou a frequência angular, em ciclos por segundo (PORTO, 2006).

MA; KIKUCHI; CHENG (1995) mostram em seu trabalho que os autovalores podem ser invertidos durante o processo de otimização. Como efeito desse fenômeno a sensibilidade da função objetivo pode tornar-se descontínua e isto pode resultar na

divergência da solução. Um exemplo da inversão de autovalores é ilustrado na figura 16. A fim de resolver essa situação os autores sugerem como função objetivo, ao invés de um único autovalor, uma combinação de autovalores. Este procedimento define uma função objetivo mais suave e os autovalores adicionados na função objetivo passam também a serem maximizados e dessa forma a possibilidade de inversão de autovalores é eliminada, figura 17 (PORTO, 2006). Adotando esse procedimento o problema (78) passa a ser definido por:

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{x}} \Lambda &= \left(\sum_{i=1}^{N_{dof}} \frac{\omega_i}{\kappa_i} \right)^{-1}, \\ \text{sujeito a : } &(\mathbf{K} - \kappa_i \mathbf{M}) \Phi_i = 0, \quad i = 1, \dots, N_{dof}, \\ &\Phi_i^T \mathbf{M} \Phi_i = 1, \\ &V = \eta V_0, \\ &0 < x_{min} \leq x_e \leq 1, \quad e = 1, \dots, N_e, \end{aligned} \quad (80)$$

onde ω_i é o coeficiente de ponderação associado ao i -ésimo autovalor.

A partir da equação (80) observa-se que, se for assumido que os coeficientes de ponderação são iguais, o menor autovalor desempenha um papel dominante na função objetivo e assim, a maximização de Λ irá produzir um maior aumento relativo no menor autovalor em comparação com os outros autovalores considerados, dessa forma a maximização de Λ pode ser utilizada para obter uma aproximação para o valor ótimo do primeiro autovalor (ou da primeira frequência natural da estrutura) (DU; OLHOFF, 2007; MA; KIKUCHI; CHENG, 1995).

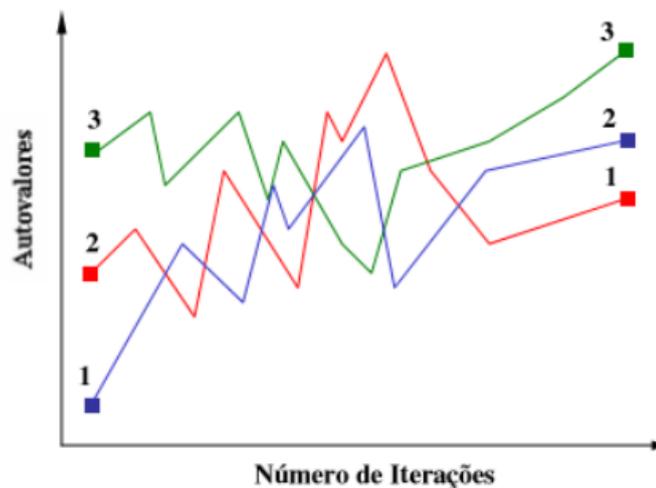


Figura 16: Inversão de autovalores. Fonte: Porto, 2006, p. 72.

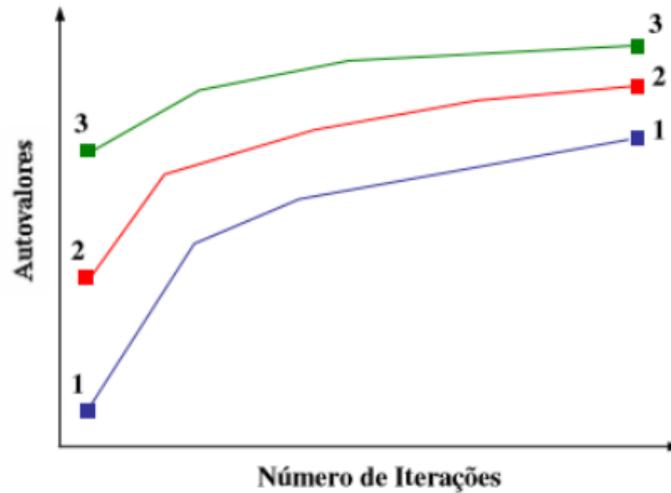


Figura 17: Eliminação da inversão dos autovalores. Fonte: Porto, 2006, p. 73.

4.1.3 Formulação do problema de otimização topológica de mínima flexibilidade dinâmica

Um problema dinâmico relevante é o problema que envolve vibrações forçadas causadas por excitações harmônicas. Este tipo de problema é de suma importância, uma vez que, a principal fonte de vibração ou ruído em uma estrutura é causada por uma força harmônica externa, com origem em componentes rotativos (LIU; ZHANG; GAO, 2015; JOG, 2002). Especificamente, no caso de braços robóticos as cargas e o torque dos motores das juntas induzem vibrações na estrutura e essas vibrações acabam prejudicando a precisão das tarefas e podem causar danos ao robô³. Assim pode-se, então, desejar otimizar a resposta dinâmica de uma estrutura sujeita a uma dada frequência ou para uma determinada faixa de frequências. Para problemas desse tipo, expressa-se a resposta dinâmica de uma estrutura em termos da flexibilidade dinâmica (BENDSOE; SIGMUND, 2003; OLHOFF; DU, 2005).

O problema de otimização topológica para a minimização da flexibilidade dinâmica de estruturas, no estado estacionário, sujeitas a um carregamento externo harmônico, pode ser obtida a partir do PTV, onde a equação de equilíbrio é definida por (MA; KIKUCHI; HAGIWARA, 1993):

$$\int_{\Gamma_q} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{q} \, d\Gamma + \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b} \, d\Omega = \int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\epsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\epsilon} \, d\Omega + \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \rho \ddot{\mathbf{u}} \, d\Omega \quad \forall \delta \mathbf{u} \in \Psi. \quad (81)$$

³Um exemplo disso é o fenômeno conhecido por ressonância, onde a estrutura sofre oscilações perigosamente grandes e como consequência verificam-se falhas estruturais (SORIANO, 2009). Esse fenômeno ocorre quando a frequência da excitação externa se aproxima de uma das frequências naturais da estrutura.

Assim, o problema de OT de minimização da flexibilidade dinâmica pode ser escrito como:

$$\begin{aligned}
 & \min_{\mathbf{u} \in \Psi, \rho} \int_{\Gamma_q} \mathbf{q}^T \mathbf{u} \, d\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{b}^T \mathbf{u} \, d\Omega, \\
 \text{sujeito a: } & \int_{\Gamma_q} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{q} \, d\Gamma + \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b} \, d\Omega = \int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\epsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\epsilon} \, d\Omega + \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \rho \ddot{\mathbf{u}} \, d\Omega \quad \forall \delta \mathbf{u} \in \Psi, \\
 & \mathbf{D} = \chi \mathbf{D}_0, \\
 & \rho = \chi \rho_0, \\
 & \int_{\Omega} \rho \, d\Omega = \eta V_0, \\
 & 0 < \rho_{min} \leq \rho \leq 1.
 \end{aligned} \tag{82}$$

Utilizando a abordagem do MEF, o problema (82) é expresso por (OLHOFF; DU, 2014):

$$\begin{aligned}
 & \min_{\mathbf{x}} g = (c_d)^2, \\
 \text{sujeito a: } & c_d = |\mathbf{F}_a^T \mathbf{U}_a| \\
 & \mathbf{K}_d \mathbf{U}_a = \mathbf{F}_a, \\
 & V = \eta V_0, \\
 & 0 < x_{min} \leq x_e \leq 1, \quad e = 1, \dots, N_e,
 \end{aligned} \tag{83}$$

onde g é a função objetivo do problema de minimização da flexibilidade dinâmica, c_d representa a flexibilidade dinâmica, \mathbf{F}_a representa o vetor de amplitude do carregamento externo harmônico, \mathbf{U}_a denota o vetor de amplitude do deslocamento (ver anexo A) e \mathbf{K}_d é a matriz de rigidez dinâmica global, definida por:

$$\mathbf{K}_d = (\mathbf{K} - \omega_c^2 \mathbf{M}), \tag{84}$$

onde ω_c representa a frequência de excitação prescrita.

A definição da flexibilidade dinâmica como o valor absoluto do produto escalar entre o vetor transposto da amplitude do carregamento e o vetor de amplitude do deslocamento ocorre, devido ao fato de que esse mesmo produto escalar pode tornar-se negativo à medida que a matriz de rigidez dinâmica tornar-se definida negativa quando estipula-se um valor alto para a frequência de excitação (maior que a primeira frequência natural da estrutura) (OLHOFF; DU, 2014, 2005). Também, para tornar o problema diferenciável, foi tomada a função objetivo como sendo o quadrado da flexibilidade dinâmica (OLHOFF; DU, 2014; BENDSOE; SIGMUND, 2003).

Pontos importantes de serem destacados, é que no problema (83), quando utilizam-se valores baixos de ω_c os resultados obtidos do problema de mínima flexi-

bilidade dinâmica se aproximam aos resultados do problema de mínima flexibilidade estática, entretanto, quando tem-se valores mais elevados para ω_c deve-se esperar diferentes resultados topológicos (BENDSOE; SIGMUND, 2003).

4.2 Modelo de material SIMP

O SIMP ou Método das Densidades é um modelo de material expresso através de uma equação matemática que define o valor da propriedade do material, em cada ponto do domínio, em função de uma pseudodensidade e da propriedade do material sólido linear utilizado no problema.

Introduzindo a discretização do domínio Ω através do MEF, no modelo SIMP, uma pseudodensidade é atribuída a cada EF como variável de projeto (ZHU; ZHANG; QIU, 2006). O módulo de Young E_e e a densidade ρ_e , em cada EF, são definidos, respectivamente, por (SEIFRIED; MOGHADASI; HELD, 2015):

$$E_e = x_e^p E_0 \text{ e } \rho_e = x_e \rho_0, \text{ para } p > 1, \quad (85)$$

onde os parâmetros x_e representam as pseudodensidades ($x_e \in [0, 1]$) de cada EF e p é o parâmetro de penalização.

O parâmetro de penalização é introduzido com o objetivo de garantir a geração de padrões binários (preto e branco) na solução (ZHU; ZHANG; QIU, 2006), entretanto, é importante observar que à medida que o valor de p aumenta, figura 18, o problema de otimização se aproxima mais do problema discreto (1 – 0) e, quando o seu valor é pequeno, aparecem regiões com escalas de cinza. Sendo assim, segundo BENDSOE; SIGMUND (1999), o SIMP só é considerado fisicamente admissível, em problemas onde a restrição de volume está ativa, se o parâmetro p satisfizer a equação (86).

$$p \geq \max \left\{ \frac{2}{1 - \nu_0}, \frac{4}{1 + \nu_0} \right\} \text{ em 2D,}$$

$$p \geq \max \left\{ 15 \frac{1 - \nu_0}{7 - 5\nu_0}, \frac{3}{2} \frac{1 - \nu_0}{1 - 2\nu_0} \right\} \text{ em 3D.} \quad (86)$$

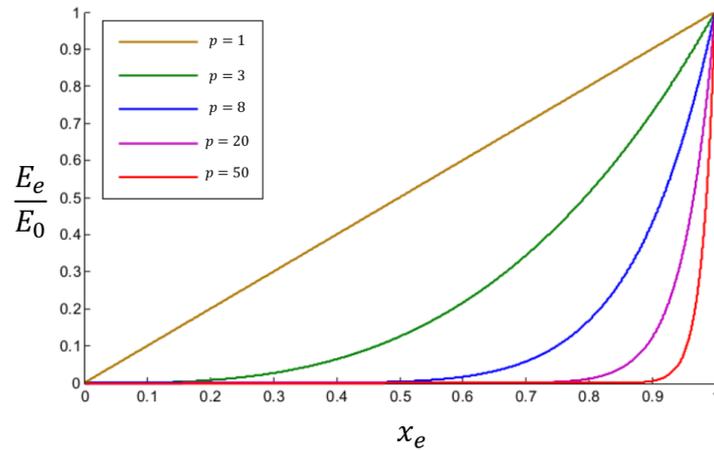


Figura 18: Relação entre os diferentes valores de p e os valores de x_e

4.3 Modos de vibração localizados

Quando considera-se um problema dinâmico, onde há a necessidade do cálculo dos autovalores, a adoção do modelo de material SIMP dado pela equação (85), faz com que surjam falsos modos de vibração localizados em regiões aonde as pseudodensidades possuem um valor baixo (por exemplo $x_e \leq 0,1$) (OLHOFF; DU, 2005). Isto ocorre, pois essas áreas são mais flexíveis e leves se comparadas com as áreas que possuem pseudodensidades mais elevadas e, conseqüentemente, irão controlar os modos naturais de vibração mais baixos da estrutura (PEDERSEN, 2000).

Para eliminar os modos de vibração localizados será utilizado o SIMP modificado aonde a matriz de massa é dada por DU; OLHOFF (2007):

$$\mathbf{M}_S = \begin{cases} x_e \mathbf{M}_e, & \text{se } x_e > 0,1, \\ (6 \times 10^5 x_e^6 - 5 \times 10^6 x_e^7) \mathbf{M}_e, & \text{se } x_e \leq 0,1. \end{cases} \quad (87)$$

4.4 Reformulação do problema de otimização topológica de minimização da flexibilidade utilizando o MEF e o SIMP

A reformulação do problema de mínima flexibilidade pode ser expresso, utilizando a abordagem do MEF e o modelo SIMP, da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad & c = \mathbf{F}^T \mathbf{U}, \\ \text{sujeito a :} \quad & \mathbf{K}_S \mathbf{U} = \mathbf{F}, \\ & V = \eta V_0, \\ & 0 < x_{min} \leq x_e \leq 1, \quad e = 1, \dots, N_e, \end{aligned} \quad (88)$$

onde \mathbf{K}_S é a nova matriz de rigidez global, dada por (ZHU; ZHANG; QIU, 2006):

$$\mathbf{K}_S = \sum_{e=1}^{N_e} (x_e)^p \mathbf{K}_e, \quad (89)$$

4.5 Reformulação do problema de otimização topológica de maximização de frequência natural utilizando o MEF e o SIMP

A reformulação do problema de maximização de frequência natural pode ser expresso, utilizando a abordagem do MEF e o modelo SIMP, da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{x}} \Lambda &= \left(\sum_{i=1}^{N_{dof}} \frac{\omega_i}{\kappa_i} \right)^{-1}, \\ \text{sujeito a : } &(\mathbf{K}_S - \kappa_i \mathbf{M}_S) \Phi_i = 0, \quad i = 1, \dots, N_{dof}, \\ &\Phi_i^T \mathbf{M}_S \Phi_i = 1, \\ &V = \eta V_0, \\ &0 < x_{min} \leq x_e \leq 1, \quad e = 1, \dots, N_e, \end{aligned} \quad (90)$$

com \mathbf{K}_S e \mathbf{M}_S dados por (89) e (87), respectivamente.

4.6 Reformulação do problema de otimização topológica de minimização da flexibilidade dinâmica utilizando o MEF e o SIMP

A reformulação do problema de mínima flexibilidade dinâmica pode ser expresso, utilizando a abordagem do MEF e o modelo SIMP, da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} g &= (c_d)^2, \\ \text{sujeito a : } &c_d = |\mathbf{F}_a^T \mathbf{U}_a| \\ &\mathbf{K}_{dS} \mathbf{U}_a = \mathbf{F}_a, \\ &V = \eta V_0, \\ &0 < x_{min} \leq x_e \leq 1, \quad e = 1, \dots, N_e, \end{aligned} \quad (91)$$

em que \mathbf{K}_{dS} é a matriz de rigidez dinâmica global, dada pelo SIMP por:

$$\mathbf{K}_{dS} = (\mathbf{K}_S - \omega_c^2 \mathbf{M}_S). \quad (92)$$

4.7 Análise de sensibilidade

Para resolver os problemas de otimização (88), (90) e (91) é necessário derivar as respectivas funções objetivos e a restrição de volume, com relação às variáveis de projeto. A obtenção dessas derivadas, ou sensibilidades é chamado de análise de sensibilidade (CHRISTENSEN; KLARBRING, 2009). Entre os métodos de obtenção dessas derivadas, está o método analítico direto em que a derivada do deslocamento é obtida mediante a diferenciação da equação de equilíbrio (CHRISTENSEN; KLARBRING, 2009).

