UNIVERSIDADE FEDERAL DE PELOTAS
Instituto de Física e Matemática
Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática

Dissertação

Soluções Assintóticas Formais de Segunda Ordem na Homogeneização Assintótica de Meios Microperiódicos

Bruna da Silva Leitzke

Pelotas, 2017

Bruna da Silva Leitzke

Soluções Assintóticas Formais de Segunda Ordem na Homogeneização Assintótica de Meios Microperiódicos

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática da Universidade Federal de Pelotas, como requisito parcial à obtenção do título de Mestra em Modelagem Matemática

Orientador: Prof. Dr. Leslie Darien Pérez Fernández
Coorientador: Prof. Dr. Julián Bravo Castillero

Pelotas, 2017

Universidade Federal de Pelotas / Sistema de Bibliotecas
Catalogação na Publicação

L533s Leitzke, Bruna da Silva

Soluções assintóticas formais de segunda ordem na homogeneização assintótica de meios microperiódicos / Bruna da Silva Leitzke ; Leslie Darien Pérez Fernández, orientador ; Julián Bravo Castillero, coorientador. — Pelotas, 2017.

130 f. : il.

Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática, Instituto de Física e Matemática, Universidade Federal de Pelotas, 2017.

1. Método de homogeneização assintóticas. 2. Materiais microperiódicos. 3. Comportamento efetivo. 4. Soluções assintóticas formais de segunda ordem. I. Fernández, Leslie Darien Pérez, orient. II. Castillero, Julián Bravo, coorient. III. Título.

CDD : 511.8

Elaborada por Ubirajara Buddin Cruz CRB: 10/901

Bruna da Silva Leitzke

Soluções Assintóticas Formais de Segunda Ordem na Homogeneização Assintótica de Meios Microperiódicos

Dissertação aprovada, como requisito parcial, para obtenção do grau de Mestre em Modelagem Matemática, Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática, Instituto de Física e Matemática, Universidade Federal de Pelotas.

Data da Defesa: 04 de agosto de 2017

Banca examinadora:

Prof. Dr. Leslie Darien Pérez Fernández (Orientador)
Doutor em Matemática pelo Instituto de Cibernética, Matemática e Física, Cuba

Prof. Dr. Alexandre Molter
Doutor em Engenharia Mecânica pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Brasil

Profa. Dra. Rejane Pergher
Doutora em Engenharia Mecânica pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Brasil

Profa. Dra. Letícia Tonetto
Doutora em Matemática Aplicada pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Brasil

Dedico esta dissertação aos meus pais.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à todos aqueles que, direta ou indiretamente, me ajudaram a concluir este trabalho. E por tudo aquilo que me fortaleceu e inspirou durante esse processo.

Aos professores e colegas do Programa de Pós Graduação em Modelagem Matemática e do Instituto de Física e Matemática por todo o incentivo e aprendizado.

À CAPES pelo apoio financeiro.

Aos amigos que sempre estiveram presentes e me ajudaram a compreender e acreditar cada vez mais nos meus sonhos.

Ao querido professor Dr. Valdecir Bottega, e às queridas professoras Drª Camila Pinto da Costa e Drª Rejane Pergher, que desde a graduação acreditaram na minha capacidade e me motivaram a seguir estudando. E também, por terem me mostrado a arte de lecionar com amor.

Ao meu querido coorientador Dr. Julián por todos os ensinamentos, e por ser um exemplo de bondade e humildade.

Ao meu querido orientador Dr. Leslie por todas as conversas, ajuda e apoio nos momentos mais difíceis. Por toda a dedicação, confiança, amizade e, principalmente, por tudo aquilo que me ensinou.

Aos meus avós e familiares por todo amor, atenção e carinho. Em especial, aos meus pais Elisabete e Gilson, por serem meus exemplos de força e persistência.

E finalmente, agradeço a vida e aos caminhos que me fizeram chegar até aqui. Por todos os desafios superados, descobertas e reflexões que me motivaram a continuar aprendendo, pesquisando e ensinando.

"Dolor, placer y muerte no son más que el proceso de la existencia. La lucha revolucionaria en este proceso es una puerta abierta a la inteligencia."

— FRIDA KAHLO

RESUMO

LEITZKE, Bruna da Silva. **Soluções Assintóticas Formais de Segunda Ordem na Homogeneização Assintótica de Meios Microperiódicos**. 2017. 130 f. Dissertação (Mestrado em Modelagem Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática, Instituto de Física e Matemática, Universidade Federal de Pelotas, Pelotas, 2017.

Nesta dissertação o método de homogeneização assintótica é utilizado como ferramenta na obtenção de soluções para alguns problemas físicos, lineares, unidimensionais e multidimensionais. O estudo se baseia em modelos matemáticos que descrevem o comportamento de sólidos heterogêneos na microestrutura. O método busca um novo problema, denominado problema homogeneizado (meio homogêneo), que é equivalente ao problema original (meio heterogêneo). Assim, de um parâmetro geométrico pequeno, separam-se as escalas macroscópica e microscópica e aplica-se o método de homogeneização assintótica a partir da célula básica. Essa célula apresenta uma regularidade e periodicidade na microestrutura do material, onde contém todas as características físicas do meio. Portanto, os resultados obtidos podem ser estendidos ao longo do domínio da estrutura. Assim, uma solução para o problema original é proposta através de uma solução assintótica formal. No desenvolvimento do método são encontrados os problemas locais, os coeficientes efetivos e o problema homogeneizado. Os problemas locais são referentes ao comportamento do material na célula básica e devem ser resolvidos para a obtenção das soluções dos termos da solução assintótica e dos coeficientes efetivos. Esses coeficientes, juntamente com a solução do problema homogeneizado, proporcionam o comportamento efetivo (global), equivalente ao que ocorre fisicamente no meio heterogêneo. O problema original apresenta equações diferenciais parciais com coeficientes rapidamente oscilantes. Portanto, buscam-se os coeficientes efetivos, pertencentes ao problema homogeneizado, correspondentes aos coeficientes do problema original. Finalmente, a solução do problema original deve convergir para a solução do problema homogeneizado, e isto é mostrado matematicamente através da relação de proximidade entre as soluções. Em particular soluções assintóticas formais de segunda ordem são obtidas para aproximar melhor os detalhes locais das soluções exatas, pois nas abordagens mais tradicionais do método de homogeneização assintótica procuram-se apenas soluções assintóticas formais de primeira ordem que não fornecem tais detalhes. Para ilustrar os resultados obtidos são propostos exemplos, com o intuito de verificar a proximidade entre as soluções encontradas.

Palavras-chave: Método de homogeneização assintótica, Materiais microperiódicos, Comportamento efetivo, Soluções assintóticas formais de segunda ordem.

ABSTRACT

LEITZKE, Bruna da Silva. **Second-Order Formal Asymptotic Solutions in the Asymptotic Homogenization of Microperiodic Media**. 2017. 130 f. Dissertação (Mestrado em Modelagem Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática, Instituto de Física e Matemática, Universidade Federal de Pelotas, Pelotas, 2017.

In this dissertation, the asymptotic homogenization method is used as a tool to obtain solutions for some physical, linear, one-dimensional and multidimensional problems. The study is based on mathematical models that describe the behavior of heterogeneous solids in the microstructure. The method looks for a new problem, called homogenized problem (homogeneous medium), which is equivalent to the original problem (heterogeneous medium). Thus, from a small geometric parameter, the macroscopic and microscopic scales are separated and the asymptotic homogenization method is applied from the basic cell. This cell presents a regularity and periodicity in the microstructure of the material, and it contains all the physical characteristics of the medium. Therefore, the results obtained can be extended over the domain of the structure. Thus, a solution to the original problem is proposed as a formal asymptotic solution. In the development of the method the local problems, the effective coefficients and the homogenized problem are found. The local problems are related to the behavior of the material in the basic cell and must be solved to obtain the solutions of the terms of the formal asymptotic solution and the effective coefficients. These coefficients, together with the solution of the homogenized problem, provide the effective (global) behavior, equivalent to what occurs physically in the heterogeneous medium. The original problem presents partial differential equations with rapidly oscillating coefficients. Therefore, effective coefficients of the homogenized problem, corresponding to the coefficients of the original problem are sought. Finally, the solution of the original problem must converge to the solution of the homogenized problem, and this is shown mathematically through the proximity relation between the solutions. In particular, second-order formal asymptotic solutions are obtained to improve the approximation of the local details of the exact solutions, as the traditional approach of the asymptotic homogenization method seeks only first-order formal asymptotic solutions which do not provide such details. In order to illustrate the results obtained, examples are proposed to verify the proximity between the solutions found.

