

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PELOTAS
Instituto de Física e Matemática
Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática



Dissertação

Solução da Equação de Transporte de Nêutrons para um Cilindro de Comprimento Infinito com Espalhamento Anisotrópico

Luana Lazzari

Pelotas, 2016

Luana Lazzari

Solução da Equação de Transporte de Nêutrons para um Cilindro de Comprimento Infinito com Espalhamento Anisotrópico

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática da Universidade Federal de Pelotas, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Modelagem Matemática

Orientador: Prof. Dr. Glênio Aguiar Gonçalves
Coorientador: Prof. Dr. Claudio Zen Petersen

Pelotas, 2016

Dados de catalogação na fonte:
Ubirajara Buddin Cruz – CRB 10/901
Biblioteca de Ciência & Tecnologia - UFPel

L432s

Lazzari, Luana

Solução da equação de transporte de nêutrons para um cilindro de comprimento infinito com espalhamento anisotrópico / Luana Lazzari. – 84f. : il. – Dissertação (Mestrado). Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática. Universidade Federal de Pelotas. Instituto de Física e Matemática, 2015. – Orientador Glênio Aguiar Gonçalves ; coordenador Claudio Zen Petersen.

1.Equação de transporte de nêutrons. 2.Geometria cilíndrica. 3.Espalhamento anisotrópico. I.Gonçalves, Glênio Aguiar. II.Petersen, Claudio Zen. III.Título.

CDD: 516.04

Luana Lazzari

Solução da Equação de Transporte de Nêutrons para um Cilindro de Comprimento Infinito com Espalhamento Anisotrópico

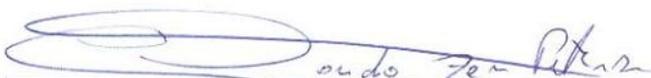
Dissertação aprovada, como requisito parcial, para obtenção do grau de Mestre em Modelagem Matemática, Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática, Instituto de Física e Matemática, Universidade Federal de Pelotas.

Data da Defesa: 16 de março de 2016

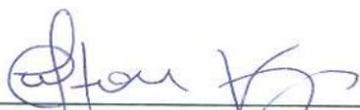
Banca examinadora:



Prof. Dr. Glênio Aguiar Gonçalves (Orientador)
Doutor em Engenharia Mecânica pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Brasil



Prof. Dr. Claudio Zen Petersen (Co-Orientador)
Doutor em Engenharia Mecânica pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Brasil



Prof. Dr. Welton Alves de Mehezes
Doutor em Modelagem Computacional pela Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Brasil



Prof. Dr. Rogério Costa Campos
Doutor em Sensoriamento Remoto pelo Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, Brasil



Prof. Dr. Rubem Mário Figueiró Vargas
Doutor em Engenharia de Minas, Metalúrgica e de Minas pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Brasil

AGRADECIMENTOS

A minha família e ao meu namorado Marcos que sempre me apoiaram e incentivaram.

Aos meus orientadores, Prof. Dr. Glênio Aguiar Gonçalves e Prof. Dr. Claudio Zen Petersen pela oportunidade de realização deste trabalho, orientação e ensinamentos.

A FAPERGS (Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio Grande do Sul) pelo suporte financeiro.

RESUMO

LAZZARI, Luana. **Solução da Equação de Transporte de Nêutrons para um Cilindro de Comprimento Infinito com Espalhamento Anisotrópico**. 2016. 83 f. Dissertação (Mestrado em Modelagem Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática, Instituto de Física e Matemática, Universidade Federal de Pelotas, Pelotas, 2016.

No presente trabalho determina-se a solução analítica para a equação de transporte de nêutrons bidimensional em geometria cartesiana por meio do método de decomposição angular. Este método consiste em derivar a equação um número suficiente de vezes com relação a variável angular até obter uma equação diferencial. Após, resolve-se esta equação e sua solução é substituída no problema original. Assim, a solução obtida para a equação de transporte é composta por uma combinação linear de autofunções singulares, associadas a um conjunto de autovalores, análogas aos determinados por Case para o problema em geometria cartesiana unidimensional. Além disso, apresenta-se a solução analítica para a equação de transporte de nêutrons bidimensional em geometria cilíndrica para os casos com espalhamento isotrópico e espalhamento linearmente anisotrópico. Resolve-se o problema isotrópico tomando como ponto de partida a solução da equação em geometria cartesiana, após fazer algumas mudanças de coordenadas. Novamente, encontra-se a mesma solução obtida por Case para os problemas em geometria cartesiana. Para o caso com anisotropia linear a solução é determinada a partir do resultado do problema em geometria cilíndrica com espalhamento isotrópico. Por fim, propõem-se adicionar os termos de anisotropia linear e quadrática à equação desenvolvida por Mitsis para um cilindro infinito com simetria azimutal e espalhamento isotrópico considerando os termos de fonte externa isotrópica e fluxo incidente constante no contorno. Para a construção destes termos de espalhamento considera-se que a solução destes problemas são compostas pelos mesmos autovalores determinados por Case para o problema em geometria cartesiana unidimensional com mesmo grau de anisotropia. Soluciona-se estas equações por meio do método HTS_N , o qual consiste na aplicação do método S_N para a discretização da variável angular juntamente com a transformada de *Hankel* de ordem zero e compara-se as soluções de cada equação com problema em geometria cartesiana com o mesmo grau de anisotropia.

Palavras-chave: Equação de transporte de nêutrons, geometria cilíndrica, espalhamento anisotrópico.

ABSTRACT

LAZZARI, Luana. **Solution of the neutrons transport equation to an infinitely long cylinder with anisotropic scattering**. 2016. 83 f. Dissertação (Mestrado em Modelagem Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática, Instituto de Física e Matemática, Universidade Federal de Pelotas, Pelotas, 2016.

In the present work is determined the analytical solution to the neutron transport equation in two-dimensional slab geometry by angular decomposition method. This method consists in derive the equation several times with respect to angular variable for get a differential equation. After this equation is solved and its solution is replaced in original equation. Thus, the solution obtained to the neutron transport equation is composed by a linear combination of singular eigenfunctions associated the a set of eigenvalues analogous to determined by Case to the one-dimensional slab geometry problem. Moreover is presented the analytical solution to the neutrons transport equation in two-dimensional cylindrical geometry in the cases with scattering isotropic and linear anisotropic scattering. The isotropic problem is solved taking as starting point the solution the equation in slab geometry after making some changes of coordinates. Again is found the same solution obtained by Case to the problem in one-dimensional slab geometry. For the case with linear anisotropy the solution is determined from the problem in cylindrical geometry with scattering isotropic. Lastly is proposed to add the linear and quadratic anisotropy terms to the equation developed by Mitsis for an infinitely long cylinder with azimuthal symmetry and isotropic scattering considering the isotropic internal source and incident neutron flux for the boundary. For the construction of this terms is considered that the solution of this problem is composed by same eigenvalues determined by Case to the one-dimensional slab geometry problem with equivalent degree of anisotropy. This equations are solved by HTS_N method which consists in to apply the S_N method to the discretization of the angular variable together with the zero order Hankel transformation. The solution found are compared with problem in slab geometry with same degree of anisotropy.

Keywords: Neutron transport equation, cylindrical geometry, anisotropic scattering.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Volume arbitrário V	19
Figura 2	Circunferência que contém o inverso dos autovalores.	35

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	Fluxo escalar para os problemas em geometria cilíndrica e cartesiana com $c = 0,99$, $cf_1 = 0,8$, $F = 1/4\pi$ e $Q = 0$	62
Tabela 2	Fluxo escalar para os problemas em geometria cilíndrica e cartesiana com $c = 0,99$, $cf_1 = 0,8$, $F = 0$ e $Q = 1$	63
Tabela 3	Fluxo escalar para os problemas em geometria cilíndrica e cartesiana com $c = 0,7$, $cf_1 = 0,6$, $F = 1/4\pi$ e $Q = 0$	63
Tabela 4	Fluxo escalar para os problemas em geometria cilíndrica e cartesiana com $c = 0,7$, $cf_1 = 0,6$, $F = 0$ e $Q = 1$	64
Tabela 5	Fluxo escalar para os problemas em geometria cilíndrica e cartesiana com $c = 0,8$, $cf_1 = 0,6$, $cf_2 = 0,5$, $F = 1/4\pi$ e $Q = 0$	71
Tabela 6	Fluxo escalar para os problemas em geometria cilíndrica e cartesiana com $c = 0,8$, $cf_1 = 0$, $cf_2 = 0,5$, $F = 1/4\pi$ e $Q = 0$	71
Tabela 7	Fluxo escalar para os problemas em geometria cilíndrica e cartesiana com $c = 0,9$, $cf_1 = 0,8$, $cf_2 = 0,6$, $F = 0$ e $Q = 1$	72
Tabela 8	Fluxo escalar para os problemas em geometria cilíndrica e cartesiana com $c = 0,9$, $cf_1 = 0$, $cf_2 = 0,6$, $F = 0$ e $Q = 1$	72

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

P_N	Método de esféricos harmônicos
S_N	Método de ordenadas discretas
N	Ordem da quadratura gaussiana
HTS_N	Aplicação do método S_N com a transformada de <i>Hankel</i>
LTS_N	Aplicação do método S_N com a transformada de Laplace
$SGF - CN$	Método spectral Green's function - constant nodal
$SGF - LN$	Método spectral Green's function - linear nodal
ADO	Método analítico de ordenadas discretas
V	Volume arbitrário
dS	Elemento de área
S	Superfície do volume arbitrário
\vec{n}	Vetor unitário na direção de saída dos nêutrons do volume
$N(\vec{r}, \vec{\Omega}, E, t)$	Densidade angular de nêutrons [Nêutrons/cm ³]
\vec{r}	Vetor posição
$\vec{\Omega}$	Vetor direção
E	Variável energética
t	Variável temporal
$\psi(\vec{r}, \vec{\Omega}, E, t)$	Fluxo angular de nêutrons [Nêutrons/cm ² seg]
v	Velocidade escalar de propagação dos nêutrons
$Q(\vec{r}, \vec{\Omega}, E, t)$	Fonte externa de nêutrons
$j(\vec{r}, \vec{\Omega}, E, t)$	Corrente angular de nêutrons
$\Sigma(\vec{r}, E)$	Seção de choque macroscópica total [cm ⁻¹]
$f(\vec{r}; \vec{\Omega}', E' \rightarrow \vec{\Omega}, E)$	Função probabilidade
$\Sigma_n(\vec{r})$	Seção de choque macroscópica de espalhamento elástico [cm ⁻¹]
$\Sigma_{n'}(\vec{r})$	Seção de choque macroscópica de espalhamento inelástico [cm ⁻¹]
$\Sigma_f(\vec{r})$	Seção de choque macroscópica de fissão [cm ⁻¹]

$\psi(x, \mu)$	Fluxo angular de nêutrons do problema unidimensional
μ	Variável angular da direção de propagação do fluxo
x	Coordenada espacial
c	Número médio de nêutrons que emergem por colisão
ν	Autovalor unidimensional; autovalor bidimensional
$\phi_\nu(\mu)$	Autofunção da equação do transporte de nêutrons unidimensional
$\lambda(\nu)$	Função de dispersão
$\delta(\nu - \mu)$	Função delta de Dirac
ν_0	Autovalor assintótico
$\nu(\vec{r})$	Número de nêutrons emitidos por fissão
P_n	Polinômios de Legendre
f_n	Coeficientes da expansão
y	Coordenada espacial
z	Coordenada espacial
φ	Variável angular da direção de propagação do fluxo
ω	Autovalor associado a autofunção bidimensional
κ	Autovalor associado a autofunção bidimensional
θ	Variável angular da direção de propagação do fluxo
D	Coeficiente de difusão
χ	Variável angular da direção de propagação do fluxo
I_0	Função de Bessel modificada do primeiro tipo e ordem zero
$\Phi(r, \mu)$	Pseudofluxo angular
r	Variável radial
μ	Pseudovariável angular
cf_1	Seção de choque de espalhamento do termo de anisotropia linear
$P_l(\mu)$	Polinômios de Legendre
f_l	Coeficientes de expansão
$Q(r)$	Fonte externa isotrópica
F	Fluxo incidente constante no contorno
R	Raio do cilindro
μ_i	Raízes positivas do polinômio de Legendre de ordem N
ω_i	Pesos gerados pela quadratura Gauss-Legendre
$S(r)$	$Q(r) - F$
ξ	Variável característica da transformada de <i>Hankel</i>

$\bar{\Phi}_j(\xi)$	Transformada de <i>Hankel</i> de $\Phi_j(r)$
I	Matriz identidade
A	Matriz de ordem $N/2 \times N/2$
a_{ij}	Elementos da matriz A
U	Matriz de autovetores da matriz A
D	Matriz diagonal dos autovalores da matriz A
u_{jk}	Elementos da matriz U
v_{ki}	Elementos da matriz U^{-1}
λ_k	Autovalores da matriz A
H_0^{-1}	Inversa da transformada de <i>Hankel</i> de ordem zero
K_0	Função de Bessel modificada do segundo tipo e ordem zero
K_1	Função de Bessel modificada do segundo tipo e ordem um
J_0	Função de Bessel do primeiro tipo e ordem zero
α_k	Raiz quadrada de λ_k
B	Matriz diagonal de coeficientes
C	Matriz diagonal de coeficientes
L	Comprimento da placa
λ	Livre caminho médio [cm]
cf_2	Seção de choque do termo de anisotropia quadrática

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	14
2	EQUAÇÃO DE TRANSPORTE DE NÊUTRONS	19
2.1	Dedução da equação de transporte de nêutrons	19
3	MÉTODO DE EXPANSÃO EM AUTOFUNÇÕES SINGULARES OU MÉTODO DE CASE	24
3.1	Descrição do método de Case	24
4	SOLUÇÃO ANALÍTICA DA EQUAÇÃO DE TRANSPORTE DE NÊUTRONS EM GEOMETRIA CARTESIANA BIDIMENSIONAL	28
4.1	Formulação da equação de transporte de nêutrons em geometria cartesiana bidimensional	28
4.2	Desenvolvimento da solução analítica da equação de transporte de nêutrons em geometria cartesiana bidimensional	32
4.3	Solução da equação de difusão em geometria cartesiana bidimensional	37
5	SOLUÇÃO ANALÍTICA DA EQUAÇÃO DE TRANSPORTE DE NÊUTRONS EM GEOMETRIA CILÍNDRICA BIDIMENSIONAL	39
5.1	Equação de transporte de nêutrons em geometria cilíndrica bidimensional com espalhamento isotrópico	40
5.1.1	Formulação da equação de transporte de nêutrons em geometria cilíndrica bidimensional com espalhamento isotrópico	40
5.1.2	Desenvolvimento da solução analítica da equação de transporte de nêutrons em geometria cilíndrica bidimensional com espalhamento isotrópico	40
5.1.3	Solução da equação de difusão em geometria cilíndrica bidimensional	44
5.1.4	Solução para fluxo escalar em um cilindro infinito proposta por Mitsis	44
5.2	Solução analítica da equação de transporte de nêutrons bidimensional em geometria cilíndrica com anisotropia linear	45
5.2.1	Formulação da equação de transporte de nêutrons bidimensional em geometria cilíndrica com anisotropia linear	45
5.2.2	Desenvolvimento da solução analítica da equação de transporte de nêutrons bidimensional em geometria cilíndrica com anisotropia linear	47
6	EQUAÇÃO DE TRANSPORTE DE NÊUTRONS PARA UM CILINDRO DE COMPRIMENTO INFINITO COM ESPALHAMENTO ANISOTRÓPICO	50
6.1	Equação de transporte de nêutrons desenvolvida por Mitsis para um cilindro infinito	50
6.2	Equação desenvolvida por Mitsis com anisotropia linear	51

6.2.1	Formulação do termo de anisotropia linear	51
6.2.2	Solução da equação desenvolvida por Mitisis com anisotropia linear . .	55
6.2.3	Resultados numéricos	61
6.3	Equação de transporte de nêutrons em geometria cilíndrica com anisotropia quadrática	64
6.3.1	Formulação do termo de anisotropia quadrática	64
6.3.2	Solução da equação de transporte de nêutrons em geometria cilíndrica com anisotropia quadrática	67
6.3.3	Resultados numéricos	69
7	CONCLUSÃO	73
	REFERÊNCIAS	75
ANEXO A	APROXIMAÇÃO PARA A CONDIÇÃO DE CONTORNO DE SUPERFÍCIE LIVRE E DE REFLEXÃO	78

1 INTRODUÇÃO

Mudanças na matriz de energia elétrica mundial estão ocorrendo. Estas modificações tem como intuito aumentar a participação de fontes de energia elétrica com baixa emissão de carbono no suprimento energético mundial. Os principais motivos que levaram a isso são a preocupação com questões ambientais, como o aquecimento global e a necessidade de suprir a crescente demanda por energia elétrica no mundo.

No Brasil a maior parte da energia elétrica provêm de hidrelétricas as quais produz energia de forma limpa, não levando em consideração os impactos ambientais causados pela sua construção. Dependendo essencialmente de energia hídrica torna o sistema elétrico vulnerável à falta de suprimento devido a condições climáticas. Diversificar a matriz elétrica brasileira é uma opção para garantir o suprimento e a segurança energética. Diante deste cenário, a energia nuclear é uma fonte alternativa para atender estas necessidades imediatas.

A produção de energia elétrica em um reator nuclear depende do monitoramento da distribuição de nêutrons no sistema para que seja possível controlar e sustentar as reações. Este problema é o enfoque do estudo de muitos pesquisadores da área nuclear que utilizam a equação de transporte de nêutrons para prever a distribuição destas partículas no reator.

A equação de transporte de nêutrons é derivada da equação linear de Boltzmann desenvolvida em 1872 por Ludwig Boltzmann em seus estudos sobre a teoria cinética dos gases. Ela é uma equação integro-diferencial que descreve a distribuição da população de nêutrons num meio material por meio de três variáveis espaciais, duas variáveis angulares, uma variável energética e uma variável temporal.

A aplicabilidade da equação de transporte de nêutrons em diversas áreas como física de reatores, estudo de dosimetria da radiação, transferência radiativa e análise de blindagens contra a radiação, impulsionaram pesquisas em métodos cada vez mais eficientes para solucionar tais problemas. Neste contexto, duas diferentes abordagens podem ser utilizadas para resolver a equação de transporte de nêutrons, uma probabilística e outra determinística.

Entre os métodos com abordagem probabilística pode-se destacar o método de

Monte Carlo (BELL; GLASSTONE, 1970) que baseia-se na análise individual das partículas, sendo útil para resolver casos de geometrias complexas. Com relação aos métodos determinísticos pode-se citar os métodos P_N (MARK, 1957) e S_N . Os procedimentos do método P_N fundamentam-se na aproximação da dependência angular do fluxo de nêutrons, a qual é expandida por meio de esféricos harmônicos.

Já o método de aproximação em ordenadas discretas S_N consiste na discretização da variável angular do fluxo de nêutrons em N direções. Neste tratamento da dependência angular o termo integral é aproximado por uma fórmula de quadratura numérica. Como resultado deste processo tem-se um sistema de N equações diferenciais ordinárias lineares para o fluxo angular, que pode ser solucionado através de uma abordagem numérica ou analítica. Este método foi introduzido por G.C.WICK (1943) na solução de problemas de transporte e CHANDRASEKHAR (1950) em estudos de transferência radiativa.

Entre os métodos desenvolvidos para solucionar as equações S_N analiticamente pode-se citar o método LTS_N proposto por VILHENA; BARICHELLO (1991) BARI-CHELLO (1992) e o método HTS_N desenvolvido por GONÇALVES (2003). O método LTS_N consiste em aplicar a transformada de Laplace no sistema de equações diferenciais ordinárias gerado pela aproximação S_N e assim transformá-lo em um sistema algébrico para os fluxos transformados. Uma vez resolvido este sistema, aplica-se a transformada inversa de Laplace e obtém-se uma expressão analítica para o fluxo angular discretizado. No método HTS_N aplica-se a transformada de *Hankel* de ordem zero para solucionar as equações S_N . Este método é utilizado para solucionar a equação de transporte de nêutrons em geometria cilíndrica.

A solução numérica das equações S_N pode ser obtida através dos métodos espectro nodais desenvolvidos por BARROS; LARSEN (1992). Nestes métodos as equações S_N são integradas transversalmente, o termo fonte é tratado analiticamente e é introduzida uma aproximação para o termo de fuga transversal. A aproximação deste termo pode ser feita por uma constante chamado método spectral Green's function - constant nodal ($SGF - CN$) ou por um polinômio de primeira ordem chamado método spectral Green's function - linear nodal ($SGF - LN$).

Ao contrário dos métodos citados anteriormente, que solucionam a equação de transporte de nêutrons de forma aproximada, CASE; ZWEIFEL (1967) propõem uma solução exata para este problema. Para encontrar tal solução eles consideram a equação de transporte de nêutrons em geometria cartesiana unidimensional para o caso estacionário, monoenergético, com simetria azimutal e espalhamento isotrópico, utilizando o método de expansão em autofunções singulares ou método de Case. Este método consiste na separação de variáveis conveniente para o fluxo angular de nêutrons do qual resulta em um conjunto completo de autofunções singulares ortogonais. Assim, a solução da equação de transporte de nêutrons é expressa como uma com-

binação linear de autofunções.

Com base nos resultados obtidos por Case, GONÇALVES (2003) soluciona a equação do transporte de nêutrons em geometria cartesiana unidimensional para o caso monoenergético, estacionário e isotrópico utilizando o método de derivação angular (GONÇALVES, 2003). Este método consiste em derivar a equação de transporte de nêutrons em relação a variável angular um número suficiente de vezes até obter uma equação diferencial e a solução desta equação é proposta como resultado do problema original. Os autovalores que compõem a solução deste problema são idênticos aos determinados por CASE; ZWEIFEL (1967). Em GONÇALVES (2003) também estende-se este método para os problemas com anisotropia linear e quadrática e em geometria cartesiana bidimensional.