4.7.1 Sensibilidades do problema de mínima flexibilidade

A função objetivo do problema de mínima flexibilidade, é dada na equação (88) por:

$$c = \mathbf{F}^T \mathbf{U}, \quad (93)$$

diferenciando-a em relação às variáveis de projeto, tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial x_e} &= \frac{\partial (\mathbf{F}^T \mathbf{U})}{\partial x_e} \\ &= \frac{\partial [(\mathbf{K}_S \mathbf{U})^T \mathbf{U}]}{\partial x_e} \\ &= \frac{\partial (\mathbf{U}^T \mathbf{K}_S \mathbf{U})}{\partial x_e} \\ &= \frac{\partial \mathbf{U}^T}{\partial x_e} \mathbf{K}_S \mathbf{U} + \mathbf{U}^T \frac{\partial (\mathbf{K}_S \mathbf{U})}{\partial x_e} \\ &= \frac{\partial \mathbf{U}^T}{\partial x_e} \mathbf{K}_S \mathbf{U} + \mathbf{U}^T \frac{\partial \mathbf{K}_S}{\partial x_e} \mathbf{U} + \mathbf{U}^T \mathbf{K}_S \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_e}. \end{aligned} \quad (94)$$

A derivada $\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_e}$ pode ser obtida a partir da derivada da equação de equilíbrio $\mathbf{K}_S \mathbf{U} = \mathbf{F}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\mathbf{K}_S \mathbf{U})}{\partial x_e} &= \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_e} \\ \frac{\partial \mathbf{K}_S}{\partial x_e} \mathbf{U} + \mathbf{K}_S \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_e} &= \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_e} \\ \mathbf{K}_S \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_e} &= -\frac{\partial \mathbf{K}_S}{\partial x_e} \mathbf{U} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_e} \\ \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_e} &= -\mathbf{K}_S^{-1} \frac{\partial \mathbf{K}_S}{\partial x_e} \mathbf{U} + \mathbf{K}_S^{-1} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_e}. \end{aligned} \quad (95)$$

Assume-se que o vetor \mathbf{F} independe das pseudodensidades, assim, reescreve-se a equação (95) como:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_e} = -\mathbf{K}_S^{-1} \frac{\partial \mathbf{K}_S}{\partial x_e} \mathbf{U}. \quad (96)$$

Substituindo a equação (96) na equação (94), tem-se que a sensibilidade de c é dada por:

$$\begin{aligned}\frac{\partial c}{\partial x_e} &= -\mathbf{U}^T \frac{\partial \mathbf{K}_S}{\partial x_e} \mathbf{K}_S^{-1} \mathbf{K}_S \mathbf{U} + \mathbf{U}^T \frac{\partial \mathbf{K}_S}{\partial x_e} \mathbf{U} - \mathbf{U}^T \mathbf{K}_S \mathbf{K}_S^{-1} \frac{\partial \mathbf{K}_S}{\partial x_e} \mathbf{U} \\ &= -\mathbf{U}^T \frac{\partial \mathbf{K}_S}{\partial x_e} \mathbf{U}.\end{aligned}\quad (97)$$

A sensibilidade da restrição de volume do problema (82) é obtida derivando diretamente a restrição em relação a x_e :

$$\frac{\partial (V - \eta V_0)}{\partial x_e} = \frac{\partial \left(\sum_{e=1}^{N_e} v_e x_e - \eta V_0 \right)}{\partial x_e} = v_e \quad (98)$$

4.7.2 Sensibilidades do problema de maximização de frequência natural

A função objetivo do problema de maximização de frequência natural, é dada na equação (90) por:

$$\Lambda = \left(\sum_{i=1}^{N_{dof}} \frac{\omega_i}{\kappa_i} \right)^{-1}, \quad (99)$$

diferenciando-a em relação às variáveis de projeto, tem-se:

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x_e} = \left(\sum_{i=1}^{N_{dof}} \frac{\omega_i}{\kappa_i} \right)^{-2} \sum_{i=1}^{N_{dof}} \frac{\omega_i}{\kappa_i^2} \frac{\partial \kappa_i}{\partial x_e}. \quad (100)$$

As sensibilidades dos autovalores κ_i podem ser obtidas através da derivação da equação de equilíbrio $(\mathbf{K}_S - \kappa_i \mathbf{M}_S) \Phi_i = 0$, onde assume-se que Φ_i é o autovetor normalizado pela massa, ou seja, $\Phi_i^T \mathbf{M}_S \Phi_i = 1$:

$$\left(\frac{\partial \mathbf{K}_S}{\partial x_e} - \frac{\partial \kappa_i}{\partial x_e} \mathbf{M}_S - \kappa_i \frac{\partial \mathbf{M}_S}{\partial x_e} \right) \Phi_i + (\mathbf{K}_S - \kappa_i \mathbf{M}_S) \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_e} = 0. \quad (101)$$

Multiplicando todos os termos da equação (101) por Φ_i^T tem-se:

$$\begin{aligned}\Phi_i^T \frac{\partial \mathbf{K}_S}{\partial x_e} \Phi_i - \Phi_i^T \frac{\partial \kappa_i}{\partial x_e} \mathbf{M}_S \Phi_i - \Phi_i^T \kappa_i \frac{\partial \mathbf{M}_S}{\partial x_e} \Phi_i + \Phi_i^T (\mathbf{K}_S - \kappa_i \mathbf{M}_S) \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_e} &= 0, \\ \Phi_i^T \frac{\partial \mathbf{K}_S}{\partial x_e} \Phi_i - \Phi_i^T \frac{\partial \kappa_i}{\partial x_e} \mathbf{M}_S \Phi_i - \Phi_i^T \kappa_i \frac{\partial \mathbf{M}_S}{\partial x_e} \Phi_i + [(\mathbf{K}_S - \kappa_i \mathbf{M}_S) \Phi_i]^T \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_e} &= 0.\end{aligned}\quad (102)$$

Considerando-se a propriedade de ortogonalidade $\Phi_i^T \mathbf{M}_S \Phi_i = 1$ e a equação de

equilíbrio $(\mathbf{K}_S - \kappa_i \mathbf{M}_S) \Phi_i = 0$, a equação (102) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} \Phi_i^T \frac{\partial \mathbf{K}_S}{\partial x_e} \Phi_i - \frac{\partial \kappa_i}{\partial x_e} - \Phi_i^T \kappa_i \frac{\partial \mathbf{M}_S}{\partial x_e} \Phi_i &= 0, \\ \frac{\partial \kappa_i}{\partial x_e} &= \Phi_i^T \left(\frac{\partial \mathbf{K}_S}{\partial x_e} - \kappa_i \frac{\partial \mathbf{M}_S}{\partial x_e} \right) \Phi_i. \end{aligned} \quad (103)$$

Dessa forma a equação (100) é dada por:

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x_e} = \left(\sum_{i=1}^{N_{dof}} \frac{\omega_i}{\kappa_i} \right)^{-2} \sum_{i=1}^{N_{dof}} \frac{\omega_i}{\kappa_i^2} \Phi_i^T \left(\frac{\partial \mathbf{K}_S}{\partial x_e} - \kappa_i \frac{\partial \mathbf{M}_S}{\partial x_e} \right) \Phi_i. \quad (104)$$

A sensibilidade da restrição de volume do problema (91) é dada na equação (98).

4.7.3 Sensibilidades do problema de mínima flexibilidade dinâmica

A função objetivo do problema de mínima flexibilidade dinâmica, é dada na equação (91) por:

$$g = (|\mathbf{F}_a^T \mathbf{U}_a|)^2, \quad (105)$$

diferenciando-a em relação às variáveis de projeto, tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x_e} &= \frac{\partial (|\mathbf{F}_a^T \mathbf{U}_a|)^2}{\partial x_e}, \\ &= 2 (\mathbf{F}_a^T \mathbf{U}_a) \left(\frac{\partial \mathbf{F}_a^T}{\partial x_e} \mathbf{U}_a + \mathbf{F}_a^T \frac{\partial \mathbf{U}_a}{\partial x_e} \right). \end{aligned} \quad (106)$$

Como \mathbf{F}_a independe das pseudodensidades, a equação (106) pode ser reescrita como:

$$\frac{\partial g}{\partial x_e} = 2 (\mathbf{F}_a^T \mathbf{U}_a) \mathbf{F}_a^T \frac{\partial \mathbf{U}_a}{\partial x_e}. \quad (107)$$

A derivada de $\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_e}$ pode ser obtida a partir da derivada da equação de equilíbrio $(\mathbf{K}_S - \omega_c^2 \mathbf{M}_S) \mathbf{U}_a = \mathbf{F}_a$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \mathbf{K}_S}{\partial x_e} - \omega_c^2 \frac{\partial \mathbf{M}_S}{\partial x_e} \right) \mathbf{U}_a + (\mathbf{K}_S - \omega_c^2 \mathbf{M}_S) \frac{\partial \mathbf{U}_a}{\partial x_e} &= \frac{\partial \mathbf{F}_a}{\partial x_e}, \\ (\mathbf{K}_S - \omega_c^2 \mathbf{M}_S) \frac{\partial \mathbf{U}_a}{\partial x_e} &= - \left(\frac{\partial \mathbf{K}_S}{\partial x_e} - \omega_c^2 \frac{\partial \mathbf{M}_S}{\partial x_e} \right) \mathbf{U}_a, \\ \frac{\partial \mathbf{U}_a}{\partial x_e} &= - (\mathbf{K}_S - \omega_c^2 \mathbf{M}_S)^{-1} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{K}_S}{\partial x_e} - \omega_c^2 \frac{\partial \mathbf{M}_S}{\partial x_e} \right) \mathbf{U}_a. \end{aligned} \quad (108)$$

Substituindo a equação (108) na equação (107), obtém-se:

$$\frac{\partial g}{\partial x_e} = -2 (\mathbf{F}_a^T \mathbf{U}_a) \mathbf{F}_a^T (\mathbf{K}_S - \omega_c^2 \mathbf{M}_S)^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{K}_S}{\partial x_e} - \omega_c^2 \frac{\partial \mathbf{M}_S}{\partial x_e} \right) \mathbf{U}_a, \quad (109)$$

como $\mathbf{U}_a^T = \mathbf{F}_a^T (\mathbf{K}_S - \omega_c^2 \mathbf{M}_S)$ a equação (109) é reescrita como:

$$\frac{\partial g}{\partial x_e} = -2 (\mathbf{F}_a^T \mathbf{U}_a) \mathbf{U}_a^T \left(\frac{\partial \mathbf{K}_S}{\partial x_e} - \omega_c^2 \frac{\partial \mathbf{M}_S}{\partial x_e} \right) \mathbf{U}_a. \quad (110)$$

A sensibilidade da restrição de volume do problema (91) é dada na equação (98).

4.8 Critério Ótimo

O CO representa uma abordagem clássica para a solução numérica de problemas de otimização estrutural discretizados via MEF (CHRISTENSEN; KLARBRING, 2009). O CO corresponde a um método heurístico⁴ que visa atualizar as variáveis de projeto do problema, onde cada variável é atualizada de forma independente da atualização das outras (BENDSOE; SIGMUND, 2003). A formulação do método parte do pressuposto de que se a restrição $0 < x_{min} \leq x_e \leq 1$ é inativa, então, a convergência é alcançada quando a condição de estacionaridade da função Lagrangeana é satisfeita (LIU; TOVAR, 2014). Portanto, a título de exemplificação do desenvolvimento do método, escrevendo a função Lagrangeana L para o problema (82) tem-se:

$$L = c + \lambda(V - \eta V_0) + \boldsymbol{\mu}^T (\mathbf{K}_S \mathbf{U} - \mathbf{F}) + \sum_{e=1}^{N_e} \alpha_e (x_{min} - x_e) + \sum_{e=1}^{N_e} \beta_e (x_e - 1), \quad (111)$$

onde λ é um escalar e $\boldsymbol{\mu}^T$ é um vetor e ambos são multiplicadores de Lagrange globais associados as restrições de volume e de equilíbrio, respectivamente. Os multiplicadores α_e e β_e são escalares e se referem, nesta ordem, às restrições laterais inferior e superior. A condição de estacionaridade do Lagrangeano é dada por:

$$\frac{\partial L}{\partial x_e} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial c}{\partial x_e} + \lambda \frac{\partial V}{\partial x_e} + \boldsymbol{\mu}^T \frac{\partial (\mathbf{K}_S \mathbf{U} - \mathbf{F})}{\partial x_e} - \alpha_e + \beta_e = 0. \quad (112)$$

Assumindo que o vetor \mathbf{F} é independente das variáveis de projeto e que α_e e β_e

⁴Métodos heurísticos são algoritmos que buscam a solução do problema de forma exploratória. Estes métodos buscam encontrar as melhores soluções aproximadas possíveis e em geral não envolvem a implementação computacional de um conhecimento especializado (GOLDBARG; LUNA, 2000). A grande maioria das técnicas modernas de otimização são geralmente heurísticas ou metaheurísticas (YANG, 2010).

são iguais a zero, obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{U}^T}{\partial x_e} \mathbf{K}_S \mathbf{U} + \mathbf{U}^T \frac{\partial \mathbf{K}_S}{\partial x_e} \mathbf{U} + \mathbf{U}^T \mathbf{K}_S \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_e} + \lambda \frac{\partial V}{\partial x_e} + \boldsymbol{\mu}^T \left(\frac{\partial \mathbf{K}_S}{\partial x_e} \mathbf{U} + \mathbf{K}_S \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_e} \right) = 0, \\ \mathbf{U}^T \frac{\partial \mathbf{K}_S}{\partial x_e} \mathbf{U} + \boldsymbol{\mu}^T \frac{\partial \mathbf{K}_S}{\partial x_e} \mathbf{U} + \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_e} (2\mathbf{U}^T \mathbf{K}_S + \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{K}_S) + \lambda \frac{\partial V}{\partial x_e} = 0. \end{aligned} \quad (113)$$

Como $\boldsymbol{\mu}^T$ é arbitrário, pode-se admitir que $\boldsymbol{\mu}^T = -2\mathbf{U}^T$ e então a equação (113) é escrita como:

$$-\mathbf{U}^T \frac{\partial \mathbf{K}_S}{\partial x_e} \mathbf{U} + \lambda \frac{\partial V}{\partial x_e} = 0, \quad (114)$$

o que implica que:

$$-px_e^{p-1} \mathbf{u}_e^T \mathbf{K}_e \mathbf{u}_e + \lambda v_e = 0. \quad (115)$$

Denotando:

$$q_c = \mathbf{u}_e^T \mathbf{K}_e \mathbf{u}_e, \quad (116)$$

pode-se reescrever a equação (115) como:

$$\begin{aligned} -px_e^{p-1} q_c + \lambda v_e = 0, \\ \frac{px_e^{p-1} q_c}{\lambda v_e} = 1. \end{aligned} \quad (117)$$

Definindo B_c por:

$$B_c = \frac{px_e^{p-1} q_c}{\lambda v_e}, \quad (118)$$

a equação (117) pode ser reescrita como:

$$B_c = 1. \quad (119)$$

O parâmetro B_c representa a densidade da energia de deformação. Pode-se também afirmar que se a restrição lateral ($x_{min} \leq x_e \leq 1$) é inativa, o método converge se a equação (119) for satisfeita. Isso significa que (CHRISTENSEN; KLARBRING, 2009):

$$\frac{px_e^{p-1} q_c}{v_e} = \lambda = \text{constante}. \quad (120)$$

A segunda parte da aplicação do método é heurística e corresponde à atualização das variáveis de projeto pela equação (121):

$$x_e^{novo} = x_e \left(\frac{px_e^{p-1} q_c}{\lambda v_e} \right)^\xi = x_e B_c^\xi, \quad (121)$$

onde x_e^{novo} correspondem as variáveis de projeto atualizadas e ξ é o parâmetro de

amortecimento. Como no problema em questão as pseudodensidades dos elementos vão de vazio a sólido então é introduzido um limite móvel para as variáveis de projeto, com o objetivo de estabilizar as iterações. Um esquema de atualização para x_e , levando em conta o limite móvel, é dado por (BENDSOE, 1995):

$$x_e^{novo} = \begin{cases} \max(x_{min}, x_e - m), & \text{se } x_e B_c^\xi \leq \max(x_{min}, x_e - m), \\ x_e B_c^\xi, & \text{se } \max(x_{min}, x_e - m) < x_e B_c^\xi < \min(1, x_e + m), \\ \min(1, x_e + m), & \text{se } \min(1, x_e + m) \leq x_e B_c^\xi, \end{cases} \quad (122)$$

em que m representa um limite móvel positivo. Em geral os valores de m e ξ são escolhidos experimentalmente a fim de se obter a convergência, entretanto, os valores que têm se mostrado úteis para ξ e m são, respectivamente, 0.5 e 0.2 (BENDSOE; SIGMUND, 2003).

Segundo PORTO (2006) λ pode ser determinado considerando que no desenvolvimento do processo heurístico a restrição de volume está sempre ativa, que, em cada iteração, a quantidade máxima de material disponível é sempre utilizada e, levando em conta que a relação entre o volume e o multiplicador λ é dado conforme a figura 19. Conhecido o valor de λ o parâmetro B_c pode ser calculado. Para o cálculo do volume, repete-se o processo até que a restrição de volume seja igual ao limite superior da restrição de volume levando em conta uma tolerância predeterminada. A partir da figura 19 o seguinte algoritmo pode ser definido:

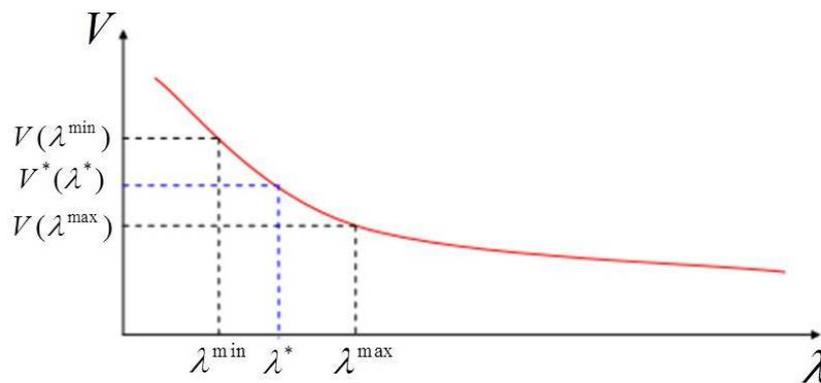


Figura 19: Relação entre o volume V e o multiplicador de Lagrange λ . Adaptada de PORTO, 2006, p. 88

1. Determina-se λ^{min} e λ^{max} testando os valores para tais grandezas, até que sejam

satisfeitas as relações:

$$\begin{aligned} V(\lambda^{min}) &> V(\lambda^*), \\ V(\lambda^{max}) &< V(\lambda^*), \end{aligned} \tag{123}$$

onde λ^{min} é o valor mínimo de λ , λ^{max} é o valor máximo de λ e λ^* representa o valor ótimo para λ .

2. Calcula-se a média λ^m entre λ^{min} e λ^{max} :

$$\lambda^m = \frac{1}{2}(\lambda^{min} + \lambda^{max}). \tag{124}$$

3. Atualizam-se as variáveis de projeto pelo CO, calcula-se $V(\lambda^m)$ e compara-se:

$$\begin{aligned} \text{se } V(\lambda^m) > V(\lambda^*) &\text{ então } \lambda^{min} = \lambda^m, \\ \text{se } V(\lambda^m) < V(\lambda^*) &\text{ então } \lambda^{max} = \lambda^m. \end{aligned} \tag{125}$$

4. Repete-se 2 e 3 até que:

$$|V(\lambda^m) - V(\lambda^*)| < \gamma_v, \tag{126}$$

onde γ_v corresponde a uma tolerância⁵ da restrição de volume.

4.9 Programação Linear Sequencial

A regra de atualização das variáveis de projeto dada pela equação (122) é convergente para a maioria dos problemas estáticos de uma estrutura elástica linear, contudo, no caso dinâmico ela não funciona bem, em particular, quando a frequência de excitação é elevada (MA; KIKUCHI; HAGIWARA, 1993). Isso ocorre pois no problema estático as derivadas da função objetivo e das restrições não alteram o seu sinal durante o processo de otimização, ou seja:

$$\frac{\partial c}{\partial x_e} \leq 0 \text{ e } \frac{\partial(V - \eta V_0)}{\partial x_e} \geq 0, \text{ para todo } x_e \geq 0. \tag{127}$$

Assim pode-se encontrar um $\lambda > 0$ e então B_c é um número real positivo e consequentemente as variáveis de projeto são números reais positivos. Entretanto no problema dinâmico algumas derivadas da função objetivo podem tornar-se positivas

⁵Variando, geralmente, entre 0,01 e 0,001.

e neste caso as variáveis de projeto, atualizadas pela equação (122), podem ser negativas ou, até mesmo, números complexos (MA; KIKUCHI; HAGIWARA, 1993; MA; KIKUCHI; CHENG, 1995). Então, uma alternativa para resolver problemas dinâmicos é a utilização de algum método de programação matemática (BENDSOE; SIGMUND, 2003).

A programação matemática ⁶ é uma abordagem iterativa utilizada para encontrar o extremo de uma função. A partir de uma estimativa inicial, uma busca sistemática é feita no domínio de projeto até que um projeto próximo do ótimo seja encontrado, sendo que a busca é finalizada quando um determinado critério é satisfeito (SILVEIRA, 2012). Nesta dissertação foi utilizado o método de programação matemática denominado Programação Linear Sequencial⁷ (PLS) para a resolução dos problemas dinâmicos.