Keywords: Asymptotic homogenization method, Microperiodic materials, Effective behavior, Second-order formal asymptotic solutions.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 Estruturas micro-heterogêneas naturais. 14
Figura 2 Estruturas micro-heterogêneas construídas pelo homem. 14
Figura 3 Processo de separação de escalas. 15
Figura 4 Ilustração da hipótese de homogeneidade equivalente. 15
Figura 5 Material funcionalmente graduado microperiódico. 16
Figura 6 Material compósito bifásico microperiódico. 16
Figura 7 (a) Periodicidade do coeficiente com relação à variável lenta ou global x; (b) Periodicidade do coeficiente com relação à variável rápida ou local y e (c) Comprimento de periodicidade referente à célula básica, em y. 22
Figura 8 Ilustração do domínio $\Omega = \Omega_M \bigcup \Omega_I \bigcup \Gamma^\varepsilon$. 59
Figura 9 Variação do coeficiente de condutividade, para diferentes valores de ε. 75
Figura 10 Solução $N_1(x/\varepsilon)$ do problema local, para diferentes valores de ε. . . 76
Figura 11 Solução $u_1(x, y)$, para diferentes valores de ε. 77
Figura 12 Soluções: $u_0(x)$ do problema homogeneizado, $u^{(1)}(x, \varepsilon)$ da SAF e $u^\varepsilon(x)$ do problema original. 78
Figura 13 Soluções $N_1(x/\varepsilon)$ e $N_2(x/\varepsilon)$ dos problemas locais, para diferentes valores de ε. 80
Figura 14 Soluções $u_1(x, y)$ e $u_2(x, y)$, para diferentes valores de ε. 81
Figura 15 Soluções: $u_0(x)$ do problema homogeneizado, $u^{(2)}(x, \varepsilon)$, $u^{(1)}(x, \varepsilon)$ assintóticas formais e $u^\varepsilon(x)$ exata do problema original. 83
Figura 16 Soluções $N_{11}(x/\varepsilon)$, $N_{22}(x/\varepsilon)$ e $N_{33}(x/\varepsilon)$ dos problemas locais, para diferentes valores de ε. 86
Figura 17 Soluções $u_1(x, y)$ e $u_2(x, y)$, para diferentes valores de ε. 87
Figura 18 Soluções: $u_0(x)$ do problema homogeneizado, $u^{(2)}(x, \varepsilon)$ e $u^{(1)}(x, \varepsilon)$ assintóticas formais do problema original. 88
Figura 19 Variação das funções $\lambda(y)$ e $\mu(y)$, para diferentes valores de ε. . . . 90

LISTA DE SIGLAS E SÍMBOLOS

MHA	Método de homogeneização assintótica.
SAF	Solução assintótica formal.
D	Conjunto dos reais, aberto e conexo.
∂D	Contorno da região D.
$\overline{D}$	Fecho de D ($\overline{D} = D \cup \partial D$).
$\|D\|$	Volume ocupado pela região D.
D_M	Região correspondente à matriz do meio.
D_I	União dos domínios I que se distribuem em D_M.
Γ^ε	Conjunto de superfície de contato entre D_M e D_I.
L^2	Espaço das funções de quadrado integrável com norma $\|\cdot\|_{L^2(D)} = \sqrt{\int_D (\cdot)^2} dx$.
$\mathcal{H}^1$	Espaço das funções $L^2(D)$ cujas primeiras derivadas estão contidas em $L^2(D)$ com norma $\|\cdot\|_{H^1(D)} = \|\cdot\|_{L^2(D)} + \left\|\frac{d(\cdot)}{dx}\right\|_{L^2(D)}$.
$\langle\cdot\rangle$	Operador da integral média em D $\left(\langle\cdot\rangle = \frac{1}{\|D\|}\int_D (\cdot) dx\right)$.
B_ε	Espaço normado.
$\mathcal{O}$	Ordem de uma função em B_ε.
$\mathcal{C}^n$	Espaços das funções contínuas com derivadas contínuas até ordem n.
n_i	Vetor normal $n_i = (n_1, n_2, ..., n_d)$.
δ_{ij}	Delta de Kronecker (para $i = j$: $\delta_{ij} = 1$, e para $i \neq j$: $\delta_{ij} = 0$).
$[\![\vartheta]\!] = 0$	Continuidade de $\vartheta = \vartheta(x)$ em Γ^ε.
$\mathcal{L}^\varepsilon, \mathcal{L}_{\alpha\beta}$	Operadores diferenciais lineares.
L	Comprimento característico na escala macroscópica.
l	Comprimento característico na escala microscópica.
ε	Parâmetro geométrico pequeno $\left(\varepsilon = \frac{L}{l}\right)$.
x	Variável macroscópica, global ou lenta.

y	Variável microscópica, local ou rápida $\left(y = \dfrac{x}{\varepsilon}\right)$.
$u^\varepsilon, u_k^\varepsilon$	Soluções dos problemas originais.
$u^{(\infty)}$	Solução assintótica formal.
u^n, u_i^n	Soluções assintóticas formais de ordem n.
a^ε	Coeficiente de condutividade térmica ($a^\varepsilon(x) = a(y)$).
$\hat{a}$	Coeficiente efetivo.
a_{ij}^ε	Tensor de condutividade térmica ($a_{ij}^\varepsilon(x) = a_{ij}(y)$).
$\hat{a}_{ij}$	Coeficientes efetivos.
C_{ijkl}^ε	Tensor de elasticidade ($C_{ijkl}^\varepsilon(x) = C_{ijkl}(y)$).
$\hat{C}_{ijkl}$	Coeficientes efetivos.
f^ε	Densidade de fonte de calor ($f^\varepsilon(x) = f(x, y)$).
$\hat{f}$	Fonte efetiva ($\hat{f}(x) = \langle f(x, y)\rangle$).
f_i^ε	Componentes do vetor das forças de corpo ($f_i^\varepsilon(x) = f_i(x, y)$).
$\hat{f}_i$	Fonte efetiva ($\hat{f}_i(x) = \langle f_i(x, y)\rangle$).
q_1, q_2	Temperaturas nas extremidades.
h	Temperatura no contorno do domínio.
h_k	Componentes do vetor de deslocamento no contorno do domínio.
N_i, N_{ij}	Soluções dos problemas locais dependentes de y (caso térmico).
$N_{ijk}N_{ijkl}$	Soluções dos problemas locais dependentes de y (caso elástico).
$u_0, u_{0,k}$	Soluções dos problemas homogeneizados.
$\mathcal{X}, \mathcal{Y}$	Funções de corte.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO 14
Motivação 14
Revisão Bibliográfica 17
Objetivos 19
Estrutura do Trabalho 20

1 CONCEITOS PRELIMINARES 21
1.1 Meios Microperiódicos 21
1.2 Expansão Assintótica e Solução Assintótica Formal 22
1.3 Formalismo Matemático do MHA 23

2 APLICAÇÃO DO MÉTODO DE HOMOGENEIZAÇÃO ASSINTÓTICA EM MEIOS UNIDIMENSIONAIS 25
2.1 Aplicação do MHA 25
2.2 Relação de Proximidade entre as Soluções 37
2.3 Cálculo das Soluções Analíticas dos Problemas Original e Homogeneizado 40

3 APLICAÇÃO DO MÉTODO DE HOMOGENEIZAÇÃO ASSINTÓTICA EM MEIOS MULTIDIMENSIONAIS 43
3.1 Desenvolvimento do Problema para Casos Térmicos Lineares com Coeficientes Contantes 43
3.1.1 Aplicação do MHA 43
3.1.2 Conservação de Propriedades pelo Coeficiente Efetivo 50
3.1.3 Relação de Proximidade entre as Soluções 54
3.2 Desenvolvimento do Problema para Casos Elásticos Lineares com Coeficientes Funcionalmente Graduados 59
3.2.1 Aplicação do MHA 59
3.2.2 Conservação de Propriedades pelo Coeficiente Efetivo 67
3.2.3 Relação de Proximidade entre as Soluções 71

4 EXEMPLOS 74
4.1 Caso Térmico Unidimensional 74
4.1.1 Exemplo 1 74
4.1.2 Exemplo 2 79
4.2 Caso Térmico Multidimensional 83
4.3 Caso Elástico Multidimensional 89

5 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS. 92

REFERÊNCIAS 94

ANEXO A PRINCÍPIOS DO MÁXIMO PARA EQUAÇÕES ELÍPTICAS 100
A.1 Caso Unidimensional com Coeficientes Contínuos 100
A.2 Caso Multidimensional Generalizado 100

ANEXO B CASO CONDUTIVO UNIDIMENSIONAL: EXEMPLOS 102
B.1 Cálculo da Solução do Coeficiente Efetivo $\hat{a}$ 102
B.2 Cálculo da Solução $N_1(y)$ **do Problema Local** 103
B.3 Prova da Continuidade de $N_1(y)$ 104
B.4 Antissimetria de $N_1(y)$ 105

ANEXO C MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS PARA PROBLEMAS DE VALOR DE CONTORNO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS LINEARES DE SEGUNDA ORDEM 108

ANEXO D CASO CONDUTIVO MULTIDIMENSIONAL: EXEMPLO 111
D.1 Cálculo da Solução do Problema Local para $N_l(y)$ 111
D.2 Cálculo da Solução $u_0(x)$ **do Problema Homogeneizado** 114
D.3 Cálculo da Solução do Problema Local para $N_{pl}(y)$ 115

ANEXO E CASO ELÁSTICO MULTIDIMENSIONAL: EXEMPLO 125
E.1 Cálculo da Solução do Tensor de Coeficientes Efetivos $\hat{C}_{ijkl}$ 125
E.2 Cálculo da Solução do Problema Local para $N_{kpq}(y)$ 127

INTRODUÇÃO

Motivação

Meios micro-heterogêneos possuem propriedades físicas que variam de forma rápida e são uma opção muito utilizada em projetos onde se deseja obter propriedades físicas melhoradas em comparação com aquelas dos meios homogêneos (PANASENKO, 2005). Eles podem ser encontrados na natureza, como na estrutura óssea ou na madeira (Figura 1), ou ainda, podem ser fabricados pelo homem para algumas aplicações específicas, exemplos disso são o compósito bifásico e a cerâmica que são ilustrados na Figura 2.

Figura 1: Estruturas micro-heterogêneas naturais.