A solução da equação de transporte de nêutrons em geometria cartesiana bidimensional também é determinada através de outros métodos. Em HAUSER (2002) apresenta-se a solução deste problema para o caso monoenergético e isotrópico através do método LTS_N , onde os termos de fuga transversal são representados de duas formas. No método $LTS_{N2D} - Diag$ estes termos são expressos como combinação linear dos autovetores multiplicados por exponenciais dos respectivos autovalores. Já no método $LTS_{N2D} - DiagExp$ estes termos são representados por uma função exponencial com constante de decaimento identificada heurísticamente com parâmetros materiais característicos do meio.

Com relação à resolução da equação de transporte de nêutrons em geometria cartesiana bidimensional pelos métodos espectro nodais pode-se citar MENEZES (2012) que utiliza o método $SGF - CN$ para solucionar este problema considerando fonte externa isotrópica e modelo multigrupo de energia. Já DOMINGUEZ (2006) aplica o método $SGF - LN$ para solucionar esta equação considerando o caso estacionário, monoenergético e com fonte de espalhamento isotrópico. Este mesmo problema é solucionado por CABRERA (2009) utilizando método ADO (Analytical Discrete Ordinates), uma versão analítica do método de ordenadas discretas. Neste método é possível utilizar um esquema de quadratura mais arbitrária e a solução é analítica na variável espacial. Em FILHO (2012) este problema é estendido para o caso com espalhamento anisotrópico.

Para a equação de transporte de nêutrons em geometria cilíndrica pode-se citar a solução proposta por MITSIS (1963). Ele generalizou o método de expansão em autofunções singulares (CASE; ZWEIFEL, 1967) para esta equação considerando o caso isotrópico com simetria azimutal para um cilindro de altura infinita. Em SI-EWERT; THOMAS (1984) este problema é solucionado através do método F_N (SI-EWERT, 1979) e considerando os termos de fonte externa isotrópica e fluxo incidente constante no contorno. O método F_N usa parcialmente a técnica de Case para derivar um conjunto de equações singulares para as distribuições angulares no contorno.

Em KAVENOKY (1978) soluciona-se a equação de transporte de nêutrons em geometria cilíndrica através do Nodal Constante (CN). Este método é similar aos métodos espectro nodais no entanto, os termos de fonte e de fuga transversal são aproximados por constantes. Já FLETCHER (1983) desenvolve uma solução semianalítica para a equação de transporte de nêutrons em geometria cilíndrica com espalhamento anisotrópico através do método P_N descrito anteriormente.

Em GONÇALVES (2003) aplica-se o método HTS_N para solucionar a equação de transporte de nêutrons em geometria cilíndrica desenvolvida por Mitsis para um cilindro de altura infinita, espalhamento isotrópico, simetria azimutal do fluxo, fonte externa isotrópica e fluxo incidente no contorno. Neste mesmo trabalho, Gonçalves utiliza o método HTS_N em conjunto com o método de decomposição (ADOMIAN, 1984) para resolver a equação de Boltzmann para um cilindro infinito, com simetria azimutal e espalhamento anisotrópico.

Em VELHO et al. (2004) apresenta-se a solução da equação linear de Boltzmann unidimensional em geometria cilíndrica com espalhamento isotrópico pelo método HTS_N (GONÇALVES, 2003). Posteriormente, VELHO et al. (2005) solucionam esta equação para o caso com espalhamento anisotrópico, utilizando o método de decomposição em conjunto com o método HTS_N .

Para problemas com espalhamento anisotrópico GONÇALVES; LEITE; VILHENA (2009) solucionaram a equação de transporte de nêutrons para o caso estacionário e monoenergético em um cilindro de altura infinita pelo método de decomposição. Já no trabalho de GONÇALVES; VILHENA; BODMANN (2010) é proposto a construção heurística para o termo de anisotropia linear o qual é adicionado à equação desenvolvida por MITSIS (1963) para um cilindro infinito com simetria azimutal. Após, esta equação é solucionada pelo método HTS_N . Para a equação de transporte de nêutrons com termo de espalhamento linearmente anisotrópico pode-se citar ainda o trabalho de TEKKALMAZ; ALTAÇ (2007) aplicado à resolução de problemas de transferência radiativa. A solução deste problema é obtida através do método SK_N que consiste em aproximar o *kernel* da integral de transporte por uma soma de *kernels* análogos aos da equação de difusão gerando assim, um conjunto de equações acopladas. As equações resultantes deste processo tem a mesma forma da gerada por Mitsis.

Este trabalho é estruturado da seguinte forma, o segundo capítulo apresenta a dedução da equação de transporte de nêutrons obtida a partir do balanço entre os nêutrons que entram e saem de um volume arbitrário (BELL; GLASSTONE, 1970). O terceiro capítulo apresenta uma breve descrição da solução proposta por CASE; ZWEIFEL (1967) para a equação de transporte de nêutrons em geometria cartesiana unidimensional para o caso estacionário, monoenergético e isotrópico com simetria azimutal para um meio infinito pelo método de expansão em autofunções singulares. Este resultado obtido por Case é utilizado como base para a solução dos problemas

em geometria cilíndrica e cartesiana apresentados deste trabalho.

O quarto capítulo apresenta a formulação da equação de transporte de nêutrons em geometria cartesiana bidimensional no plano xy para o caso estacionário, isotrópico e monoenergético em um plano infinito homogêneo. Na sequência, soluciona-se esta equação a partir do método de decomposição angular e por fim, mostra-se que a solução deste problema é solução da equação de difusão em geometria cartesiana bidimensional.

O quinto capítulo apresenta a dedução da equação de transporte de nêutrons em geometria cilíndrica bidimensional para o caso isotrópico, monoenergético e estacionário para um cilindro infinito em um meio homogêneo. Determina-se a solução desta equação tomando como ponto de partida o resultado obtido para a equação de transporte de nêutrons em geometria cartesiana bidimensional. Por fim, mostra-se que a solução do problema é solução da equação de difusão em geometria cilíndrica bidimensional e ainda, compara-se a solução do problema em geometria cilíndrica com os resultados determinados por Mitsis para o fluxo escalar em um cilindro infinito com simetria azimutal. Apresenta-se também a formulação e solução da equação de transporte de nêutrons em geometria cilíndrica bidimensional para o caso monoenergético e estacionário com espalhamento linearmente anisotrópico para um cilindro infinito em um meio homogêneo. A solução deste problema é obtida com base na solução do problema em geometria cilíndrica com espalhamento isotrópico.

O sexto capítulo tem como base a equação de transporte de nêutrons desenvolvida por MITSIS (1963) para um cilindro infinito com simetria azimutal e espalhamento isotrópico a qual adicionou-se, considerando o trabalho de SIEWERT; THOMAS (1984), os termos de fonte externa isotrópica e fluxo incidente constante no contorno. Considerando esta equação se propõe neste trabalho adicionar os termos referentes às anisotropias linear e quadrática. Estes termos são construídos com base na hipótese de que as soluções destes problemas são dadas pelos mesmos autovalores determinados por CASE; ZWEIFEL (1967) para o caso unidimensional e mesmo grau de anisotropia. Na sequência, solucionam-se ambas equações pelo método HTS_N (GONÇALVES, 2003) e por fim, comparam-se os resultados numéricos dos problemas em geometria cilíndrica com anisotropia linear e quadrática com os problemas em geometria cartesiana unidimensional para os mesmos graus da anisotropia.

2 EQUAÇÃO DE TRANSPORTE DE NÊUTRONS

Na teoria do transporte, a distribuição das partículas neutras em um meio é descrita pela equação de transporte de nêutrons que deriva da equação desenvolvida por Ludwig Boltzmann em 1872 em seus estudos sobre cinética dos gases. Esta equação é obtida a partir de um balanço entre os nêutrons que entram e saem do volume arbitrário V . Este capítulo apresenta a dedução da equação de transporte de Nêutrons, suas limitações com base em BELL; GLASSTONE (1970) e algumas simplificações que podem ser feitas no modelo para facilitar sua resolução.

2.1 Dedução da equação de transporte de nêutrons

A equação de transporte de nêutrons pode ser determinada a partir de um balanço entre os nêutrons que entram e saem do elemento de volume V , representado na Figura 1,

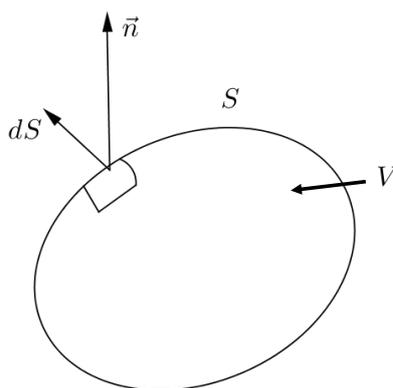


Figura 1: Volume arbitrário V

onde dS é um elemento de área, \vec{n} é o vetor unitário na direção de saída dos nêutrons do volume e S é a superfície do volume.

Para descrever a população de nêutrons em V utiliza-se a densidade angular de nêutrons representada por:

$$\int_V N(\vec{r}, \vec{\Omega}, E, t) dV, \quad (1)$$

e definida como o número provável de nêutrons na posição \vec{r} , com direção $\vec{\Omega}$, energia E no instante de tempo t , por unidade de volume, por unidade de ângulo sólido, por unidade de energia, sendo $\vec{\Omega}$ um vetor unitário.

Por sua vez o fluxo angular de nêutrons é definido como,

$$\int_V \psi(\vec{r}, \vec{\Omega}, E, t) dV \equiv \int_V v N(\vec{r}, \vec{\Omega}, E, t) dV, \quad (2)$$

onde v é a velocidade escalar de propagação dos nêutrons. Assim, o fluxo angular de nêutrons é definido como o número provável de nêutrons na posição \vec{r} , viajando na direção do ângulo sólido $\vec{\Omega}$, com energia E e no instante t , por unidade de área, por unidade de ângulo sólido e por unidade de energia.

Considerando a dependência temporal da equação de transporte tem-se a taxa de mudança do número nêutrons. Ela é definida como a diferença entre os nêutrons que entram e saem do um elemento de volume arbitrário V com o passar do tempo. Assim, a relação anterior é escrita da seguinte forma:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} [N(\vec{r}, \vec{\Omega}, E, t)] dV = \left[\begin{array}{c} \text{ganhos em } V \text{ com o} \\ \text{passar do tempo} \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} \text{perdas em } V \text{ com o} \\ \text{passar do tempo} \end{array} \right]. \quad (3)$$

Pode-se ainda reescrever a taxa de mudança do número em V em função do fluxo angular como,

$$\int_V \frac{\partial N(\vec{r}, \vec{\Omega}, E, t)}{\partial t} dV = \int_V \frac{1}{v} \frac{\partial \psi(\vec{r}, \vec{\Omega}, E, t)}{\partial t} dV. \quad (4)$$

A variação da população de nêutrons em V pode ser descrita pelas formas que os nêutrons com direção $\vec{\Omega}$ e energia E são introduzidos e removidos do elemento de volume V , as quais são dadas por:

1. Nêutrons que "nascem" em V devido a uma fonte.
2. Nêutrons que entram em V pela superfície S .
3. Nêutrons com diferentes direções ou energias que sofrem interações dentro de V de modo que sejam espalhados para a energia E e direção $\vec{\Omega}$.
4. Nêutrons que sofrem interações em V e são absorvidos ou mudam de direção ou energia .
5. Nêutrons que podem deixar V pela superfície S .

Expressando matematicamente os processos pelos quais os nêutrons entram no elemento de volume arbitrário V representados pelos itens 1, 2 e 3 e saem do volume V representados pelos itens 4 e 5 tem-se,

1) Termo fonte

Nêutrons que ingressam em V através de uma fonte externa na posição \vec{r} , viajando na direção do ângulo sólido $\vec{\Omega}$, com energia E e no instante t ,

$$\int_V Q(\vec{r}, \vec{\Omega}, E, t) dV. \quad (5)$$

2) e 5) Diferença entre os nêutrons que entram e que saem do volume V pela superfície S

Considerando um elemento de área dS na superfície de V com vetor normal a essa superfície \vec{n} então o número de nêutrons que cruzam a superfície dS é dado por:

$$\vec{n} \cdot \vec{\Omega} \psi(\vec{r}, \vec{\Omega}, E, t) dS d\vec{\Omega} dE, \quad (6)$$

onde $\vec{\Omega} \psi(\vec{r}, \vec{\Omega}, E, t) = j(\vec{r}, \vec{\Omega}, E, t)$ denominada corrente angular de nêutrons.

Integrando a equação (6) ao longo de toda a superfície S do volume V tem-se,

$$\int_S \vec{n} \cdot \vec{\Omega} \psi(\vec{r}, \vec{\Omega}, E, t) dS. \quad (7)$$

Utilizando o teorema da divergência pode-se reescrever (7) como uma integral de volume

$$\int_S \vec{n} \cdot \vec{\Omega} \psi(\vec{r}, \vec{\Omega}, E, t) dS = \int_V \nabla \cdot \vec{\Omega} \psi(\vec{r}, \vec{\Omega}, E, t) dV. \quad (8)$$

3) Nêutrons com diferentes direções ou energias que sofrem interações dentro de V de modo que sejam espalhados para a energia E e direção $\vec{\Omega}$

Este termo representa a probabilidade de um nêutron com energia E' e direção $\vec{\Omega}'$ sofrer interações em V e ser espalhado para dentro da direção $d\vec{\Omega}$ em torno de $\vec{\Omega}$ e energia dE em torno de E . Assim, tem-se

$$\int_V \int_0^\infty \int_{4\pi} \Sigma(\vec{r}, E') f(\vec{r}; \vec{\Omega}', E' \rightarrow \vec{\Omega}, E) \psi(\vec{r}, \vec{\Omega}, E, t) d\vec{\Omega}' dE' dV, \quad (9)$$

onde $\Sigma(\vec{r}, E')$ é a seção de choque macroscópica total definida como a probabilidade de interação dos nêutrons com o meio por unidade de comprimento. O termo $f(\vec{r}; \vec{\Omega}', E' \rightarrow \vec{\Omega}, E)$ representa a função probabilidade definida como a probabilidade de um nêutron com direção $\vec{\Omega}'$ e energia E' sofrer uma colisão e desta surja um nêutron com direção $d\vec{\Omega}$ em torno de $\vec{\Omega}$ e energia dE em torno de E .

A seção de choque macroscópica total pode ser representada como um somatório das seções de choque parciais Σ_x onde o subscrito x indica o tipo de interação nêutron-núcleo,

$$\Sigma(\vec{r}, E')f(\vec{\Omega}', E' \rightarrow \vec{\Omega}, E) = \sum_x \Sigma(\vec{r}, E')_x f_x(\vec{\Omega}', E' \rightarrow \vec{\Omega}, E). \quad (10)$$

Alguns dos tipos possíveis de interações nêutron-núcleo são:

$\Sigma_n(\vec{r}, E')$ = Seção de choque macroscópica de espalhamento elástico;

$\Sigma_{n'}(\vec{r}, E')$ = Seção de choque macroscópica de espalhamento inelástico;

$\Sigma_f(\vec{r}, E')$ = Seção de choque macroscópica de fissão.

4) Nêutrons que sofrem interações em V e são absorvidos ou mudam de direção ou energia

Nêutrons que após sofrerem interações são removidos do volume dV por terem mudado de energia E ou de direção $\vec{\Omega}$, são representados por:

$$\int_V \Sigma(\vec{r}, E)\psi(\vec{r}, \vec{\Omega}, E, t)dV. \quad (11)$$

Substituindo os itens 1 a 5 no balanço (3) obtém-se,

$$\int_V \left[\frac{1}{v} \frac{\partial \psi(\vec{r}, \vec{\Omega}, E, t)}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{\Omega} \psi(\vec{r}, \vec{\Omega}, E, t) + \Sigma(\vec{r}, E)\psi(\vec{r}, \vec{\Omega}, E, t) \right] dV + \int_V \left[\int_0^\infty \int_{4\pi} \Sigma(\vec{r}, E')f(\vec{r}; \vec{\Omega}', E' \rightarrow \vec{\Omega}, E)\psi(\vec{r}, \vec{\Omega}, E, t)d\vec{\Omega}'dE' + Q(\vec{r}, \vec{\Omega}, E, t) \right] dV = 0. \quad (12)$$

Como o volume é arbitrário a integral do volume é zero somente se o integrando for igual a zero logo, a equação de transporte de nêutrons é dada por:

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \psi(\vec{r}, \vec{\Omega}, E, t)}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{\Omega} \psi(\vec{r}, \vec{\Omega}, E, t) + \Sigma(\vec{r}, E)\psi(\vec{r}, \vec{\Omega}, E, t) = \int_0^\infty \int_{4\pi} \Sigma(\vec{r}, E')f(\vec{r}; \vec{\Omega}', E' \rightarrow \vec{\Omega}, E)\psi(\vec{r}, \vec{\Omega}, E, t)d\vec{\Omega}'dE' + Q(\vec{r}, \vec{\Omega}, E, t). \quad (13)$$

A equação de transporte de nêutrons (13) desenvolvida por Boltzmann apresenta algumas limitações como (BELL; GLASSTONE, 1970):

Flutuações estatísticas do fluxo angular

Na equação de Boltzmann flutuações estatísticas não são consideradas em virtude de sua pequena magnitude quando comparada com valor médio da densidade angular de nêutrons.

Interação nêutron-nêutron

A interação entre nêutrons é desconsiderada em virtude da baixa densidade de nêutrons ($10^{10} - 10^{11}$ nêutrons/cm³) em comparação com a densidade de núcleos no meio (10^{22} núcleos/cm³). Logo, o número de interações nêutron-núcleo é maior e como resultado desta restrição tem-se a equação de transporte de nêutrons linear.

Comportamento ondulatório

Na equação de Boltzmann, o nêutron é tratado como uma partícula pontual, no sentido que ele pode ser descrito completamente pela sua velocidade e posição. A natureza ondulatória do nêutron não é considerada, pois seu comprimento de onda em geral é muito menor do que as dimensões envolvidas na teoria do transporte.

Nêutrons atrasados

Para o estudo de reatores no estado estacionário, os efeitos devido a nêutrons atrasados podem ser desprezados no entanto, eles são importantes no estudo de cinética de reatores onde o fluxo de nêutrons varia com o tempo.

Como a equação de transporte de nêutrons apresentada em (13) é definida por três variáveis espaciais, duas variáveis angulares, as quais definem a direção de propagação dos nêutrons, uma variável energética e uma variável temporal sua solução é difícil de ser determinada. Portanto, algumas simplificações podem ser realizadas nesta equação.

Com relação à dependência temporal pode-se considerar o sistema no estado estacionário, ou seja, independente da variável temporal. Esta simplificação implica que as propriedades do sistema não se alteram em um determinado intervalo de tempo.

A dependência energética da equação de transporte de nêutrons pode ser tratada por meio de um modelo monoenergético, ou seja, considera-se que todos os nêutrons possuem a mesma energia. No entanto, como a energia dos nêutrons em um reator varia de 10 MeV para menos que 0,01 eV uma forma mais realística de tratar a dependência da energia é utilizando o modelo multigrupo. Neste modelo, o intervalo de energia de interesse é dividido em um número finito de grupos e os parâmetros que definem a dependência energética são aproximados pela avaliação das seções de choque em cada grupo de energia.

O termo de espalhamento pode ser considerado dependente da variável angular chamado de caso anisotrópico, ou independente caso isotrópico. No caso anisotrópico, a dependência angular do termo de espalhamento pode ser expandida em Polinômios de Legendre. Truncando a série no termo de grau zero tem-se um problema com espalhamento isotrópico, truncando no termo de grau um o espalhamento é linearmente anisotrópico e assim por diante.

3 MÉTODO DE EXPANSÃO EM AUTOFUNÇÕES SINGULARES OU MÉTODO DE CASE

Este capítulo descreve a solução da equação de transporte de nêutrons unidimensional em geometria cartesiana proposta por CASE; ZWEIFEL (1967) pelo método de expansão em autofunções singulares ou método de Case. Esta solução é utilizada como base para os resultados obtidos no trabalho.

3.1 Descrição do método de Case

A equação de transporte de nêutrons unidimensional em geometria cartesiana para o caso estacionário, monoenergético, com espalhamento isotrópico e simetria azimutal para um meio infinito é dada por (CASE; ZWEIFEL, 1967):

$$\mu \frac{\partial \psi(x, \mu)}{\partial x} + \psi(x, \mu) = \frac{c}{2} \int_{-1}^1 \psi(x, \mu') d\mu', \quad (14)$$

onde x é uma coordenada espacial, μ é uma variável angular que define a direção de propagação do fluxo, $\psi(x, \mu)$ é fluxo angular de nêutrons e c é o número médio de nêutrons que emergem por colisão.

Aplicando o método de separação de variável propõem-se que o fluxo angular de nêutrons é dado pelo produto de duas funções como:

$$\psi(x, \mu) = \chi(x)\phi(\mu). \quad (15)$$

Substituindo (15) na equação (14) e dividindo por $\mu\chi(x)\phi(\mu)$ obtém-se,

$$\frac{1}{\chi(x)} \frac{d\chi(x)}{dx} = \frac{c}{2\mu\phi(\mu)} \int_{-1}^1 \phi(\mu') d\mu' - \frac{1}{\mu}. \quad (16)$$

Percebe-se que o lado esquerdo da equação (16) é uma função que depende somente de x e o lado direito uma função que depende somente de μ . Portanto, estas funções somente são iguais a uma constante definida como $-1/\nu$.