A PLS é um método genérico, podendo ser aplicado aos mais diversos problemas de otimização, seja em projetos estruturais ou em outros ramos de aplicação (KIYONO, 2008). Diferentemente do CO não necessita ser deduzida a cada novo problema. É um método prático se comparado a outras técnicas de resolução de problemas de OT e exige apenas o cálculo das primeiras derivadas da função objetivo e das restrições. A PLS corresponde a uma rotina que busca resolver sequencialmente vários subproblemas lineares com o objetivo de encontrar a solução de um problema não linear, o qual, normalmente, possui uma função objetivo complexa, várias restrições e um grande número de variáveis de projeto (KIYONO, 2008).

A PLS determina a solução de problemas de OT, através da linearização da função objetivo e/ou restrições que não são lineares. As funções não lineares são linearizadas utilizando expansões em séries de Taylor de primeira ordem (RAO, 2009). Com isso um problema de OT, em que a função objetivo e as restrições são não lineares, dado por:

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{x}} f_o(\mathbf{x}), \\ & \text{sujeito a : } h(\mathbf{x}) = 0, \\ & \mathbf{x}_{min} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}_{max}, \end{aligned} \tag{128}$$

onde \mathbf{x}_{max} é o valor máximo admissível ao vetor de variáveis de projeto, f_o é uma

⁶Os trabalhos de OVERTON (1988), OLHOFF (1989), SILVEIRA (2012), KIYONO (2008) e MOLTNER et al. (2013) são exemplos de problemas de OT aonde foram aplicadas técnicas de programação matemática.

⁷Em inglês Sequential Linear Programming (SLP).

função objetivo e h é uma restrição de igualdade, pode ser reescrito como:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} f_o(\mathbf{x}) &= f_o(\mathbf{x}^*) + \sum_{e=1}^{N_e} (x_e - x_e^*) \left(\frac{\partial f_o}{\partial x_e} \right) \Big|_{\mathbf{x}^*} \\ \text{sujeito a : } h(\mathbf{x}) &= h(\mathbf{x}^*) + \sum_{e=1}^{N_e} (x_e - x_e^*) \left(\frac{\partial h}{\partial x_e} \right) \Big|_{\mathbf{x}^*} = 0, \\ x_e^l &\leq x_e \leq x_e^s, \end{aligned} \quad (129)$$

onde $\mathbf{x}^* = \{x_1^*, x_2^*, \dots, x_{N_e}^*\}$ representa o vetor de variáveis de projeto em um ponto específico, x_e^l e x_e^s são, nesta ordem, os limites móveis inferior e superior para a variação do valor de cada variável de projeto. Na equação (129) tanto a função objetivo como a restrição foram linearizadas. Limites móveis foram adicionados no problema pois a aproximação em primeira ordem por série de Taylor só é válida na vizinhança de \mathbf{x}^* . Segundo SILVA (2003) a convergência do método depende muito da escolha desses limites móveis. Se eles forem muito grandes pode-se causar a perda do ponto ótimo, se forem pequenos tem-se um custo computacional grande. Também, deve-se observar o fato de que ao se aproximar da solução ótima deve-se reduzi-los para não ocorrer a possibilidade de se passar pelo ponto ótimo. Na literatura existem diferentes formas de se atualizar os limites móveis, nesta dissertação, alteram-se os seus valores, em cada iteração, dependendo do comportamento das variáveis de projeto. Dessa forma, a atualização de x_e^l e x_e^s é feita a partir de um valor absoluto ζ da seguinte forma:

$$\begin{aligned} x_e^l &= \max(0, 001, (1 - \zeta_e)x_e); \\ x_e^s &= \min(1, (1 + \zeta_e)x_e). \end{aligned} \quad (130)$$

Se o sinal da diferença de uma variável de projeto, em uma dada iteração, permanecer o mesmo, o valor de ζ é acrescido em 5% caso contrário, é decrescido do mesmo valor.

Em resumo a PLS é um algoritmo iterativo, em que a resolução do problema é dado pelo seguintes passos (SILVEIRA, 2012; RAO, 2009):

1. Inicia-se com uma estimativa inicial para as variáveis de projeto;
2. Lineariza-se a função objetivo e/ou as restrições;
3. Calcula-se a sensibilidade, o valor da função objetivo e as restrições, a partir dessa estimativa inicial, e define-se os limites móveis;
4. Resolve-se o problema de programação linear para obter a solução do vetor de variáveis de projeto;

5. Avalia-se essa solução. Se a convergência não for atingida o processo se repete até a convergência ser alcançada.

4.10 Instabilidades numéricas na otimização topológica

A otimização topológica, ainda hoje, não tem soluções precisas e estáveis pois segundo SIGMUND; PETERSSON (1998) existem algumas instabilidades numéricas que podem influenciar no resultado do problema, são elas:

- Dependência da malha;
- Tabuleiro de xadrez;
- Mínimos locais.

4.10.1 Dependência da malha

Quando há um refinamento da malha é de imediato a obtenção de uma melhor modelagem da estrutura e de uma descrição das fronteiras mais adequada, entretanto, isso não deve ocasionar uma solução ótima que direcione a uma estrutura mais detalhada e qualitativamente diferente (SIGMUND; PETERSSON, 1998; BENDSOE; SIGMUND, 2003).

A dependência da malha, figura 20, ocorre quando há diferentes discretizações do domínio, via método de elementos finitos, surgem distintas soluções ótimas⁸. Isso acontece pois ao se estudar uma microestrutura está-se trabalhando com material não isotrópico e dessa forma não é possível que ela se adapte ao projeto original que por sua vez é formado por um material isotrópico. Matematicamente, não existe um espaço de solução fechado ao conjunto admissível de projeto (BENDSOE; SIGMUND, 2003).



Figura 20: a) Malha discretizada em 600 elementos. b) Malha discretizada em 5400 elementos. Fonte: Sigmund e Peterson, 1998, p. 70.

O tratamento para reduzir o espaço de modelos admissíveis, e conseqüentemente ter um problema independente da malha é, de acordo com BENDSOE; SIGMUND

⁸À medida que a malha de elementos finitos é refinada surgem mais “buracos” na estrutura.

(2003), incluir no problema alguma restrição local ou global sobre a variação da densidade. Esta inclusão pode ser feita através da adição de restrições, de forma a reduzir o espaço de parâmetros, ou através da aplicação de filtros durante a implementação.

4.10.2 Tabuleiro de xadrez

A instabilidade de tabuleiro de xadrez é uma complicação que pode aparecer na solução da OT e que faz com que surjam regiões alternadas entre material sólido e vazio, distribuídas no domínio em estudo, semelhantes a tabuleiros de xadrez, conforme ilustrado na figura 21.



Figura 21: Instabilidade de tabuleiro de xadrez.

Atualmente sabe-se que os padrões de tabuleiro estão relacionados ao MEF, mas isso já havia sido observado por JOG; HABER (1996) e DÍAZ; SIGMUND (1995).

DÍAZ; SIGMUND (1995) estudaram problemas, de elasticidade bidimensional, com o objetivo de minimizar a flexibilidade e com restrição de quantidade de material disponível. No estudo eles comprovaram que a discretização com EF retangulares bilineares isoparamétricos de 4 nós conduzia a padrões de tabuleiro de xadrez.

Um ano depois JOG; HABER (1996) publicaram um trabalho que tratava do mesmo fenômeno. No estudo eles também chegaram a conclusão de que algumas aproximações realizadas com elementos finitos conduzia a instabilidade de tabuleiro. Através de um exemplo simples eles demonstraram que quando um problema de mínima flexibilidade é discretizado com elementos finitos quadrilaterais de 4 nós, considerando uma densidade uniforme por elemento, padrões de tabuleiro de xadrez apareciam na solução.

A fim de impedir essa complicação ambos os trabalhos sugerem que a utilização de elementos finitos de ordem superior (8 ou 9 nós) é uma estratégia para resolver esse inconveniente. Para a abordagem SIMP, entretanto, a utilização desses elementos só funciona se o poder de penalização é pequeno o suficiente SIGMUND; PETERSSON (1998). Assim, independentemente do modelo de material escolhido, sabe-se que esses elementos aumentam o custo computacional na resolução numérica do problema, uma vez que a matriz de rigidez se torna maior à medida que se aumenta o número de nós dos elementos e, portanto, não torna-se viável.

JOG; HABER (1996) citam, ainda, mais duas opções para evitar os padrões de tabuleiro. Uma delas refere-se a modificação do Lagrangeano no problema de otimi-

zação a fim de assegurar a estabilidade de um dado modelo de elementos finitos e a outra alternativa está relacionada a uma operação realizada por BENDSOE; DIAZ; KIKUCHI (1993) de pós-processamento para filtrar o modo de tabuleiro de xadrez, usando um operador que atua ao longo de um trecho de 4 elementos vizinhos.

4.10.3 Mínimos locais

A maior parte dos problemas de otimização são não convexos o que consequentemente conduz a existência de muitos mínimos locais, levando a diferentes soluções para o mesmo problema quando são utilizadas estimativas iniciais diversas para as variáveis e diferentes parâmetros dos algoritmos de otimização (BENDSOE; SIGMUND, 2003). Para problemas não convexos apenas é possível assegurar a convergência de pontos estacionários, que não necessariamente são mínimos globais, contrário ao que ocorre em problemas convexos, em que a prova de convergência dos algoritmos funciona (SIGMUND; PETERSSON, 1998).

Os Métodos de Continuação surgem como uma alternativa para essa complicação, pois conduzem a bons resultados. A essência dos métodos de continuação estão no fato de possibilitarem a mudança gradual de um problema de otimização convexo (artificialmente) para um problema não-convexo em uma série de etapas (BENDSOE; SIGMUND, 2003). Um exemplo de estratégia de continuação é a correção do parâmetro de penalização p utilizado por GROENWOLD; ETMAN (2010). No trabalho os autores consideraram os seguintes valores para p :

$$p_k = \begin{cases} 1 & k \leq 20, \\ \min \{p_{max}, 1, 02 p_{k-1}\} & k > 20, \end{cases} \quad (131)$$

onde k é o contador para o número de iterações e p_{max} é o máximo valor admissível para p .

Neste trabalho, em relação aos mínimos locais, não houve a necessidade de se adotar nenhum método de continuação, tendo em vista que resultados satisfatórios foram obtidos através da aplicação do filtro de sensibilidade juntamente com o modelo SIMP.

4.11 Filtro de sensibilidade

SIGMUND; PETERSSON (1998) mostram que vários métodos podem ser utilizados a fim de garantir a independência da malha e diminuir a instabilidade de tabuleiro de xadrez, contudo, cada método apresenta seus prós e contras, de forma que, para cada problema, deve-se avaliar qual é a melhor alternativa. Dentre estes métodos

estão as técnicas de filtragem⁹.

O filtro de sensibilidade é uma técnica de filtragem que produz resultados muito parecidos àqueles obtidos, por exemplo, devido a uma restrição de gradiente local e, ainda possui a vantagem de ser muito simples de se implementar e de exigir pouco tempo de processamento extra (BENDSOE; SIGMUND, 2003). Corresponde, também, a uma técnica viável para quem utiliza o modelo SIMP, uma vez que é capaz de restringir o espaço de solução desse modelo, permitindo escolher maiores valores para o parâmetro de penalização (SILVA, 2003). O filtro de sensibilidade, em problemas de OT que são baseados na densidade, é amplamente utilizado e segundo SIGMUND (2007) tornou-se muito popular sendo aplicado tanto no meio acadêmico como em programas comerciais.

O filtro de sensibilidade consiste num método puramente heurístico em que a atualização do projeto base é feito mediante as sensibilidades filtradas e não com as sensibilidades reais (SIGMUND, 2007). O cálculo das sensibilidades da função objetivo ou das restrições, em relação a um elemento específico, é feito com base na média ponderada das sensibilidades de elementos situados numa vizinhança delimitada fixa (BENDSOE; SIGMUND, 2003). Adota-se um valor mínimo para o raio de forma a se determinar quais elementos influenciarão nesse cálculo, conforme mostrado na figura 22.

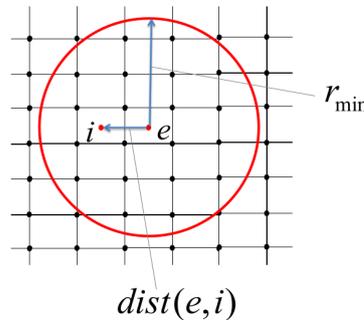


Figura 22: Filtro de sensibilidade.

O filtro de sensibilidade modifica as sensibilidades de uma função objetivo f_o da seguinte forma BENDSOE; SIGMUND (2003):

$$\widehat{\frac{\partial f_o}{\partial x_e}} = \frac{1}{x_e \sum_{i=1}^{N_e} \widehat{H}_i} \sum_{i=1}^{N_e} \widehat{H}_i x_i \frac{\partial f_o}{\partial x_i}, \quad (132)$$

onde $\widehat{\frac{\partial f_o}{\partial x_e}}$ representa a nova sensibilidade da função objetivo, i ($i = 1, \dots, N_e$) representa o índice do elemento dentro do círculo do filtro e \widehat{H} é o operador de convolução, cujo

⁹SIGMUND (2007) apresenta um estudo sobre diferentes formas de filtragem na OT.

valor, decai linearmente com a distância entre o centro do elemento i e o centro do círculo (SIGMUND, 2001). \widehat{H}_i é expresso por:

$$\widehat{H}_i = \begin{cases} r_{min} - dist(e, i) & i \in \mathbb{N} | dist(e, i) \leq r_{min}, \\ 0 & i \in \mathbb{N} | dist(e, i) > r_{min}, \end{cases} \quad (133)$$

onde $dist(e, i)$ é a distância entre o centro do elemento e e o centro do elemento i e r_{min} é o raio de filtragem. Quando o raio de filtragem é nulo, o filtro é desativado.

5 MODELAGEM MATEMÁTICA DE UM BRAÇO ROBÓTICO FLEXÍVEL

5.1 Dados gerais utilizados nas simulações

Na sequência serão apresentados os resultados da implementação computacional para a resolução dos problemas (88), (90) e (91). A metodologia utilizada tem como base os trabalhos de SIGMUND (2001) e de LIU; TOVAR (2014) e os algoritmos foram implementados com o auxílio do *software Matlab*.

As discretizações das vigas (2D e 3D) foram realizadas a partir de malhas regulares de elementos finitos, onde as características de cada EF são dadas conforme exposto no capítulo 2. Para cada EF é atribuído um valor inicial de x_e . Segundo PORTO (2006), com o propósito de iniciar a modelagem com uma solução já executável e aproveitando o máximo de material, confere-se a cada EF um mesmo valor de x_e e este valor, nesta dissertação, corresponde a η .

O material utilizado, em todas as simulações, é o alumínio, cuja as propriedades¹ são dadas conforme descrito na tabela 1.

Tabela 1: Propriedades do material base isotrópico utilizado

Propriedade	Valor
Módulo de Young (E_0)	$6,8 \times 10^{10} N/m^2$
Coefficiente de Poisson (ν_0)	0,36
Densidade inicial (ρ_0)	$2.700 kg/m^3$

5.2 Critérios de estabilidade numérica

Nas implementações numéricas há dois critérios de estabilidade numérica que foram estabelecidos por LIU; TOVAR (2014) e que são mantidos neste trabalho: o critério baseado no número de iterações e o critério relacionado com a mudança do vetor de

¹Os valores das propriedades do material foram obtidos do site SEARCH ENGINEERING MATERIAL PROPERTY VALUE (2015).

variáveis de projeto. Define-se que o número máximo de iterações não pode ser superior a 70. Com relação à mudança do vetor de variáveis de projeto, institui-se que o algoritmo deve parar quando a máxima mudança, em módulo, das variáveis de projeto seja menor ou igual a 0,01. Assume-se, ainda, que a estabilidade numérica ocorre quando ao menos um deles for satisfeito.

5.3 Problema de minimização da flexibilidade (2D)

Um braço robótico flexível é idealizado como uma viga 2D, cujo comprimento é igual a $1m$ e a altura é igual a $0,2m$. No lado esquerdo da viga é inserido um furo, de forma circular, representando o eixo de rotação do braço e, no lado direito supõe-se a aplicação de uma força, conforme ilustrado na figura 23.

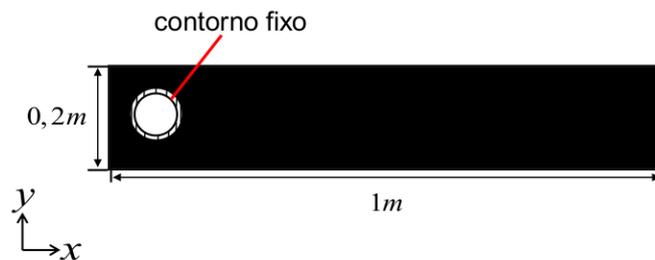


Figura 23: Idealização de um braço robótico flexível em 2D. Problema de minimização da flexibilidade.

Com o objetivo de encontrar os resultados topológicos, que minimizem a flexibilidade da viga, problema (88), são realizadas três simulações conforme descrito na tabela 2. Nessas simulações será verificado a ocorrência de possíveis instabilidades numéricas, o cumprimento da restrição de volume, o comportamento da flexibilidade da viga ao longo das iterações e o percentual de redução entre a flexibilidade inicial e a flexibilidade final ao longo das iterações. Assume-se que a força aplicada corresponde a $-1 \times 10^5 N$, $\eta = 0,6$, $p = 3,5$ e $r_{min} = 2$.

Tabela 2: Modelo de elementos finitos correspondente as simulações 1, 2 e 3.

Simulação	1	2	3
Número de elementos	1.620	2.420	4.500
Malha	90x18	110x22	150x30
Número de nós	1.729	2.553	4.681
Número de graus de liberdade	3.458	5.106	9.362
Número de variáveis de projeto	1.620	2.420	4.500

A figura 24 mostra o resultado topológico ótimo referente as três simulações. Mediante a comparação dos resultados topológicos obtidos pode-se verificar que não ocorreram instabilidades numéricas nessas soluções, que o modelo de elementos finitos

alterou, mas não significativamente, a topologia² ótima obtida e auxiliou na diminuição do aspecto "serrilhado", promovendo uma melhor definição dos contornos quando foi escolhida uma malha mais refinada, de forma que, a última discretização apresenta, seguramente, o melhor resultado topológico.

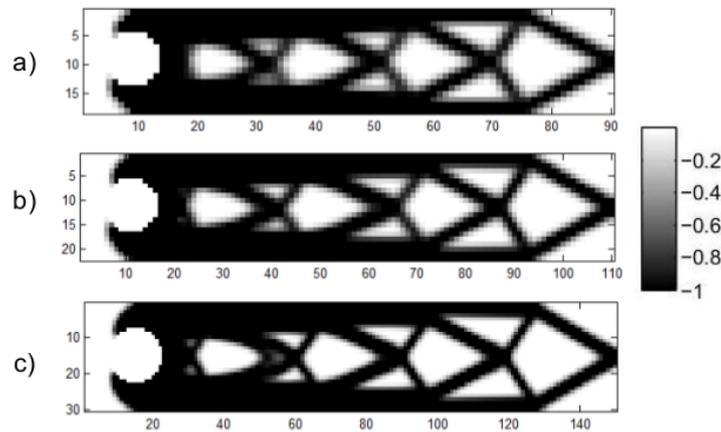


Figura 24: Resultados topológicos. a) Simulação 1 correspondente a malha de 90x18 elementos finitos. b) Simulação 2 correspondente a malha de 110x22 elementos finitos. c) Simulação 3 correspondente a malha de 150x30 elementos finitos.