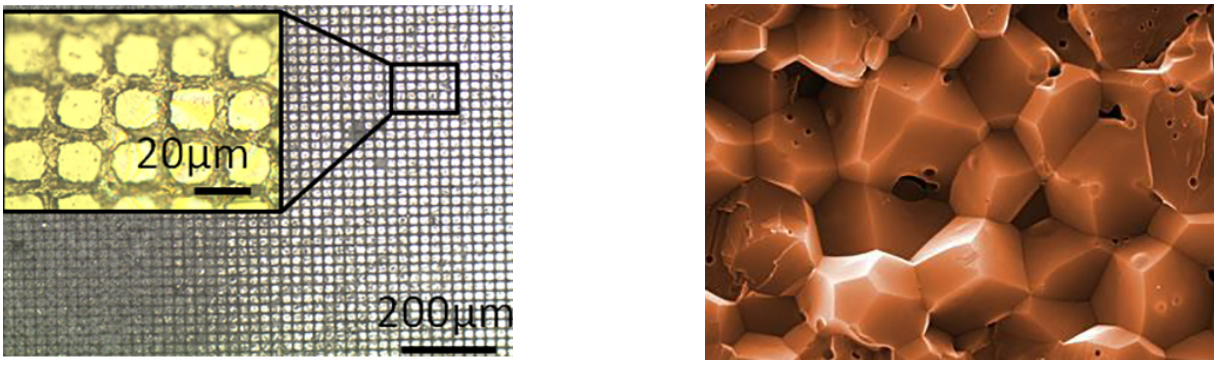

Figura 2: Estruturas micro-heterogêneas construídas pelo homem.

Além disso, esses meios possuem duas características fundamentais que são a separação de escalas e a hipótese do contínuo. Isto é, são caracterizados por apresentarem propriedades efetivas na escala macroscópica, ou seja, esses materiais na

maioria das vezes possuem uma aparência homogênea, mas ao se aproximar deles percebe-se a presença de heterogeneidade. Dessa forma tem-se a escala microscópica, essa que é heterogênea e contínua, pela hipótese do contínuo, e que é grande o suficiente se comparada com a escala atômica em que a matéria é discreta. Essa explicação está ilustrada na Figura 3, onde l e L são comprimentos característicos da microescala e da macroescala, respectivamente. A separação de escalas é caracterizada por um parâmetro geométrico ε dado por $\varepsilon = l/L$, onde $0 < \varepsilon \ll 1$ (BAKHVALOV; PANASENKO, 1989).

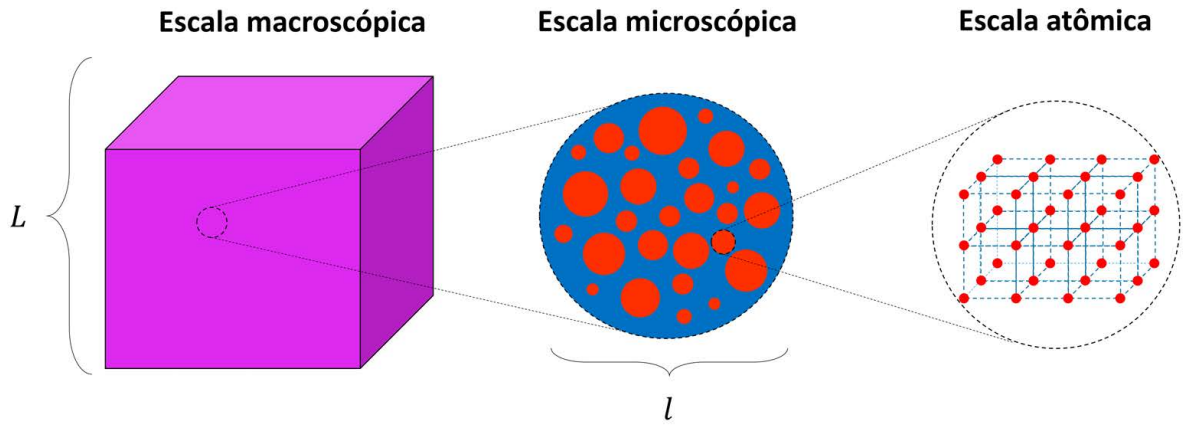

Figura 3: Processo de separação de escalas.

Através da heterogeneidade da microestrutura tem-se uma rápida variação nas propriedades físicas, que podem estar relacionadas à aplicações que envolvam elasticidade ou condutividade térmica, por exemplo. Com isso os modelos matemáticos que descrevem a forma em que esses materiais se comportam são formulados por problemas que apresentam equações diferenciais parciais com coeficientes que oscilam de forma rápida. Mas se a separação de escalas e a hipótese do contínuo são satisfeitas, então vale a hipótese de homogeneidade equivalente (Figura 4). Ou seja, existe um meio homogêneo ideal com propriedades constantes que representa o comportamento efetivo do meio heterogêneo. Esse meio homogêneo é modelado por um problema com coeficientes constantes.

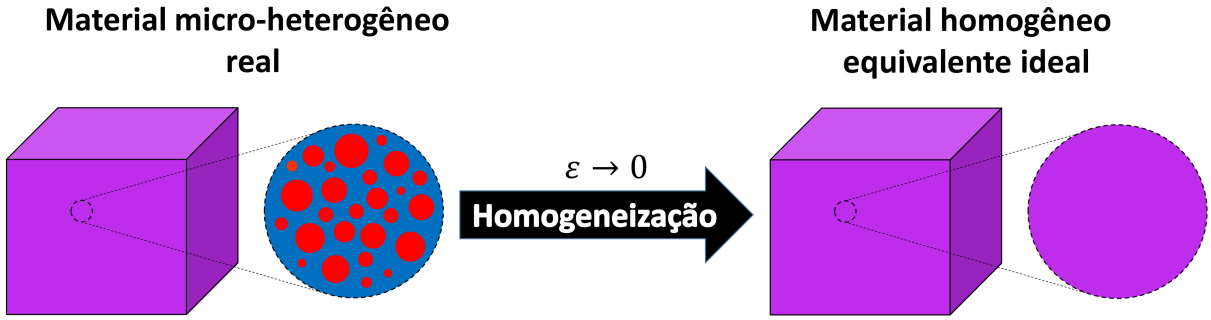

Figura 4: Ilustração da hipótese de homogeneidade equivalente.

Alguns dos materiais micro-heterogêneos também podem ser periódicos. Dessa forma, se considera uma amostra de material, que se repete de forma regular e periódica ao longo de todo o domínio, chamada célula básica. Essa célula recorrente engloba todas as propriedades físicas e geométricas do meio. Para ilustrar considere dois tipos de materiais, os materiais funcionalmente graduados e os compósitos. Os materiais funcionalmente graduados são compósitos manufaturados variando quase continuamente a densidade de partículas dentro de uma matriz, e podem ser modelados idealmente com propriedades que variam continuamente (SADD, 2014). Na Figura 5 a heterogeneidade é dada de forma unidimensional na direção x_1, com (x_1, x_2, x_3) representando os eixos na macroescala, e (y_1, y_2, y_3) correspondendo aos eixos na microescala, na qual aparece a célula de periodicidade.

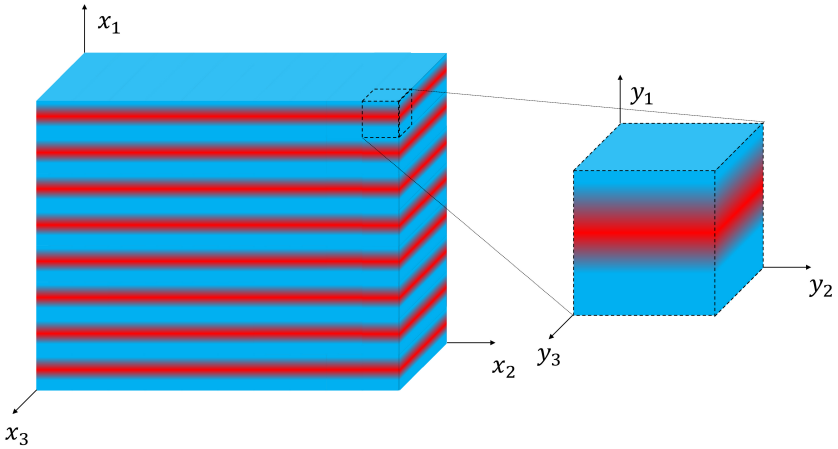

Figura 5: Material funcionalmente graduado microperiódico.

Já os materiais compósitos são estruturas formadas por dois ou mais materiais homogêneos constituintes, chamados fases, que são insolúveis entre si, e onde suas propriedades são constantes (KAW, 2006). Uma ilustração desse tipo de meio é apresentada na Figura 6, onde a heterogeneidade é bidimensional no plano x_1 e x_2.

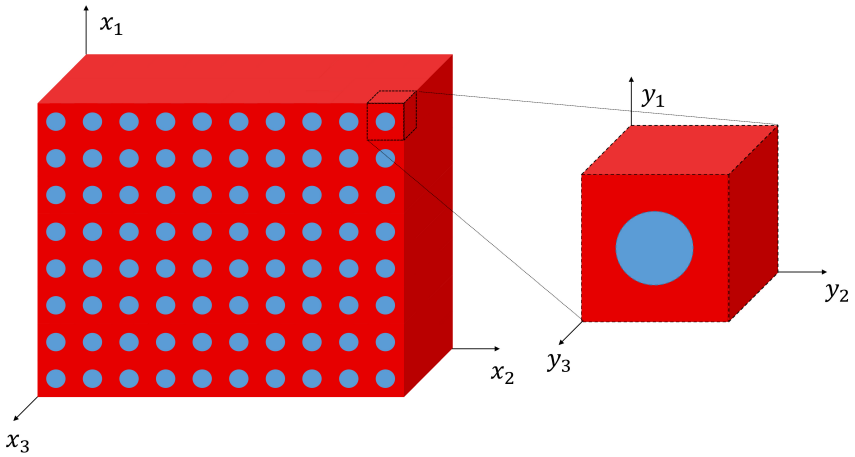

Figura 6: Material compósito bifásico microperiódico.