Assim, determina-se a equação para a função $\chi(x)$ dada por:

$$\frac{1}{\chi(x)} \frac{d\chi(x)}{dx} = -\frac{1}{\nu}, \quad (17)$$

a qual tem como solução

$$\chi(x) = c_1 \exp\left(-\frac{x}{\nu}\right), \quad (18)$$

onde c_1 é uma constante arbitrária tomada como 1. Substituindo este resultado em (15) tem-se a solução da equação (14) dada da seguinte forma:

$$\psi_\nu(x, \mu) = \phi_\nu(\mu) \exp\left(-\frac{x}{\nu}\right), \quad (19)$$

onde $\phi_\nu(\mu)$ são autofunções e ν os autovalores correspondentes a estas autofunções.

Por sua vez, substituindo a solução (19) na equação de transporte de nêutrons (14), tem-se que as autofunções $\phi_\nu(\mu)$ são determinadas a partir da seguinte equação

$$(\nu - \mu)\phi_\nu(\mu) = \frac{c\nu}{2} \int_{-1}^1 \phi_\nu(\mu') d\mu'. \quad (20)$$

Considerando a normalização da autofunção $\phi_\nu(\mu')$ como sendo,

$$\int_{-1}^1 \phi_\nu(\mu') d\mu' = 1, \quad (21)$$

e substituindo na equação (20) obtém-se $\phi_\nu(\mu)$ dada por:

$$\phi_\nu(\mu) = \frac{c\nu}{2} \frac{1}{\nu - \mu}, \quad (22)$$

para $\nu \neq \mu$, isto é $\nu \notin (-1, 1)$.

Substituindo (22) na condição de normalização (21) tem-se,

$$\lambda(\nu) \equiv 1 - \frac{c\nu}{2} \int_{-1}^1 \frac{1}{\nu - \mu} d\mu = 0, \quad (23)$$

onde $\lambda(\nu)$ é chamada de função de dispersão.

Resolvendo a integral da equação (23) obtém-se,

$$\lambda(\nu) = 1 - \frac{c\nu}{2} \ln\left(\frac{\nu + 1}{\nu - 1}\right). \quad (24)$$

A função de dispersão apresenta a seguinte propriedade: $\lambda(\nu) = \lambda(-\nu)$, ou seja, se ν_0 é uma raiz da função de dispersão então $-\nu_0$ também é raiz. Logo, observa-se que a equação (24) possui apenas duas raízes $\pm\nu_0$.

Analisando a função de dispersão (24) no eixo real positivo, $1 < \nu < \infty$, verifica-se que:

- $\lim_{\nu \rightarrow 1^+} \lambda(\nu) = -\infty$;
- $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \lambda(\nu) = 1 - c$.

Como a variável c representa o número médio de nêutrons que emergem após uma colisão nêutron-núcleo tem-se as seguintes possibilidades para c :

- $c < 1$: A função de dispersão $\lambda(\nu)$ possui duas raízes reais, uma raiz ν_0 no intervalo $1 < \nu < \infty$ e outra raiz $-\nu_0$ no eixo negativo de acordo com a propriedade da função de dispersão descrita anteriormente;
- $c > 1$: As raízes da função de dispersão $\lambda(\nu)$ são imaginárias;
- $c = 1$: A função de dispersão $\lambda(\nu)$ apresenta raiz dupla no infinito.

As raízes $\pm\nu_0$ da função de dispersão determinadas anteriormente representam os autovalores discretos, também chamados de autovalores assintóticos, associados às autofunções

$$\phi_{\pm\nu_0}(\mu) = \pm \frac{c\nu_0}{2} \frac{1}{\pm\nu_0 - \mu}. \quad (25)$$

Considerando a possibilidade de $\nu = \mu$, isto é $\nu \in (-1, 1)$, deve-se acrescentar o seguinte termo a solução (22),

$$\lambda(\nu)\delta(\nu - \mu), \quad (26)$$

onde $\delta(\nu - \mu)$ é a função delta de Dirac e $\lambda(\nu)$ é uma função arbitrária. Logo, tem-se que a solução (22) para este caso é dada por:

$$\phi_\nu(\mu) = \frac{c\nu}{2} \frac{1}{\nu - \mu} + \lambda(\nu)\delta(\nu - \mu). \quad (27)$$

Substituindo (27) na condição de normalização (21) tem-se,

$$\frac{c\nu}{2} \int_{-1}^1 \frac{P}{\nu - \mu} d\mu + \lambda(\nu)\delta(\nu - \mu) = 1, \quad (28)$$

onde P denota o valor principal de Cauchy.

Solucionando a integral utilizando o valor principal de Cauchy obtém-se,

$$\lambda(\nu) = 1 - \frac{c\nu}{2} \ln \left(\frac{\nu + 1}{\nu - 1} \right). \quad (29)$$

Verifica-se que no caso da função de dispersão (29), em é considerado a possibilidade de $\nu = \mu$, existe um espectro contínuo de autovalores ν , com $\nu \in (-1, 1)$, sendo as autofunções a ele associadas dadas pela equação (27).

Após estabelecer as autofunções discretas e contínuas pode-se escrever a solução geral do problema como:

$$\psi(x, \mu) = A_{\pm\nu_0} \phi_{\pm\nu_0}(\mu) \exp\left(-\frac{x}{\pm\nu_0}\right) + \int_{-1}^1 A_\nu \phi_\nu(\mu) \exp\left(-\frac{x}{\nu}\right) d\nu \quad (30)$$

onde $A_{\pm\nu_0}$ e A_ν são os coeficientes da expansão.

4 SOLUÇÃO ANALÍTICA DA EQUAÇÃO DE TRANSPORTE DE NÊUTRONS EM GEOMETRIA CARTESIANA BIDIMENSIONAL

Este capítulo apresenta a solução analítica da equação de transporte de nêutrons bidimensional para o caso isotrópico, monoenergético e estacionário em geometria cartesiana no plano xy para um meio infinito homogêneo. Inicialmente, mostra-se a formulação desta equação a partir de simplificações feitas na equação de transporte de nêutrons apresentada no capítulo 2. Na sequência, soluciona-se a equação de transporte pelo método de decomposição angular (GONÇALVES, 2003), o qual consiste em derivar a equação com relação a variável angular um número suficiente de vezes até obter uma equação diferencial. Após, resolve-se esta equação e substitui-se a solução encontrada na equação original.

A solução obtida para a equação de transporte de nêutrons em geometria cartesiana bidimensional é composta pela combinação linear de autofunções singulares associadas a um conjunto de autovalores análogos aos determinados por CASE; ZWEIFEL (1967) no problema de transporte de nêutrons em geometria cartesiana unidimensional. Por fim, mostra-se que a solução desta equação é solução da equação de difusão em geometria cartesiana bidimensional.

4.1 Formulação da equação de transporte de nêutrons em geometria cartesiana bidimensional

Esta seção apresenta a construção da equação de transporte de nêutrons bidimensional para o caso isotrópico, monoenergético e estacionário em geometria cartesiana no plano xy em um meio infinito homogêneo. Para obter esta equação as seguintes simplificações devem ser feitas na equação de transporte de nêutrons (13):

Termo fonte

A equação de transporte de nêutrons considerada não possui termo fonte.

Estado estacionário

O modelo considerado é independente do tempo logo, tem-se que taxa de mudança do número de nêutrons é igual a zero, ou seja,

$$\frac{\partial}{\partial t}[\psi(\vec{r}, \vec{\Omega}, E, t)] = 0, \quad (31)$$

e o fluxo angular de nêutrons é dado por:

$$\psi(\vec{r}, \vec{\Omega}, E, t) = \psi(\vec{r}, \vec{\Omega}, E). \quad (32)$$

Monoenergético

Assumindo que as seções de choque da equação de transporte de nêutrons não dependem da energia, isto é,

$$\Sigma(\vec{r}, E) = \Sigma(\vec{r}), \quad (33)$$

é possível determinar o fluxo angular monoenergético integrando este termo sobre a energia e assim obter,

$$\psi(\vec{r}, \vec{\Omega}) = \int_0^{\infty} \psi(\vec{r}, \vec{\Omega}, E) dE. \quad (34)$$

Para o caso monoenergético a função probabilidade independente da energia E' é dada por:

$$\int_0^{\infty} f(\vec{r}; \vec{\Omega}', E' \rightarrow \vec{\Omega}, E) dE = c(\vec{r}) f(\vec{r}; \vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega}), \quad (35)$$

onde $c(\vec{r})$ é o número médio de nêutrons que emergem por colisão em \vec{r} representado como

$$c(\vec{r}) = \frac{\Sigma_n(\vec{r}) + \Sigma_{n'}(\vec{r}) + \nu(\vec{r})\Sigma_f(\vec{r}) + \dots}{\Sigma(\vec{r})} \quad (36)$$

onde:

$\Sigma_n(\vec{r})$ = Seção de choque macroscópica de espalhamento elástico;

$\Sigma_{n'}(\vec{r})$ = Seção de choque macroscópica de espalhamento inelástico;

$\Sigma_f(\vec{r})$ = Seção de choque macroscópica de fissão;

$\Sigma(\vec{r})$ = Seção de choque macroscópica total;

$\nu(\vec{r})$ = Número de nêutrons emitidos por fissão.

Meio homogêneo

Em um meio homogêneo os parâmetros nucleares independem da posição \vec{r} portanto tem-se

$$\Sigma(\vec{r}) = \Sigma, \quad c(\vec{r}) = c \quad \text{e} \quad f(\vec{r}, \vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega}) = f(\vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega}). \quad (37)$$

Espalhamento isotrópico

Considerando a função probabilidade $f(\vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega})$, uma função de $\mu_0 = \vec{\Omega}' \cdot \vec{\Omega}$ onde $\vec{\Omega}'$ e $\vec{\Omega}$ são as direções dos nêutrons antes e depois do espalhamento, pode-se expandi-la como uma soma de uma série de polinômios de Legendre (BELL; GLASSTONE, 1970) isto é,

$$f(\vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega}) = f(\mu_0) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{4\pi} f_l P_l(\mu_0), \quad (38)$$

sendo f_l os coeficientes da expansão dados pela ortogonalidade do polinômio de Legendre como

$$f_l = 2\pi \int_{-1}^1 f(\mu_0) P_l(\mu_0) d\mu_0, \quad (39)$$

e $P_l(\mu_0)$ de acordo com o teorema da adição do polinômios de Legendre é dado por:

$$P_l(\mu_0) = P_l(\mu)P_l(\mu') + 2 \sum_{m=1}^l \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(\mu)P_l^m(\mu') \cos[m(\varphi - \varphi')], \quad (40)$$

onde μ e μ' são as direções cosseno, φ e φ' são os ângulos azimutais e direções $\vec{\Omega}$ e $\vec{\Omega}'$ respectivamente e $P_l^m(\mu)$ são polinômios de Legendre associados.

Como está sendo considerado o caso isotrópico toma-se $l = 0$ na equação (38) assim tem-se

$$f_0 = 2\pi \int_{-1}^1 f(\mu_0) d\mu_0 = 1 \quad \text{e} \quad P_0(\mu_0) = 1, \quad (41)$$

logo a função probabilidade para o caso com espalhamento isotrópico é dada por:

$$f(\vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega}) = \frac{1}{4\pi}. \quad (42)$$

Geometria cartesiana bidimensional

De acordo com BELL; GLASSTONE (1970) para o caso em geometria cartesiana bidimensional escreve-se o termo $\vec{\Omega} \cdot \nabla \psi(\vec{r}, \vec{\Omega})$ da seguinte forma

$$\vec{\Omega} \cdot \nabla \psi(\vec{r}, \vec{\Omega}) = \left(\sqrt{(1 - \mu^2)} \cos(\varphi) \frac{\partial}{\partial x'} + \sqrt{(1 - \mu^2)} \sin(\varphi) \frac{\partial}{\partial y'} \right) \psi(x', y', \mu, \varphi), \quad (43)$$

e o termo integral, $\int \psi(\vec{r}, \vec{\Omega}') d\vec{\Omega}'$, como

$$\int \psi(\vec{r}, \vec{\Omega}') d\vec{\Omega}' = \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \psi(x', y', \mu', \varphi') d\varphi' d\mu'. \quad (44)$$

Com base nestas simplificações a equação de transporte de nêutrons (13) é dada por:

$$\begin{aligned} & \left(\sqrt{(1 - \mu^2)} \cos(\varphi) \frac{\partial}{\partial x'} + \sqrt{(1 - \mu^2)} \sin(\varphi) \frac{\partial}{\partial y'} \right) \psi(x', y', \mu, \varphi) \\ & + \Sigma \psi(x', y', \mu, \varphi) = \frac{c\Sigma}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \psi(x', y', \mu', \varphi') d\varphi' d\mu'. \end{aligned} \quad (45)$$

Tomando as variáveis x' e y' em termos do livre caminho médio como,

$$x = \Sigma x' \quad \text{e} \quad y = \Sigma y', \quad (46)$$

tem-se que,

$$\frac{\partial \psi(x', y', \mu, \varphi)}{\partial x'} = \Sigma \frac{\partial \psi(x, y, \mu, \varphi)}{\partial x}, \quad (47)$$

e

$$\frac{\partial \psi(x', y', \mu, \varphi)}{\partial y'} = \Sigma \frac{\partial \psi(x, y, \mu, \varphi)}{\partial y}. \quad (48)$$

Substituindo (47) e (48) na equação (45) e simplificando Σ tem-se a equação de transporte de nêutrons bidimensional para o caso isotrópico, monoenergético e estacionário em geometria cartesiana no plano xy em um meio infinito homogêneo dada por:

$$\begin{aligned} & \left(\sqrt{(1 - \mu^2)} \cos(\varphi) \frac{\partial}{\partial x} + \sqrt{(1 - \mu^2)} \sin(\varphi) \frac{\partial}{\partial y} \right) \psi(x, y, \mu, \varphi) \\ & + \psi(x, y, \mu, \varphi) = \frac{c}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \psi(x, y, \mu', \varphi') d\varphi' d\mu'. \end{aligned} \quad (49)$$

4.2 Desenvolvimento da solução analítica da equação de transporte de nêutrons em geometria cartesiana bidimensional

Nesta seção determina-se a solução analítica da equação de transporte de nêutrons em geometria cartesiana bidimensional para o caso isotrópico e monoenergético no plano xy em um meio infinito homogêneo. Esta equação é dada por (BELL; GLASTONE, 1970):

$$\left(\sqrt{1 - \mu^2} \cos(\varphi) \frac{\partial}{\partial x} + \sqrt{1 - \mu^2} \sin(\varphi) \frac{\partial}{\partial y} + 1 \right) \psi(x, y, \mu, \varphi) = \frac{c}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \psi(x, y, \mu', \varphi') d\varphi' d\mu'. \quad (50)$$

A equação (50) é solucionada aplicando o método de derivação angular (GONÇALVES, 2003). Este método consiste em derivar a equação em relação a variável angular um número suficiente de vezes até recair em uma equação puramente diferencial. Após resolver a equação diferencial sua solução é proposta como solução do equação original. Assim, deve-se derivar a equação (50) uma vez em relação à variável angular φ para eliminar o termo integral e obter a seguinte equação diferencial:

$$\left(\sqrt{1 - \mu^2} \left(-\sin(\varphi) \frac{\partial}{\partial x} + \cos(\varphi) \frac{\partial^2}{\partial x \partial \varphi} + \cos(\varphi) \frac{\partial}{\partial y} + \sin(\varphi) \frac{\partial^2}{\partial y \partial \varphi} \right) \right) \psi(x, y, \mu, \varphi) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \psi(x, y, \mu, \varphi) = 0. \quad (51)$$

Para resolver a equação (51) aplica-se o método de separação de variáveis. Assumindo que o fluxo angular de nêutrons é dado pelo produto de três funções,

$$\psi(x, y, \mu, \varphi) = f(y)g(x)h(\mu, \varphi), \quad (52)$$

onde f é uma função que depende somente de y , g é uma função que depende somente de x e h é uma função que depende de μ e φ .

Substituindo o fluxo angular de nêutrons dado em (52) na equação diferencial (51) e isolando o termo $g'(x)/g(x)$, obtém-se uma equação em que seu lado esquerdo é uma função que depende somente de x , enquanto que no lado direito é uma função que depende de y , μ e φ . Estas duas funções somente são iguais a uma constante definida como $-1/\omega$ assim, tem-se

$$\frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{f'(y) \left(-\sqrt{1 - \mu^2} (\cos(\varphi)h(\mu, \varphi) + \sin(\varphi)h(\mu, \varphi)_\varphi) \right) - f(y)h(\mu, \varphi)_\varphi}{f(y) \left(\sqrt{1 - \mu^2} (-\sin(\varphi)h(\mu, \varphi) + \cos(\varphi)h(\mu, \varphi)_\varphi) \right)} = -\frac{1}{\omega}. \quad (53)$$

A partir da equação (53) encontra-se a equação diferencial ordinária para a função

$g(x)$ dada por:

$$\frac{dg(x)}{dx} + \frac{1}{\omega}g(x) = 0, \quad (54)$$

a qual tem como solução

$$g_{\omega}(x) = c_1 \exp\left(-\frac{x}{\omega}\right). \quad (55)$$

Isolando o termo $f'(y)/f(y)$ da equação (53) obtém-se do lado esquerdo uma função que depende somente de y e o lado direito uma função que depende de μ e φ . Novamente ambas funções somente são iguais a uma constante definida como $-1/\kappa$,

$$\frac{f'(y)}{f(y)} = \frac{\frac{\sqrt{(1-\mu^2)}}{\omega} (\sin(\varphi)h(\mu, \varphi) - \cos(\varphi)h(\mu, \varphi)_{\varphi}) + h(\mu, \varphi)_{\varphi}}{\sqrt{(1-\mu^2)} (-\cos(\varphi)h(\mu, \varphi) - \sin(\varphi)h(\mu, \varphi)_{\varphi})} = -\frac{1}{\kappa}. \quad (56)$$

A partir de (56) encontra-se a equação diferencial ordinária para a função $f(y)$,

$$\frac{df(y)}{dy} + \frac{1}{\kappa}f(y) = 0, \quad (57)$$

a qual tem como solução

$$f_{\kappa}(y) = c_2 \exp\left(-\frac{y}{\kappa}\right). \quad (58)$$

Por fim, a função $h(\mu, \varphi)$ é dada pela equação diferencial parcial

$$\begin{aligned} \frac{\partial h(\mu, \varphi)}{\partial \varphi} \left(-\frac{\sqrt{(1-\mu^2)}}{\omega} \cos(\varphi) - \frac{\sqrt{(1-\mu^2)}}{\kappa} \sin(\varphi) + 1 \right) + \\ + h(\mu, \varphi) \left(\frac{\sqrt{(1-\mu^2)}}{\omega} \sin(\varphi) - \frac{\sqrt{(1-\mu^2)}}{\kappa} \cos(\varphi) \right) = 0, \end{aligned} \quad (59)$$

que tem como solução

$$h_{\omega\kappa}(\mu, \varphi) = \frac{\kappa\omega F(\mu)}{-\sqrt{(1-\mu^2)}\kappa \cos(\varphi) - \sqrt{(1-\mu^2)}\omega \sin(\varphi) + \kappa\omega}. \quad (60)$$

Substituindo os resultados encontrados para cada função em (52) e considerando $c_1c_2F(\mu) = c/2$ tem-se a solução para a equação diferencial (51) dado por:

$$\psi(x, y, \mu, \varphi, \omega, \kappa) = \frac{c\kappa\omega \exp\left(-\frac{x}{\omega} - \frac{y}{\kappa}\right)}{2 \left(-\sqrt{(1-\mu^2)} (\kappa \cos(\varphi) + \omega \sin(\varphi)) + \kappa\omega \right)}, \quad (61)$$

sendo ω e κ os autovalores da solução.

Substituindo a solução (61) na equação (50) e simplificando o termo exponencial

tem-se,

$$1 = \frac{c}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \left(\frac{P\omega\kappa}{\sqrt{(1-\mu^2)(-\kappa \cos(\varphi) - \omega \sin(\varphi)) + \omega\kappa}} \right) d\varphi d\mu, \quad (62)$$

onde P denota o valor principal de Cauchy.

Os autovalores ω e κ devem satisfazer a equação (62) para que (61) também seja solução da equação de transporte de nêutrons. Portanto, o domínio permitindo, que constituirá o espectro de autovalores, é aquele que faz com que o lado direito da igualdade seja 1.

Para determinar o espectro de autovalores resolve-se a integral com relação a variável φ utilizando o valor principal de Cauchy e na sequência a integral em relação a μ . Assim, obtém-se,

$$1 = \frac{c}{2} \frac{\omega\kappa}{\sqrt{(\omega^2 + \kappa^2)}} \ln \left(\frac{\sqrt{(\omega^2 + \kappa^2)} + \omega\kappa}{-\sqrt{(\omega^2 + \kappa^2)} + \omega\kappa} \right). \quad (63)$$

Dividindo o argumento da função \ln por $\sqrt{(\omega^2 + \kappa^2)}$ e propondo a seguinte igualdade

$$\nu = \frac{\omega\kappa}{\sqrt{(\omega^2 + \kappa^2)}}, \quad (64)$$

reescreve-se a equação (63) como,

$$1 = \frac{c\nu}{2} \ln \left(\frac{\nu + 1}{\nu - 1} \right). \quad (65)$$

Assim, o espectro de autovalores admissíveis é constituído pelas raízes da função dispersão dada por:

$$\lambda(\nu) = 1 - \frac{c\nu}{2} \ln \left(\frac{\nu + 1}{\nu - 1} \right) = 0. \quad (66)$$

Esta equação possui a mesma forma que a equação que define os autovalores unidimensionais determinados por CASE; ZWEIFEL (1967). E ainda esta função apresenta duas raízes que são os mesmos autovalores assintóticos, $\pm\nu_0$, do problema unidimensional determinado por Case.