As figuras 25-27 ilustram o comportamento da flexibilidade ao longo das iterações.

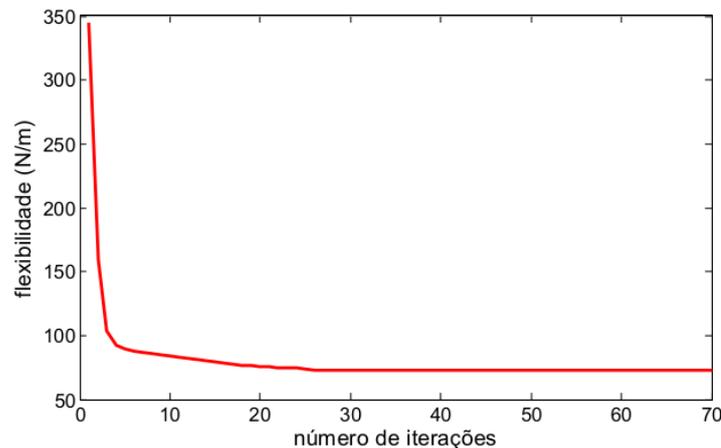


Figura 25: Flexibilidade da viga ao longo das iterações, referente a simulação 1, correspondente a malha de 90x18 elementos finitos.

Na simulação 1, figura 25, o valor da flexibilidade correspondente a primeira iteração é igual a $344,89\text{N/m}$ e ao final do processo esse valor passa a corresponder a

²Entende-se aqui como topologia, a geometria externa e a presença de "buracos" internos na estrutura.

$72,51N/m$, isto indica que houve uma redução de aproximadamente 78,98% no valor da flexibilidade da viga durante o processo de OT. Observa-se que mesmo reduzindo em 40% o volume da estrutura, consegue-se obter uma flexibilidade resultante que é aproximadamente 23,55% maior que a flexibilidade da estrutura original, que foi calculada em $58,69N/m$. Em torno da vigésima quinta iteração o valor da flexibilidade se estabiliza.

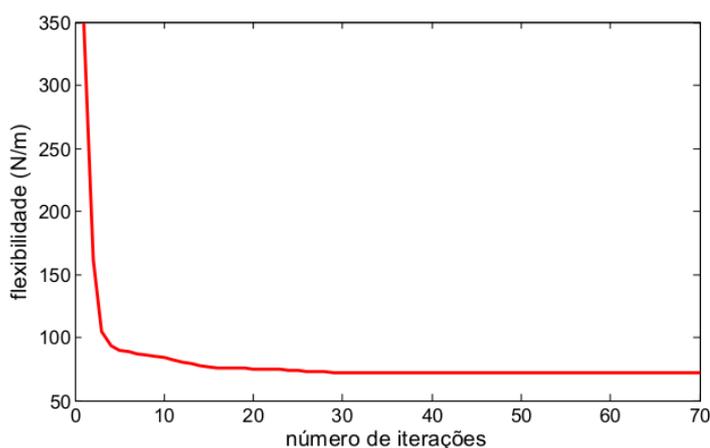


Figura 26: Flexibilidade da viga ao longo das iterações, referente a simulação 2, correspondente a malha de 110×22 elementos finitos.

Na simulação 2, figura 26, o valor da flexibilidade correspondente a primeira iteração é igual a $349,32N/m$ e ao final do processo esse valor passa a corresponder a $72,20N/m$, isto indica que houve uma redução de aproximadamente 79,33% no valor da flexibilidade da viga durante o processo de OT. Observa-se que mesmo reduzindo em 40% o volume da estrutura, consegue-se obter uma flexibilidade resultante que é aproximadamente 23,02% maior que a flexibilidade da estrutura original, que foi calculada em $58,69N/m$. Em torno da vigésima nona iteração o valor da flexibilidade se estabiliza.

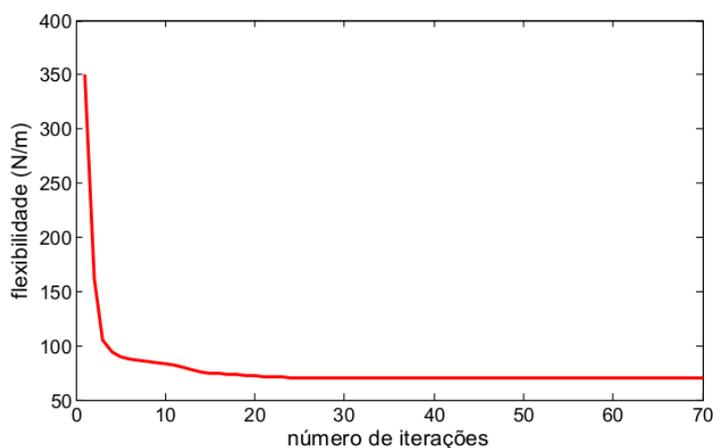


Figura 27: Flexibilidade da viga ao longo das iterações, referente a simulação 3, correspondente a malha de 150x30 elementos finitos.

Na simulação 3, figura 27, o valor da flexibilidade correspondente a primeira iteração é igual a $350,76\text{N}/\text{m}$ e ao final do processo esse valor passa a corresponder a $70,55\text{N}/\text{m}$, isto indica que houve uma redução de aproximadamente 79,89% no valor da flexibilidade da viga durante o processo de OT. Observa-se que mesmo reduzindo em 40% o volume da estrutura, consegue-se obter uma flexibilidade resultante que é aproximadamente 20,21% maior que flexibilidade da estrutura original, que foi calculada em $58,69\text{N}/\text{m}$. Em torno da vigésima terceira iteração o valor da flexibilidade se estabiliza.

A tabela 3 mostra a comparação entre as três simulações realizadas, com referência aos resultados obtidos na flexibilidade. Os resultados das simulações 1, 2 e 3 estão muito próximos, mesmo com o refinamento da malha de elementos finitos. Também, pode ser observado que uma estrutura um pouco mais rígida foi obtida com a malha de 4.500 elementos finitos, na simulação 3.

Tabela 3: Comparação dos resultados entre as simulações 1, 2 e 3.

Simulação	Flexibilidade inicial	Flexibilidade final	Percentual de redução da flexibilidade
1	$344,89\text{N}/\text{m}$	$72,51\text{N}/\text{m}$	78,98%
2	$349,32\text{N}/\text{m}$	$72,20\text{N}/\text{m}$	79,33%
3	$350,76\text{N}/\text{m}$	$70,55\text{N}/\text{m}$	79,89%

As figuras 28-30 ilustram o comportamento da restrição de volume ao longo das iterações. Observa-se que nas três simulações a restrição de volume foi cumprida já na primeira iteração.

Tomando por base as constatações realizadas nas três primeiras simulações, aonde levou-se em conta o resultado topológico, o comportamento da flexibilidade da viga ao longo das iterações, o percentual de redução entre a flexibilidade inicial e a flexibilidade final e o cumprimento da restrição de volume, pode-se seguramente afirmar que, das três discretizações realizadas, a discretização que apresenta a melhor solução para o problema (88), em 2D, é dada pela malha com 4.500 elementos finitos.

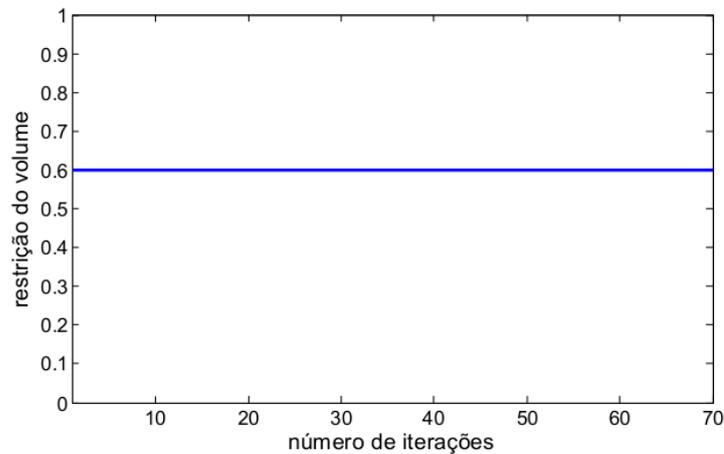


Figura 28: Alterações no volume ao longo das iterações, referente a simulação 1, correspondente a malha de 90x18 elementos finitos.

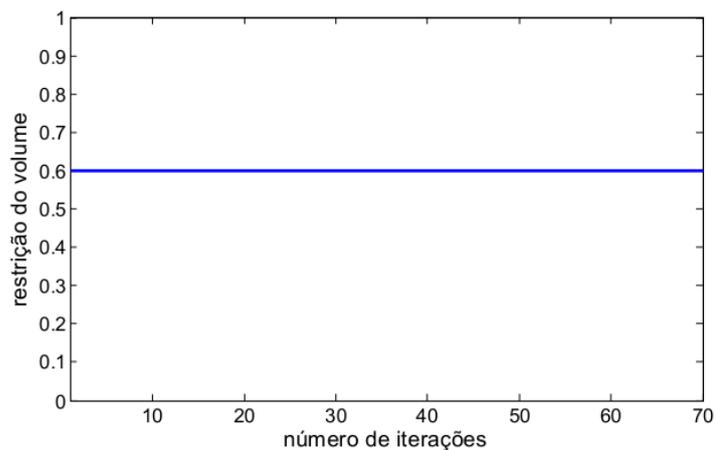


Figura 29: Alterações no volume ao longo das iterações, referente a simulação 2, correspondente a malha de 110x22 elementos finitos.

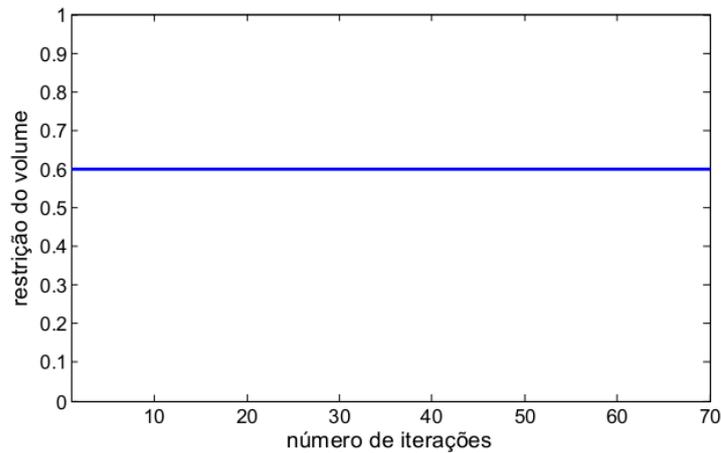


Figura 30: Alterações no volume ao longo das iterações, referente a simulação 3, correspondente a malha de 150×30 elementos finitos.

5.4 Problema de minimização da flexibilidade (3D)

Um braço robótico flexível é idealizado como uma viga 3D, cujo comprimento é igual a $1m$, a altura é igual a $0,2m$ e a espessura é igual a $0,1m$. No lado esquerdo da viga é inserido um furo, de forma cilíndrica, representando o eixo de rotação do braço e, no lado direito supõe-se a aplicação de uma força, conforme ilustrado na figura 31.

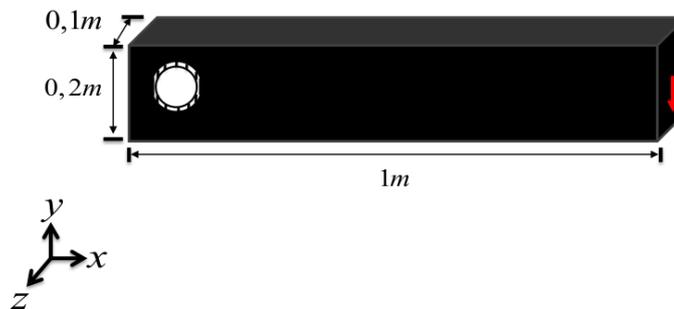


Figura 31: Idealização de um braço robótico flexível em 3D. Problema de minimização da flexibilidade.

Com o objetivo de encontrar os resultados topológicos, que minimizem a flexibilidade da viga, problema (88), são realizadas três simulações conforme descrito na tabela 4. Nessas simulações será verificado a ocorrência de possíveis instabilidades numéricas, o cumprimento da restrição de volume, o comportamento da flexibilidade da viga ao longo das iterações e o percentual de redução entre a flexibilidade inicial e a flexibilidade final. Assume-se que a força aplicada corresponde a $-1 \times 10^6 N$, $\eta = 0,6$, $p = 3,8$ e $r_{min} = 1$.

Tabela 4: Modelo de elementos finitos correspondente as simulações 4, 5 e 6.

Simulação	4	5	6
Número de elementos	4.320	10.240	20.000
Malha	60x12x6	80x16x8	100x20x10
Número de nós	5.551	12.393	23.331
Número de graus de liberdade	16.653	37.179	69.993
Número de variáveis de projeto	4.320	10.240	20.000

A figura 32 mostra o resultado topológico ótimo referente as três simulações.

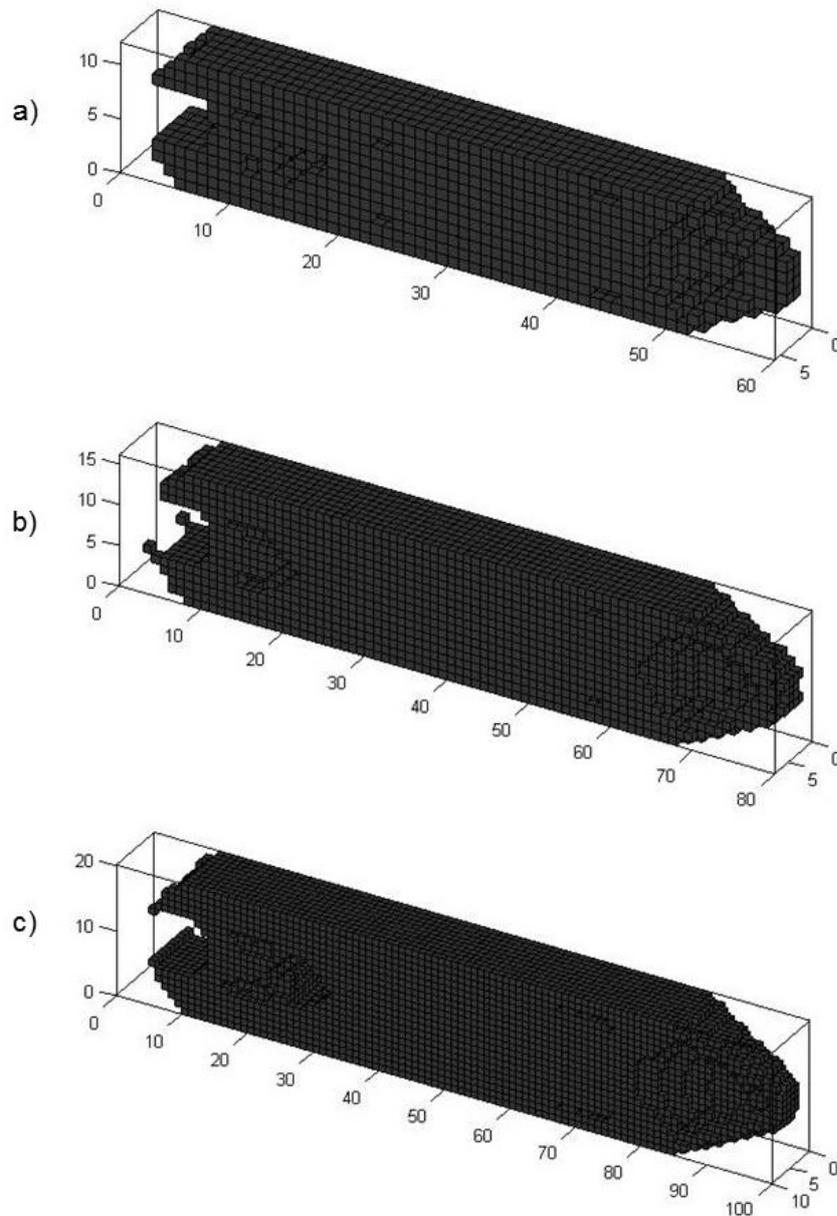


Figura 32: Resultados topológicos. a) Simulação 4 correspondente a malha de 60x12x6 elementos finitos. b) Simulação 5 correspondente a malha de 80x16x8 elementos finitos. c) Simulação 6 correspondente a malha de 100x20x10 elementos finitos.

Para uma melhor interpretação dos resultados topológicos obtidos, nas figuras 33-35 são ilustrados alguns cortes verticais no intuito de verificar a quantidade de material no interior dessas vigas.

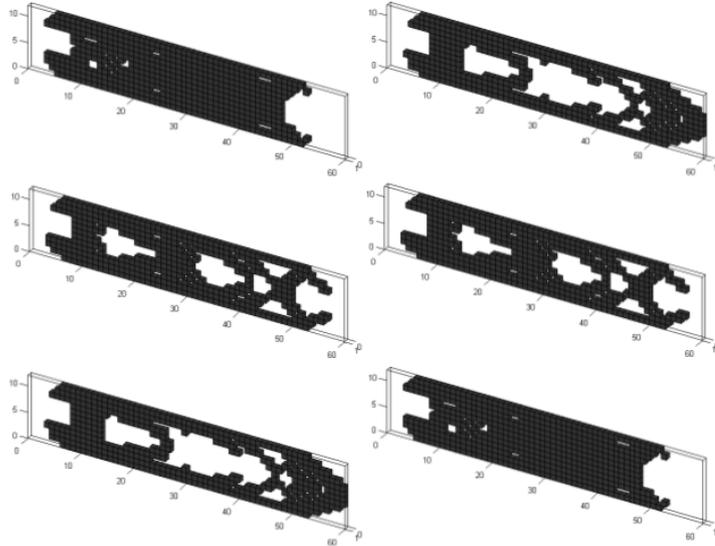


Figura 33: Cortes verticais, referente a simulação 4, correspondentes a malha com 60x12x6 elementos finitos.