Neste trabalho o interesse é resolver modelos matemáticos que descrevem o comportamento físico de meios microperiódicos. Do ponto de vista matemático, ao formular esses modelos, se encontram sistemas de equações diferenciais parciais com coeficientes rapidamente oscilantes e que cumprem condições de contorno. E assim, na maioria das vezes esses problemas são muito difíceis de resolver. Um exemplo disso seria solucionar esses problemas de forma numérica, mas isso requereria uma discretização muito fina do domínio, pois o interesse é analisar o comportamento do meio levando em conta suas características locais em cada parte do material. Isso provavelmente teria um alto custo computacional e também poderia haver a possibilidade de comprometimento da convergência do método na procura da solução. Com isso, uma forma alternativa de resolver esses problemas é dada através de um método matemático rigoroso chamado método de homogeneização assintótica (MHA). Esse método busca encontrar o comportamento global (ou comportamento efetivo) do meio, considerando suas propriedades físicas e geométricas (BENSOUSSAN; LIONS; PAPANICOLAU, 1978; BAKHVALOV; PANASENKO, 1989; CIORANESCU; DONATO, 1999; PANASENKO, 2005).

O MHA consiste em propor uma solução em série de potências de ε, chamada solução assintótica formal (SAF) para o problema original. Assim, ao substituir essa solução no problema obtém-se uma sequência de problemas recorrentes para encontrar os coeficientes dos termos da SAF proposta como solução. Além disso, encontram-se os problemas locais, os coeficientes efetivos e o problema homogeneizado. Os problemas locais descrevem o comportamento local do meio e os coeficientes efetivos são referentes ao problema homogeneizado, que é o problema sobre o meio homogêneo ideal equivalente ao problema sobre o meio micro-heterogêneo em estudo. Além disso, com o intuito de validar o método demonstra-se que a norma das diferenças das soluções exata e assintótica do problema original e a solução do problema homogeneizado são de ordem ε, ou seja, os problemas são equivalentes quando as soluções do problema original convergem para a solução do problema homogeneizado ao fazer $\varepsilon \to 0$. Assim, a aplicação direta do MHA produz uma SAF do problema, o qual inclui a obtenção dos coeficientes efetivos do meio. De fato, na atualidade, este tem sido o objetivo fundamental da aplicação do MHA, ou seja, a obtenção de coeficientes efetivos de meios heterogêneos.

Revisão Bibliográfica

Materiais compósitos, sejam eles naturais ou fabricados pelo homem atraíram a atenção de estudiosos como MAXWELL (1873), RAYLEIGH (1892) e EINSTEIN (1906), que procuravam determinar as propriedades físicas dessas estruturas, segundo HASHIN (1963). Em particular, o MHA foi desenvolvido anos depois (LIMA, 2016), com as obras de SANCHEZ-PALANCIA (1970, 1980), DE GIORGI; SPAGNOLO (1973), MARCHENKO; KRUSLOV (1974), BAKHVALOV (1974, 1975a,b), OLEINIK (1975), BABUSKA (1976a,b,c), BENSOUSSAN; LIONS; PAPANICOLAU (1978), CHRISTENSEN (1979), BAKHVALOV; PANASENKO (1989) e BENVENISTE (1995).

Os avanços na teoria desse método se deram pela necessidade em solucionar problemas de valor de contorno locais em estruturas micro-heterogêneas. Com isso, pesquisas vem sendo realizadas em diversas áreas e com diferentes objetivos. Alguns trabalhos serão mencionados a seguir.

No trabalho de RODRIGUEZ-RAMOS et al. (2001) foi aplicado o MHA em um compósito elástico de duas fases paralelamente reforçado com fibra e com propriedades transversalmente isotrópicas. Assim, pode-se encontrar expressões fechadas para as propriedades efetivas e soluções analíticas dos problemas locais. Um estudo semelhante foi realizado por GUINOVART-DIAZ et al. (2001), onde resolveram o problema elástico de um compósito bifásico e, assim, os resultados foram utilizados para determinar numericamente o comportamento elástico linear de dois tipos de compósitos fibrosos. Além disso, CIORANESCU; PAULIN (1979) aplicaram o MHA no problema elástico que descreve o comportamento de uma barra cilíndrica, onde se pretendeu estudar esse meio com relação as suas tensões elásticas.

Os materiais piezoelétricos possuem o efeito de converter energia elétrica em energia mecânica e vice-versa. A ultrassonografia é um exemplo de aplicação desse efeito, pois é realizada através de um aparelho que produz ondas ultrassônicas por meio da deformação de um material piezoelétrico, geralmente um compósito com inclusões de cerâmica piezoelétrica. No âmbito do MHA muitos autores se preocuparam em resolver os problemas que envolvem materiais piezoelétricos, entre alguns estão: OTERO; BRAVO-CASTILLERO; RODRIGUEZ-RAMOS (1997), SABINA et al. (2001) e BRAVO-CASTILLERO et al. (2001). O osso, por exemplo, é um material natural com comportamento piezoelétrico (HOLLISTER et al., 1989). Nesse sentido, pode-se fazer um estudo a respeito das propriedades efetivas desses materiais utilizando o MHA. BRAVO-CASTILLERO et al. (1998) apresentaram esse estudo em um material laminado bifásico, onde encontraram expressões para as constantes efetivas envolvidas no problema. Esse enfoque também teve a atenção de OTERO (2005) que resolveu o problema sobre meios porosos, piezocerâmicos e termo-magneto-eletro-elásticos, respectivamente.

Outro exemplo de aplicação do MHA é na otimização estrutural, em que procura-se encontrar o melhor projeto para determinadas estruturas; alguns trabalhos são: BENDSOE (1989), SUZUKI; KIKUCHI (1991), ROZVANY; ZHOU; BIRKER (1992), HASSANI; HINTON (1998a,b,c), TORQUATO (2010) e BENDSOE; SIGMUND (2013). Em particular, na otimização topológica tem-se o objetivo de minimizar uma variável a partir de restrições adequadas. Neste contexto, alguns trabalhos sobre otimização via MHA foram desenvolvidos a partir de meios microperiódicos com células recorrentes com vazios ou compostas por lâminas. BENDSOE; KIKUCHI (1988) encontraram a distribuição ótima de um meio anisotrópico via MHA e método dos elementos finitos, onde o objetivo era encontrar uma nova estrutura através da original, essa que era composta por uma infinidade de pequenas inclusões vazias distribuídas periodicamente no material. SUZUKI; KIKUCHI (1991) utilizaram o MHA para estudar a melhor otimização de forma e topológica de uma estrutura elástica, onde se basearam no trabalho de BENDSOE; KIKUCHI (1988).

Além de todas as aplicações do MHA em áreas distintas, seu estudo formal mais aprofundado também pode gerar resultados interessantes. Um deles é a respeito da influência de mais termos na SAF proposta como solução do problema original. Essa solução pode ser obtida através da solução do problema homogeneizado corrigida com a solução do problema local. Dessa forma tem-se uma SAF de primeira ordem, a qual é utilizada em abordagens mais tradicionais do MHA. Entretanto, diversas situações mostram que as SAFs de primeira ordem não são suficientemente precisas para reproduzir os detalhes locais da solução exata do problema, pois elas representam apenas pequenas variações em torno do comportamento efetivo do meio. Nesses ca-

sos, é necessário considerar SAFs de ordem superior, com mais termos, tendo assim uma aproximação mais precisa da solução exata do problema.

Nesse contexto, SU et al. (2011) encontraram uma solução aproximada de equação parabólica com oscilação rápida dos coeficientes através do MHA. E ainda, SU et al. (2011) continuaram esses estudos para sistemas de elasticidade linear com estruturas quase periódicas. Com isso, a aplicação do método dos elementos finitos foi utilizada para resolver os problemas apresentados, encontrando assim suas soluções exata, homogeneizada e assintóticas formais de primeira e segunda ordens. Dessa forma, eles ilustraram que só a SAF de segunda ordem conseguiu reproduzir o comportamento local da solução exata. Similarmente DONG; CAO (2014) utilizaram o MHA para resolver equações de onda em domínios perfurados, onde também ficou evidente que a SAF de segunda ordem aproximou melhor a solução exata.

O MHA também foi combinado com cotas variacionais para estudar o comportamento efetivo de compósitos não lineares. PEREZ-FERNANDEZ; LEON-MECIAS; BRAVO-CASTILLERO (2005) resolveram o problema de encontrar as propriedades efetivas em compósitos fibrosos bifásicos dielétricos em um meio não-linear, de forma que as fibras fossem periodicamente distribuídas em uma estrutura quadrada. E mais tarde PEREZ-FERNANDEZ et al. (2007a,b) estenderam os resultados para meios elásticos. E ainda, esses resultados foram generalizados para compósitos magneto-eletro-elásticos por PEREZ-FERNANDEZ; BRAVO-CASTILLERO; SABINA (2008).