Elevando ao quadrado a expressão (64) obtém-se,

$$\frac{1}{\nu^2} = \frac{1}{\omega^2} + \frac{1}{\kappa^2}, \quad (67)$$

a qual é a equação de uma circunferência centrada na origem e com raio igual a $1/\nu$.

Observa-se que o conjunto de autovalores ω e κ é real quando disposto sobre uma circunferência de raio real $1/\nu$ e imaginário quando dispostos sobre uma circunferência de raio $1/\nu$ imaginário, conforme representado na Figura 2.

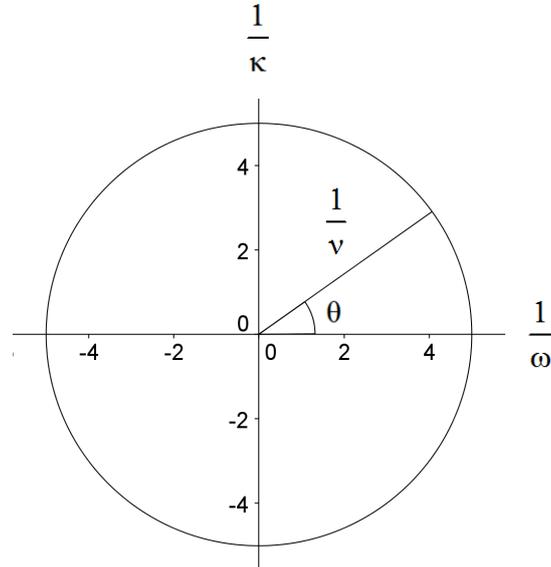


Figura 2: Circunferência que contém o inverso dos autovalores.

A partir da igualdade (67) é possível definir as seguintes relações paramétricas:

$$\frac{1}{\omega} = \frac{1}{\nu} \cos(\theta) \quad \text{e} \quad \frac{1}{\kappa} = \frac{1}{\nu} \sin(\theta), \quad (68)$$

onde ν são autovalores positivos.

Substituindo (68) na autofunções (61) e utilizando a relação trigonométrica

$$\cos(a - b) = \cos(a) \cos(b) + \sin(a) \sin(b), \quad (69)$$

obtém-se,

$$\psi(x, y, \mu, \varphi, \nu, \theta) = \frac{\nu c \exp\left(-\frac{1}{\nu} (x \cos(\theta) + y \sin(\theta))\right)}{2\left(\nu - \sqrt{(1 - \mu^2)} \cos(\varphi - \theta)\right)}. \quad (70)$$

Sabe-se através do problema unidimensional solucionado por CASE; ZWEIFEL (1967) que a função de dispersão (66), para $\nu \notin (-1, 1)$, admite somente duas raízes que são os autovalores discretos $\pm\nu_0$ chamados de autovalores assintóticos os quais são associados a autofunções (70).

Seguindo o desenvolvimento de CASE; ZWEIFEL (1967), se admitir a possibilidade de $\nu \in (-1, 1)$ deve-se acrescentar a autofunção (70) o seguinte termo

$$2\pi\lambda(\nu)\delta\left(\nu - \sqrt{(1 - \mu^2)} \cos(\varphi - \theta)\right), \quad (71)$$

onde $\lambda(\nu)$ é uma função arbitrária e $\delta(\nu - \sqrt{(1 - \mu^2)} \cos(\varphi - \theta))$ é a função de delta de Dirac. Logo, reescreve-se (70) como,

$$\psi(x, y, \mu, \varphi, \nu, \theta) = \exp\left(-\frac{1}{\nu}(x \cos(\theta) + y \sin(\theta))\right) \left(\frac{c\nu}{2(\nu - \sqrt{(1 - \mu^2)} \cos(\varphi - \theta))} + 2\pi\lambda(\nu)\delta(\nu - \sqrt{(1 - \mu^2)} \cos(\varphi - \theta))\right). \quad (72)$$

Substituindo a autofunção (72) na equação de transporte de nêutrons (50) e simplificando o termo exponencial obtém-se,

$$\begin{aligned} \frac{c}{2} + \left(-\sqrt{(1 - \mu^2)} \cos(\varphi - \theta) + \nu\right) \left(2\pi\lambda(\nu)\delta(\nu - \sqrt{(1 - \mu^2)} \cos(\varphi - \theta))\right) = \\ + \frac{c^2\nu}{8\pi} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \left(\frac{P}{\nu - \sqrt{(1 - \mu^2)} \cos(\varphi - \theta)}\right) d\varphi d\mu \\ + \frac{c}{2} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \left(\lambda(\nu)\delta(\nu - \sqrt{(1 - \mu^2)} \cos(\varphi - \theta))\right) d\varphi d\mu, \quad (73) \end{aligned}$$

onde P denota o valor principal de Cauchy.

Para resolver a equação (73) aplica-se no segundo e quarto termo as propriedades da função delta de Dirac dadas por:

$$(x - a)^n \delta(x - a) = 0, \quad \forall n > 0; \quad (74)$$

$$\int_a^b \delta(x - c) dx = 1 \quad \text{onde} \quad a \leq c \leq b, \quad (75)$$

e para solucionar o terceiro termo utiliza-se o valor principal de Cauchy. Logo, tem-se:

$$\frac{c}{2} = \frac{c}{2}\lambda(\nu) + \frac{c^2\nu}{4} \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{\sqrt{(\nu^2 - 1 + \mu^2)}}\right) d\mu. \quad (76)$$

Multiplicando ambos os lados da equação (76) por $2/c$ e resolvendo a integral com relação a μ obtém-se a função de dispersão para $\nu \in (-1, 1)$ dada por:

$$\lambda(\nu) = 1 + \frac{c\nu}{2} \ln\left(\frac{\nu + 1}{\nu - 1}\right). \quad (77)$$

Verifica-se que para a função de dispersão (77) existe um espectro de autovalores contínuos para ν , com $\nu \in (-1, 1)$, associados as autofunções (72). Assim, pode-se escolher $\lambda(\nu)$ de modo que satisfaça a equação (77). Novamente, observa-se que a equação (77) é idêntica a que surge no problema unidimensional solucionado por CASE; ZWEIFEL (1967).

Logo a solução geral do problema é dada por:

$$\psi(x, y, \mu, \varphi) = \int_0^{2\pi} \left(A_{\nu_0}(\theta) \psi_{\nu\theta}(x, y, \mu, \varphi, \theta) + \int_{-1}^1 A(\nu, \theta) \psi(x, y, \mu, \varphi, \nu, \theta) d\nu \right) d\theta \quad (78)$$

onde ψ são as autofunções dadas em (72) e A são os coeficientes da expansão em termos das autofunções.

4.3 Solução da equação de difusão em geometria cartesiana bidimensional

Esta seção mostra que a solução da equação de transporte de nêutrons em geometria cartesiana bidimensional é solução do problema de difusão bidimensional para a mesma geometria.

A equação de difusão em geometria cartesiana é dada por:

$$-D \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \psi(x, y) + (1 - c)\psi(x, y) = 0, \quad (79)$$

onde D é o coeficiente de difusão.

Propondo a solução encontrada para a equação de transporte de nêutrons em geometria cartesiana bidimensional determinada anteriormente como solução da equação de difusão (79) deve-se primeiramente integrar a solução (70) com relação às variáveis angulares φ e μ para obter o fluxo escalar. Assim, tem-se

$$\psi(x, y, \mu, \varphi, \nu, \theta) = \frac{c\nu}{8\pi} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \left(\frac{\exp\left(-\frac{1}{\nu}(x \cos(\theta) + y \sin(\theta))\right)}{\left(\nu - \sqrt{(1 - \mu^2)} \cos(\varphi - \theta)\right)} \right) d\varphi d\mu. \quad (80)$$

Utilizando o resultado (62) após substituir as relações paramétricas dadas em (68) pode-se simplificar (80). Logo, tem-se

$$\psi(x, y, \nu, \theta) = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{1}{\nu}(x \cos \theta + y \sin \theta)\right). \quad (81)$$

Substituindo a autofunção (81) na equação (79) e simplificando o termo exponencial obtém-se,

$$-D \left(\frac{1}{\nu^2} \cos^2(\theta) + \frac{1}{\nu^2} \sin^2(\theta) \right) + (1 - c) = 0. \quad (82)$$

Utilizando a identidade trigonométrica $\cos^2(a) + \sin^2(a) = 1$ nesta equação determina-se o coeficiente de difusão dado por:

$$D = \nu^2(1 - c). \quad (83)$$

Na teoria da difusão para um problema com espalhamento isotrópico o coeficiente de difusão é aproximado por $D = 1/3$. Sendo assim, o autovalor assintótico será expresso como,

$$\nu_0 = \frac{1}{\sqrt{3(1-c)}}. \quad (84)$$

5 SOLUÇÃO ANALÍTICA DA EQUAÇÃO DE TRANSPORTE DE NÊUTRONS EM GEOMETRIA CILÍNDRICA BIDIMENSIONAL

Este capítulo apresenta a solução analítica da equação de transporte de nêutrons em geometria cilíndrica bidimensional para o caso isotrópico, monoenergético e estacionário para um cilindro infinito em um meio homogêneo. Inicialmente, mostra-se a formulação desta equação tomando como base a equação de transporte em geometria cartesiana bidimensional. Na sequência, toma-se a solução encontrada para o problema em geometria cartesiana, determinada no capítulo anterior, como ponto de partida para obter a solução do problema em geometria cilíndrica após fazer algumas mudanças de coordenadas.

A solução obtida para este problema é composta por uma combinação linear de autofunções singulares associadas a um conjunto de autovalores análogos aos determinados por CASE; ZWEIFEL (1967) para a equação de transporte de nêutrons em geometria cartesiana unidimensional. Após, mostra-se que a solução encontrada para o problema em geometria cilíndrica é solução da equação de difusão bidimensional para a mesma geometria. Por fim, compara-se o resultado do problema em geometria cilíndrica obtido por MITSIS (1963) para o fluxo escalar em um cilindro infinito com simetria azimutal.

Soluciona-se também a equação de transporte de nêutrons em geometria cilíndrica bidimensional para o caso monoenergético e estacionário para um cilindro infinito em um meio homogêneo considerando espalhamento linearmente anisotrópico. Inicialmente apresenta-se a formulação do termo de anisotropia linear o qual é adicionado a equação de transporte em geometria cilíndrica bidimensional com espalhamento isotrópico. Na sequência, resolve-se essa equação tomando como base a solução do problema isotrópico em geometria cilíndrica.

5.1 Equação de transporte de nêutrons em geometria cilíndrica bidimensional com espalhamento isotrópico

5.1.1 Formulação da equação de transporte de nêutrons em geometria cilíndrica bidimensional com espalhamento isotrópico

Esta subseção apresenta a formulação da equação de transporte de nêutrons em geometria cilíndrica bidimensional para o caso isotrópico, monoenergético e estacionário para um cilindro infinito em um meio homogêneo. Para tal formulação considerou-se as simplificações feitas na dedução da equação de transporte de nêutrons para o caso em geometria cartesiana apresentada na seção 4.1. Portanto, apresenta-se aqui apenas as simplificações que diferem do caso em geometria cartesiana.

De acordo com BELL; GLASSTONE (1970) para o caso de geometria cilíndrica bidimensional o termo $\vec{\Omega} \cdot \nabla \psi(\vec{r}, \vec{\Omega})$ é dado por,

$$\vec{\Omega} \cdot \nabla \psi(\vec{r}, \vec{\Omega}) = \left(\sqrt{1 - \mu^2} \cos(\varphi) \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\sqrt{1 - \mu^2} \sin(\varphi)}{r} \left(\frac{\partial}{\partial \chi} - \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \right) \psi(r, \varphi, z, \mu, \chi), \quad (85)$$

e o termo integral, $\int \psi(\vec{r}, \vec{\Omega}') d\vec{\Omega}'$, é escrito como,

$$\int \psi(\vec{r}, \vec{\Omega}') d\vec{\Omega}' = \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \psi(r, \chi, \mu', \varphi') d\varphi' d\mu'. \quad (86)$$

Logo a equação de transporte de nêutrons bidimensional para o caso estacionário, isotrópico e monoenergético para um cilindro infinito em um meio homogêneo é dada por:

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{1 - \mu^2} \cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\sqrt{1 - \mu^2} \sin \varphi}{r} \left(\frac{\partial}{\partial \chi} - \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) + 1 \right) \psi(r, \chi, \mu, \varphi) = \\ = \frac{c}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \psi(r, \chi, \mu', \varphi') d\varphi' d\mu', \quad (87) \end{aligned}$$

onde r é a coordenada radial, χ é o ângulo polar, φ e α são os ângulos que definem a direção de propagação do fluxo com $\mu = \cos \alpha$.

5.1.2 Desenvolvimento da solução analítica da equação de transporte de nêutrons em geometria cilíndrica bidimensional com espalhamento isotrópico

Nesta subseção apresenta-se a solução analítica para a equação de transporte de nêutrons em geometria cilíndrica bidimensional (87). Para tal toma-se como ponto

de partida a solução do problema bidimensional cartesiano determinada no capítulo anterior.

A solução da equação de transporte de nêutrons em geometria cartesiana bidimensional para o caso isotrópico, estacionário e monoenergético é dada por:

$$\psi(x, y, \mu, \varphi, \nu, \theta) = \frac{c\nu \exp\left(-\frac{1}{\nu}(x \cos \theta + y \sin \theta)\right)}{2\left(\nu - \sqrt{(1 - \mu^2)}(\cos \varphi \cos \theta + \sin \varphi \sin \theta)\right)}. \quad (88)$$

Para propor (88) como solução do problema em geometria cilíndrica bidimensional realiza-se inicialmente a rotação no sentido anti-horário em um ângulo χ do sistema de coordenadas xy . Assim estas são reescritas em função das novas coordenadas como:

$$x = x' \cos \chi - y' \sin \chi \quad \text{e} \quad y = x' \sin \chi + y' \cos \chi, \quad (89)$$

e a autofunção (88) como:

$$\psi(x', y', \mu, \varphi, \nu, \theta) = \frac{c\nu \exp\left(-\frac{1}{\nu}(x' \cos(\theta - \chi) + y' \sin(\theta - \chi))\right)}{2\left(\nu - \sqrt{(1 - \mu^2)}(\cos \varphi \cos(\theta - \chi) + \sin \varphi \sin(\theta - \chi))\right)}. \quad (90)$$

Nesta circunstância o ângulo χ é considerado como um parâmetro de deslocamento do sistema de coordenadas.

Reescrevendo as coordenadas cartesianas x' e y' em termos de coordenadas cilíndricas como,

$$x' = r \cos \gamma \quad \text{e} \quad y' = r \sin \gamma, \quad (91)$$

e substituindo no argumento da exponencial da expressão (90) obtém-se,

$$-\frac{1}{\nu}r \cos((\theta - \chi) - \gamma). \quad (92)$$

Fazendo o eixo radial r coincidir com a coordenada x' , isto é, $\gamma = 0$ e além disso considerando o ângulo χ como coordenada polar no sistema de coordenadas polares a expressão (90) é dada por:

$$\psi(r, \chi, \mu, \varphi, \nu, \theta) = \frac{c\nu \exp\left(-\frac{1}{\nu}r \cos(\theta - \chi)\right)}{2\left(\nu - \sqrt{(1 - \mu^2)}(\cos(\varphi) \cos(\theta - \chi) + \sin(\varphi) \sin(\theta - \chi))\right)}. \quad (93)$$

Utilizando a relação trigonométrica (69) reescreve-se a equação (93) como:

$$\psi(r, \chi, \mu, \varphi, \nu, \theta) = \frac{c\nu \exp\left(-\frac{1}{\nu}r \cos(\theta - \chi)\right)}{2\left(\nu - \sqrt{1 - \mu^2} \cos(\varphi - (\theta - \chi))\right)}. \quad (94)$$

Considerando que $\nu \notin (-1, 1)$ propõem-se (94) como solução da equação bidimensional em geometria cilíndrica (87) e simplificando o termo exponencial tem-se,

$$\frac{-\frac{1}{\nu}\sqrt{1 - \mu^2} \cos(\varphi) \cos(\theta - \chi) - \frac{1}{\nu}\sqrt{1 - \mu^2} \sin(\varphi) \sin(\theta - \chi) + 1}{\nu - \sqrt{1 - \mu^2} \cos(\varphi - (\theta - \chi))} = \frac{c}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \left(\frac{P}{\nu - \sqrt{1 - \mu^2} \cos(\varphi - (\theta - \chi))} \right) d\varphi d\mu. \quad (95)$$

onde P denota o valor principal de Cauchy.

Multiplicando a equação (95) por ν e reescrevendo o primeiro termo desta equação utilizando a relação trigonométrica (69) tem-se,

$$1 = \frac{c}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \left(\frac{P\nu}{\nu - \sqrt{1 - \mu^2} \cos(\varphi - (\theta - \chi))} \right) d\varphi d\mu. \quad (96)$$

Integrando a equação (96) com relação a φ , utilizando o valor principal de Cauchy e após integrando com relação μ obtém-se

$$1 = \frac{c\nu}{2} \ln \left(\frac{\nu + 1}{\nu - 1} \right). \quad (97)$$

Assim, para $\nu \notin (-1, 1)$ tem-se que o espectro de autovalores admissíveis é constituído pelas raízes da função dispersão:

$$\lambda(\nu) = 1 - \frac{c\nu}{2} \ln \left(\frac{\nu + 1}{\nu - 1} \right) = 0. \quad (98)$$

Novamente, tem-se a mesma expressão determinada por CASE; ZWEIFEL (1967) para o problema unidimensional, a qual possui duas raízes que são os autovalores assintóticos $\pm\nu_0$ associados às autofunções (94).

Assim como para o caso em geometria cartesiana bidimensional para considerar a possibilidade de $\nu \in (-1, 1)$ inclui-se na autofunção (94) o termo,

$$2\pi\lambda(\nu)\delta(\nu - \sqrt{1 - \mu^2} \cos(\varphi - (\theta - \chi))). \quad (99)$$

sendo $\lambda(\nu)$ uma função arbitrária e $\delta(\nu - \sqrt{1 - \mu^2} \cos(\varphi - (\theta - \chi)))$ a função delta de Dirac.

Logo a autofunção (94) é reescrita da forma,

$$\psi(r, \chi, \mu, \varphi, \nu, \theta) = \exp\left(-\frac{1}{\nu}r \cos(\theta - \chi)\right) \left(\frac{c\nu}{2\left(\nu - \sqrt{(1 - \mu^2) \cos(\varphi - (\theta - \chi))}\right)} + 2\pi\lambda(\nu)\delta\left(\nu - \sqrt{(1 - \mu^2) \cos(\varphi - (\theta - \chi))}\right) \right) \quad (100)$$

Substituindo a autofunção (100) na equação (87) e simplificando o termo exponencial obtém-se,

$$\begin{aligned} & 2\pi\lambda(\nu)\delta\left(\nu - \sqrt{(1 - \mu^2) \cos(\varphi - (\theta - \chi))}\right) \left(-\sqrt{(1 - \mu^2) \cos(\varphi - (\theta - \chi))} + \nu\right) \\ & + \frac{c\nu}{2} = \frac{c^2\nu^2}{8\pi} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \left(\frac{P}{\left(\nu - \sqrt{(1 - \mu^2) \cos(\varphi - (\theta - \chi))}\right)} \right) d\varphi d\mu \\ & + \frac{c\nu}{2} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \left(\lambda(\nu)\delta\left(\nu - \sqrt{(1 - \mu^2) \cos(\varphi - (\theta - \chi))}\right) \right) d\varphi d\mu, \quad (101) \end{aligned}$$

onde P denota o valor principal de Cauchy.

Aplicando as propriedades (74) e (75) da função delta de Dirac na equação (101) e multiplicando por $2/c\nu$ obtém-se,

$$1 = \frac{c\nu}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \left(\frac{P}{\left(\nu - \sqrt{(1 - \mu^2) \cos(\varphi - (\theta - \chi))}\right)} \right) d\varphi d\mu + \lambda(\nu). \quad (102)$$

Solucionando agora o termo integral desta equação utilizando o valor principal de Cauchy tem-se

$$\lambda(\nu) = 1 - \frac{c\nu}{2} \ln\left(\frac{\nu + 1}{\nu - 1}\right), \quad (103)$$

verifica-se que para a função de dispersão (77) existe um espectro contínuo de autovalores para ν , com $\nu \in (-1, 1)$, associados as autofunções (100) e ainda esta função de dispersão é idêntica a equação resultante do problema cartesiano unidimensional obtido por CASE; ZWEIFEL (1967).

Assim, tem-se a solução da equação de transporte de nêutrons em geometria cilíndrica bidimensional (87) dada por uma combinação linear de autofunções

$$\psi(r, \chi, \mu, \varphi) = \int_0^{2\pi} \left(A_{\nu 0}(\theta)\psi_{\nu 0}(r, \chi, \mu, \varphi, \theta) + \int_{-1}^1 A(\nu, \theta)\psi(r, \chi, \mu, \varphi, \nu, \theta)d\nu \right) d\theta, \quad (104)$$

onde ψ são as autofunções dadas em (94) e A são os coeficientes da expansão em termos das autofunções.

5.1.3 Solução da equação de difusão em geometria cilíndrica bidimensional

Nesta subseção mostra-se que a solução encontrada para a equação de transporte de nêutrons em geometria cilíndrica bidimensional é solução do problema de difusão bidimensional para a mesma geometria.