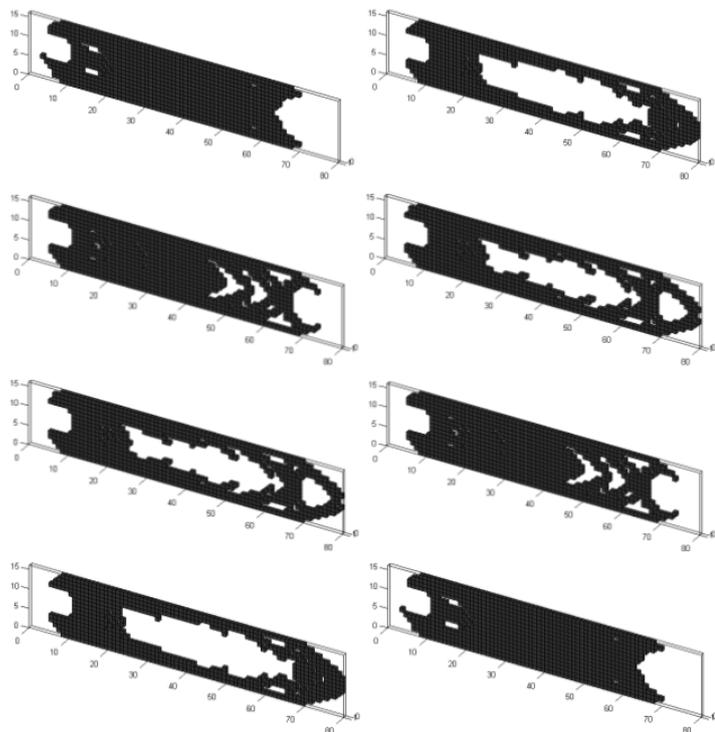


Figura 34: Cortes verticais, referente a simulação 5, correspondentes a malha com 80x16x8 elementos finitos.

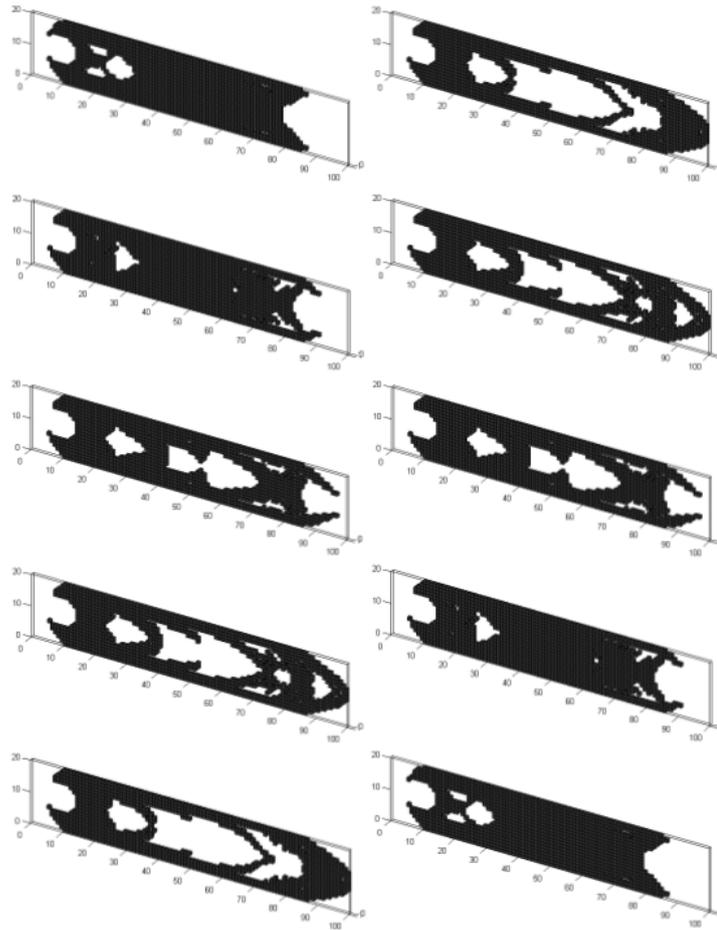


Figura 35: Cortes verticais, referente a simulação 6, correspondentes a malha com $100 \times 20 \times 10$ elementos finitos.

Conforme observado, através dos cortes verticais, pode-se verificar que as topologias encontradas apresentam em seu interior regiões sem material. Mediante a comparação dos resultados topológicos obtidos, figuras 32-35, assim como no domínio bidimensional, verifica-se que configurações de tabuleiro de xadrez não surgiram nessas soluções e que o modelo de elementos finitos promoveu uma melhor definição dos contornos quando foi escolhida uma malha mais refinada, de forma que, a última discretização apresenta o melhor resultado topológico.

As figuras 36-38 ilustram o comportamento da flexibilidade ao longo das iterações.

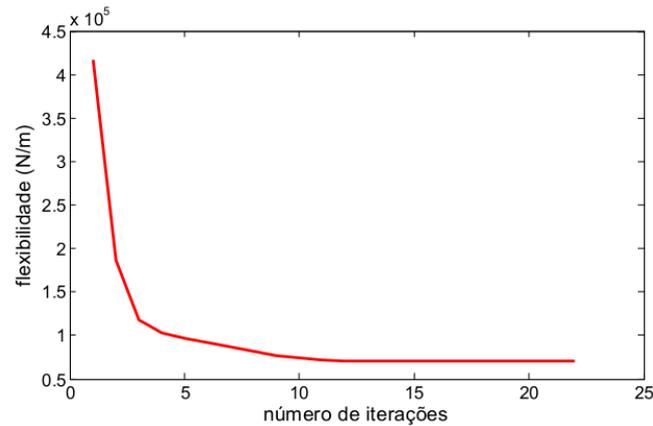


Figura 36: Flexibilidade da viga ao longo das iterações, referente a simulação 4, correspondente a malha de $60 \times 12 \times 6$ elementos finitos.

Na simulação 4, figura 36, o valor da flexibilidade correspondente a primeira iteração é igual a $416.582,54 N/m$ e ao final do processo esse valor passa a corresponder a $70.221,03 N/m$, isto indica que houve uma redução de aproximadamente 83,14% no valor da flexibilidade da viga durante o processo de OT. Observa-se que mesmo reduzindo em 40% o volume da estrutura, consegue-se obter uma flexibilidade resultante que é aproximadamente 13,75% maior que a flexibilidade da estrutura original, que foi calculada em $61.730,94 N/m$. Em torno da décima terceira iteração o valor da flexibilidade se estabiliza. Nota-se que o algoritmo atendeu o critério de estabilidade numérica na vigésima segunda iteração.

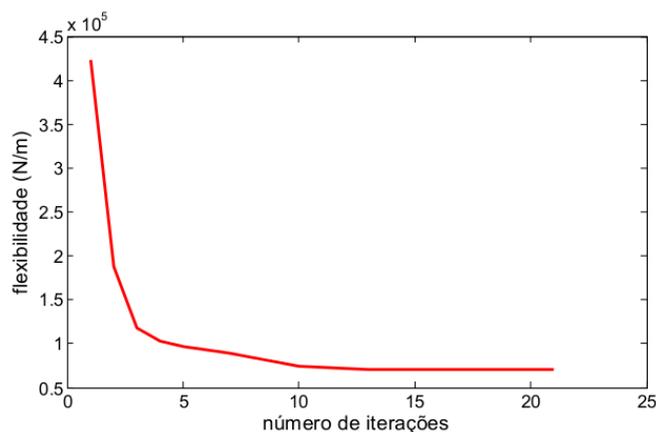


Figura 37: Flexibilidade da viga ao longo das iterações, referente a simulação 5, correspondente a malha de $80 \times 16 \times 8$ elementos finitos.

Na simulação 5, figura 37, o valor da flexibilidade correspondente a primeira iteração é igual a $423.803,33 N/m$ e ao final do processo esse valor passa a corresponder a $70.273,03 N/m$, isto indica que houve uma redução de aproximadamente 83,42% no

valor da flexibilidade da viga durante o processo de OT. Observa-se que mesmo reduzindo em 40% o volume da estrutura, consegue-se obter uma flexibilidade resultante que é aproximadamente 13,84% maior que a flexibilidade da estrutura original, que foi calculada em $61.730,94N/m$. Em torno da décima terceira iteração o valor da flexibilidade se estabiliza. Nota-se que o algoritmo atendeu o critério de estabilidade numérica na vigésima primeira iteração.

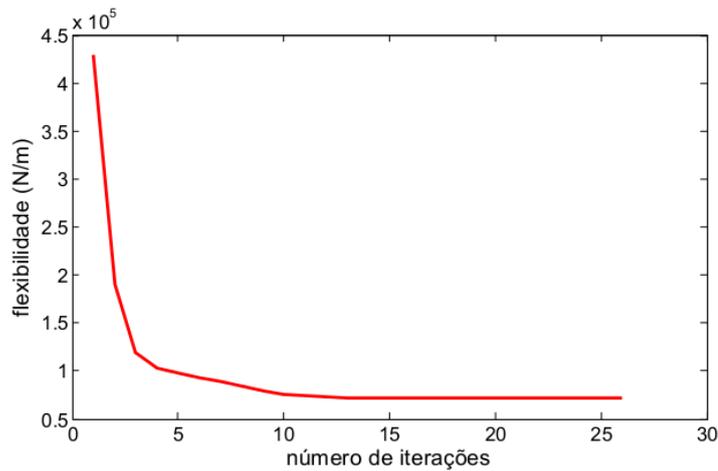


Figura 38: Flexibilidade da viga ao longo das iterações, referente a simulação 6, correspondente a malha de $100 \times 20 \times 10$ elementos finitos.

Na simulação 6, figura 38, o valor da flexibilidade correspondente a primeira iteração é igual a $430.059,06N/m$ e ao final do processo esse valor passa a corresponder a $71.660,59N/m$, isto indica que houve uma redução de aproximadamente 83,34% no valor da flexibilidade da viga durante o processo de OT. Observa-se que mesmo reduzindo em 40% o volume da estrutura, consegue-se obter uma flexibilidade resultante que é aproximadamente 16,09% maior que a flexibilidade da estrutura original, que foi calculada em $61.730,94N/m$. Em torno da décima terceira iteração o valor da flexibilidade se estabiliza. Nota-se que o algoritmo atendeu o critério de estabilidade numérica na vigésima sexta iteração.

A tabela 5 mostra a comparação entre as três simulações realizadas, com referência aos resultados obtidos na flexibilidade. Os resultados das simulações 4, 5 e 6 estão muito próximos, mesmo refinando a malha de forma significativa.

Tabela 5: Comparação dos resultados entre as simulações 4, 5 e 6.

Simulação	Flexibilidade inicial	Flexibilidade final	Percentual de redução da flexibilidade
4	$416.582,54N/m$	$70.221,03N/m$	83,14%
5	$423.803,33N/m$	$70.273,03N/m$	83,42%
6	$430.059,06N/m$	$71.660,59N/m$	83,34%

As figuras 39-41 ilustram o comportamento da restrição de volume ao longo das iterações. Verifica-se que nas três simulações a restrição de volume foi cumprida já na primeira iteração.

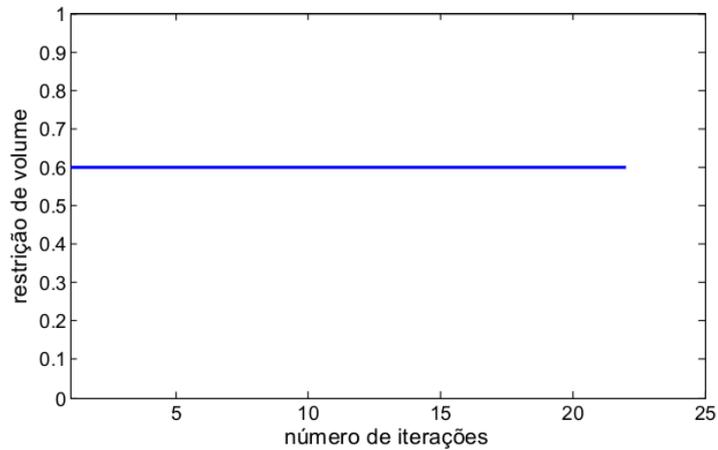


Figura 39: Alterações no volume ao longo das iterações, referente a simulação 4, correspondente a malha de 60x12x6 elementos finitos.

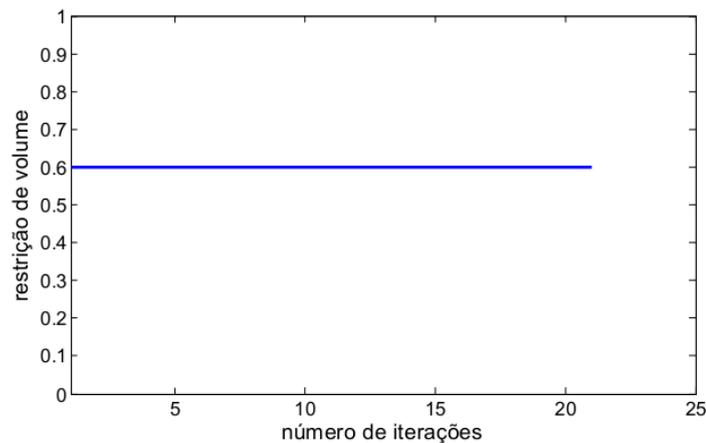


Figura 40: Alterações no volume ao longo das iterações, referente a simulação 5, correspondente a malha de 80x16x8 elementos finitos.

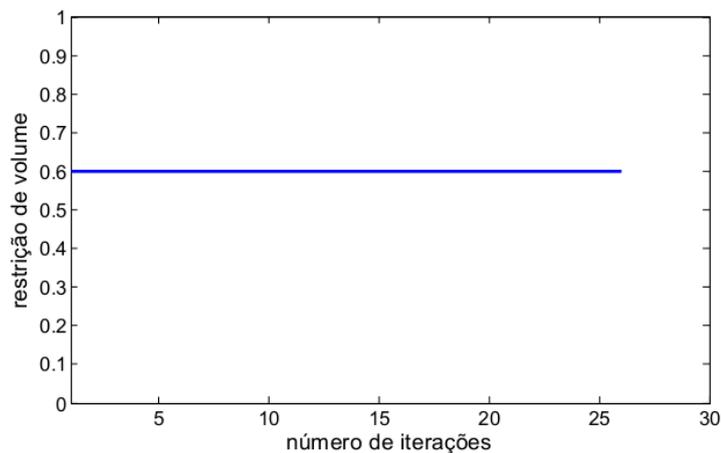


Figura 41: Alterações no volume ao longo das iterações, referente a simulação 6, correspondente a malha de $100 \times 20 \times 10$ elementos finitos.

5.5 Problema de maximização da primeira frequência natural

Um braço robótico flexível é idealizado como uma viga 2D, cujo comprimento é igual a $1m$ e a altura é igual a $0,2m$. No lado esquerdo da viga é inserido um furo, de forma circular, representando o eixo de rotação do braço, conforme ilustrado na figura 42. Com o objetivo de obter o resultado topológico, que maximize a primeira frequência natural da viga é realizada a simulação 7. Considera-se uma malha com $4.500(150 \times 30)$ elementos finitos, estipula-se que todos os coeficientes de ponderação do problema (90) são iguais ($\omega_i = 1/3$) e os três primeiros autovalores são empregados na função objetivo, ainda, toma-se que $\eta = 0,6$, $p = 3,5$ e $r_{min} = 2$.

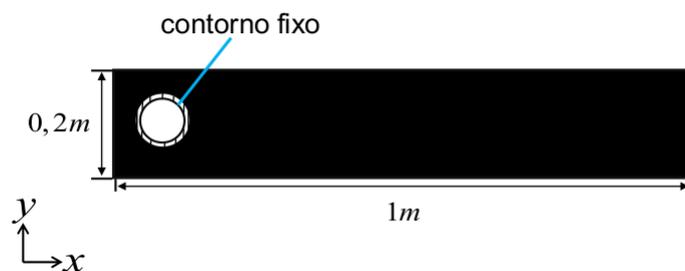


Figura 42: Idealização de um braço robótico flexível em 2D. Problema de maximização da primeira frequência natural.

A figura 43 mostra o resultado topológico da simulação 7. Esse resultado topológico foi obtido, pois no problema (90) pode-se obter uma solução trivial, com autovalor infinito, removendo toda a estrutura (BENDSOE; SIGMUND, 2003). Como no problema estudado há uma restrição de volume, o autovalor assume valor máximo removendo,

apenas, parte da extremidade direita³, conforme pode ser verificado na figura 43, o que resulta em uma solução inviável. A fim de resolver esta situação, segundo BEND-SOE; SIGMUND (2003), pode-se adicionar um reforço no contorno do braço ou há a opção de se adicionar uma massa não estrutural na sua extremidade. Como em uma situação mais próxima da realidade, na extremidade direita do braço robótico existem massas de outros braços, garras ou ferramentas, é mais conveniente considerar a segunda alternativa com a massa fixada no centro da extremidade direita da viga, conforme ilustrado na figura 44.

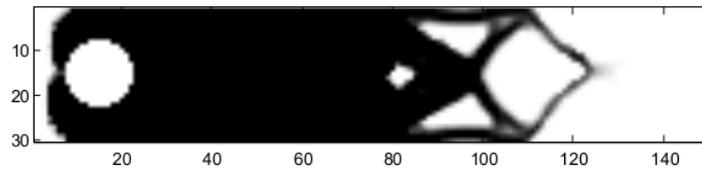


Figura 43: Resultado topológico obtido a partir da simulação 7.

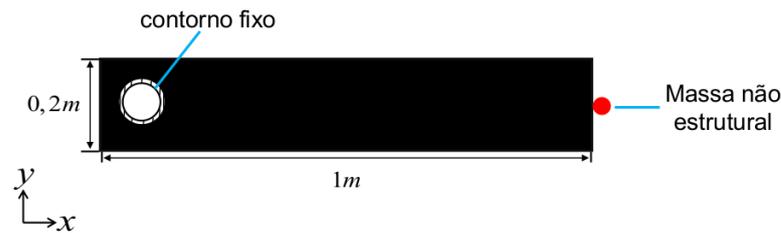


Figura 44: Idealização de um braço robótico flexível em 2D, com a adição de uma massa não estrutural em sua extremidade. Problema de maximização da primeira frequência natural.

Com o objetivo de obter o resultado topológico, que maximize a primeira frequência natural da viga, problema (90), é realizada, então, a simulação 8, com referência à figura 44. Considera-se uma malha com 4.500(150x30) elementos finitos. Também, adota-se que todos os coeficientes de ponderação do problema (90) são iguais ($\omega_i = 1/3$) e que os três primeiros autovalores são empregados na função objetivo. A escolha de, somente, os três primeiros autovalores se deve ao fato que os primeiros modos de vibração são responsáveis pelos maiores deslocamentos da extremidade do braço (BOTTEGA et al., 2009). Ainda, tem-se que a massa não estrutural corresponde a $60Kg$, e que $\eta = 0,6$, $p = 3,5$ e $r_{min} = 2$. Para este problema, é analisado o comportamento da primeira frequência natural da estrutura ao longo das iterações, o cumprimento da restrição de volume e a estabilidade numérica da função objetivo.

³Resultado semelhante foi obtido no trabalho de MIN; NISHIWAKI; KIKUCHI (2000).

A figura 45 mostra o resultado topológico obtido. Observa-se que este resultado não apresenta configurações de tabuleiro e que a topologia ótima está bem definida.