Muitas outras aplicações sobre o MHA podem ser encontradas na literatura da área, por exemplo: DIMITRIENKO (1988a,b) que resolveu o problema sobre meios porosos com transformações de fase de sólida para gasosa; BECK; PEREZ-FERNANDEZ (2014) ilustraram a ideia de que a falha global de estruturas complexas pode ser detectada ao incluir uma distribuição de elementos eletroativos que atuam como sensores; CAPDEVILLE; GUILLOT; MARIGO (2010a,b), através do estudo de ondas sísmicas, solucionaram problemas elastodinâmicos unidimensional e bidimensional; ALLAIRE; BAL (1999) modelaram e resolveram o problema de autovalor para a equação de transporte de nêutrons.

Objetivos

Em trabalhos mais tradicionais do MHA busca-se uma SAF de primeira ordem que seja uma boa aproximação da solução exata do problema original em estudo. Mas essa solução fornece apenas o comportamento em torno da solução do problema homogeneizado, que por sua vez apresenta o comportamento efetivo do meio. Dessa forma, a SAF de primeira ordem não consegue reproduzir os detalhes locais da solução exata. Portanto o objetivo geral dessa dissertação é encontrar uma SAF de ordem superior, em particular de segunda ordem, para problemas lineares estáticos unidimensionais e multidimensionais. Espera-se que a SAF de segunda ordem exiba com mais precisão os detalhes locais do meio, e resulte numa solução mais precisa se comparada com a solução exata de cada um dos problemas mencionados.

Os objetivos específicos deste trabalho, em cada capítulo e seção, são:

- Aplicar o MHA nos problemas originais e encontrar em cada caso: a sequência recorrente de problemas, as expressões para os termos da SAF de segunda ordem, os problemas locais, o problema homogeneizado e os coeficientes efetivos;
- Demonstrar a proximidade entre as soluções exata e assintóticas do problema original e a solução do problema homogeneizado;
- Demonstrar que os coeficientes efetivos herdam as propriedades de simetria e positividade dos coeficientes constitutivos para os casos multidimensionais;
- Ilustrar a aplicação do MHA mediante exemplos.

Estrutura do Trabalho

No Capítulo 1 alguns conceitos preliminares são apresentados sobre meios microperiódicos e os problemas que descrevem o comportamento desses meios. Além disso, são exibidas definições iniciais importantes que estão relacionadas ao MHA, como: expansão assintótica; SAF e relação de ordem. Com isso, é exposto um breve resumo do formalismo matemático do MHA.

O MHA é aplicado em problemas unidimensionais no Capítulo 2, tais problemas descrevem o comportamento de meios térmicos, lineares e estáticos. Dessa forma, encontra-se a sequência recorrente de problemas, enuncia-se um lema que garante existência e unicidade de solução para os problemas apresentados, e obtém-se os problemas locais e homogeneizado, e expressões para os coeficientes efetivos e os termos da SAF de segunda ordem. No final do capítulo, a relação de proximidade entre as soluções dos problemas original e homogeneizado é provada, e são obtidas soluções analíticas para esses problemas.

Dois problemas multidimensionais são resolvidos através do MHA, onde esse desenvolvimento é exibido no Capítulo 3. O primeiro problema descreve o comportamento de meios térmicos, lineares e estáticos. E o outro problema modela o comportamento de meios elásticos, lineares e estáticos. Cada problema possui suas particularidades, assim nos dois casos encontra-se a sequencia recorrente de problemas, mas anuncia-se um lema específico, que garante existência e unicidade de solução, para cada problema. Com isso, obtém-se os problemas locais e homogeneizado, os coeficientes efetivos e os termos das SAFs correspondentes a cada problema. Além disso, em cada caso, é provada a relação de proximidade, e a conservação das propriedades de simetria e positividade pelo coeficiente efetivo.

Alguns casos particulares dos problemas apresentados são resolvidos no Capítulo 4. Para o caso térmico unidimensional dois exemplos são solucionados, com isso pode-se observar as diferenças nas SAFs de primeira e segunda ordens. Em seguida, essa mesma conclusão pode ser analisada para um exemplo do caso térmico multidimensional. E por fim, é resolvido um exemplo para o problema elástico multidimensional, onde o objetivo é encontrar os coeficientes efetivos do problema.

Finalmente, no Capítulo 5 tem-se algumas conclusões à respeito ao MHA aplicado aos problemas apresentados nos Capítulos 2 e 3, e também aos exemplos resolvidos no Capítulo 4. Alguns trabalhos futuros são mencionados no final do capítulo, com o intuito de estender os objetivos desta dissertação para outros tipos de problemas, que também podem ser resolvidos através do MHA.

1 CONCEITOS PRELIMINARES

1.1 Meios Microperiódicos

Considera-se um material micro-heterogêneo unidimensional. Além disso, assume-se que o material seja periódico. Com isso, uma amostra do material na microescala, chamada de célula básica, se repete de forma regular e periódica ao longo de todo o domínio. Dessa forma os resultados obtidos na célula básica podem ser estendidos para todo o domínio da estrutura.

No processo de separação da macroescala e da microescala, cujos comprimentos característicos são L e l, respectivamente, define-se um parâmetro pequeno $\varepsilon = l/L$, $0 < \varepsilon \ll 1$, que representa o comprimento da célula periódica na macroescala (BAKHVALOV; PANASENKO, 1989). Define-se $x \in [0,1]$ como uma variável que atua na macroescala, chamada variável lenta ou global. Com o parâmetro ε define-se uma nova variável para o estudo na microescala. Dessa forma, a variável microscópica $y = x/\varepsilon \in [0, 1/\varepsilon]$, também chamada de variável rápida ou local, representa o comportamento local da estrutura. Observe ainda que ao fazer $\varepsilon \to 0^+$ tem-se que $y \to +\infty$.

Para ilustrar o processo de homogeneização, considera-se uma estrutura unidimensional ε-periódica que descreve o campo térmico estacionário em um domínio $\Omega \in \mathbb{R}$. Assume-se que a densidade de fonte de calor $f^\varepsilon(x) = f(x,y)$ é uma função contínua e periódica com relação à y. A temperatura $u^\varepsilon(x)$ é uma função duas vezes continuamente diferenciável. O coeficiente de condutividade térmica $a^\varepsilon(x) = a(x/\varepsilon) = a(y)$ é uma função continuamente diferenciável. Assim, o modelo matemático que descreve este fenômeno é o seguinte problema de valor de contorno, chamado de problema original

$$\begin{cases} \mathcal{L}^\varepsilon \equiv \dfrac{d}{dx}\left(a^\varepsilon(x)\dfrac{du^\varepsilon}{dx}\right) = f^\varepsilon(x), \quad x \in \Omega, \\ u^\varepsilon(0) = q_1, \quad u^\varepsilon(1) = q_2, \end{cases} \tag{1.1}$$

em que $q_1,\ q_2 \in \mathbb{R}$ são as temperaturas nas extremidades da estrutura.

E ainda, $a^\varepsilon(x)$ é positivo, limitado e 1-periódico com respeito a y, ou seja,

$$0 < a_1 < a^\varepsilon(x) < a_2 < \infty, \text{ com } a_1, a_2 \in \mathbb{R}^*_+, \forall x \in [0,1]; \tag{1.2}$$

$$a(y) = a^\varepsilon(x) = a^\varepsilon(x+\varepsilon) = a\left(\frac{x+\varepsilon}{\varepsilon}\right) = a\left(\frac{x}{\varepsilon}+1\right) = a(y+1), \tag{1.3}$$

pois, por hipótese, o coeficiente é ε-periódico com relação à x: $a^\varepsilon(x) = a^\varepsilon(x+\varepsilon)$ (CIORANESCU; DONATO, 1999). Na Figura 7 está representado o processo de separação das escalas, com coeficientes rapidamente oscilantes, para algum ε.

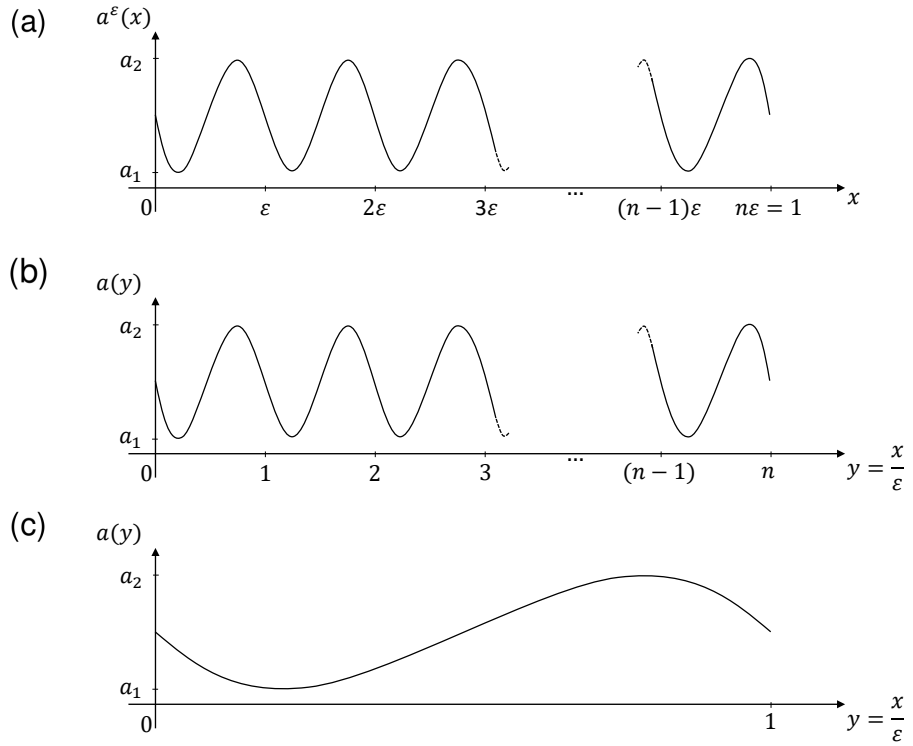

Figura 7: (a) Periodicidade do coeficiente com relação à variável lenta ou global x; (b) Periodicidade do coeficiente com relação à variável rápida ou local y e (c) Comprimento de periodicidade referente à célula básica, em y.