A equação de difusão em geometria cilíndrica bidimensional é dada por:

$$-D \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \chi^2} \right) \psi(r, \chi) + (1 - c)\psi(r, \chi) = 0, \quad (105)$$

onde D é o coeficiente de difusão.

Propõem-se que a solução encontrada para a equação de transporte de nêutrons em geometria cilíndrica determinada na subseção anterior é solução da equação de difusão. Para fazer esta substituição integra-se a autofunção (94) com respeito as variáveis angulares φ e μ para obter uma expressão para o fluxo escalar. Assim tem-se

$$\psi(x, y, \mu, \varphi, \nu, \theta) = \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \frac{c\nu \exp\left(-\frac{1}{\nu}r \cos(\theta - \chi)\right)}{2\left(\nu - \sqrt{(1 - \mu^2)} \cos(\varphi - (\theta - \chi))\right)} d\varphi d\mu. \quad (106)$$

Utilizando o resultado (96) pode-se simplificar a equação (106) e assim obter

$$\psi(r, \chi, \mu, \theta) = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{1}{\nu}r \cos(\theta - \chi)\right). \quad (107)$$

Ao substituir (107) na equação de difusão (105) e simplificar o termo exponencial obtém-se,

$$-D \frac{1}{2\nu^2} \cos^2(\theta - \chi) - D \frac{1}{2\nu^2} \sin^2(\theta - \chi) + \frac{(1 - c)}{2} = 0. \quad (108)$$

Reescrevendo a equação (108) utilizando relação trigonométrica $\sin^2(a) + \cos^2(a) = 1$ obtém-se coeficiente de difusão dado por:

$$D = \nu^2(1 - c). \quad (109)$$

Este resultado é idêntico ao encontrado para o problema bidimensional cartesiano.

5.1.4 Solução para fluxo escalar em um cilindro infinito proposta por Mitsis

Nesta subseção compara-se a solução da equação de transporte de nêutrons em geometria cilíndrica bidimensional com o resultado determinado por MITSIS (1963) para fluxo escalar em um cilindro infinito com simetria azimutal.

A solução obtida por Mitsis é apresentada como:

$$\psi(r) = B_{\nu_0} I_0 \left(\frac{r}{\nu_0} \right) + \int_0^1 B(\nu) I_0 \left(\frac{r}{\nu} \right) d\nu. \quad (110)$$

Para comparar com este resultado integra-se a autofunção (107) com respeito a variável χ para determinar o fluxo escalar médio nesta variável azimutal. Assim, tem-se

$$\psi(r, \nu, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp \left(-\frac{1}{\nu} r \cos(\theta - \chi) \right) d\chi = I_0 \left(\frac{r}{\nu} \right), \quad (111)$$

onde I_0 é uma função de Bessel modificada do primeiro tipo e ordem zero.

Como o problema considerado tem simetria azimutal o fluxo escalar médio em χ é o próprio fluxo escalar. Logo, a solução é dada pela combinação linear como mostra em (104) e (111) e é reescrita como:

$$\psi(r) = \int_0^{2\pi} \left(A_{\nu_0}(\theta) I_0 \left(\frac{r}{\nu} \right) + \int_0^1 A(\nu, \theta) I_0 \left(\frac{r}{\nu} \right) d\nu \right) d\theta. \quad (112)$$

Resolvendo a integral com respeito a variável θ tem-se,

$$\psi(r) = B_{\nu_0} I_0 \left(\frac{r}{\nu_0} \right) + \int_0^1 B(\nu) I_0 \left(\frac{r}{\nu} \right) d\nu, \quad (113)$$

onde

$$B(\nu) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} A(\nu, \theta) d\theta, \quad (114)$$

o mesmo vale para o coeficiente B_{ν_0} .

Com esse processo mostra-se a igualdade entre a solução obtida por MITSIS (1963) e a solução para a equação de transporte de nêutrons em geometria cilíndrica bidimensional em função do fluxo escalar.

5.2 Solução analítica da equação de transporte de nêutrons bidimensional em geometria cilíndrica com anisotropia linear

5.2.1 Formulação da equação de transporte de nêutrons bidimensional em geometria cilíndrica com anisotropia linear

A subseção apresenta a formulação da equação do transporte de nêutrons em geometria cilíndrica bidimensional com anisotropia linear para o caso monoenergético e estacionário para um cilindro infinito e em um meio homogêneo. Tomando como base a equação do transporte em geometria cilíndrica com espalhamento isotrópico dada em (87), acrescenta-se a esta equação o termo de anisotropia linear. Para tal,

considera-se a função probabilidade expandida como uma soma de uma série de polinômios de Legendre dada (38).

Para o caso linearmente anisotrópico considera-se $l = 1$ na equação (38) assim, tem-se que os polinômios de Legendre para este caso são dados por:

$$P_0(\mu) = 0 \quad \text{e} \quad P_1(\mu) = \mu, \quad (115)$$

e os polinômios de Legendre associados

$$P_1^1(\mu) = -\sqrt{(1 - \mu^2)}. \quad (116)$$

Substituindo na equação (38) tem-se que a função probabilidade para o caso linearmente anisotrópico é dado por

$$f(\vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega}) = \frac{1}{4\pi} + \frac{3}{4\pi} f_1 \left(\mu\mu' + \sqrt{(1 - \mu^2)}\sqrt{(1 - \mu'^2)} \cos(\varphi - \varphi') \right). \quad (117)$$

Pela relação trigonométrica (69) tem-se que,

$$\begin{aligned} f(\vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega}) = \frac{1}{4\pi} + \frac{3}{4\pi} f_1 \mu\mu' + \frac{3}{4\pi} f_1 \sqrt{(1 - \mu^2)}\sqrt{(1 - \mu'^2)} \cos(\varphi) \cos(\varphi') \\ + \frac{3}{4\pi} f_1 \sqrt{(1 - \mu^2)}\sqrt{(1 - \mu'^2)} \sin(\varphi) \sin(\varphi'). \end{aligned} \quad (118)$$

Substituindo na equação (87) para o caso isotrópico tem-se a equação de transporte de nêutrons em geometria cilíndrica bidimensional para o caso monoenergético e estacionário com anisotropia linear para um cilindro infinito em um meio homogêneo dada por:

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{(1 - \mu^2)} \cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\sqrt{(1 - \mu^2)} \sin \varphi}{r} \left(\frac{\partial}{\partial \chi} - \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) + 1 \right) \psi(r, \chi, \mu, \varphi) = \\ + \frac{c}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \psi(r, \chi, \mu', \varphi') d\varphi' d\mu' + \frac{3\mu c f_1}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \mu' \psi(r, \chi, \mu', \varphi') d\varphi' d\mu' + \\ + \frac{3}{4\pi} \sqrt{(1 - \mu^2)} \cos(\varphi) c f_1 \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \sqrt{(1 - \mu'^2)} \cos(\varphi') \psi(r, \chi, \mu', \varphi') d\varphi' d\mu' + \\ + \frac{3}{4\pi} \sqrt{(1 - \mu^2)} \sin(\varphi) c f_1 \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \sqrt{(1 - \mu'^2)} \sin(\varphi') \psi(r, \chi, \mu', \varphi') d\varphi' d\mu', \end{aligned} \quad (119)$$

onde r é a coordenada radial, χ é o ângulo polar, φ e α são os ângulos que definem a direção de propagação do fluxo sendo $\mu = \cos \alpha$, c é o número médio de nêutrons que emergem por colisão e $c f_1$ é a seção de choque de espalhamento do termo de anisotropia linear.

5.2.2 Desenvolvimento da solução analítica da equação de transporte de nêutrons bidimensional em geometria cilíndrica com anisotropia linear

A subseção apresenta a solução analítica da equação (119). Para tal, tomou-se como base a solução da equação de transporte de nêutrons em geometria cilíndrica com espalhamento isotrópico.

Primeiramente o terceiro termo da equação (119) é nulo pois, pela simetria, já que o problema está estabelecido no plano xy , a corrente na direção do eixo z é zero. Em outras palavras a seguinte integral é nula:

$$\int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \mu' \psi(r, \chi, \mu', \varphi') d\varphi' d\mu' = 0. \quad (120)$$

Com base na solução determinada para a equação do transporte de nêutrons em geometria cilíndrica para o caso isotrópico propõem-se a seguinte solução para o problema (119)

$$\psi(r, \chi, \mu, \varphi, \nu, \theta) = \exp\left(-\frac{1}{\nu} r \cos(\theta - \chi)\right) \left(\frac{\left[\nu c + 3\nu^2 c f_1 (1 - c) \sqrt{(1 - \mu^2)} (\cos(\varphi - (\theta - \chi))) \right]}{2[\nu - \sqrt{(1 - \mu^2)} (\cos(\varphi - (\theta - \chi)))]} \right). \quad (121)$$

Substituindo a proposta de solução (121) no lado esquerdo da equação (119) e simplificando o termo exponencial obtém-se,

$$\frac{c}{2} + \frac{3}{2} c f_1 \sqrt{(1 - \mu^2)} \cos(\varphi - (\theta - \chi)) \nu (1 - c). \quad (122)$$

Por sua vez, a substituição da solução (121) na primeira integral do lado direito da equação (119) obtém-se,

$$\frac{c}{2}. \quad (123)$$

Considerando a parte da equação (119) que trata do espalhamento linearmente anisotrópico, substituindo a solução proposta (119) e simplificando o termo exponencial tem-se,

$$\begin{aligned} & \frac{3c f_1}{4\pi} \sqrt{(1 - \mu^2)} \cos(\varphi) \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \sqrt{(1 - \mu'^2)} \cos(\varphi') (R_1) d\varphi' d\mu' \\ & + \frac{3c f_1}{4\pi} \sqrt{(1 - \mu^2)} \sin(\varphi) \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \sqrt{(1 - \mu'^2)} \sin(\varphi') (R_1) d\varphi' d\mu', \end{aligned} \quad (124)$$

onde $R_1 = \left(\frac{\nu [c + 3\nu c f_1 (1 - c) \sqrt{(1 - \mu'^2)} \cos(\varphi' - (\theta - \chi))]}{2[\nu - \sqrt{(1 - \mu'^2)} \cos(\varphi' - (\theta - \chi))]} \right)$.

Fazendo a mudança de variável $\gamma = (\varphi' - (\theta - \chi))$ em (124) tem-se,

$$\begin{aligned} & \frac{3cf_1}{4\pi} \sqrt{(1-\mu^2)} \cos(\varphi) \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \sqrt{(1-\mu'^2)} \cos(\gamma + (\theta - \chi))(R_2) d\gamma d\mu' \\ & + \frac{3cf_1}{4\pi} \sqrt{(1-\mu^2)} \sin(\varphi) \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \sqrt{(1-\mu'^2)} \sin(\gamma + (\theta - \chi))(R_2) d\gamma d\mu', \end{aligned} \quad (125)$$

onde $R_2 = \left(\frac{\nu[c+3\nu cf_1(1-c)\sqrt{(1-\mu'^2)} \cos(\gamma)]}{2[\nu - \sqrt{(1-\mu'^2)} \cos(\gamma)]} \right)$. Pode-se reescrever este termo utilizando as relações trigonométricas $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$ e $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$ como,

$$\begin{aligned} & \frac{3cf_1}{4\pi} \sqrt{(1-\mu^2)} \cos(\varphi) \cos(\theta - \chi) \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \sqrt{(1-\mu'^2)} \cos(\gamma)(R_3) d\gamma d\mu' \\ & - \frac{3cf_1}{4\pi} \sqrt{(1-\mu^2)} \cos(\varphi) \sin(\theta - \chi) \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \sqrt{(1-\mu'^2)} \sin(\gamma)(R_3) d\gamma d\mu' \\ & + \frac{3cf_1}{4\pi} \sqrt{(1-\mu^2)} \sin(\varphi) \cos(\theta - \chi) \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \sqrt{(1-\mu'^2)} \sin(\gamma)(R_3) d\gamma d\mu' \\ & + \frac{3cf_1}{4\pi} \sqrt{(1-\mu^2)} \sin(\varphi) \sin(\theta - \chi) \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \sqrt{(1-\mu'^2)} \cos(\gamma)(R_3) d\gamma d\mu', \end{aligned} \quad (126)$$

onde $R_3 = \left(\frac{\nu[c+3\nu cf_1(1-c)\sqrt{(1-\mu'^2)} \cos(\gamma)]}{2[\nu - \sqrt{(1-\mu'^2)} \cos(\gamma)]} \right)$.

Pelas relações trigonométricas $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$ e $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$ reescreve-se o termo (126) como,

$$\begin{aligned} & \frac{3cf_1}{4\pi} \sqrt{(1-\mu^2)} \cos(\varphi - (\theta - \chi)) \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \sqrt{(1-\mu'^2)} \cos(\gamma)(R_3) d\gamma d\mu' \\ & - \frac{3cf_1}{4\pi} \sqrt{(1-\mu^2)} \sin(\varphi - (\theta - \chi)) \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \sqrt{(1-\mu'^2)} \sin(\gamma)(R_3) d\gamma d\mu'. \end{aligned} \quad (127)$$

O último termo de (127) anula-se quando resolve-se a integral com relação a variável γ , então (124) é apresentado na forma,

$$\frac{3}{4\pi} cf_1 \sqrt{(1-\mu^2)} \cos(\varphi - (\theta - \chi)) \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \sqrt{(1-\mu'^2)} \cos(\gamma)(S) d\gamma d\mu'. \quad (128)$$

Fazendo o integrando do termo (128) $\gamma \rightarrow \varphi'$, já que esta é uma variável muda, e reconsiderando a componente espacial tem-se,

$$\frac{3}{4\pi} cf_1 \sqrt{(1-\mu^2)} \cos(\varphi - (\theta - \chi)) \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \sqrt{(1-\mu'^2)} \cos(\varphi') \psi(r, \chi, \mu', \varphi', \nu, \theta) d\varphi' d\mu' \quad (129)$$

Assim, do termo (129) tem-se que a corrente é dada por:

$$\int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \sqrt{(1-\mu'^2)} \cos(\varphi') \psi(r, \chi, \mu', \varphi', \nu, \theta) d\varphi' d\mu' = \nu(1-c), \quad (130)$$

e o lado direito da equação é igual à equação (122) então, a solução proposta (121)

é autofunção da equação de transporte em geometria cilíndrica bidimensional com espalhamento linearmente anisotrópico.

6 EQUAÇÃO DE TRANSPORTE DE NÊUTRONS PARA UM CILINDRO DE COMPRIMENTO INFINITO COM ESPALHAMENTO ANISOTRÓPICO

Este capítulo tem como base a equação de transporte de nêutrons desenvolvida por MITSIS (1963) para um cilindro infinito com simetria azimutal e espalhamento isotrópico a qual adicionou-se, com base no trabalho de SIEWERT; THOMAS (1984), os termos fonte externa isotrópica e fluxo incidente constante no contorno. A partir da equação propõem-se neste trabalho solucionar os casos com anisotropia linear e quadrática.

Inicia-se cada subseção deste capítulo construindo os termos de espalhamento anisotrópico os quais são baseados na hipótese de que as soluções dos problemas em geometria cilíndrica são compostas pelos mesmos autovalores determinados por CASE; ZWEIFEL (1967) no problema em geometria cartesiana unidimensional com mesmo grau de anisotropia. Na sequência, solucionam-se estas equações através do método HTS_N (GONÇALVES, 2003), o qual consiste na aplicação do método S_N para a discretização da variável angular juntamente com a transformada de *Hankel* de ordem zero. Por fim, compara-se os resultados numéricos de cada equação com o problema em geometria cartesiana com mesmo grau de anisotropia.

6.1 Equação de transporte de nêutrons desenvolvida por Mitsis para um cilindro infinito

A equação de transporte de nêutrons proposta por MITSIS (1963) para um cilindro de comprimento infinito com simetria azimutal e espalhamento isotrópico é dada por:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{\mu^2} \right) \Phi(r, \mu) = -c \int_0^1 \Phi(r, \mu') \frac{d\mu'}{\mu'^2}, \quad (131)$$

onde $\Phi(r, \mu)$ é o pseudofluxo angular, μ é a pseudovariável angular, que define a direção de propagação do fluxo, r é a variável radial e c é o número médio de nêutrons que

emergem por colisão. Como a equação (131) é definida para o pseudofluxo angular e este não possui sentido físico define-se o fluxo escalar, $\psi(r)$, como

$$\psi(r) = \int_0^1 \Phi(r, \mu) \frac{d\mu}{\mu^2}. \quad (132)$$

A equação (131) está sujeita à condição de contorno,

$$K_1 \left(\frac{R}{\mu} \right) \Phi(R, \mu) + \mu K_0 \left(\frac{R}{\mu} \right) \frac{\partial \Phi(r, \mu)}{\partial r} \Big|_{r=R} = 0, \quad (133)$$

onde K_0 e K_1 são funções de Bessel modificadas do segundo tipo e ordem zero e um respectivamente ¹ e R é o raio do cilindro.

Com base no trabalho desenvolvido por SIEWERT; THOMAS (1984) acrescenta-se a equação (131) os termos de fonte externa isotrópica, Q , e fluxo incidente constante no contorno, F , assim tem-se,

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{\mu^2} \right) \Phi(r, \mu) = -c \int_0^1 \Phi(r, \mu') \frac{d\mu'}{\mu'^2} + (1 - c)(Q(r) - F), \quad (136)$$

onde F é definido por:

$$\psi(R, \mu, \varphi) = \frac{F}{4\pi}, \quad (137)$$

no domínio $\mu \in [-1, 1]$ e $\varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$.

Para a equação (136) define-se o fluxo escalar como,

$$\psi(r) = \int_0^1 \Phi(r, \mu) \frac{d\mu}{\mu^2} + F. \quad (138)$$

6.2 Equação desenvolvida por Mitisis com anisotropia linear

6.2.1 Formulação do termo de anisotropia linear

Esta subsecção apresenta a construção do termo referente a anisotropia linear o qual é adicionado a equação desenvolvida Mitsis (131) considerando o termos de fonte

¹A função de Bessel modificada do segundo tipo e ordem n , K_n , é definida por:

$$K_n(x) = \frac{\pi}{2 \sin(n\pi)} [I_{-n}(x) - I_n(x)] \quad (134)$$

onde n não é um número inteiro e $I_n(x)$ é uma função de Bessel modificada do primeiro tipo e ordem n definida por:

$$I_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! \Gamma(k + n + 1)} \left(\frac{x}{2} \right)^{2k+n} \quad (135)$$

onde $\Gamma(k + n + 1)$ é a função gama.

externa isotrópica e fluxo incidente constante no contorno. O termo de anisotropia é definido a partir da hipótese de que a solução do problema deve ser composta pelos mesmos autovalores determinados por CASE; ZWEIFEL (1967) para o problema em geometria cartesiana unidimensional com anisotropia linear.

Adicionando o termo de espalhamento linearmente anisotrópico à equação (136) tem-se que esta é dada por:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{\mu^2} \right) \Phi(r, \mu) = -(c + 3cf_1\mu^2(1-c)) \int_0^1 \Phi(r, \mu') \frac{d\mu'}{\mu'^2}, \quad (139)$$

onde cf_1 é a seção de choque de espalhamento do termo de anisotropia linear.

Verifica-se a hipótese de construção do termo de anisotropia linear resolvendo a equação (139) pelo método de derivação angular (GONÇALVES, 2003). Assim, derivando a equação (139) três vezes em relação a variável angular μ obtém-se,

$$\left(\frac{\partial^5}{\partial r^2 \partial \mu^3} + \frac{1}{r} \frac{\partial^4}{\partial r \partial \mu^3} + \frac{24}{\mu^5} - \frac{18}{\mu^4} \frac{\partial}{\partial \mu} + \frac{6}{\mu^3} \frac{\partial^2}{\partial \mu^2} - \frac{1}{\mu^2} \frac{\partial^3}{\partial \mu^3} \right) \Phi(r, \mu) = 0. \quad (140)$$

Solucionando a equação diferencial (140) pelo método de separação de variáveis assume-se que o pseudofluxo angular é dado pelo produto de duas funções como,

$$\Phi(r, \mu) = f(r)g(\mu), \quad (141)$$

onde $f(r)$ é uma função que depende de r e $g(\mu)$ é uma função que depende de μ .

Substituindo o pseudofluxo angular (141) na equação diferencial (140) e isolando os termos que dependem das variáveis r e μ tem-se

$$\frac{d^3 g(\mu)}{d\mu^3} \left(-\frac{24}{\mu^5} g(\mu) + \frac{18}{\mu^4} \frac{dg(\mu)}{d\mu} - \frac{6}{\mu^3} \frac{d^2 g(\mu)}{d\mu^2} + \frac{1}{\mu^2} \frac{d^3 g(\mu)}{d\mu^3} \right)^{-1} = f(r) \left(\frac{d^2 f(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df(r)}{dr} \right)^{-1}, \quad (142)$$

onde o lado direito da equação é uma função que depende da variável r e o lado esquerdo é uma função que depende da variável μ . Estas duas funções somente são iguais a uma constante definida aqui como $1/\nu^2$.

A partir disso tem-se que a equação diferencial para a função $g(\mu)$ é dada por:

$$\frac{d^3 g(\mu)}{d\mu^3} = \frac{1}{\nu^2} \left(-\frac{24}{\mu^5} g(\mu) + \frac{18}{\mu^4} \frac{dg(\mu)}{d\mu} - \frac{6}{\mu^3} \frac{d^2 g(\mu)}{d\mu^2} + \frac{1}{\mu^2} \frac{d^3 g(\mu)}{d\mu^3} \right), \quad (143)$$

a qual tem como solução,

$$g(\mu) = \frac{\mu^2 \nu^2 (c_1 + c_2 \mu + c_3 \mu^2)}{\nu^2 - \mu^2}, \quad (144)$$

onde c_1 , c_2 e c_3 são constantes.