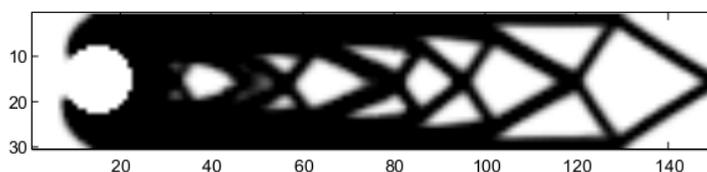


Figura 45: Resultado topológico obtido a partir da simulação 8. Domínio de projeto com a adição de uma massa não estrutural.

Na simulação 8 o valor do autovalor médio, figura 46, correspondente a primeira iteração é igual a $622.032,54$ e ao final do processo esse valor passa a corresponder a $3.877.350,92$, isto indica que houve um aumento de aproximadamente $523,34\%$ no valor do autovalor médio da viga durante o processo de OT. Em torno da quinquagésima iteração o valor da função objetivo se estabiliza.

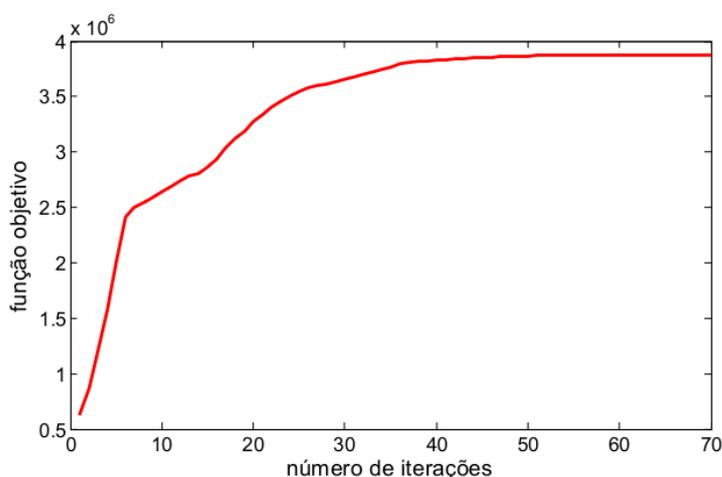


Figura 46: Estabilidade numérica da função objetivo, referente a simulação 8.

A figura 47 mostra o comportamento da primeira frequência natural da estrutura. A primeira frequência natural inicia com um valor de $73,78Hz$ e ao final do processo de otimização passa a corresponder a $187,61Hz$, isto indica que houve um aumento de aproximadamente $154,28\%$ no seu valor.

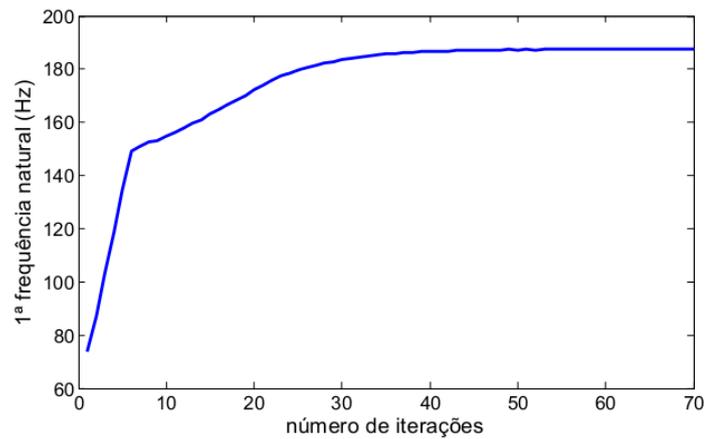


Figura 47: Comportamento da 1ª frequência natural da estrutura ao longo das iterações, referente a simulação 8.

A figura 48 mostra o comportamento dos três primeiros autovalores da estrutura. Conforme pode ser observado a mudança da função objetivo evitou a inversão dos três autovalores utilizados na simulação 8.

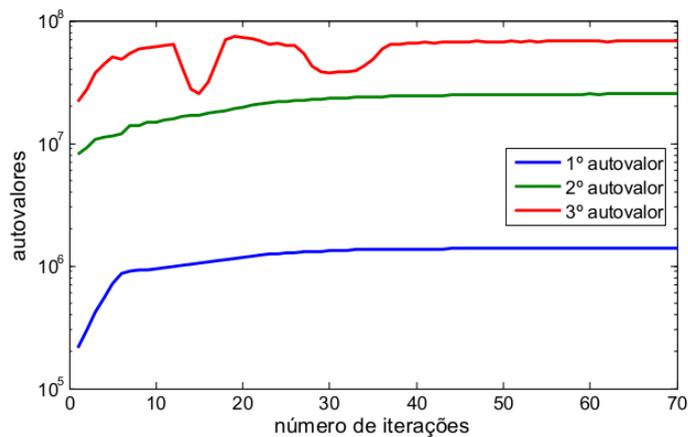


Figura 48: Comportamento do 1ª, 2ª e 3ª autovalores da estrutura ao longo das iterações, referente a simulação 8.

A figura 49 ilustra o comportamento da restrição de volume ao longo das iterações. A restrição de volume foi cumprida a partir da terceira iteração.

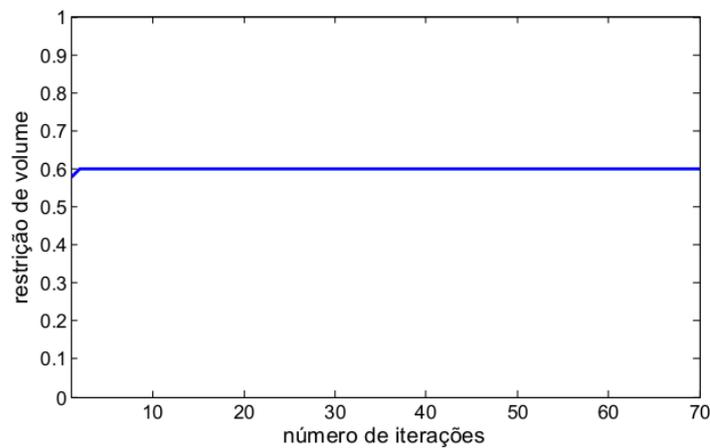


Figura 49: Alterações no volume ao longo das iterações, referente a simulação 8.

A figura 50 ilustra os três primeiros modos de vibração da estrutura original e da estrutura otimizada.

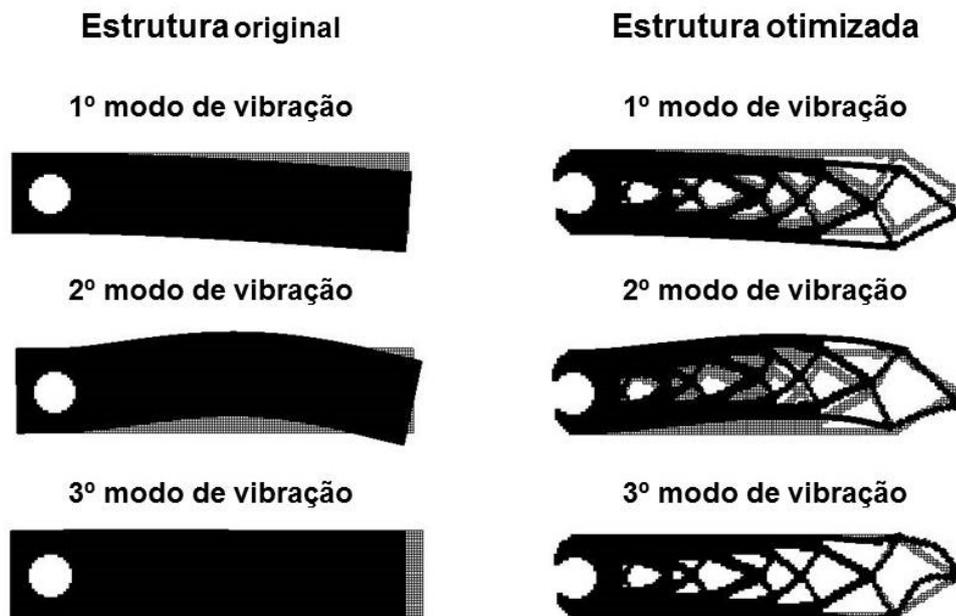


Figura 50: 1º, 2º e 3º modos de vibração da estrutura original (à esquerda) e da estrutura otimizada (à direita), referente a simulação 8.

Com base na figura 50 pode-se verificar que não ocorreu a inversão dos modos de vibração da estrutura após ser realizado o processo de OT.

5.6 Problema de minimização da flexibilidade dinâmica

Um braço robótico flexível é idealizado como uma viga 2D, cujo comprimento é igual a $1m$ e a altura é igual a $0,2m$. No lado esquerdo da viga é inserido um furo, de

forma circular, representando o eixo de rotação do braço e, no lado direito supôs-se a aplicação de uma força, conforme ilustrado na figura 51.

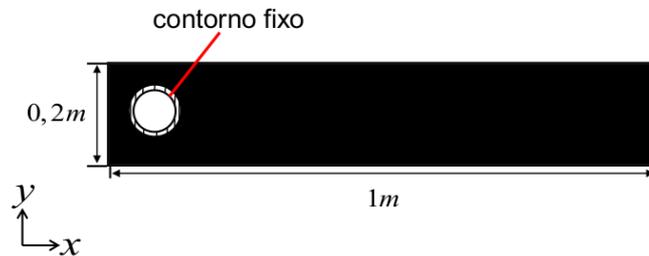


Figura 51: Idealização de um braço robótico flexível em 2D. Problema de minimização da flexibilidade dinâmica.

Com o objetivo de obter os resultados topológicos, que minimizem a flexibilidade dinâmica da viga, problema (91), sujeita a diferentes valores para a frequência de excitação, são realizadas três simulações, conforme descrito na tabela 6. Considera-se que $F_a = 1 \times 10^5 N$, $\eta = 0,6$, $p = 3,5$ e $r_{min} = 2$. Ainda, para este problema, são investigados o comportamento da primeira frequência natural da viga, o cumprimento da restrição de volume, o comportamento da flexibilidade da viga ao longo das iterações, o percentual de redução entre a flexibilidade inicial e a flexibilidade final.

Tabela 6: Modelo de elementos finitos correspondente as simulações 9, 10 e 11.

Simulação	9	10	11
Número de elementos	4.500	4.500	4.500
Malha	150x30	150x30	150x30
Número de nós	4.681	4.681	4.681
Número de graus de liberdade	9.362	9.362	9.362
Número de variáveis de projeto	4.500	4.500	4.500
Frequência de excitação (Hz)	0	50	110

Como a terceira frequência de excitação ($110Hz$), simulação 11, é maior que a primeira frequência natural da estrutura inicial ($98,81Hz$), durante o processo de otimização, a frequência natural pode alcançar a frequência de excitação, ocasionando um efeito de ressonância. Isso pode ser verificado no trabalho de MA; KIKUCHI; HAGIWARA (1993). Uma alternativa para evitar esse fenômeno é a utilização de uma técnica de continuação⁴. Este procedimento, segundo OLHOFF; DU (2014, 2005), gera uma série de topologias com valores crescentes tanto para a primeira frequência natural como para as rigidezes estática e dinâmica. Dessa forma, conforme explicam os autores, essa técnica evita automaticamente a ressonância e funciona bem, desde

⁴A técnica de continuação consiste em iniciar com um valor para frequência de excitação que é menor do que a primeira frequência natural da estrutura e ao longo das iterações aumentar esse valor até o valor desejado (OLHOFF; DU, 2014, 2005).

que a frequência de excitação seja menor do que o valor obtido com a maximização da primeira frequência natural⁵. Assim, na simulação 11, em que considera-se que a frequência de excitação é de $110Hz$, foi aplicado o procedimento descrito acima.

A figura 52 mostra o resultado topológico ótimo referente as simulações 9, 10 e 11. As topologias obtidas estão bem definidas e configurações de tabuleiro de xadrez não interferiram nos resultados.

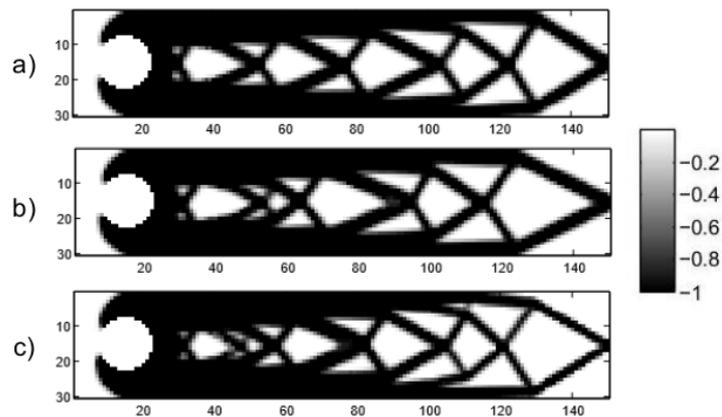


Figura 52: Resultados topológicos. a) Simulação 9 correspondente a uma frequência de excitação de $0Hz$. b) Simulação 10 correspondente a uma frequência de excitação de $50Hz$. c) Simulação 11 correspondente a uma frequência de excitação de $110Hz$.

Na simulação 9, figura 52a, tem-se uma estrutura estaticamente rígida⁶ ($\omega_c = 0$), à medida que o valor da frequência de excitação é alterada as topologias ótimas vão se modificando mas não apresentam diferenças acentuadas, o que indica que essas topologias ótimas são basicamente influenciadas pela distribuição espacial de amplitude do vetor de carregamento externo e assim, essas frequências de excitação apresentam pouca influência nessas topologias.

As figuras 53-55 ilustram o comportamento da flexibilidade da viga ao longo das iterações.

⁵A primeira frequência natural ótima, obtida neste caso, é de $417,74Hz$.

⁶Observe que o resultado topológico é diferente do problema estático de minimização da flexibilidade. Diferentes escolhas para a função objetivo irão alterar as aproximações feitas durante a modelagem e, assim, diferentes resultados são esperados (SEIFRIED; MOGHADASI; HELD, 2015).

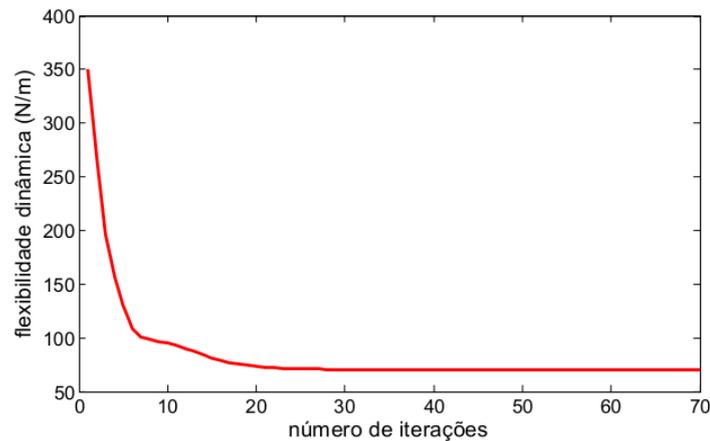


Figura 53: Flexibilidade dinâmica da viga ao longo das iterações, referente a simulação 9, correspondente a uma frequência de excitação de $0Hz$.

Na simulação 9, figura 53, o valor da flexibilidade na primeira iteração é igual a $350,76N/m$ e ao final do processo esse valor passa a corresponder a $70,26N/m$, isto indica que houve uma redução de aproximadamente $79,97\%$ no valor da flexibilidade da viga durante o processo de OT. Em torno da vigésima oitava iteração o valor da flexibilidade se estabiliza.

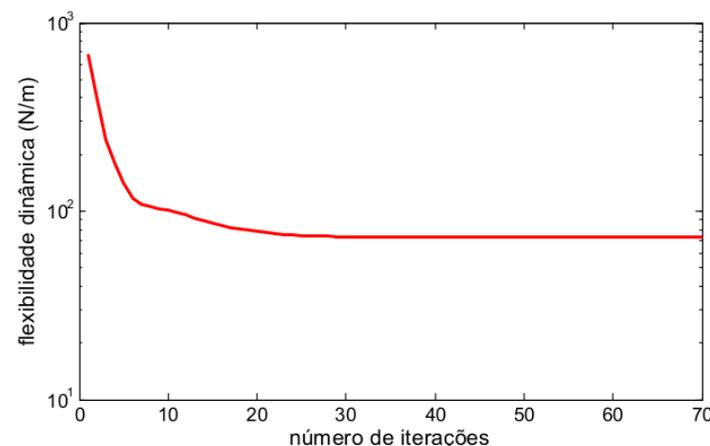


Figura 54: Flexibilidade dinâmica da viga ao longo das iterações, referente a simulação 10, correspondente a uma frequência de excitação de $50Hz$.

Na simulação 10, figura 54, o valor da flexibilidade na primeira iteração é igual a $684,21N/m$ e ao final do processo esse valor passa a corresponder a $72,68N/m$, isto indica que houve uma redução de aproximadamente $89,38\%$ no valor da flexibilidade da viga durante o processo de OT. Em torno da vigésima oitava iteração o valor da flexibilidade se estabiliza.

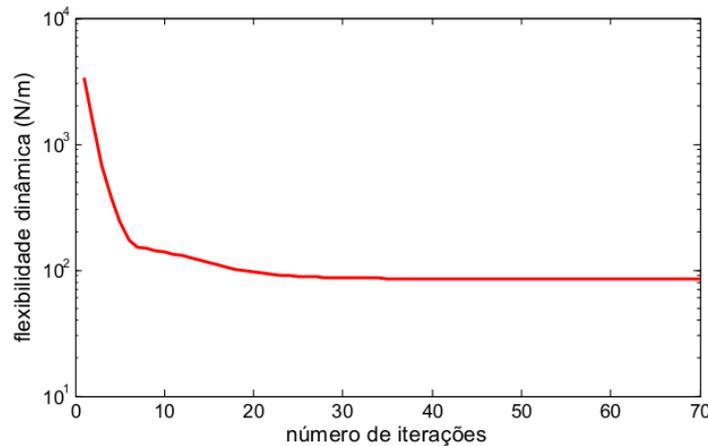


Figura 55: Flexibilidade dinâmica da viga ao longo das iterações, referente a simulação 11, correspondente a uma frequência de excitação de $110Hz$.

Na simulação 11, figura 55, o valor da flexibilidade na primeira iteração é igual a $3.379,28N/m$ e ao final do processo esse valor passa a corresponder a $84,96N/m$, isto indica que houve uma redução de aproximadamente $97,49\%$ no valor da flexibilidade da viga durante o processo de OT. Em torno da trigésima quarta iteração o valor da flexibilidade se estabiliza.

As figuras 56-58 ilustram a alteração da primeira frequência natural da estrutura.