1.2 Expansão Assintótica e Solução Assintótica Formal

Define-se, primeiramente, o conceito de ordem, o qual será utilizado ao longo de todo o desenvolvimento deste trabalho. Seja B_ε o espaço normado das funções $\varphi(x,\varepsilon)$, onde $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^d$ e $\varepsilon \in (0,1)$, com $d \in \mathbb{N}$. Suponha que exista uma função $\varphi^\varepsilon \in B_\varepsilon$, tal que $\varphi^\varepsilon = \varphi(x,\varepsilon)$, definida para cada $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno. Agora, se $\varphi^\varepsilon = \mathcal{O}(\psi(x,\varepsilon))$, leia-se φ^ε é a ordem de $\psi(x,\varepsilon)$, com $\varepsilon \to 0^+$ na norma de B_ε, então significa que existem $A,\ \varepsilon_0 > 0$ constantes tais que $||\varphi(x,\varepsilon)||_{B_\varepsilon} \leq A||\psi(x,\varepsilon)||_{B_\varepsilon}$, para $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. Um caso particular é dado por $\varphi(x,\varepsilon) = \mathcal{O}(\varepsilon^N)$, com $N \in \mathbb{N}$.

Com isso, para a função φ^ε existe uma expansão assintótica $\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i g_i(x,\varepsilon)$, tal que para $N \in \mathbb{N}$ existe M_0 que cumpre a seguinte relação

$$\varphi(x,\varepsilon) - \sum_{i=1}^{m} \varepsilon^i g_i(x,\varepsilon) = O(\varepsilon^N), \tag{1.4}$$

para cada $m \geq M_0$ com $\varepsilon \to 0^+$ na norma de B_ε. De onde define-se

$$\varphi(x,\varepsilon) \sim \sum_{i=1}^{m} \varepsilon^i g_i(x,\varepsilon). \tag{1.5}$$

Assim, sendo $\mathcal{L}^\varepsilon$ um operador diferencial entre os espaços normados $B_{1\varepsilon}$ e $B_{2\varepsilon}$, uma SAF para a equação

$$\mathcal{L}^\varepsilon u^\varepsilon = f, \tag{1.6}$$

tal que $u^\varepsilon \in B_{1\varepsilon}$ e $f \in B_{2\varepsilon}$, é da forma $u^{(\infty)}(x,\varepsilon) = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i g_i(x,\varepsilon)$, com $g_i(x,\varepsilon) \in B_{1\varepsilon}$. Ainda, considerando $u^{(m)}(x,\varepsilon) = \sum_{i=1}^{m} \varepsilon^i g_i(x,\varepsilon)$, tem-se que para algum N natural existe M que satisfaz a seguinte relação

$$\mathcal{L}^\varepsilon u^{(m)} - f = \mathcal{O}(\varepsilon^N), \tag{1.7}$$

para todo $m \geq M$ com $\varepsilon \to 0^+$ na norma de $B_{2\varepsilon}$ (BAKHVALOV; PANASENKO, 1989).

Além disso, se $\mathcal{L}^\varepsilon$ é um operador linear e existem constantes $c_1 > 0$ e c_2 independentes de ε tais que $||u^\varepsilon||_{B_{1\varepsilon}} \leq c_1 \varepsilon^{c_2} ||f||_{B_{2\varepsilon}}$, então de (1.7) tem-se que, para qualquer N existe um número M tal que $m \geq M$, onde $||u^{(m)} - u^\varepsilon||_{B_{1\varepsilon}} = \mathcal{O}(\varepsilon^N)$ quando $\varepsilon \to 0^+$. Ou seja, em presença de linearidade uma SAF $u^{(\infty)}$ da equação (1.6) é uma expansão assintótica da solução exata u^ε.

1.3 Formalismo Matemático do MHA

O MHA propõe uma SAF, construída por uma expansão assintótica em potências de ε, como solução equivalente a solução u^ε do problema original. Com $u_i(x,y)$ sendo funções 1-periódicas com relação à variável rápida y, essa SAF é da seguinte forma

$$u^{(\infty)}(x,\varepsilon) = u_0(x,y) + \varepsilon u_1(x,y) + \varepsilon^2 u_2(x,y) + \varepsilon^3 u_3(x,y) + ..., \tag{1.8}$$

com $y = x/\varepsilon$. Substituindo (1.8) na equação do problema original (1.1) obtém-se

$$\frac{d}{dx}\left[a^\varepsilon(x)\frac{d}{dx}(u_0(x,y) + \varepsilon u_1(x,y) + \varepsilon^2 u_2(x,y) + \varepsilon^3 u_3(x,y) + ...)\right] = f(x,y). \tag{1.9}$$

Ao utilizar a regra da cadeia nessa última equação, ou seja, aplicar a seguinte definição

$$\frac{d}{dx}\left[g\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)\right]=\left(\frac{\partial g(x,y)}{\partial x}+\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial g(x,y)}{\partial y}\right)\Bigg|_{y=\frac{x}{\varepsilon}}, \tag{1.10}$$

pode-se assumir que as variáveis x e y são independentes. Agrupando por potências de ε e igualando a zero os coeficientes dessas potências, a equação (1.9) se desacopla na seguinte sequência recorrente de equações

$$\begin{aligned}
\varepsilon^{-2} &: \mathcal{L}_{yy}u_0=0,\\
\varepsilon^{-1} &: \mathcal{L}_{yy}u_1=-\mathcal{L}_{yx}u_0-\mathcal{L}_{xy}u_0,\\
\varepsilon^{0} &: \mathcal{L}_{yy}u_2=-\mathcal{L}_{yx}u_1-\mathcal{L}_{xy}u_1-\mathcal{L}_{xx}u_0+f(x,y),\\
\varepsilon^{1} &: \mathcal{L}_{yy}u_3=-\mathcal{L}_{yx}u_2-\mathcal{L}_{xy}u_2-\mathcal{L}_{xx}u_1,\\
\vdots &: \vdots\\
\varepsilon^{n} &: \mathcal{L}_{yy}u_{n+2}=-\mathcal{L}_{yx}u_{n+1}-\mathcal{L}_{xy}u_{n+1}-\mathcal{L}_{xx}u_n,\\
\vdots &: \vdots
\end{aligned} \tag{1.11}$$

onde $\mathcal{L}_{\alpha\beta}$ é um operador linear, dado por

$$\mathcal{L}_{\alpha\beta}=\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(a(y)\frac{\partial}{\partial\beta}\right). \tag{1.12}$$

As equações (1.11) formarão, junto com as respectivas condições de contorno, os problemas cujas soluções são os $u_i(x,y)$ da SAF (1.8).

Nos próximos capítulos o MHA é aplicado, e matematicamente justificado para problemas lineares estáticos unidimensionais e multidimensionais.

2 APLICAÇÃO DO MÉTODO DE HOMOGENEIZAÇÃO ASSINTÓTICA EM MEIOS UNIDIMENSIONAIS

2.1 Aplicação do MHA

Uma aplicação do MHA é feita para o problema unidimensional apresentado em (1.1). Declara-se x pertencente ao domínio $\overline{\Omega} = [0,1]$, o coeficiente de condutividade $a^\varepsilon(x) \in \mathcal{C}^1([0,1])$ positivo, limitado e ε-periódico com relação à variável x, $f^\varepsilon(x) \in \mathcal{C}^0([0,1])$ sendo a densidade de fonte de calor e $u^\varepsilon(x) \in \mathcal{C}^2([0,1])$ como a temperatura para cada x e ε. Tendo assim, o problema original dado por

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}\left(a^\varepsilon(x)\dfrac{du^\varepsilon}{dx}\right) = f^\varepsilon(x), \quad x \in (0,1), \\ u^\varepsilon(0) = q_1, \quad u^\varepsilon(1) = q_2. \end{cases} \tag{2.1}$$

Supõe-se, com $y = x/\varepsilon$, a seguinte SAF de segunda ordem para o problema original

$$u^{(2)}(x,\varepsilon) = u_0(x,y) + \varepsilon u_1(x,y) + \varepsilon^2 u_2(x,y). \tag{2.2}$$

Substituindo (2.2) na equação do problema original, obtém-se

$$\frac{d}{dx}\left[a(y)\left(\frac{du_0(x,y)}{dx} + \varepsilon\frac{du_1(x,y)}{dx} + \varepsilon^2\frac{du_2(x,y)}{dx}\right)\right] - f(x,y) = 0. \tag{2.3}$$

Aplicando a regra da cadeia dada por (1.10) em (2.3) chega-se em

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial y}\right)\left[a(y)\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial u_0}{\partial y} + \varepsilon\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\varepsilon}{\varepsilon}\frac{\partial u_1}{\partial y} + \varepsilon^2\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon}\frac{\partial u_2}{\partial y}\right)\right] - f(x,y) = 0. \tag{2.4}$$