A equação diferencial para a função $f(r)$ é dada por:

$$f(r) = \frac{1}{\nu^2} \left(\frac{d^2 f(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df(r)}{dr} \right), \quad (145)$$

a qual tem como solução,

$$f(r) = c_4 I_0 \left(\frac{r}{\nu} \right) + c_5 K_0 \left(\frac{r}{\nu} \right), \quad (146)$$

sendo I_0 e K_0 funções de Bessel modificadas de primeiro e segundo tipo respectivamente e c_4 e c_5 constantes. Como função de Bessel K_0 é infinita na origem, esta não possui sentido físico para o problema aqui tratado assim, considera-se a constante $c_5 = 0$ e a solução (147) é reescrita como:

$$f(r) = c_4 I_0 \left(\frac{r}{\nu} \right). \quad (147)$$

Substituindo as funções $f(r)$ e $g(\mu)$ em (141) tem-se a solução para a equação (140) como a seguinte expressão,

$$\Phi(r, \mu)_\nu = \frac{\mu^2 \nu^2 (c_1 + c_2 \mu + c_3 \mu^2)}{\nu^2 - \mu^2} I_0 \left(\frac{r}{\nu} \right). \quad (148)$$

Para determinar as constantes da solução (148) propõem-se ela como solução da equação (139) de onde obtém-se que,

$$c_1 = c, \quad c_2 = 0 \quad \text{e} \quad c_3 = 3c f_1 (1 - c), \quad (149)$$

substituindo estas constantes em (148) tem-se que a autofunção é dada por:

$$\Phi(r, \mu)_\nu = \frac{\mu^2 \nu^2 (c + 3c f_1 (1 - c) \mu^2)}{\nu^2 - \mu^2} I_0 \left(\frac{r}{\nu} \right), \quad (150)$$

sendo válida para $\nu \notin (-1, 1)$ e portanto a autofunção admite duas raízes.

Seguindo o desenvolvimento de CASE; ZWEIFEL (1967) para considerar a possibilidade de $\nu = \mu$, isto é $\nu \in (-1, 1)$, deve-se acrescentar a autofunção (150) o termo,

$$\lambda(\nu) \delta(\nu - \mu), \quad (151)$$

onde $\lambda(\nu)$ é uma função arbitrária e $\delta(\nu - \mu)$ é a função delta de Dirac. Portanto, a solução (150) é da forma,

$$\Phi(r, \mu)_\nu = \left(\frac{\mu^2 \nu^2 (c + 3c f_1 (1 - c) \mu^2)}{\nu^2 - \mu^2} + \lambda(\nu) \delta(\nu - \mu) \right) I_0 \left(\frac{r}{\nu} \right). \quad (152)$$

Substituindo a componente angular da solução (152) na normalização da variável angular dada por:

$$\int_0^1 \Phi_\nu(\mu) \frac{d\mu}{\mu^2} = 1, \quad (153)$$

tem-se,

$$\int_0^1 \left(\frac{P\mu^2\nu^2(c + 3f_1c(1-c)\mu^2)}{\nu^2 - \mu^2} + \lambda(\nu)\delta(\nu - \mu) \right) \frac{d\mu}{\mu^2} = 1, \quad (154)$$

onde P denota o valor principal de Cauchy.

Resolve-se o primeiro termo da integral da equação (154) utilizando o valor principal de Cauchy e segundo termo aplicando a propriedade (75) da função Delta de Dirac. Assim, os autovalores para o problema (139) são dados por:

$$\lambda(\nu) = \frac{\nu}{2}(3(1-c)cf_1\nu^2 + c) \ln\left(\frac{\nu+1}{\nu-1}\right) - 3(1-c)cf_1 - 1, \quad (155)$$

os quais são idênticos aos autovalores determinados por CASE; ZWEIFEL (1967) para o problema em geometria cartesiana unidimensional com espalhamento linearmente anisotrópico. Isto pode ser verificado a partir da componente angular da auto-função para o caso anisotrópico determinado por CASE; ZWEIFEL (1967) expressa por:

$$\phi_\nu(\mu) = \frac{c\nu}{2(\nu - \mu)} \sum_{l=0}^N (2l+1) f_l \phi_{\nu l} P_l(\mu), \quad (156)$$

onde $P_l(\mu)$ são polinômios de Legendre, f_l são os coeficientes da expansão e $\phi_{\nu l}$ é uma função definida por,

$$\int_{-1}^1 P_l(\mu) \phi_\nu(\mu) d\mu \equiv \phi_{\nu l}. \quad (157)$$

Para o caso com anisotropia linear considera-se $l = 1$ na equação (156) cujos polinômios de Legendre para este caso são:

$$P_0(\mu) = 1 \quad \text{e} \quad P_1(\mu) = \mu, \quad (158)$$

e as funções (157) como,

$$\phi_{\nu 0} = 1 \quad \text{e} \quad \phi_{\nu 1} = \nu(1-c). \quad (159)$$

Ao substituir (158) e (159) na equação (156) tem-se,

$$\phi_\nu(\mu) = \frac{c\nu}{2(\nu - \mu)} (1 + 3f_1\mu\nu(1 - c)). \quad (160)$$

Agora substitui-se a equação (160) na normalização com respeito a componente angular,

$$\int_{-1}^1 \phi_\nu(\mu) d\mu = 1, \quad (161)$$

obtém-se

$$\lambda(\nu) = \frac{\nu}{2}(3(1 - c)cf_1\nu^2 + c) \ln\left(\frac{\nu + 1}{\nu - 1}\right) - 3(1 - c)cf_1 - 1. \quad (162)$$

Sendo assim, os autovalores (155) são idênticos aos determinados por CASE; ZWEIFEL (1967) para o problema em geometria cartesiana unidimensional com anisotropia linear dado em (162).

6.2.2 Solução da equação desenvolvida por Mitisis com anisotropia linear

Nesta subseção soluciona-se a equação de transporte de nêutrons para um cilindro infinito com simetria azimutal, espalhamento linearmente anisotrópico, fonte externa isotrópica e fluxo incidente constante no contorno pelo método HTS_N (GONÇALVES, 2003). Este método consiste na aplicação do método S_N para a discretização da variável angular seguida pela aplicação da transformada de *Hankel* de ordem zero.

A equação (139) considerando os termos fonte externa isotrópica e fluxo incidente constante no contorno (SIEWERT; THOMAS, 1984) é expressa por:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{\mu^2}\right)\Phi(r, \mu) = -(c + 3cf_1(1 - c)\mu^2) \int_0^1 \Phi(r, \mu') \frac{d\mu'}{\mu'^2} + (1 - c)(Q(r) - F), \quad (163)$$

sendo o fluxo escalar definido em (138).

A equação (163) está sujeita à condição de contorno de superfície livre ou corrente nula no contorno conhecida como condição de Marshak (demonstrada no anexo A),

$$K_1(R/\mu)\Phi(R, \mu) + 2DK_0(R/\mu) \frac{\partial\Phi(r, \mu)}{\partial r} \Big|_{r=R} = 0, \quad (164)$$

onde K_1 e K_0 são funções de Bessel modificadas do segundo tipo e $2D = -\mu(3\nu^2(1 - c)cf_1 + 1)$.

Solucionado a equação (163) através do método HTS_N deve-se inicialmente aplicar o método S_N . Este método faz uso da quadratura Gaussiana para a aproximação

do termo integral e na sequência utiliza-se o método de colocação, tomando as $N/2$ raízes positivas do polinômio de Legendre de ordem N como pontos de colocação. Ao aplicar este método tem-se a equação (163) dada por:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{\mu_j^2} \right) \Phi_j(r) = -(c + 3cf_1\mu_j^2(1-c)) \sum_{i=1}^{N/2} w_i \frac{\Phi_i(r)}{\mu_i^2} - (1-c)[S(r)], \quad (165)$$

onde $\Phi_j(r) = \Phi(\mu_j, r)$, μ_i são as raízes positivas do polinômio de Legendre de ordem N , w_i são os pesos gerados pela quadratura Gauss-Legendre e $S(r) = Q(r) - F$. Como esta equação diferencial é não-homogênea sua solução é dada pela soma da solução particular com a solução homogênea do problema.

Determina-se a solução particular aplicando a transformada de *Hankel* de ordem zero definida como:

Seja $\Phi(r)$ uma função de variável real tem-se que a transformada de *Hankel* de $\Phi(r)$ é dada por:

$$H_n[\Phi(r); r \rightarrow \xi] = \int_0^\infty r\Phi(r)J_n(r\xi)dr, \quad (166)$$

onde $J_n(r\xi)$ é uma função de Bessel de primeiro tipo e ordem n ² e ξ é a variável transformada.

Para o caso particular da transformada de *Hankel* de ordem zero ($n = 0$) da parte radial do Laplaciano tem-se que:

$$H_0 \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \Phi(r) \right] = -\xi^2 \bar{\Phi}(\xi), \quad (168)$$

sendo $\bar{\Phi}(\xi)$ a transformada de *Hankel* de ordem zero de $\Phi(r)$. Assim, aplicando a transformada (166) na equação (165) obtém-se,

$$\left(-\xi^2 - \frac{1}{\mu_j^2} \right) \bar{\Phi}_j(\xi) = -(c + 3cf_1\mu_j^2(1-c)) \sum_{i=1}^{N/2} w_i \frac{\bar{\Phi}_i(\xi)}{\mu_i^2} - (1-c)[\bar{S}(\xi)], \quad (169)$$

onde $H_0 S(r) = \bar{S}(\xi)$.

²Seja $n \in R$ um número real que não é um inteiro negativo. A função de Bessel de primeiro tipo e ordem n , J_n , é definida por:

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k+n+1)} \left(\frac{x}{2} \right)^{2k+n} \quad (167)$$

em $[0, +\infty)$, se $n \geq 0$, e em $(0, \infty)$ se $n < 0$. Onde $\Gamma(k+n+1)$ é a função gama.

Separando o termo de índice j do somatório pode-se reescrever (169) como sendo,

$$\left\{ \xi^2 + \left(\frac{1}{\mu_j^2} - \frac{(c + 3cf_1\mu_j^2(1-c))w_j}{\mu_j^2} \right) \right\} \bar{\Phi}_j(\xi) - (c + 3cf_1\mu_j^2(1-c)) \sum_{i=1, i \neq j}^{N/2} \omega_i \frac{\bar{\Phi}_i(\xi)}{\mu_i^2} = (1-c)[\bar{S}(\xi)] \quad (170)$$

Reescrevendo a equação (170) na forma matricial têm-se,

$$(\xi^2 I + A) \bar{\Phi}(\xi) = (1-c)[\bar{S}(\xi)], \quad (171)$$

onde $\bar{\Phi}(\xi)$ é a matriz do fluxo transformado, I é a matriz identidade e A é uma matriz de ordem $N/2 \times N/2$ cujos elementos são,

$$a_{ij} = \begin{cases} \frac{-(c+3cf_1\mu_j^2(1-c))w_i}{\mu_i^2} & \Rightarrow j \neq i \\ \frac{1-(c+3cf_1\mu_i^2(1-c))w_i}{\mu_i^2} & \Rightarrow j = i. \end{cases} \quad (172)$$

Se a matriz A for diagonalizada na forma

$$A = UDU^{-1}, \quad (173)$$

onde U é a matriz dos autovetores e D é uma matriz diagonal cujos elementos são os autovalores da matriz A , pode-se reescrever a equação (217) como:

$$U(\xi^2 I + D)U^{-1}\bar{\Phi}(\xi) = (1-c)[\bar{S}(\xi)], \quad (174)$$

a qual tem como solução para o fluxo transformado,

$$\bar{\Phi}(\xi) = U(\xi^2 I + D)^{-1}U^{-1}(1-c)[\bar{S}(\xi)]. \quad (175)$$

Tomando o j -ésimo elemento da solução (175) dado por:

$$\bar{\Phi}_j(\xi) = (1-c) \sum_{i,k}^{N/2} \frac{u_{jk}v_{ki}}{\xi^2 + \lambda_k} [\bar{S}(\xi)], \quad (176)$$

onde u_{jk} e v_{ki} são os elementos das matrizes U e U^{-1} respectivamente e λ_k são os autovalores da matriz A .

Determina-se o fluxo escalar aplicando a inversa da transformada de *Hankel* de ordem zero definida por:

$$H_0^{-1}[\bar{\Phi}(\xi); \xi \rightarrow r] = \int_0^\infty \xi J_n(\xi r) \bar{\Phi}(\xi) d\xi, \quad (177)$$

na equação (176). Assim, obtém-se

$$\Phi_j(r) = (1 - c) \sum_{i,k}^{N/2} u_{jk} \nu_{ki} \left[\int_0^\infty \xi \frac{\bar{S}(\xi)}{\xi^2 + \lambda_k} J_0(r\xi) d\xi \right]. \quad (178)$$

Para solucionar a integral da equação (178) considera-se os teoremas.

Teorema 1 (*Teorema da Inversão e Hankel*) (SNEDDON, 1972) *Se $\sqrt{r'}f(r')$ é seccionalmente contínua e absolutamente integrável ao longo da reta real positiva, então se $\gamma \geq -1/2$, $\bar{f}_\gamma(\xi) = H_\gamma[f(r'); r' \rightarrow \xi]$ existe e*

$$\int_0^\infty \xi \bar{f}_\gamma(\xi) J_\gamma(\xi r') d\xi = \frac{1}{2} [f(r'+) + f(r'-)]. \quad (179)$$

Teorema 2 (*Relação de Parseval*) (SNEDDON, 1972) *Se as funções $f(r')$ e $g(r')$ satisfazem as condições do teorema 1 e se $\bar{f}_\gamma(\xi)$ e $\bar{g}_\gamma(\xi)$ denotam suas respectivas transformadas de Hankel de ordem $\gamma \geq -1/2$, então*

$$\int_0^\infty r' f(r') g(r') dr' = \int_0^\infty \xi \bar{f}_\gamma(\xi) \bar{g}_\gamma(\xi) d\xi. \quad (180)$$

Assim tomando $\bar{f}_0(\xi)$ e $\bar{g}_0(\xi)$ como $J_0(r\xi)/(\xi^2 + \lambda_k)$ e $\bar{S}(\xi)$ respectivamente obtém-se pelos teoremas que

$$\int_0^\infty \xi \frac{J_0(r\xi)}{\xi^2 + \lambda_k} \bar{S}(\xi) d\xi = \int_0^\infty r' H_0^{-1} \left\{ \frac{J_0(r\xi)}{\xi^2 + \lambda_k} \right\} S(r') dr', \quad (181)$$

onde J_0 é uma função de Bessel do primeiro tipo e ordem zero e

$$H_0^{-1} \left\{ \frac{J_0(r\xi)}{\xi^2 + \lambda_k} \right\} = \int_0^\infty \xi \frac{J_0(r\xi)}{\xi^2 + \lambda_k} J_0(r'\xi) d\xi. \quad (182)$$

O termo integral da equação (182) tem como solução (BARTMAN, 1954):

$$\int_0^\infty \xi \frac{J_0(r\xi)}{\xi^2 + \lambda_k} J_0(r'\xi) d\xi = \begin{cases} I_0(\alpha_k r') K_0(\alpha_k r) & \Rightarrow 0 < r' < r \\ I_0(\alpha_k r) K_0(\alpha_k r') & \Rightarrow r < r' < \infty, \end{cases} \quad (183)$$

onde I_0 e K_0 são funções de Bessel modificadas do primeiro e segundo tipo respectivamente e α_k é a raiz quadrada de λ_k .

Também considera-se as seguintes condições para a função $S(r)$,

$$S(r) = \begin{cases} S(r) & \Rightarrow r < R \\ 0 & \Rightarrow R \leq r < \infty. \end{cases} \quad (184)$$

Substituindo a igualdade (183) em (182) e esta em (181) e considerando a condi-

ção (184) na equação (178) tem-se a solução particular da equação (165) dada por:

$$\Phi_j(r) = (1 - c) \sum_{i,k}^{N/2} u_{jk} \nu_{ki} \left\{ K_0(\alpha_k r) \int_0^r r' I_0(\alpha_k r') S(r') dr' + I_0(\alpha_k r) \int_r^R r' K_0(\alpha_k r') S(r') dr' \right\}. \quad (185)$$

A solução homogênea da equação (165) é obtida considerando sua parte homogênea, que na forma matricial é escrita da forma,

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \Phi(r) - A \Phi(r) = 0. \quad (186)$$

Para determinar a solução da equação (186) considera-se a matriz A diagonalizada na forma (173) sendo seus elementos dados em (218),

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \Phi(r) - U D U^{-1} \Phi(r) = 0. \quad (187)$$

Multiplicando esta equação matricial por U^{-1} tem-se,

$$U^{-1} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \Phi(r) - D U^{-1} \Phi(r) = 0. \quad (188)$$

Como os elementos da matriz U^{-1} são constantes pode-se reescrever (188) como,

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) U^{-1} \Phi(r) - D U^{-1} \Phi(r) = 0. \quad (189)$$

Tomando,

$$H = U^{-1} \Phi, \quad (190)$$

e substituindo na equação (189) tem-se,

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) H(r) - D H(r) = 0, \quad (191)$$

a qual pode ser reescrita como,

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - D \right) H(r) = 0. \quad (192)$$

Solucionando a equação diferencial (192) obtém-se,

$$H(r) = B I_0(\alpha r) + C K_0(\alpha r), \quad (193)$$

em que B e C são matrizes diagonais dos coeficientes e $I_0(\alpha r)$ e $K_0(\alpha r)$ são vetores compostos por funções de Bessel na forma,

$$I_0(\alpha r) = \begin{bmatrix} I_0(\alpha_1 r) \\ I_0(\alpha_2 r) \\ \vdots \\ I_0(\alpha_{N/2} r) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad K_0(\alpha r) = \begin{bmatrix} K_0(\alpha_1 r) \\ K_0(\alpha_2 r) \\ \vdots \\ K_0(\alpha_{N/2} r) \end{bmatrix}. \quad (194)$$

Como a função de Bessel $K_0(\alpha r)$ é infinita na origem, ela não possui sentido físico para o problema aqui tratado, sendo assim, considera-se a matriz C como sendo nula e a solução (193) é reescrita como:

$$H(r) = BI_0(\alpha r). \quad (195)$$

Retornando a relação (190),

$$\Phi(r) = UB I_0(\alpha r), \quad (196)$$

e tomando seu j -ésimo elemento obtém-se a solução homogênea da equação (165) dada por:

$$\Phi_j(r) = \sum_k^{N/2} u_{jk} I_0(\alpha_k r) B_{kk}. \quad (197)$$

Portanto a solução da equação (165) é dada pela soma da solução particular (185) com a solução homogênea (197),

$$\Phi_j(r) = \sum_k^{N/2} u_{jk} I_0(\alpha_k r) B_{kk} + (1 - c) \sum_{ik}^{N/2} u_{jk} \nu_{ki} \left\{ K_0(\alpha_k r) \int_0^r r' I_0(\alpha_k r') S(r') dr' + I_0(\alpha_k r) \int_r^R r' K_0(\alpha_k r') S(r') dr' \right\}, \quad (198)$$

a qual está sujeita a condição de contorno,

$$K_1(R/\mu_j) \Phi_j(R) + 2DK_0(R/\mu_j) \frac{\partial \Phi_j(r)}{\partial r} \Big|_{r=R} = 0, \quad (199)$$

onde $2D = -\mu_j(3\nu^2(1 - c)cf_1 + 1)$.

Por fim, aplicando a condição de contorno (199) na solução geral (198) constitui-se um sistema de equações algébricas dado por:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{N/2} u_{jk} [2D\alpha_k K_0(R/\mu_j) I_0(\alpha_k R) + K_1(R/\mu_j) I_0(\alpha_k R)] B_{kk} = \\ & (c-1) \sum_{i,k}^{N/2} u_{jk} \nu_{ki} \left[2D\alpha_k K_0(R/\mu_j) K_1(\alpha_k R) \int_0^R r' I_0(\alpha_k r') S(r') dr' \right] \\ & - (c-1) \sum_{i,k}^{N/2} u_{jk} \nu_{ki} \left[K_1(R/\mu_j) K_0(\alpha_k R) \int_0^R r' I_0(\alpha_k r') S(r') dr' \right], \end{aligned} \quad (200)$$

o qual possibilita a definição dos coeficientes B_{kk} e permite determinar o pseudofluxo angular.

6.2.3 Resultados numéricos

Apresenta-se a seguir a comparação entre os resultados numéricos do problema em geometria cilíndrica com anisotropia linear com os do problema em geometria cartesiana com mesmo grau de anisotropia. Para tal proposta considera-se que o comprimento da placa e do raio do cilindro são grandes em comparação ao livre caminho médio (lcm)³. Assim, os resultados dos problemas são equivalentes.

Para obter os resultados numéricos considera-se que o comprimento da placa e do raio do cilindro são $L = R = 100000$ com condição de contorno dada em (164). Para a solução do problema em geometria cilíndrica toma-se a ordem de quadratura $N = 50$.

De modo a verificar a diferença entre os resultados do problema em geometria cartesiana com o problema em geometria cilíndrica calcula-se a diferença percentual dada por:

$$\text{Diferença percentual (DP)} = \left| \frac{\text{Fluxo Cartesiano} - \text{Fluxo Cilíndrico}}{\text{Fluxo Cartesiano}} \right| * 100. \quad (202)$$

³Livre caminho médio é a distância média entre duas interações. Usualmente denota-se por λ e é definida por:

$$\lambda = 1/\Sigma_t, \quad (201)$$

sendo esta o inverso da seção de choque macroscópica total, Σ_t .