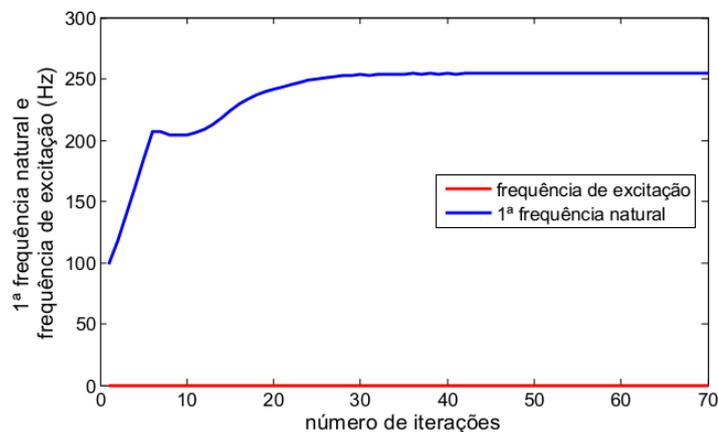


Figura 56: Comportamento da 1ª frequência natural ao longo das iterações, referente a simulação 9, correspondente a uma frequência de excitação de $0Hz$.

Na simulação 9, figura 56, que possui um valor de $\omega_c = 0$, a primeira frequência natural corresponde a $98,81Hz$ e no final do processo de otimização esse valor aumenta para $254,86Hz$, isto indica que houve um aumento de aproximadamente $157,93\%$ no valor da primeira frequência natural da viga durante o processo de OT.

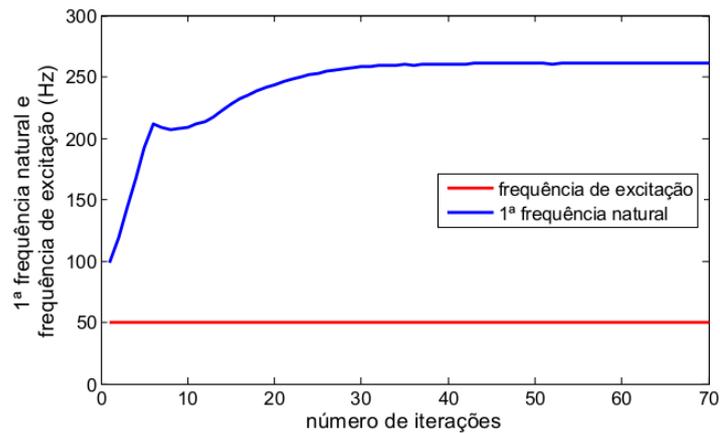


Figura 57: Comportamento da 1ª frequência natural ao longo das iterações, referente a simulação 10, correspondente a uma frequência de excitação de $50Hz$.

Na simulação 10, figura 57, que possui um valor de $\omega_c = 50Hz$, a primeira frequência natural corresponde a $98,81Hz$ e no final do processo de otimização esse valor aumenta para $261,40Hz$, isto indica que houve um aumento de aproximadamente 164,55% no valor da primeira frequência natural da viga durante o processo de OT.

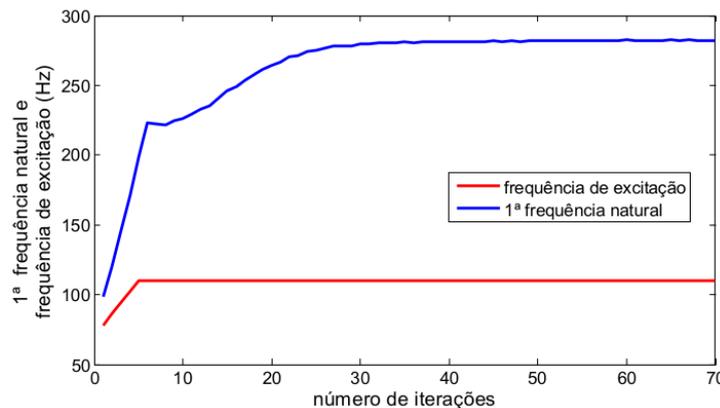


Figura 58: Comportamento da 1ª frequência natural ao longo das iterações, referente a simulação 11, correspondente a uma frequência de excitação de $110Hz$.

Na simulação 11, figura 58, que possui um valor de $\omega_c = 110Hz$, a primeira frequência natural corresponde a $98,81Hz$ e no final do processo de otimização esse valor aumenta para $282,04Hz$, isto indica que houve um aumento de aproximadamente 185,44% no valor da primeira frequência natural da viga durante o processo de OT. Observa-se, também, a frequência de excitação sendo alterada, seguindo o método de continuação⁷.

⁷Na simulação 11 foi utilizada uma técnica de continuação onde iniciou-se com $\omega_c = 78Hz$ e a partir

As figuras 59-61 ilustram o comportamento da restrição de volume ao longo das iterações. Nas simulações 9 e 10 a restrição de volume é cumprida a partir da segunda iteração e na simulação 11 a restrição de volume é cumprida a partir da terceira iteração.

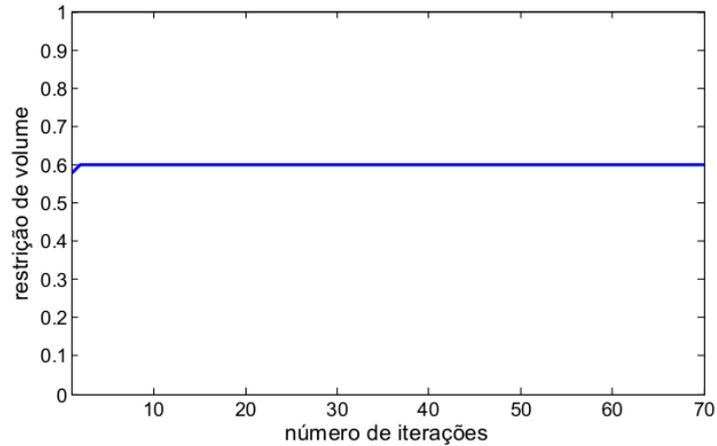


Figura 59: Alterações no volume ao longo das iterações, referente a simulação 9, correspondente a uma frequência de excitação de $0Hz$.

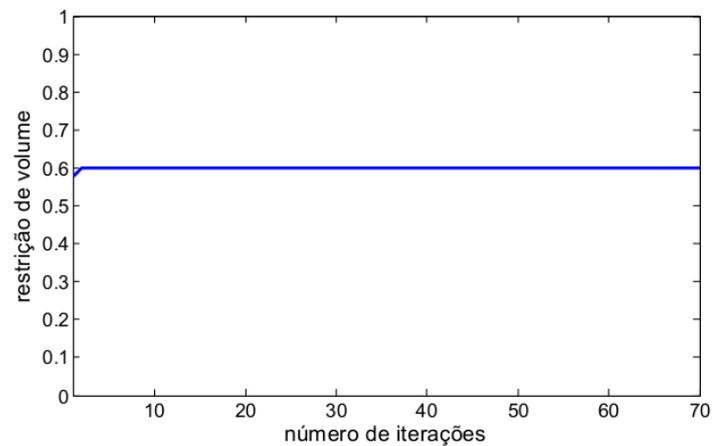


Figura 60: Alterações no volume ao longo das iterações, referente a simulação 10, correspondente a uma frequência de excitação de $50Hz$.

da sexta iteração já adotou-se $\omega_c = 110Hz$.

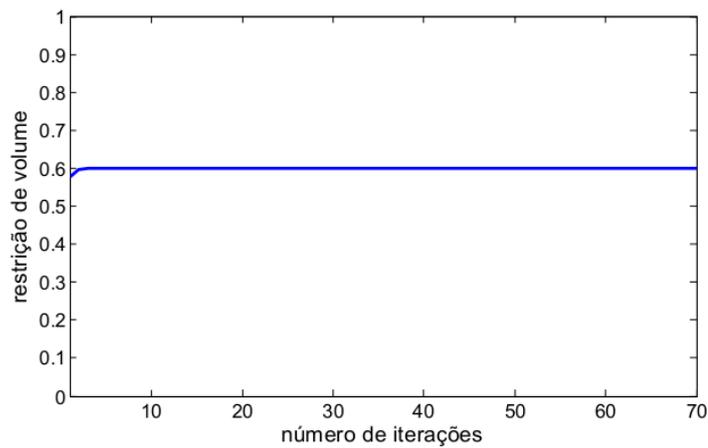


Figura 61: Alterações no volume ao longo das iterações, referente a simulação 11, correspondente a uma frequência de excitação de $110Hz$.

Na tabela 7 consta os resultados das três simulações realizadas, com referência aos resultados obtidos da flexibilidade e a alteração da primeira frequência natural.

Tabela 7: Resultados das simulações 9, 10 e 11.

Simulação	ω_c	Flexibilidade inicial (N/m)	Flexibilidade final (N/m)	f_1 inicial (Hz)	f_1 final (Hz)
9	0	350,76	70,26	98,81	254,86
10	50	684,21	72,68	98,81	261,40
11	110	3.379,28	84,96	98,81	282,04

A partir dos resultados obtidos, assim como previsto, o processo de otimização topológica afasta as frequências naturais da estrutura da frequência de excitação (JOG, 2002) isso evita a ressonância e reduz o nível de vibração da estrutura (OLHOFF; DU, 2005, 2014).

6 EXTENSÃO DA METODOLOGIA UTILIZADA NESTE TRABALHO A OUTRAS ESTRUTURAS

Com a finalidade de verificar a metodologia utilizada neste trabalho foram realizadas algumas simulações numéricas considerando domínios com características similares a estrutura utilizada nesta dissertação. A título de comparação foram utilizadas as topologias obtidas nos trabalhos de MIN; NISHIWAKI; KIKUCHI (2000) e MA; KIKUCHI; CHENG (1995). Nas simulações numéricas, a seguir, foram utilizados os dados fornecidos pelos autores citados, entretanto, mantém-se a essência do trabalho desenvolvido aqui com a utilização do modelo de material SIMP, do filtro de sensibilidade e as técnicas de atualização das variáveis de projeto utilizadas nesta dissertação.

6.1 Problema de otimização topológica de minimização da flexibilidade (2D) e (3D)

Para o problema de minimização da flexibilidade são feitas duas simulações baseadas nos dados utilizados no trabalho de MIN; NISHIWAKI; KIKUCHI (2000).

As propriedades do material base isotrópico são dadas conforme descrito na tabela 8.

Tabela 8: Propriedades do material base isotrópico utilizado por MIN; NISHIWAKI; KIKUCHI (2000).

Propriedade	Valor
Módulo de Young (E_0)	$100N/mm^2$
Coefficiente de Poisson (ν_0)	0,3
Densidade inicial (ρ_0)	$7,85 \times 10^{-6} kg/mm^3$

O primeiro domínio a ser otimizado corresponde a uma viga com uma extremidade fixa e sujeita a uma carga vertical no centro da outra extremidade, conforme ilustrado na figura 62. A viga possui comprimento igual a 16 e altura igual a 10. Esse domínio é discretizado em 1.440(48x30) elementos finitos de quatro pontos nodais. Busca-se uma topologia que contenha 40% do volume a estrutura original.



Figura 62: Domínio de projeto.

A figura 63 mostra os dois resultados topológicos obtidos.

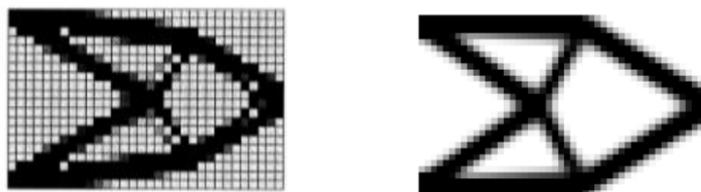


Figura 63: Resultados topológicos. a) MIN; NISHIWAKI; KIKUCHI (2000). b) Nesta dissertação.

O próximo domínio a ser otimizado corresponde a uma viga com uma extremidade fixa e sujeita a uma carga vertical no centro da outra extremidade, conforme descrito na figura 64. O domínio é discretizado em 960(15x8x8) elementos finitos de oito pontos nodais. Cada EF possui dimensões $0,2 \times 0,2 \times 0,2$. Busca-se uma topologia que contenha 40% do volume da estrutura original.

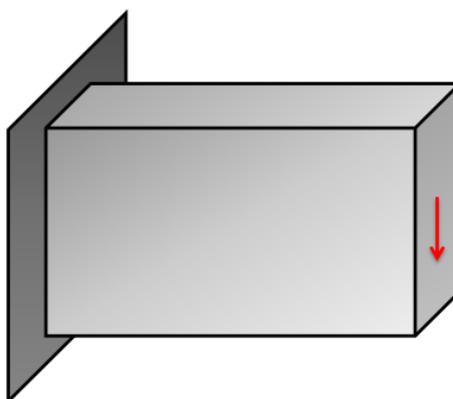


Figura 64: Domínio de projeto.

A figura 65 mostra os dois resultados topológicos obtidos.

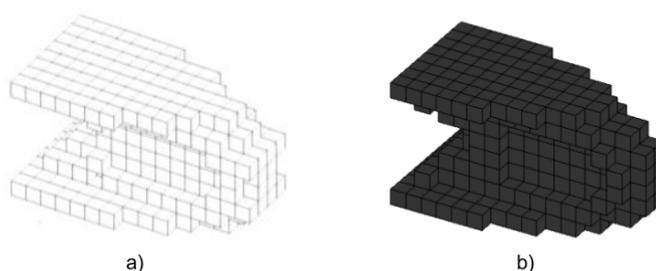


Figura 65: Resultados topológicos. a) MIN; NISHIWAKI; KIKUCHI (2000). b) Nesta dissertação.

Conforme pode ser observado, através dos resultados obtidos nas figuras 63 e 65, as topologias encontradas são muito parecidas as topologias obtidas no trabalho de MIN; NISHIWAKI; KIKUCHI (2000). Para o caso 2D é possível verificar que a topologia obtida tem uma melhor definição dos contornos, quando comparada a dos autores e, ainda, não apresentou padrões de tabuleiro de xadrez.

6.2 Problema de otimização topológica de maximização de frequência natural

Para o problema de maximização de frequência natural é feita uma simulação baseada nos dados utilizados no trabalho de MIN; NISHIWAKI; KIKUCHI (2000). As propriedades do material base isotrópico são as mesmas do problema anterior e são dadas conforme descrito na tabela 8.

O domínio a ser otimizado corresponde a uma viga com uma extremidade fixa, conforme ilustrado na figura 66, e cujo o comprimento igual a 16 e altura igual a 10. Esse domínio é discretizado em 1.440(48x30) elementos finitos de quatro pontos nodais. Busca-se uma topologia que contenha 40% do volume a estrutura original.



Figura 66: Domínio de projeto.

A figura 67 mostra os dois resultados topológicos obtidos.

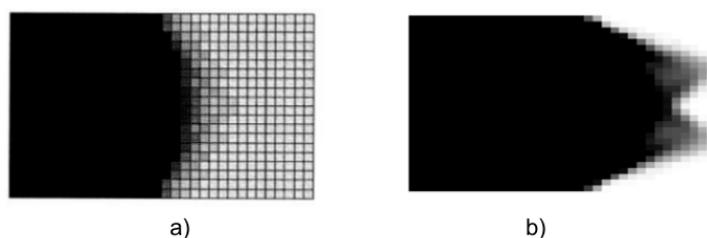


Figura 67: Resultados topológicos. a) MIN; NISHIWAKI; KIKUCHI (2000). b) Nesta dissertação.

Conforme pode ser observado, através dos resultados obtidos na figura 67, a topologia encontrada, utilizando a metodologia proposta nesta dissertação, é muito similar a topologia obtida no trabalho de MIN; NISHIWAKI; KIKUCHI (2000).

6.3 Problema de otimização topológica de minimização da flexibilidade dinâmica

Para o problema de minimização da flexibilidade dinâmica é feita uma simulação baseada nos dados utilizados no trabalho de MA; KIKUCHI; CHENG (1995). As propriedades do material base isotrópico são dadas conforme descrito na tabela 9.

Tabela 9: Propriedades do material base isotrópico utilizado por MA; KIKUCHI; CHENG (1995).

Propriedade	Valor
Módulo de Young (E_0)	$100kg/cm^2$
Coeficiente de Poisson (ν_0)	0,3
Densidade inicial (ρ_0)	$7,85 \times 10^{-6}kg/Kg/cm^2$

O domínio a ser otimizado corresponde a uma viga com uma extremidade fixa e sujeita a um carregamento harmônico na outra extremidade, conforme ilustrado na figura 68. A viga possui comprimento igual a $8cm$ e altura igual a $5cm$. Esse domínio é discretizado em 2.560(64x40) elementos finitos de quatro pontos nodais e está sujeito a uma frequência de excitação de $15Hz$. Busca-se uma topologia que contenha 36% do volume da estrutura original.



Figura 68: Domínio de projeto.

A figura 69 mostra os dois resultados topológicos obtidos.



Figura 69: Resultados topológicos. a) MA; KIKUCHI; CHENG (1995). b) Nesta dissertação.

Conforme pode ser observado, através dos resultados obtidos na figura 69, a topologia encontrada é muito parecida com a topologia obtida no trabalho de MA; KIKUCHI; CHENG (1995). Ainda, é possível verificar que a topologia obtida, utilizando a metodologia proposta nesta dissertação, tem uma melhor definição dos contornos, quando comparada a dos autores.

7 CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Eficiência e a diminuição no consumo de energia são questões relevantes no projeto de robôs industriais. Para reduzir o consumo de energia técnicas de otimização estrutural vem sendo aplicadas a fim de se obter uma estrutura mais leve. Entretanto, uma diminuição no peso, pode resultar em uma estrutura mais flexível e, assim, ser mais suscetível a deslocamentos e vibrações durante a execução de tarefas (SEIFRIED; MOGHADASI; HELD, 2015). Diante disso, a OT surgiu como uma alternativa para resolver complicações como a descrita anteriormente. Portanto, nesta dissertação, buscou-se aplicar a OT para encontrar a melhor distribuição de material, com restrição de volume, em um braço robótico flexível visando obter uma estrutura mais leve e que atenda o critério estabelecido no problema. Primeiramente foi considerado o caso estático com minimização da flexibilidade e posteriormente o estudo foi estendido para o caso dinâmico com a minimização da flexibilidade dinâmica e com a maximização de frequência natural da estrutura. Em todos os casos, idealizou-se o braço robótico como uma viga e utilizou-se como ferramenta de cálculo estrutural o MEF. Ainda, foi escolhido o modelo de material SIMP, que, além de não aumentar o número de variáveis de projeto dos problemas, colaborou nas suas resoluções conduzindo, assim, a bons resultados topológicos. Aliado ao SIMP foi utilizado o filtro de sensibilidade que evitou a dependência da malha, nas discretizações realizadas, e também colaborou para a não formação de tabuleiro de xadrez, evidenciando, assim, um desempenho eficiente na sua utilização. As variáveis de projeto para o caso estático foram atualizadas pelo CO e as variáveis de projeto para os casos dinâmicos foram atualizadas através da PLS.

Nas simulações numéricas realizadas para o problema de minimização da flexibilidade, obteve-se a estabilidade numérica da flexibilidade e a restrição de volume foi cumprida em todas as iterações. Dessa forma, foi possível gerar topologias ótimas, viáveis para os projetos desenvolvidos e, que estão de acordo com trabalhos similares desenvolvidos na literatura¹, como por exemplo os trabalhos de MIN; NISHIWAKI;

¹MIN; NISHIWAKI; KIKUCHI (2000) e BUHL; PEDERSEN; O. (2000) mostram em seus trabalhos

KIKUCHI (2000), BUHL; PEDERSEN; O. (2000) e SEIFRIED; MOGHADASI; HELD (2015), evidenciando, assim, bons resultados obtidos neste problema.