De onde tem-se

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x}\left(a(y)\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)+\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial y}\left(a(y)\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)+\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial x}\left(a(y)\frac{\partial u_0}{\partial y}\right)+\frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\partial}{\partial y}\left(a(y)\frac{\partial u_0}{\partial y}\right) \\ + \; & \varepsilon\frac{\partial}{\partial x}\left(a(y)\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(a(y)\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(a(y)\frac{\partial u_1}{\partial y}\right)+\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial y}\left(a(y)\frac{\partial u_1}{\partial y}\right) \\ + \; & \varepsilon^2\frac{\partial}{\partial x}\left(a(y)\frac{\partial u_2}{\partial x}\right)+\varepsilon\frac{\partial}{\partial y}\left(a(y)\frac{\partial u_2}{\partial x}\right)+\varepsilon\frac{\partial}{\partial x}\left(a(y)\frac{\partial u_2}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(a(y)\frac{\partial u_2}{\partial y}\right)-f(x,y)=0. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Agora, agrupando essa última equação em potências de ε tem-se

$$\begin{aligned} & \varepsilon^{-2}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(a(y)\frac{\partial u_0}{\partial y}\right)\right]+\varepsilon^{-1}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(a(y)\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(a(y)\frac{\partial u_0}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(a(y)\frac{\partial u_1}{\partial y}\right)\right] \\ + \; & \varepsilon^{0}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(a(y)\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(a(y)\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(a(y)\frac{\partial u_1}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(a(y)\frac{\partial u_2}{\partial y}\right)-f(x,y)\right] \\ = \; & \mathcal{O}(\varepsilon). \end{aligned} \tag{2.6}$$

Observa-se que o lado direito da equação (2.6) tende a zero quando ε tende a zero, pois corresponde às potências positivas de ε. Dessa forma, para que (2.6) seja satisfeita, é necessário que cada expressão que acompanha as potências restantes de ε seja nula. Chegando-se assim numa sequência recorrente de equações

$$\varepsilon^{-2} \; : \; \frac{\partial}{\partial y}\left(a(y)\frac{\partial u_0}{\partial y}\right)=0, \tag{2.7}$$

$$\varepsilon^{-1} \; : \; \frac{\partial}{\partial y}\left(a(y)\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(a(y)\frac{\partial u_0}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(a(y)\frac{\partial u_1}{\partial y}\right)=0, \tag{2.8}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^{0} \; : \; & \frac{\partial}{\partial x}\left(a(y)\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(a(y)\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(a(y)\frac{\partial u_1}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(a(y)\frac{\partial u_2}{\partial y}\right) \\ & -f(x,y)=0. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Para encontrar as soluções dos problemas para cada u_i em (2.2), é necessário determinar as condições de contorno correspondentes. Assim, do problema original em (1.1) e da SAF (2.2) tem-se

$$u^{(2)}(0,\varepsilon)=u_0(0,0)+\varepsilon u_1(0,0)+\varepsilon^2 u_2(0,0)=q_1, \tag{2.10}$$

$$u^{(2)}(1,\varepsilon)=u_0\left(1,\frac{1}{\varepsilon}\right)+\varepsilon u_1\left(1,\frac{1}{\varepsilon}\right)+\varepsilon^2 u_2\left(1,\frac{1}{\varepsilon}\right)=q_2. \tag{2.11}$$

Obtém-se então

$$u_0(0,0) = q_1, \;\; u_0\left(1, \frac{1}{\varepsilon}\right) = q_2, \tag{2.12}$$

$$u_1(0,0) = u_1\left(1, \frac{1}{\varepsilon}\right) = 0, \tag{2.13}$$

$$u_2(0,0) = u_2\left(1, \frac{1}{\varepsilon}\right) = 0. \tag{2.14}$$

Observe que, pela 1-periodicidade de $u_i(x,y)$ com respeito a y, ou seja, $u_i(x,y) = u_i(x,y+1)$ em $y = [0, 1/\varepsilon]$, tem-se

$$u_0(0,0) = q_1, \;\; u_0(1,0) = q_2, \tag{2.15}$$

$$u_1(0,0) = u_1(1,0) = 0, \tag{2.16}$$

$$u_2(0,0) = u_2(1,0) = 0. \tag{2.17}$$

E assim, (2.15)-(2.17) são as condições de contorno que complementam as equações em (2.7)-(2.9), respectivamente. E com o operador linear $\mathcal{L}_{\alpha\beta}$ definido em (1.12) chega-se em

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{yy} u_0 = 0, \\ u_0(0,0) = q_1, \;\; u_0(1,0) = q_2, \end{cases} \tag{2.18}$$

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{yy} u_1 = -\mathcal{L}_{yx} u_0 - \mathcal{L}_{xy} u_0, \\ u_1(0,0) = u_1(1,0) = 0, \end{cases} \tag{2.19}$$

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{yy} u_2 = -\mathcal{L}_{xx} u_0 - \mathcal{L}_{yx} u_1 - \mathcal{L}_{xy} u_1 + f(x,y), \\ u_2(0,0) = u_2(1,0) = 0. \end{cases} \tag{2.20}$$

Tais problemas fornecem as soluções para cada u_i. Do problema (2.18) encontra-se uma expressão para u_0. Do problema (2.19) encontra-se o problema local referente à célula básica e uma expressão para u_1 em termos de u_0. E do problema (2.20) encontra-se uma expressão para u_2 em termos de u_0 e u_1, e o problema homogeneizado. Para resolver esses problemas é necessário enunciar o Lema 2.1.1, que fornece uma condição necessária e suficiente para a existência e unicidade de soluções 1-periódicas em y dos problemas (2.18)-(2.20).

Lema 2.1.1. *Sejam $F(y)$ e $a(y)$ funções diferenciáveis e 1-periódicas, com $a(y)$ positiva. Uma condição necessária e suficiente para existir uma solução 1-periódica para a equação $\mathcal{L}_{yy} N = F$ é que $\langle F(y) \rangle = 0$. Onde o operador $\langle \cdot \rangle$ representa o valor médio, dado por $\langle \cdot \rangle \equiv \int_0^1 (\cdot)\, dy$. Além disso, a solução é única e da forma $N(y) = \widetilde{N}(y) + C$, onde C é uma constante arbitrária e $\widetilde{N}$ é solução 1-periódica de $\mathcal{L}_{yy} N = F$ com a condição de que $\widetilde{N}(0) = 0$ (BAKHVALOV; PANASENKO, 1989).*

Demonstração: Necessidade. Seja $N(y)$ uma solução 1-periódica de $\mathcal{L}_{yy}N = F$. Então, aplicando o operador de valor médio na equação, chega-se em

$$\langle \mathcal{L}_{yy}N \rangle = \langle F \rangle,$$

que equivale a

$$\left\langle \frac{d}{dy}\left(a(y)\frac{dN(y)}{dy}\right)\right\rangle = \langle F \rangle,$$

ou seja,

$$\int_0^1 \frac{d}{dy}\left(a(y)\frac{dN(y)}{dy}\right) dy = \langle F \rangle,$$

que implica em

$$a(1)\frac{\partial N(1)}{\partial y} - a(0)\frac{\partial N(0)}{\partial y} = \langle F \rangle.$$

Pela 1-periodicidade de $a(y)$ e $N(y)$ com relação à variável y, tem-se

$$\langle F \rangle = \int_0^1 F(y)dy = 0.$$

Suficiência. Deve-se encontrar uma solução geral para a equação diferencial ordinária $\mathcal{L}_{yy}N = F$. Integrando a equação obtém-se

$$a(y)\frac{dN(y)}{dy} = \int_0^y F(s)ds + C_1,$$

onde $C_1 = a(0)N'(0)$. E assim,

$$\frac{dN(y)}{dy} = a^{-1}(y)\left(\int_0^y F(s)ds + C_1\right).$$

Integrando novamente a equação, chega-se em

$$N(y) = \int_0^y a^{-1}(r)\left(\int_0^r F(s)ds + C_1\right)dr + C_2,$$

em que r é uma variável muda de integração e $C_2 = N(0)$. Dessa forma, $N(y) = \widetilde{N}(y) + C$, onde $C \equiv C_2$. Pela periodicidade de $F(y)$ tem-se

$$F(y+1) - F(y) = 0,$$

logo

$$\int_0^{y+1} F(s)ds - \int_0^{y} F(s)ds = \int_y^{y+1} F(s)ds = 0,$$

ou seja, a integral $\int_0^y F(d)ds$ é 1-periódica em y. E assim, toda a expressão $a^{-1}(r)\left(\int_0^r F(s)ds + C_1\right)$ é uma função 1-periódica em y. Então,

$$N(y+1) - N(y) = \int_y^{y+1} a^{-1}(r)\left(\int_0^r F(s)ds + C_1\right)dr = \left\langle a^{-1}(r)\left(\int_0^r F(s)ds + C_1\right)\right\rangle.$$

Escolhendo convenientemente C_1 como

$$C_1 = -\langle a^{-1}(y)\rangle^{-1}\left\langle a^{-1}(r)\left(\int_0^r F(s)ds\right)\right\rangle,$$

chega-se em

$$N(y+1) - N(y) = 0.$$

E portanto, a função $N(y)$ é 1-periódica em y. Dessa forma, encontrou-se a solução 1-periódica para a equação $\mathcal{L}_{yy}N = F$. Observe que a solução $N(y)$ depende da constante C_2. Exigindo que $N(0) = 0$ satisfaça $\mathcal{L}_{yy}N = F$, então $C_2 = 0$ e, com a condição $\langle F\rangle = 0$, a solução $N(y)$ existe e é única. □