Caso 1

Neste primeiro caso, Tabela 1, considera-se o fluxo incidente constante no contorno $F = 1/4\pi$ e o termo de fonte externa isotrópica $Q = 0$. O número médio de nêutrons que emergem por colisão e a seção de choque do termo de anisotropia linear são dados por $c = 0,99$ e $cf_1 = 0,8$ respectivamente.

Caso 2

Neste segundo caso, Tabela 2, considera-se o fluxo incidente constante no contorno $F = 0$ e o termo de fonte externa isotrópica $Q = 1$. O número médio de nêutrons que emergem por colisão e a seção de choque de espalhamento do termo de anisotropia linear são dados por $c = 0,99$ e $cf_1 = 0,8$ respectivamente.

Caso 3

Neste terceiro caso, Tabela 3, considera-se o fluxo incidente constante no contorno $F = 1/4\pi$ e a fonte externa isotrópica $Q = 0$. O número médio de nêutrons que emergem por colisão e a seção de choque de espalhamento do termo de anisotropia linear dados por $c = 0,7$ e $cf_1 = 0,6$ respectivamente.

Caso 4

Neste quarto caso, Tabela 4, considera-se o fluxo incidente constante no contorno $F = 0$ e a fonte externa isotrópica $Q = 1$. O número médio de nêutrons que emergem por colisão e a seção de choque de espalhamento do termo de anisotropia linear dados por $c = 0,7$ e $cf_1 = 0,6$ respectivamente.

Tabela 1: Fluxo escalar para os problemas em geometria cilíndrica e cartesiana com $c = 0,99$, $cf_1 = 0,8$, $F = 1/4\pi$ e $Q = 0$

Posição	Cilíndrica	Cartesiana	DP
99990	4,5450	4,5270	0,40
99991	4,9095	4,8901	0,40
99992	5,3033	5,2823	0,40
99993	5,7287	5,7059	0,40
99994	6,1882	6,1636	0,40
99995	6,6846	6,6581	0,40
99996	7,2212	7,1927	0,40
99997	7,8022	7,7715	0,39
99998	8,4351	8,4025	0,39
99999	9,1474	9,1150	0,35
100000	10,3470	10,3420	0,05

Tabela 2: Fluxo escalar para os problemas em geometria cilíndrica e cartesiana com $c = 0,99$, $cf_1 = 0,8$, $F = 0$ e $Q = 1$

Posição	Cilíndrica	Cartesiana	DP
99990	63,8321	63,9755	0,22
99991	60,9312	61,0861	0,25
99992	57,7977	57,9650	0,29
99993	54,4127	54,5935	0,33
99994	50,7561	50,9513	0,38
99995	46,8054	47,0161	0,45
99996	42,5351	42,7625	0,53
99997	37,9122	38,1567	0,64
99998	32,8754	33,1346	0,80
99999	27,2073	27,4648	0,94
100000	17,6611	17,7009	0,22

Tabela 3: Fluxo escalar para os problemas em geometria cilíndrica e cartesiana com $c = 0,7$, $cf_1 = 0,6$, $F = 1/4\pi$ e $Q = 0$

Posição	Cilíndrica	Cartesiana	DP
99990	2,5022E-002	2,3555E-002	6,23
99991	4,2699E-002	4,0196E-002	6,23
99992	7,2869E-002	6,8600E-002	6,22
99993	1,2437E-001	1,1709E-001	6,21
99994	2,1232E-001	1,9993E-001	6,20
99995	3,6265E-001	3,4157E-001	6,20
99996	6,2005E-001	5,8435E-001	6,10
99997	1,0627	1,0029	5,96
99998	1,8328	1,7356	5,60
99999	3,2262	3,0880	4,80
100000	6,7925	7,0045	3,02

Tabela 4: Fluxo escalar para os problemas em geometria cilíndrica e cartesiana com $c = 0,7$, $cf_1 = 0,6$, $F = 0$ e $Q = 1$

Posição	Cilíndrica	Cartesiana	DP
99990	3,3267	3,3267	0,01
99991	3,3220	3,3227	0,02
99992	3,3140	3,3151	0,03
99993	3,3003	3,3023	0,06
99994	3,2770	3,2803	0,10
99995	3,2371	3,2427	0,17
99996	3,1688	3,1783	0,30
99997	3,0514	3,0673	0,52
99998	2,8472	2,8729	0,90
99999	2,4775	2,5142	1,46
100000	1,5316	1,4754	3,81

6.3 Equação de transporte de nêutrons em geometria cilíndrica com anisotropia quadrática

6.3.1 Formulação do termo de anisotropia quadrática

Esta subseção apresenta a construção do termo referente a anisotropia quadrática o qual é adicionado à equação desenvolvida por MITSIS (1963) considerando os termos de fonte externa isotrópica e fluxo incidente constante no contorno. O termo de anisotropia é definido a partir da hipótese de que a solução do problema deve ser composta pelos mesmos autovalores determinados por CASE; ZWEIFEL (1967) para o problema em geometria cartesiana unidimensional com anisotropia quadrática.

Adicionando o termo de anisotropia quadrática a equação (131) tem-se que esta é dada por:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{\mu^2} \right) \Phi(r, \mu) = - \left(c + 3cf_1\mu^2(1-c) \right) \int_0^1 \Phi(r, \mu') \frac{d\mu'}{\mu'^2} - \frac{5}{4} cf_2(3\mu^2 - 1) \int_0^1 (3\mu'^2 - 1) \Phi(r, \mu') \frac{d\mu'}{\mu'^2}, \quad (203)$$

onde cf_2 é a seção de choque do termo de anisotropia quadrática.

Para construção do termo de anisotropia quadrática considerou-se que a solução da equação (203) é composta pelos mesmos autovalores do problemas em geometria cartesiana unidimensional com equivalente grau de anisotropia determinados por CASE; ZWEIFEL (1967). Pode-se verificar a formulação deste termo solucionando a equação (203) pelo método de derivação angular (GONÇALVES, 2003).

Derivando a equação (203) três vezes em relação a variável angular μ obtém-se

$$\frac{\partial^5 \Phi(r, \mu)}{\partial r^2 \partial \mu^3} + \frac{1}{r} \frac{\partial^4 \Phi(r, \mu)}{\partial r \partial \mu^3} + \frac{24}{\mu^5} \Phi(r, \mu) - \frac{18}{\mu^4} \frac{\partial \Phi(r, \mu)}{\partial \mu} + \frac{6}{\mu^3} \frac{\partial^2 \Phi(r, \mu)}{\partial \mu^2} - \frac{1}{\mu^2} \frac{\partial^3 \Phi(r, \mu)}{\partial \mu^3} = 0. \quad (204)$$

A equação diferencial (204) é a mesma obtida no problema com anisotropia linear, logo segue do desenvolvimento dado em (141)-(147) que a solução da equação diferencial (204) é dada por:

$$\Phi_\nu(r, \mu) = \frac{\mu^2 \nu^2 (c_1 + c_2 \mu + c_3 \mu^2)}{\nu^2 - \mu^2} I_0 \left(\frac{r}{\nu} \right), \quad (205)$$

onde c_1 , c_2 e c_3 são constantes e I_0 é uma função de Bessel.

Para determinar as constantes da equação (205) propõem-se está como solução da equação original (203) e assim obtém-se,

$$\begin{aligned} c_1 &= c - \frac{3}{4} c f_2 [3\mu^2(1-c)(1-cf_1) - 1]; \\ c_2 &= 0; \\ c_3 &= 3cf_1(1-c) + \frac{15}{4} c f_2 [3\mu^2(1-c)(1-cf_1) - 1], \end{aligned} \quad (206)$$

logo tem-se que a solução (205) é dada por:

$$\begin{aligned} \Phi_\nu(r, \mu) &= \lambda(\nu) \delta(\nu - \mu) I_0 \left(\frac{r}{\nu} \right) \\ &+ \frac{\mu^2 \nu^2 \left(c + 3cf_1 \mu^2 (1-c) + \frac{5}{4} c f_2 (3\mu^2 - 1) (3\mu^2 (1-c)(1-cf_1) - 1) \right)}{\nu^2 - \mu^2} I_0 \left(\frac{r}{\nu} \right), \end{aligned} \quad (207)$$

assim como no caso linearmente anisotrópico acrescenta-se o termo $\lambda(\nu) \delta(\nu - \mu)$ a solução (207) de modo a admitir a possibilidade de $\nu \in (-1, 1)$.

Substituindo na condição de normalização da componente angular dada em (153) tem-se,

$$\int_0^1 \left(\frac{\mu^2 \nu^2 P \left(c + 3cf_1 \mu^2 (1-c) + \frac{5}{4} c f_2 (3\mu^2 - 1) (3\mu^2 (1-c)(1-cf_1) - 1) \right)}{\nu^2 - \mu^2} \right) \frac{d\mu}{\mu^2} + \int_0^1 (\lambda(\nu) \delta(\nu - \mu)) \frac{d\mu}{\mu^2} = 1, \quad (208)$$

onde P denota o valor principal de Cauchy.

Solucionado a primeira integral da equação (208) utilizando o valor principal de Cauchy e a segunda utilizando a propriedade (75) da função delta de Dirac tem-se como solução,

$$\begin{aligned} \lambda(\nu) = & -1 + \frac{15}{4}\nu^2 cf_2 \left[1 + 3\nu^2(1-c)(cf_1 - 1) \right] - 3\nu^2 cf_1(1-c) \\ & + \ln\left(\frac{\nu+1}{\nu-1}\right) \left(\frac{c\nu}{2} (1 + 3\nu^2 f_1(1-c)) + \frac{5\nu cf_2}{8} \right) \\ & + \ln\left(\frac{\nu+1}{\nu-1}\right) \left\{ \frac{15\nu^3 cf_2}{4} \left[(1-c) \left(\frac{cf_1}{2}(1-3\nu^2) + \frac{3}{2}\nu^2 \right) + \left(\frac{c}{2} - 1 \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (209)$$

Os autovalores dados em (209) são idênticos aos determinados por CASE; ZWEI-FEL (1967) no problema em geometria cartesiana unidimensional com anisotropia quadrática. Isto pode ser verificado por meio da componente angular da autofunção determinada por Case dada em (156).

Para o caso de anisotropia quadrática considera-se $l = 2$ na equação (156). Assim, para este caso os polinômios de Legendre são dados por:

$$P_0(\mu) = 1, \quad P_1(\mu) = \mu \quad \text{e} \quad P_2(\mu) = 1 - 3\mu^2, \quad (210)$$

e as funções $\phi_{\nu l}$ definidas em (157) como:

$$\phi_{\nu 0} = 1, \quad \phi_{\nu 1} = \nu(1-c) \quad \text{e} \quad \phi_{\nu 2} = \frac{3}{2}\nu^2(1-cf_1)(1-c) - \frac{1}{2}. \quad (211)$$

Substituindo (210) e (211) na equação (156) obtém-se

$$\phi_{\nu}(\mu) = \frac{\nu \left(c + 3cf_1\mu^2(1-c) + 5cf_2 \left(\frac{3}{2}\mu^2(1-cf_1)(1-c) - \frac{1}{2} \right) \left(\frac{3}{2}\mu^2 - \frac{1}{2} \right) \right)}{2(\nu - \mu)}. \quad (212)$$

Considerando a normalização da componente angular dada em (161) obtém-se,

$$\begin{aligned} \lambda(\nu) = & -1 + \frac{15}{4}\nu^2 cf_2 \left[1 + 3\nu^2(1-c)(cf_1 - 1) \right] - 3\nu^2 cf_1(1-c) \\ & + \ln\left(\frac{\nu+1}{\nu-1}\right) \left(\frac{c\nu}{2} (1 + 3\nu^2 f_1(1-c)) + \frac{5\nu cf_2}{8} \right) \\ & + \ln\left(\frac{\nu+1}{\nu-1}\right) \left\{ \frac{15\nu^3 cf_2}{4} \left[(1-c) \left(\frac{cf_1}{2}(1-3\nu^2) + \frac{3}{2}\nu^2 \right) + \left(\frac{c}{2} - 1 \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (213)$$

Assim, os autovalores determinados no problema (209) são idênticos aos determinados por CASE; ZWEIFEL (1967) no problema em geometria cartesiana unidimensional com anisotropia quadrática.

6.3.2 Solução da equação de transporte de nêutrons em geometria cilíndrica com anisotropia quadrática

Nesta subseção soluciona-se a equação de transporte de nêutrons para um cilindro infinito com simetria azimutal, fonte externa isotrópica e fluxo incidente constante no contorno com anisotropia quadrática, pelo método HTS_N (GONÇALVES, 2003).

A equação (203) considerando os termos de fonte externa isotrópica e fluxo incidente constante no contorno SIEWERT; THOMAS (1984) é dada por:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{\mu^2} \right) \Phi(r, \mu) = -(c + 3cf_1\mu^2(1-c)) \int_0^1 \Phi(r, \mu') \frac{d\mu'}{\mu'^2} - \frac{5}{4}cf_2(3\mu^2 - 1) \int_0^1 (3\mu'^2 - 1)\Phi(r, \mu') \frac{d\mu'}{\mu'^2} - (1-c)[Q(r) - F], \quad (214)$$

onde $Q(r)$ representa a fonte externa isotrópica e F o fluxo incidente constante no contorno definido por (137). Como a equação (214) está definida para o pseudofluxo angular e este não possui sentido físico define-se o fluxo escalar dado em (138).

Considera-se que a equação (214) esta sujeita a condição de contorno de superfície livre, ou corrente nula no contorno conhecida como condição de Marshak (demonstrada no anexo A) apresentada em (164).

Solucionando a equação (214) pelo método HTS_N deve-se inicialmente aplicar o método S_N nesta equação. Assim obtém-se,

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{\mu_j^2} \right) \Phi_j(r) = - \sum_{i=1}^{N/2} w_i \left(c + 3cf_1\mu_j^2(1-c) + \frac{5}{4}cf_2n_jn_i \right) \frac{\Phi_i(r)}{\mu_i^2} - (1-c)[S(r)], \quad (215)$$

onde μ_i são as raízes positivas do polinômio de Legendre de ordem N , w_i são os pesos gerados pela quadratura Gauss-Legendre, $n_k = 3\mu_k^2 - 1$ e $S(r) = Q(r) - F$. Como a equação diferencial (215) é não-homogênea sua solução é dada pela soma da solução particular com a solução homogênea do problema.

Determina-se a solução particular da equação (215) aplicando a transformada de *Hankel* de ordem zero. Assim tem-se,

$$\begin{aligned} & \left(-\xi^2 - \frac{1}{\mu_j^2}\right) \bar{\Phi}_j(\xi) = \\ & - \sum_{i=1}^{N/2} w_i \left(c + 3cf_1\mu_j^2(1-c) + \frac{5}{4}cf_2n_jn_i \right) \frac{\bar{\Phi}_i(\xi)}{\mu_i^2} - (1-c)[\bar{S}(\xi)], \end{aligned} \quad (216)$$

onde $\bar{\Phi}_j(\xi)$ e $\bar{S}(\xi)$ é a transformada de *Hankel* de $\Phi_j(r)$ e $S(r)$, respectivamente.

Reescrevendo a equação (216) na forma matricial obtém-se

$$(\xi^2 I + A) \bar{\Phi}(\xi) = (1-c)[\bar{S}(\xi)], \quad (217)$$

onde $\bar{\Phi}(\xi)$ é a matriz do fluxo transformado, I é a matriz identidade e A é uma matriz de ordem $N/2 \times N/2$ cujos elementos são,

$$a_{ij} = \begin{cases} \frac{-w_i(c+3cf_1\mu_j^2(1-c)+\frac{5}{4}cf_2n_jn_i)}{\mu_i^2} & \Rightarrow j \neq i \\ \frac{1-w_i(c+3cf_1\mu_j^2(1-c)+\frac{5}{4}cf_2n_j^2)}{\mu_i^2} & \Rightarrow j = i. \end{cases} \quad (218)$$

Como a equação (217) é igual a obtida no problema com anisotropia linear segue do desenvolvimento dado em (173)-(184) que a solução particular da equação (215) é expressa por:

$$\begin{aligned} & \Phi_j(r) = (1-c) \sum_{i,k}^{N/2} u_{jk} \nu_{ki} \\ & \left\{ K_0(\alpha_k r) \int_0^r r' I_0(\alpha_k r') S(r') dr' + I_0(\alpha_k r) \int_r^R r' K_0(\alpha_k r') S(r') dr' \right\}. \end{aligned} \quad (219)$$

A solução homogênea da equação (215) é obtida a partir da forma matricial de sua parte homogênea que é dada por:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \Phi(r) - A\Phi(r) = 0. \quad (220)$$

Como a equação (220) é igual a do problema com anisotropia linear segue do desenvolvimento dado em (187)-(196) que a solução da equação é

$$\Phi_j(r) = \sum_k^{N/2} u_{jk} I_0(\alpha_k r) B_{kk}. \quad (221)$$

Portanto a solução geral da equação (215) é dada pela soma da solução particular (219) com a solução homogênea (221)

$$\Phi_j(r) = \sum_k^{N/2} u_{jk} I_0(\alpha_k r) B_{kk} + (1 - c) \sum_{ik}^{N/2} u_{jk} \nu_{ki} \left\{ K_0(\alpha_k r) \int_0^r r' I_0(\alpha_k r') S(r') dr' + I_0(\alpha_k r) \int_r^R r' K_0(\alpha_k r') S(r') dr' \right\}. \quad (222)$$

Esta equação está sujeita à condição de contorno,

$$K_1(R/\mu_j) \Phi_j(R) + 2DK_0(R/\mu_j) \left. \frac{\partial \Phi_j(r)}{\partial r} \right|_{r=R} = 0, \quad (223)$$

onde $2D = -\mu_j(3\nu^2(1 - c)cf_1 + 1)$.

Por fim, aplicando a condição de contorno (223) na solução geral (222) constitui-se um sistema de equações algébricas dado por:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{N/2} u_{jk} [2D\alpha_k K_0(R/\mu_j) I_0(\alpha_k R) + K_1(R/\mu_j) I_0(\alpha_k R)] B_{kk} = \\ & (c - 1) \sum_{i,k}^{N/2} u_{jk} \nu_{ki} \left[2D\alpha_k K_0(R/\mu_j) K_1(\alpha_k R) \int_0^R r' I_0(\alpha_k r') S(r') dr' \right] \\ & - (c - 1) \sum_{i,k}^{N/2} u_{jk} \nu_{ki} \left[K_1(R/\mu_j) K_0(\alpha_k R) \int_0^R r' I_0(\alpha_k r') S(r') dr' \right] \end{aligned} \quad (224)$$

o qual possibilita a definição dos coeficientes B_{kk} e permite determinar o pseudofluxo angular.

6.3.3 Resultados numéricos

Esta subseção apresenta a comparação entre os resultados do problema em geometria cilíndrica com os do problema em geometria cartesiana com anisotropia quadrática. Para tal, considera-se que o comprimento da placa e do raio do cilindro são grandes em comparação ao livre caminho médio (lcm). Assim, os resultados dos

problemas são equivalentes.

Para os casos apresentados a seguir considera-se que o comprimento da placa e do raio do cilindro são iguais a $L = R = 100000\text{cm}$ e condição de contorno dada em (164). Para a solução do problema em geometria cilíndrica considera-se a ordem de quadratura $N = 50$. Verifica-se também a diferença entre os resultados do problema em geometria cartesiana com o problema em geometria cilíndrica calculando a diferença percentual dada na equação (202).

Caso 1

Neste primeiro caso, Tabela 5, considera-se o fluxo incidente constante no contorno como $F = 1/4\pi$ e a fonte externa isotrópica dada por $Q = 0$. O número médio de nêutrons que emergem por colisão e as seções de choque para o termo de anisotropia linear e quadrática são dados por $c = 0,8$, $cf_1 = 0,6$ e $cf_2 = 0,5$ respectivamente.

Caso 2

Neste segundo caso, Tabela 6, considera-se o fluxo incidente constante no contorno como $F = 1/4\pi$ e a fonte externa isotrópica dada por $Q = 0$. O número médio de nêutrons que emergem por colisão e as seções de choque para o termo de anisotropia linear e quadrática são dados por $c = 0,8$, $cf_1 = 0$ e $cf_2 = 0,5$ respectivamente.

Caso 3

Neste caso, Tabela 7, considera-se o fluxo incidente constante no contorno como $F = 0$ e a fonte externa isotrópica dada por $Q = 1$. O número médio de nêutrons que emergem por colisão e as seções de choque para o termo de anisotropia linear e quadrática são dados por $c = 0,9$, $cf_1 = 0,8$ e $cf_2 = 0,6$ respectivamente.

Caso 4

Neste caso, Tabela 8, considera-se o fluxo incidente constante no contorno como $F = 0$ e a fonte externa isotrópica dada por $Q = 1$. O número médio de nêutrons que emergem por colisão e as seções de choque para o termo de anisotropia linear e quadrática são dados por $c = 0,9$, $cf_1 = 0$ e $cf_2 = 0,6$ respectivamente.