Na simulação numérica realizada para o problema de maximização de frequência natural obteve-se a estabilidade numérica da função objetivo e a restrição de volume foi cumprida já nas primeiras iterações. A mudança da função objetivo evitou a inversão de autovalores. Também, foi possível observar que os modos de vibração não se inverteram durante o processo de OT. Encontrou-se uma topologia ótima com um valor máximo para a primeira frequência natural² dentro de um volume específico. A topologia encontrada está de acordo com trabalhos similares desenvolvidos na literatura³, como por exemplo o trabalho de SEIFRIED; MOGHADASI; HELD (2015).

Nas simulações numéricas realizadas para o problema de minimização da flexibilidade dinâmica obteve-se a estabilidade numérica da flexibilidade e a restrição de volume foi cumprida já nas primeiras iterações. Assim como previsto, o processo de OT conduziu a primeira frequência natural da estrutura para valores que estão afastados da frequência de excitação, evitando a ressonância e reduzindo as amplitudes de vibração da estrutura. Os resultados mostram que as topologias ótimas são sensíveis às frequências de excitação (XUE et al., 2013), este fato implica que a topologia ótima no caso estático não é ótima no caso dinâmico (MA; KIKUCHI; CHENG, 1995) e diferentes frequências de excitação conduzem a diferentes resultados topológicos. A topologia encontrada está de acordo com trabalhos similares desenvolvidos na literatura⁴, como por exemplo o trabalho de MA; KIKUCHI; CHENG (1995).

Como pode ser visto, em geral, os resultados topológicos são muito parecidos, entretanto, é importante ressaltar que cada problema visa atender a um determinado critério de projeto, ou seja, obteve-se estruturas mais leves, que atendessem a diferentes finalidades.

A forma como foi desenvolvido este trabalho, com detalhamento dos cálculos no capítulo do MEF e da OT possibilitou uma compreensão clara de todo o processo até a obtenção das topologias ótimas, de forma que, entende-se que este trabalho também atendeu seu propósito didático, servindo com base para futuros estudantes que iniciem a pesquisa sobre o MEF e a OT.

Tomando por base o trabalho até aqui desenvolvido, almeja-se como trabalhos

a topologia ótima de uma viga engastada a esquerda e sujeita a uma força no centro da extremidade direita. SEIFRIED; MOGHADASI; HELD (2015) mostram o resultado topológico da minimização da flexibilidade de um manipulador flexível com dois braços. O resultado topológico obtido neste trabalho está de acordo com o resultado obtido pelos autores citados em uma das topologias.

²Conforme já comentado a primeira frequência natural é responsável pelos maiores deslocamentos.

³SEIFRIED; MOGHADASI; HELD (2015) mostram o resultado topológico da maximização da frequência fundamental de um manipulador flexível com dois braços. O resultado topológico obtido neste trabalho está de acordo com o resultado obtido pelos autores citados em uma das topologias.

⁴MA; KIKUCHI; CHENG (1995) mostram em seu trabalho o resultado topológico da minimização da flexibilidade dinâmica de uma viga engastada na extremidade esquerda por dois pontos e sujeita a uma excitação de frequência aplicada na metade da extremidade direita.

futuros:

- Estender o estudo dos problemas dinâmicos para estruturas tridimensionais;
- Estudar estruturas com geometria diversa;
- Atualizar as variáveis de projeto a partir de outros métodos;
- Empregar e investigar diferentes métodos de filtragem;
- Utilizar diferentes modelos de material;
- Trabalhar com problemas de OT multiobjetivos;
- Utilizar atuadores acoplados à estrutura, para o controle de vibrações;

REFERÊNCIAS

AAGE, N.; JORGENSEN, M. N.; ANDREASEN, C. S.; SIGMUND, O. Interactive Topology Optimization on Hand-Held Devices. **Structural Multidisciplinary Optimization**, [S.l.], v.47, p.1–6, 2013.

AKIN, J. E. **Finite Element Analysis with Error Estimators. An Introduction to the FEM and Adaptive Error Analysis for Engineering Students**. Oxford: Elsevier Butterworth-Heinemann, 2005.

ANANTHASURESH, G. K.; KOTA, S.; GIANCHANDANI, Y. A Methodical Approach to the Synthesis of Compliant Micromechanisms. **Appears in the Technical Digest**, [S.l.], p.189–192, 1994.

ANDREASSEN, E.; CLAUSEN, A.; SCHEVENELS, M.; LAZAROV, B. S.; SIGMUND, O. Efficient Topology Optimization in Matlab Using 88 Lines of Code. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, [S.l.], v.43, p.1–16, 2011.

BECKER, E. B.; CAREY, G. F.; ODEN, J. T. **Finite Elements: An Introduction**. v1. New Jersey: Prentice-Hall., Englewood Cliffs, 1981.

BECKERS, M. Topology Optimization Using a Dual Method with Discrete Variables. **Structural Optimization**, [S.l.], v.17, p.14–24, 1999.

BELBLIDIA, F.; BULMAN, S. Constrained Adaptive Topology Optimization for Vibrating Shell Structures. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, [S.l.], v.22, p.167–176, 2001.

BENDSOE, M. P. **Optimization of Structural Topology, Shape and Material**. Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 1995.

BENDSOE, M. P.; DIAZ, A.; KIKUCHI, N. Topology and Generalized Layout Optimization of Structures,. **Topology Design of Structures**, [S.l.], v.227, p.159–205, 1993.

BENDSOE, M. P.; KIKUCHI, N. Generating Optimal Topologies in Structural Design Using a Homogenization Method. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, [S.l.], v.71, p.197–224, 1988.

BENDSOE, M. P.; SIGMUND, O. Material Interpolation Schemes in Topology Optimization. **Archive of Applied Mechanics**, [S.l.], v.69, p.635–654, 1999.

BENDSOE, M. P.; SIGMUND, O. **Topology optimization: Theory, Methods and Applications**. Berlin ; Heidelberg ; New York ; Barcelona ; Hong Kong ; London ; Milan ; Paris ; Tokyo: Springer, 2003.

BOTTEGA, V.; MOLTER, A.; FONSECA, J. S. O.; PERGHER, R. Vibration Control of Manipulators with Flexible Nonprismatic Links Using Piezoelectric Actuators and Sensors. **Mathematical Problems in Engineering**, [S.l.], v.2009, 2009.

BUHL, T.; PEDERSEN, C. B. W.; O., S. Stiffness Design of Geometrically Nonlinear Structures using Topology Optimization. **Structural Multidisciplinary Optimization**, [S.l.], v.19, p.93–104, 2000.

CHENG, K. T.; OLHOFF, N. An Investigation Concerning Optimal Design of Solid Elastic Plates. **International Journal of Solids and Structures**, [S.l.], v.17, p.305–323, 1981.

CHENG, K. T.; OLHOFF, N. Regularized Formulation for Optimal Design of Axisymmetric Plates. **International Journal of Solids and Structures**, [S.l.], v.18, p.153–169, 1982.

CHRISTENSEN, P. W.; KLARBRING, A. **An Introduction to Structural Optimization**. Linköping: Springer Science + Business Media B.V., 2009.

COOK, R. D.; MALKUS, D. S.; PLESHA, M. E. **Concepts and Applications of Finite Element Analysis. 3th ed.** New York: John Wiley & Sons, Inc., 1989.

COOK, R. D.; MALKUS, D. S.; PLESHA, M. E.; WITT, R. J. **Concepts and Applications of Finite Element Analysis. 4th ed.** EUA: John Wiley & Sons, Inc., 2002.

DÍAZ, A. R.; KIKUCHI, N. Solutions to Shape and Topology Eigenvalue Optimization Problems Using a Homogenization Method. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, [S.l.], v.35, p.1487–1502, 1992.

DÍAZ, A.; SIGMUND, O. Checkerboard Patterns in Layout Optimization. **Structural Optimization**, [S.l.], v.10, p.40–45, 1995.

DU, J.; OLHOFF, N. Topological Design of Freely Vibrating Continuum Structures for Maximum Values of Simple and Multiple Eigenfrequencies and Frequency Gaps. **Structural Multidisciplinary Optimization**, [S.l.], v.34, p.91–110, 2007.

GOLDBARG, M. C.; LUNA, H. P. **Otimização Combinatória e Programação Linear: Modelos e Algoritmos**. Rio de Janeiro: Campus, 2000.

GROENWOLD, A. A.; ETMAN, L. F. P. A Quadratic Approximation for Structural Topology Optimization. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, [S.l.], v.82, p.505–524, 2010.

GUILHERME, C. E. M. **Otimização Topológica e Cálculo do Gradiente de Forma para Estruturas Submetidas à Restrição de Fadiga**. 2006. Tese de Doutorado — PROMEC/UFRGS, Porto Alegre/RS.

INTERNATIONAL Federation of Robotics. Online; acessado em 06-julho-2015, Disponível em: <<http://www.ifr.org/>>.

JOG, C. S. Topology Design of Structures Subjected to Periodic Loading. **Jornal of Sound and Vibration**, [S.l.], v.253, p.687–709, 2002.

JOG, C. S.; HABER, R. B. Stability of Finite Element Models for Distributed-Parameter Optimization and Topology Design. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, [S.l.], v.130, p.203–226, 1996.

JORGENSEN, M. N.; AAGE, N.; CHRISTIANSEN A. N. ANDIGARASHI, T.; BAERENTZEN, J. .; SIGMUND, O. 3D Interactive Topology Optimization on Hand-Held Devices. **Structural Multidisciplinary Optimization**, [S.l.], v.51, p.1385–1391, 2015.

KIYONO, C. Y. **Método de Otimização Topológica Aplicado ao Projeto de Sonotrodos para Transdutores Piezelétricos**. 2008. Dissertação de Mestrado — Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo/SP.

KOHN, R. V.; STRANG, G. Optimal-Design and Relaxation of Variational Problems, I. **Communications on Pure and Applied Mathematics**, [S.l.], v.22, p.183–188, 1986.

LIU, H.; ZHANG, W.; GAO, T. A Comparative Study of Dynamic Analysis Methods for Structural Topology Optimization under Harmonic Force Excitations. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, [S.l.], v.51, p.1321–1333, 2015.

LIU, K.; TOVAR, A. An Efficient 3D Topology Optimization Code Written in Matlab. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, [S.l.], v.50, p.1175–1196, 2014.

MA, Z.-D.; KIKUCHI, N.; CHENG, H.-C. Topological Design for Vibrating Structures. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, [S.l.], v.121, p.259–280, 1995.

MA, Z. D.; KIKUCHI, N.; HAGIWARA, I. Structural Topology and Shape Optimization for a Frequency Response Problem. **Computational Mechanics**, [S.l.], v.13, p.157–174, 1993.

MICHELL, J. C. The Limits of Economy of Material in Framed Structures. **Philosophical Magazine, Series 6**, [S.l.], v.8, p.589–597, 1904.

MIN, S.; NISHIWAKI, S.; KIKUCHI, N. Unified Topology Design of Static and Vibrating Structures using Multiobjective Optimization. **Computers and Structures**, [S.l.], v.75, p.93–116, 2000.

MOLTER, A.; SILVEIRA, O. A. A.; BOTTEGA, V.; FONSECA, J. S. O. Integrated Topology Optimization and Optimal Control for Vibration Suppression in Structural Design. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, [S.l.], v.47, p.389–397, 2013.

NISHIWAKI, S.; FRECKER, M. I.; MIN, S.; KIKUCHI, N. Topology Optimization of Compliant Mechanisms Using the Homogenization Method. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, [S.l.], v.42, p.535–559, 1998.

OLHOFF, N. Multicriterion Structural Optimization via Bound Formulation and Mathematical Programming. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, [S.l.], v.1, p.11–17, 1989.

OLHOFF, N.; BENDSOE, M. P.; RASMUSSEN, J. On CAD-Integrated Structural Topology and Design Optimization. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, [S.l.], v.89, p.259–279, 1991.

OLHOFF, N.; DU, J. Topological Design of Continuum Structures Subjected to Forced Vibration. In: VI WORLD CONGRESSES OF STRUCTURAL AND MULTIDISCIPLINARY OPTIMIZATION, 2005. **Anais...** [S.l.: s.n.], 2005.

OLHOFF, N.; DU, J. Topological Design for Minimum Dynamic Compliance of Structures under Forced Vibration. In: **Topology Optimization in Structural and Continuum Mechanics**. [S.l.: s.n.], 2014. v.549, p.325–339.

OVERTON, M. L. On Minimizing the Maximum Eigenvalue of a Symmetric Matrix. **SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications**, [S.l.], v.9, p.256–268, 1988.

PEDERSEN, N. L. Maximization of Eigenvalues using Topology Optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, [S.l.], v.20, p.2–11, 2000.

PORTO, E. C. B. **Método da Homogeneização Aplicado à Otimização Estrutural Topológica**. 2006. Dissertação de Mestrado — Universidade Estadual de Campinas, Campinas/SP.

RAO, S. S. **The Finite Element Method in Engineering**. 4th ed. EUA: Elsevier Butterworth-Heinemann, 2005.

RAO, S. S. **Vibrações Mecânicas**. 4th ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2008.

RAO, S. S. **Engineering Optimization Theory and Practice**. 4th ed. New Jersey: John Wiley & Sons, Inc., 2009.

ROSÁRIO, J. M. **Robótica Industrial I Modelagem, Utilização e Programação**. São Paulo: Editora Baraúna SE Ltda., 2010.

ROZVANY, G. I. N.; ONG, T. G.; SZETO, W. T.; SANDLER, R.; OLHOFF, N.; BEND-SOE, M. P. Least-Weight Design of Perforated Elastic Plates I. **International Journal of Solids and Structures**, [S.l.], v.23, p.521–536, 1987.

SADD, M. H. **Elasticity Theory, Applications, and Numerics**. EUA: Elsevier Inc., 2005.

SEARCH Engineering Material Property Value. Online; accessed em 14-junho-2015.

SEIFRIED, R.; MOGHADASI, A.; HELD, A. Analysis of Design Uncertainties in Structurally Optimized Lightweight Machines. **Procedia IUTAM**, [S.l.], v.13, p.71–81, 2015.

SIENZ, J.; HINTON, E. Reliable Structural Optimization with Error Estimation, Adaptivity and Robust Sensitivity Analysis. **Computers and Structures**, [S.l.], v.64, p.31–63, 1997.

SIGMUND, O. A 99 Line Topology Optimization Code Written in Matlab. **Structural Multidisciplinary Optimization**, [S.l.], v.21, p.120–127, 2001.

SIGMUND, O. Morphology-Based Black and White Filters for Topology Optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, [S.l.], v.33, p.401–424, 2007.

SIGMUND, O.; PETERSSON, J. Numerical Instabilities in Topology Optimization: a Survey on Procedures Dealing with Checkerboards, Mesh-Dependencies and Local Minima. **Structural Optimization**, [S.l.], v.16, p.68–75, 1998.

SILVA, E. C. N. **Otimização Aplicada ao Projeto de Sistemas Mecânicos**. [S.l.]: Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 2003. Online; accessed em 16-junho-2015.

SILVEIRA, O. A. A. da. **Projeto Simultâneo de Otimização Topológica e Controle para Redução de Vibrações Utilizando Material Piezelétrico**. 2012. Tese de Doutorado — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre/RS.

SORIANO, H. L. **Elementos Finitos - Formulação e Aplicação na Estática e Dinâmica das Estruturas**. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda., 2009.

SURESH, K. A 199-line Matlab Code for Pareto-Optimal Tracing in Topology Optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, [S.l.], v.42, p.665–679, 2010.

TANG, P.-S.; CHANG, K.-H. Integration of Topology and Shape Optimization for Design of Structural Components. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, [S.I.], v.22, p.65–82, 2001.

TAVAKOLI, R.; MOHSENI, S. M. Alternating Active-Phase Algorithm For Multimaterial Topology Optimization Problems A 115-Line Matlab Implementation. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, [S.I.], v.49, p.621–642, 2014.

THOMSEN, J. Topology Optimization of Structures Composed of One or Two Materials. **Structural Optimization**, [S.I.], v.5, p.108–115, 1992.

TIMOSHENKO, S.; GOODIER, J. N. **Theory of Elasticity**. EUA: McGraw-Hill Book Company Inc., 1951.

XUE, X.; LI, G.; XIONG, Y.; GONG, J. Power Flow Response Based Dynamic Topology Optimization of Bi-material Plate Structures. **Chinese Journal of Mechanical Engineering**, [S.I.], v.26, p.620–628, 2013.

YANG, X. S. **Engineering Optimization: An Introduction with Metaheuristic Applications**. New Jersey: John Wiley & Sons, Inc., 2010.

ZHU, J.; ZHANG, W.; QIU, K. Maximization of Structural Natural Frequency with Optimal Support Layout. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, [S.I.], v.31, p.462–469, 2006.

ANEXO A VIBRAÇÃO EXCITADA HARMONICAMENTE EM UMA ESTRUTURA SEM AMORTECIMENTO

Considera-se o comportamento dinâmico de uma estrutura sem amortecimento e sujeita a vibrações causadas por um determinado tipo de excitação, pela seguinte equação, utilizando o MEF:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{U}(t) = \mathbf{F}(t). \quad (134)$$

Para o problema de resposta a frequência, assumindo que a excitação seja harmônica, ou seja, $\mathbf{F}(t) = \mathbf{F}_a \cos(\omega_c t)$, a equação (134) pode ser escrita como:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{U}(t) = \mathbf{F}_a \cos(\omega_c t). \quad (135)$$

A resposta em regime permanente¹ da equação (135) é dada por:

$$\mathbf{U}(t) = \mathbf{U}_a \cos(\omega_c t), \quad (136)$$

Substituindo a solução (136) na equação (135), obtém-se:

$$(\mathbf{K} - \omega_c^2 \mathbf{M}) \mathbf{U}_a \cos(\omega_c t) = \mathbf{F}_a \cos(\omega_c t) \Rightarrow (\mathbf{K} - \omega_c^2 \mathbf{M}) \mathbf{U}_a = \mathbf{F}_a \quad (137)$$

e denotando-se:

$$\mathbf{K}_d = (\mathbf{K} - \omega_c^2 \mathbf{M}), \quad (138)$$

chega-se a equação:

$$\mathbf{K}_d \mathbf{U}_a = \mathbf{F}_a. \quad (139)$$

Observa-se que a solução da equação (139) quando substituída na equação (136) fornece a resposta do vetor de deslocamento em regime permanente, não havendo,

¹A solução particular da equação (135) representa a vibração da estrutura em regime permanente. A consideração da resposta em regime permanente se justifica pelo fato de que a partir de um determinado momento a solução da equação (135) (dada pela soma da solução homogênea com a solução particular) se reduz, somente, a solução particular (RAO, 2008).

assim, a necessidade do cálculo das frequências naturais e dos modos naturais de vibração (SORIANO, 2009).