Tabela 5: Fluxo escalar para os problemas em geometria cilíndrica e cartesiana com $c = 0,8$, $cf_1 = 0,6$, $cf_2 = 0,5$, $F = 1/4\pi$ e $Q = 0$

Posição	Cilíndrica	Cartesiana	DP
99990	8,206189E-002	7,487351E-002	9,60
99991	1,250380E-001	1,140906E-001	9,60
99992	1,905418E-001	1,738756E-001	9,59
99993	2,904260E-001	2,650715E-001	9,57
99994	4,428726E-001	4,043584E-001	9,52
99995	6,759838E-001	6,176694E-001	9,44
99996	1,033909	9,462618E-001	9,26
99997	1,588579	1,459180	8,87
99998	2,467331	2,285593	7,95
99999	3,944663	3,734640	5,62
100000	7,335153	7,636765	3,95

Tabela 6: Fluxo escalar para os problemas em geometria cilíndrica e cartesiana com $c = 0,8$, $cf_1 = 0$, $cf_2 = 0,5$, $F = 1/4\pi$ e $Q = 0$

Posição	Cilíndrica	Cartesiana	DP
99990	8,076954E-003	8,076551E-003	4,99E-003
99991	1,547559E-002	1,547490E-002	4,46E-003
99992	2,967462E-002	2,967344E-002	3,98E-003
99993	5,697423E-002	5,697225E-002	3,48E-003
99994	1,096220E-001	1,096187E-001	3,01E-003
99995	2,116850E-001	2,116797E-001	2,50E-003
99996	4,113609E-001	4,113527E-001	1,99E-003
99997	8,085310E-001	8,085189E-001	1,50E-003
99998	1,623960	1,623944	9,85E-004
99999	3,415949	3,415932	4,98E-004
100000	8,686643	8,686643	0,00

Tabela 7: Fluxo escalar para os problemas em geometria cilíndrica e cartesiana com $c = 0,9$, $cf_1 = 0,8$, $cf_2 = 0,6$, $F = 0$ e $Q = 1$

Posição	Cilíndrica	Cartesiana	DP
99990	9,477665	9,511637	0,36
99991	9,347166	9,389613	0,45
99992	9,184030	9,237054	0,57
99993	8,980034	9,046232	0,73
99994	8,724761	8,807296	0,94
99995	8,404796	8,507373	1,21
99996	8,002150	8,128646	1,56
99997	7,490510	7,643370	2,00
99998	6,824023	6,998094	2,49
99999	5,893739	6,049430	2,57
100000	4,035663	3,800053	6,20

Tabela 8: Fluxo escalar para os problemas em geometria cilíndrica e cartesiana com $c = 0,9$, $cf_1 = 0$, $cf_2 = 0,6$, $F = 0$ e $Q = 1$

Posição	Cilíndrica	Cartesiana	DP
99990	9,958379	9,958379	0,00
99991	9,931904	9,931905	1,01E-005
99992	9,888550	9,888552	2,02E-005
99993	9,817486	9,817490	4,07E-005
99994	9,700794	9,700801	7,22E-005
99995	9,508556	9,508566	1,05E-004
99996	9,189963	9,189978	1,63E-004
99997	8,655952	8,655970	2,08E-004
99998	7,740559	7,740580	2,71E-004
99999	6,091989	6,092008	3,12E-004
100000	2,396022	2,396022	0,00

7 CONCLUSÃO

Este trabalho tem como um dos principais resultados a determinação da solução analítica para o problema bidimensional em geometria cartesiana e cilíndrica. A solução para a equação de transporte de nêutrons em geometria cartesiana bidimensional para o caso isotrópico, monoenergético e estacionário é obtida a partir da aplicação do método de derivação angular. Ao aplicar este método foi possível obter uma solução composta por uma combinação linear de autofunções singulares, associadas a um conjunto de autovalores, análogas aos determinadas por Case para o problema em geometria cartesiana unidimensional.

Para a equação de transporte de nêutrons em geometria cilíndrica bidimensional estacionária e monoenergética considerou-se os casos com espalhamento isotrópico e com espalhamento linearmente anisotrópico. A solução do problema isotrópico foi obtida a partir da solução do problema em geometria cartesiana após fazer algumas mudanças de coordenadas. Novamente, encontrou-se a mesma equação de define os autovalores determinados por Case para o problemas em geometria cartesiana. Comparou-se a solução deste problema com os resultados obtidos por Mitsis para o fluxo escalar em um cilindro infinito com simetria azimutal. E ainda percebe-se que ao substituir as soluções para os casos em geometria cartesiana e cilíndrica com espalhamento isotrópico na equação de difusão para as respectivas geometrias obtém-se os mesmos resultados da teoria da difusão. No caso da solução do problema em geométrica cilíndrica com anisotropia linear esta foi determinada a partir da solução do problema em geometria cilíndrica isotrópica.

Como as soluções encontradas para os problemas em geometria cilíndrica e geometria cartesiana são analíticas pode-se determinar as raízes da função de dispersão, a qual define os autovalores, a partir da variação do c , o número médio de nêutrons que emergem por colisão.

Para a equação do transporte de nêutrons desenvolvida por Mitsis para um cilindro infinito com simetria azimutal e espalhamento isotrópico considerando os termos de fonte externa isotrópica e fluxo incidente constante no contorno tem-se como principal resultado a construção do termo de anisotropia linear e quadrática, os quais são

uma melhor aproximação do termo de espalhamento. A formulação dos termos de anisotropia teve como hipótese de que os autovalores que compõem a solução desse problema são idênticos aos determinados por Case para o caso em geometria cartesiana unidimensional e mesmo grau de anisotropia o mesmo pode ser verificado ao aplicar o método de decomposição angular na equação de transporte.

Verifica-se nos resultados obtidos para o problema com anisotropia linear que os resultados da equação em geometria cilíndrica apresentam boa concordância com os do problema em geometria cartesiana com mesmo grau de anisotropia. A menor diferença percentual para este caso de anisotropia ocorre no problema em que considera-se c próximo a 1 como mostra as Tabelas 1 e 2.

Já os resultados numéricos do problema com anisotropia quadrática são similares ao problema em geometria cartesiana unidimensional com mesmo grau de anisotropia. Percebe-se ainda que ao considerar a seção de choque do termo de anisotropia linear igual a zero os resultados aproxima-se ainda mais do problema em geometria cartesiana. Isto pode ser notado nos resultados dos casos 2 e 3 apresentados nas Tabelas 6 e 8.

REFERÊNCIAS

ADOMIAN, G. A Review of the Decomposition Method in Applied Mathematics. **Journal of Mathematical Analysis and Application**, [S.l.], v.2, p.225–230, 1984.

BARICHELLO, L. **Formulação Analítica para Solução do Problema de Ordenada Discreta Unidimensional**. 1992. Tese de Doutorado — Programa de Pós-Graduação em Engenharia (Promec) da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre/ Rs.

BARROS, R. C. D.; LARSEN, E. W. A Spectral Nodal Method For One-Group X,Y-Geometry Discretized Ordinates Problems. **Nuclear Science and Engineering**, [S.l.], v.111, n.1, p.34–45, Maio 1992.

BARTMAN, H. **Tables of Integral Transforms**. [S.l.]: McGraw-Hill Book Company, 1954. v. Volume II.

BELL, G. I.; GLASSTONE, S. **Nuclear Reactor Theory**. New York: [s.n.], 1970.

CABRERA, L. C. **Solução Espectral para Modelos Bidimensionais da Equação Linear de Boltzmann**. 2009. Tese de Doutorado — Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre/ Rs.

CASE, K. M.; ZWEIFEL, P. F. **Linear Transport Theory**. [S.l.]: Addison-Wesley, 1967.

CHANDRASEKHAR, S. **Radiative Transfer**. London: Oxford University Press, 1950.

DOMINGUEZ, D. S. **Método Espectro-Nodal Linear para Problemas de Transporte de Nêutrons na Formulação de Ordenadas Discretas em Geometrias Bidimensional Cartesiana**. 2006. Tese de Doutorado — Universidade do Estado do Rio de Janeiro Instituto Politécnico do Rio de Janeiro, Nova Friburgo/RJ.

FILHO, J. F. P. **Abordagens Espectronodais para Modelos Multidimensionais em Transporte de Partículas**. 2012. Tese de Doutorado — Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre/ RS.

FLETCHER, J. K. A Semianalytic Solution of the Monoenergetic Transport Equation in Cylindrical Geometry and the Derivation of Fluxes from Singular Sources. **Nuclear Science and Engineering**, [S.l.], v.85, n.1, p.55–61, September 1983.

G.C.WICK. Uber Ebene Diffusionproblem. **Z. Phys**, [S.l.], v.120, p.702–705, 1943.

GONÇALVES, G. A. **Solução Analítica da Equação do Transporte de Partículas Neutra em Geometria Cartesiana e Cilíndrica**. 2003. Tese de Doutorado — Programa de Pós-Graduação em Engenharia (Promec) da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre/ Rs.

GONÇALVES, G. A.; LEITE, S. Q. B.; VILHENA, M. T. de. Solution of the Transport Problem with Anisotropic Scattering in Cylindrical Geometry by the Decomposition Method. **Annals of Nuclear Energy**, [S.l.], v.36, n.1, p.98–102, Janeiro 2009.

GONÇALVES, G. A.; VILHENA, M. de; BODMANN, B. E. J. Heuristic Geometric "Eigenvalue Universality" in a One-Dimensional Neutron Transport Problem with Anisotropic Scattering. **Kernthechnik**, [S.l.], v.75, n.1-2, p.50–52, Março 2010.

HAUSER, E. B. **Estudo e Solução da Equação de Transporte de Nêutrons Bidimensional pelo Método LTSn para Elevadas Ordens de Quadratura Angular: LTSn2D-Diag e LTSn2D-DiagExp**. 2002. Tese de Doutorado — Programa de Pós-Graduação em Engenharia (Promec) da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre/ Rs.

KAVENOKY, A. The C_n method of solving the transport equation: application to cylindrical geometry. **Nuclear Science and Engineering**, [S.l.], v.65, n.3, p.514–531, Março 1978.

MARK, C. **The Spherical Harmonics Method**, 1. [S.l.]: Atomic Energy Of Canada Limited, 1957.

MENEZES, W. A. **Métodos Espectronodais para Cálculos de Transporte de Partículas Neutras com Fonte Fixa na Formação de Ordenadas Discretas e Multigrupo de Energia**. 2012. Tese de Doutorado — Universidade Estadual do Rio de Janeiro, Instituto Politécnico, Nova Friburgo/Rj.

MITSIS, G. J. **Transport Solutions to the Monoenergetic Critical Problems**. 1963. Tese de Doutorado — Argonne National Laboratory University of Chicago, Chicago.

SIEWERT, C. E. The F_n Method in Neutron-Transport Theory. Part I: Theory and Application. **Nuclear Science and Engineering**, [S.l.], v.69, p.156–160, 1979.

SIEWERT, C. E.; THOMAS, J. R. J. Neutron Transport Calculations in Cylindrical Geometry. **Nuclear Science and Engineering**, [S.l.], v.87, p.107–112, 1984.

SNEDDON, I. N. **The Use of Integral Transform**. [S.I.]: MacGraw-Hill, 1972.

TEKKALMAZ, M.; ALTAÇ, Z. Solution of Radiative Transfer Problems in Participating, Linearly Anisotropically Scattering Hollow Spherical Medium With Skn Method. **Thermal Science and Technology**, [S.I.], v.27, n.1, p.23–38, 2007.

VELHO, H. F. C.; VILHENA, M. de; SEGATTO, C. F.; GONÇALVES, G. Analytical Solution of the One-dimensional Discrete Ordinates Equation by the Laplace and *Hankel* Integral Transform. **Integral Methods in Science and Engineering**, [S.I.], p.267–272, 2004.

VELHO, H. F. C.; VILHENA, M. T. de; SEGATTO, C. F.; GONÇALVES, G. A. A Transport Equation Solution in Cylindrical Geometry with Anisotropic Scattering Using Decomposition and *Hankel* Transform Techniques. **International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences**, [S.I.], 2005.

VILHENA, M. de; BARICHELLO, L. A New Analytical Approach to Solve the Neutron Transport Equation. **Kerntechnik**, [S.I.], v.56, n.3, p.334–336, 1991.

ANEXO A APROXIMAÇÃO PARA A CONDIÇÃO DE CONTORNO DE SUPERFÍCIE LIVRE E DE REFLEXÃO

Considerando a dependência angular do fluxo angular de nêutrons em geometria plana, $\Phi(x, \mu)$, expandida em uma série de polinômios de Legendre dada da seguinte forma,

$$\Phi(x, \mu) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{4\pi} \phi_l(x) P_l(\mu), \quad (225)$$

onde $P_l(\mu)$ são polinômio de Legendre e $\phi_l(x)$ são coeficientes da expansão dados por (BELL; GLASSTONE, 1970):

$$\phi_l(x) = 2\pi \int_{-1}^1 \Phi(x, \mu) P_l(\mu) d\mu. \quad (226)$$

Tomando a aproximação P_1 para o fluxo angular de nêutrons tem-se para este caso que os polinômios de Legendre P_0 e P_1 são dados por:

$$P_0(\mu) = 1 \quad \text{e} \quad P_1(\mu) = \mu, \quad (227)$$

e os coeficientes da expansão

$$\phi_0(x) = 2\pi \int_{-1}^1 \Phi(x, \mu) d\mu = \phi(x), \quad (228)$$

o qual representa o fluxo total de nêutrons e

$$\phi_1(x) = 2\pi \int_{-1}^1 \mu \Phi(x, \mu) d\mu = J(x) \quad (229)$$

o qual representa corrente angular de nêutrons.

Substituindo (227), (228) e (229) na equação (225) obtém-se

$$\Phi(x, \mu) = \frac{1}{4\pi} \phi(x) + \frac{3}{4\pi} \mu J(x). \quad (230)$$

Considerando uma placa de comprimento L a condição de contorno de superfície livre, ou corrente nula no contorno conhecida como condição de Marshak (BELL; GLASSTONE, 1970) para $x = 0$ é dada por:

$$\int_0^1 \frac{\mu}{4\pi} [\phi(0) + 3\mu J(0)] d\mu, \quad (231)$$

e para $x = L$ é dada por:

$$\int_{-1}^0 \frac{\mu}{4\pi} [\phi(L) + 3\mu J(L)] d\mu. \quad (232)$$

Igualando as equações (231) e (232) tem-se

$$\int_0^1 \mu [\phi(0) + 3\mu J(0)] d\mu = \int_{-1}^0 \mu [\phi(L) + 3\mu J(L)] d\mu. \quad (233)$$

A partir da hipótese de que o integrando zera no contorno quando μ pertence ao intervalo de $[0, 1]$, ou seja, não há corrente no domínio, tem-se que para $x = 0$,

$$\mu\phi(0) + 3\mu^2 J(0) = 0, \quad (234)$$

e para $x = L$,

$$\mu\phi(L) + 3\mu^2 J(L) = 0. \quad (235)$$

Agora considerando a equação de transporte de nêutrons para o caso e monoenergético, estacionário com anisotropia linear dada por:

$$\mu \frac{\partial \Phi(x, \mu)}{\partial x} + \Phi(x, \mu) = \frac{c}{2} \int_{-1}^1 \Phi(x, \mu') d\mu' + \frac{3\mu c f_1}{2} \int_{-1}^1 \Phi(x, \mu') d\mu'. \quad (236)$$

Multiplicando a equação (236) por μ e integrando no intervalo de $[-1, 1]$ obtem-se a corrente angular de nêutrons dada por:

$$\int_{-1}^1 \mu^2 \frac{\partial \Phi(x, \mu)}{\partial x} d\mu + \int_{-1}^1 \mu \Phi(x, \mu) d\mu = \int_{-1}^1 \frac{c\mu}{2} \int_{-1}^1 \Phi(x, \mu') d\mu' d\mu + \int_{-1}^1 \frac{3\mu^2 c f_1}{2} \int_{-1}^1 \mu' \Phi(x, \mu') d\mu' d\mu. \quad (237)$$

Utilizando o polinômio de Legendre de ordem dois pode-se reescrever o termo μ^2 como,

$$\mu^2 = \frac{2}{3} P_2(x) + \frac{1}{3}, \quad (238)$$

e o termo integral como,

$$J(x) = \int_{-1}^1 \mu \Phi(x, \mu) d\mu. \quad (239)$$

onde $J(x)$ represent a corrente angular de nêutrons.

Substituindo (238) e (239) na equação (237) obtém-se

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{-1}^1 \left(\frac{2}{3} P_2(x) + \frac{1}{3} \right) \Phi(x, \mu) d\mu = -(1 - cf_1) J(x). \quad (240)$$

Reescrevendo a equação (240) utilizando as autofunções de CASE; ZWEIFEL (1967) $\Phi_\nu(x, \mu) = \chi_\nu(x) \phi_\nu(\mu)$ e considerando que $J(x)$ agora é dada por $J_\nu(x)$ tem-se,

$$\frac{d}{dx} \chi_\nu(x) \int_{-1}^1 \left(\frac{2}{3} P_2(\mu) \phi_\nu(\mu) + \frac{1}{3} \phi_\nu(\mu) \right) d\mu = -(1 - cf_1) J_\nu(x). \quad (241)$$

Sabe-se da solução de Case que,

$$\int_{-1}^1 P_l(\mu) \phi_\nu(\mu) d\mu = \phi_{\nu l}(\mu), \quad (242)$$

onde para $l = 0$ tem-se,

$$\int_{-1}^1 \phi_\nu(\mu) d\mu = 1, \quad (243)$$

e para $l = 2$ tem-se,

$$\int_{-1}^1 P_2(\mu) \phi_\nu(\mu) d\mu = \frac{3}{2} \nu^2 (1 - c) (1 - cf_1) - \frac{1}{2}. \quad (244)$$

Substituindo (243) e (244) na equação (241) obtém-se

$$\frac{d\chi_\nu(x)}{dx} (\nu^2 (1 - c) - \nu^2 (1 - c) cf_1) = -(1 - cf_1) J_\nu(x). \quad (245)$$

Considerando a Lei de Fick dada por:

$$J_\nu(x) = -\nu^2 (1 - c) \frac{d\chi_\nu(x)}{dx}, \quad (246)$$

e substituindo na equação (245) obtém-se

$$\frac{d\chi_\nu(x)}{dx} (-\nu^2 (1 - c) cf_1) = cf_1 J_\nu(x). \quad (247)$$

Somando em ambos os lados da equação (247) $-1/3 \frac{d\chi_\nu(x)}{dx}$ e multiplicando a

mesma por -3 obtém-se

$$\frac{d\chi_\nu(x)}{dx}(3\nu^2(1-c)cf_1 + 1) = -3cf_1J_\nu(x) + \frac{d}{dx}\chi_\nu(x). \quad (248)$$

Agora considerando a aproximação para o fluxo angular (230) em termos das autofunções de Case como,

$$\phi_\nu(\mu)\chi_\nu(x) = \frac{1}{4\pi}\chi_\nu(x) + \frac{3}{4\pi}\nu J_\nu(x), \quad (249)$$

e substituindo na equação (237) obtém-se,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \mu^2 \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{4\pi}\chi_\nu(x) + \frac{3}{4\pi}\mu J_\nu(x) \right) d\mu + \int_{-1}^1 \mu \left(\frac{1}{4\pi}\chi_\nu(x) + \frac{3}{4\pi}\mu J_\nu(x) \right) d\mu = \\ + \int_{-1}^1 \frac{\mu c}{2} \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{4\pi}\chi_\nu(x) + \frac{3}{4\pi}\mu' J_\nu(x) \right) d\mu' d\mu \\ + \int_{-1}^1 \frac{3\mu^2 c f_1}{2} \int_{-1}^1 \mu' \left(\frac{1}{4\pi}\chi_\nu(x) + \frac{3}{4\pi}\mu' J_\nu(x) \right) d\mu' d\mu. \end{aligned} \quad (250)$$

Solucionando as integrais da equação (250) e multiplicando esta equação por -3 obtém-se

$$-3J_\nu(x) = -3cf_1J_\nu(x) + \frac{d\chi_\nu(x)}{dx}. \quad (251)$$

Assim, como o lado direito das equações (251) e (248) são iguais conclue-se que,

$$\frac{d\chi_\nu(x)}{dx}(3\nu^2(1-c)cf_1 + 1) = -3J_\nu(x). \quad (252)$$

Tomando as condições de contorno (231) e (232) reescritas em termos das autofunções de Case como,

$$\mu\chi_\nu(0) + 3\mu^2J_\nu(0) = 0, \quad (253)$$

e

$$\mu\chi_\nu(L) + 3\mu^2J_\nu(L) = 0, \quad (254)$$

e substituindo na equação (252) obtém-se

$$\chi_\nu(0) + 3\mu J_\nu(0) = 0 \Rightarrow \chi_\nu(0) - \mu(3\nu^2(1-c)cf_1 + 1) \frac{d\chi_\nu(x)}{dx} \Big|_{x=0} = 0, \quad (255)$$

e

$$\chi_\nu(L) + 3\mu J_\nu(L) = 0 \Rightarrow \chi_\nu(L) - \mu(3\nu^2(1-c)cf_1 + 1) \frac{d\chi_\nu(x)}{dx} \Big|_{x=L} = 0, \quad (256)$$

Denotando $2D = -\mu(3\nu^2(1-c)cf_1 + 1)$ tem-se que a condições para superfície livre é dada por:

$$\chi_\nu + 2D \frac{d\chi_\nu}{dx} \Big|_{x=0, x=L} = 0 \quad (257)$$

sendo esta nula para o caso difusivo.

De forma geral pode-se reescrever (257) como,

$$\chi_\nu + b\vec{n}\vec{\nabla}\chi_\nu(x) = 0 \quad (258)$$

em que b é não negativo.

Se b é igual a $2D$ tem-se que a equação (258) é a condição de contorno de superfície livre, se b for grande em relação ao fluxo χ_ν no contorno, a equação (258) se torna uma condição de contorno de corrente zero e se b for pequeno em relação ao fluxo χ_ν no contorno, a equação (258) é uma condição de fluxo nulo no contorno.

Solução da Equação de Transporte de Nêutrons para um Cilindro de Comprimento Infinito com Espalhamento Anisotrópico – Luana Lazzari



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PELOTAS
Instituto de Física e Matemática
Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática



Dissertação

Solução da Equação de Transporte de Nêutrons para um Cilindro de Comprimento Infinito com Espalhamento Anisotrópico

LUANA LAZZARI

Pelotas, 2016