O Lema 2.1.1 garante que o problema para u_0, em (2.18), tem solução 1-periódica com relação à variável microscópica y, da forma $u_0(x,y) = \widetilde{u}_0(x,y) + c_0(x)$. Pois $L = \mathcal{L}_{yy}$, $N = u_0$ e $F = 0$, ou seja, $\langle F\rangle = 0$. Assim, integrando a equação, tem-se

$$a(y)\frac{\partial u_0}{\partial y} = c_0(x). \tag{2.21}$$

E ainda,

$$\frac{\partial u_0}{\partial y} = \frac{c_0(x)}{a(y)}, \tag{2.22}$$

pois $a(y) > 0$. Logo, aplica-se o operador de valor médio obtendo

$$\left\langle \frac{\partial u_0}{\partial y}\right\rangle = \left\langle \frac{c_0(x)}{a(y)}\right\rangle, \tag{2.23}$$

ou seja,

$$\int_0^1 \frac{\partial u_0}{\partial y}\,dy = \int_0^1 \frac{c_0(x)}{a(y)}\,dy. \tag{2.24}$$

Pela 1-periodicidade de y e u_0 então

$$c_0(x)\int_0^1 \frac{dy}{a(y)} = u_0(x,1) - u_0(x,0) = 0, \tag{2.25}$$

logo

$$c_0(x) = 0, \tag{2.26}$$

pois o termo integral é estritamente positivo. Com isso, da substituição de (2.26) em (2.21) tem-se

$$a(y)\frac{\partial u_0}{\partial y} = 0, \tag{2.27}$$

e então

$$\frac{\partial u_0}{\partial y} = 0. \tag{2.28}$$

Integrando a equação (2.28) encontra-se uma expressão para a u_0 referente ao problema (2.18), onde pode-se observar que ela não depende da variável local y, ou seja,

$$u_0(x,y) = u_0(x). \tag{2.29}$$

Do problema para u_1, obtido em (2.19) e a partir do Lema 2.1.1, a equação deve ser escrita na forma $LN = F$. Assim, se $L = \mathcal{L}_{yy}$, $N = u_1$ e $F = -\mathcal{L}_{yx}u_0 - \mathcal{L}_{xy}u_0$, então

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(a(y)\frac{\partial u_1}{\partial y}\right) = -\frac{\partial}{\partial y}\left(a(y)\frac{\partial u_0}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(a(y)\frac{\partial u_0}{\partial y}\right). \tag{2.30}$$

Ao substituir a expressão (2.29) em (2.30) o segundo termo do lado direito se anula, pois u_0 não depende de y. Com isso, chega-se em

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(a(y)\frac{\partial u_1}{\partial y}\right) = -\frac{d}{dy}\left(a(y)\frac{du_0}{dx}\right). \tag{2.31}$$

E assim, a fonte na equação do problema (2.19) passa a ser $F = \dfrac{d}{dy}\left(a(y)\dfrac{du_0}{dx}\right)$. Lembrando que $a(y)$ é 1-periódico com relação à variável y, ao se aplicar o Lema 2.1.1 tem-se

$$\left\langle \frac{d}{dy}\left(a(y)\frac{du_0}{dx}\right)\right\rangle = \frac{du_0}{dx}\int_0^1 \frac{da(y)}{dy}\,dy = \frac{du_0}{dx}(a(1) - a(0)) = 0. \tag{2.32}$$

Portanto, existe uma solução 1-periódica com relação à y para o problema (2.19). Por separação de variáveis, supõem-se que $u_1 = N_1(y)M_1(x)$. Então substituindo essa expressão em (2.31) obtém-se

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(a(y)\frac{\partial(N_1(y)M_1(x))}{\partial y}\right) = -\frac{da(y)}{dy}\frac{du_0}{dx}, \tag{2.33}$$

que é equivalente a

$$\frac{d}{dy}\left(a(y)\frac{dN_1(y)}{dy}\right)M_1(x) = -\frac{da(y)}{dy}\frac{du_0}{dx}. \tag{2.34}$$

Convenientemente, se $M_1(x) = \dfrac{du_0}{dx}$, então (2.34) passa a ser

$$\frac{d}{dy}\left(a(y)\frac{dN_1(y)}{dy}\right)\frac{du_0}{dx} = -\frac{da(y)}{dy}\frac{du_0}{dx}, \tag{2.35}$$

ou seja,

$$\frac{d}{dy}\left(a(y)\frac{dN_1(y)}{dy} + a(y)\right)\frac{du_0}{dx} = 0. \tag{2.36}$$

A igualdade em (2.36) é satisfeita quando

$$\frac{d}{dy}\left(a(y)\frac{dN_1(y)}{dy} + a(y)\right) = 0, \tag{2.37}$$

pois $\dfrac{du_0}{dx} \neq 0$. E assim, em (2.37) tem-se a equação que, junto com a condição de unicidade $N_1(0) = 0$, descreve o comportamento do meio sobre a célula básica. Disso, tem-se o seguinte problema local

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dy}\left(a(y)\dfrac{dN_1(y)}{dy} + a(y)\right) = 0, \\ N_1(0) = 0. \end{cases} \tag{2.38}$$

Pode-se verificar que esse problema possui solução 1-periódica a partir do Lema 2.1.1. Considerando $L = \mathcal{L}_{yy}$, $N = N_1$ e $F = -\dfrac{da(y)}{dy}$, aplica-se o operador de valor médio no problema (2.19), onde leva-se em consideração a 1-periodicidade do coeficiente $a(y)$ com relação à y

$$\left\langle \frac{da(y)}{dy} \right\rangle = \int_0^1 \frac{da(y)}{dy}\, dy = a(1) - a(0) = 0. \tag{2.39}$$

Dessa forma, com $y = x/\varepsilon$, $u_1(x, y)$ pode ser escrita como

$$u_1(x, y) = N_1(y)\frac{du_0}{dx}. \tag{2.40}$$

Com o intuito de resolver o problema local, retoma-se a hipótese de que $a(y) > 0$ e aplica-se a integral com relação à y na equação (2.37)

$$\int_0^1 \frac{d}{dy}\left(a(y)\frac{dN_1(y)}{dy} + a(y)\right) dy = \int_0^1 0 \; dy, \tag{2.41}$$

que resulta em

$$a(y)\frac{dN_1(y)}{dy} + a(y) = K_1, \tag{2.42}$$

e tem-se então

$$\frac{dN_1(y)}{dy} = \frac{K_1}{a(y)} - 1, \tag{2.43}$$

onde K_1 é uma constante real. Agora, aplicando o operador de valor médio em toda a equação (2.43) chega-se em

$$\left\langle \frac{dN_1(y)}{dy} \right\rangle = \left\langle \frac{K_1}{a(y)} - 1 \right\rangle, \tag{2.44}$$

que é equivalente a

$$\int_0^1 \frac{dN_1(y)}{dy} \; dy = K_1 \left\langle \frac{1}{a(y)} \right\rangle - 1, \tag{2.45}$$

e que resulta em

$$N_1(1) - N_1(0) = K_1 \left\langle \frac{1}{a(y)} \right\rangle - 1, \tag{2.46}$$

logo, como $N_1(y)$ é 1-periódica em y, tem-se

$$0 = K_1 \left\langle \frac{1}{a(y)} \right\rangle - 1. \tag{2.47}$$

E finalmente obtém-se

$$K_1 = \langle a(y)^{-1} \rangle^{-1} \equiv \hat{a}, \tag{2.48}$$

com $\hat{a}$ sendo o coeficiente efetivo, ou seja, é o coeficiente que descreve o comportamento homogêneo equivalente ao coeficiente do problema original, sobre o meio

heterogêneo. Substituindo (2.48) em (2.43) pode-se chegar numa expressão para $N_1(y)$ integrando ambos os lados da equação

$$\int_0^y \frac{dN_1(s)}{ds}\, ds = \int_0^y \left(\frac{\hat{a}}{a(s)} - 1\right) ds, \tag{2.49}$$

onde se chega em

$$N_1(y) - N_1(0) = \int_0^y \left(\frac{\hat{a}}{a(s)} - 1\right) ds. \tag{2.50}$$

E da condição de unicidade $N_1(0) = 0$, chega-se em

$$N_1(y) = \int_0^y \left(\frac{\hat{a}}{a(s)} - 1\right) ds. \tag{2.51}$$

E ainda, com a solução $N_1(y)$ do problema local, pode-se encontrar a expressão para $u_1(x, y)$:

$$u_1(x, y) = \frac{du_0}{dx} \int_0^y \left(\frac{\hat{a}}{a(s)} - 1\right) ds. \tag{2.52}$$

Note que $\hat{a}$ pode ser escrito como $\hat{a} = a(y)\dfrac{dN_1(y)}{dy} + a(y)$, e ainda, como $\hat{a}$ é constante, ou seja, não depende de y, pode-se assumir que $\hat{a} = \left\langle a(y)\dfrac{dN_1(y)}{dy} + a(y) \right\rangle$. Substituindo as expressões para u_0 e u_1 no problema para encontrar u_2, obtido em (2.20), pode-se aplicar o Lema 2.1.1 para que exista solução 1-periódica. Dessa forma, primeiramente tem-se

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(a(y)\frac{\partial u_2}{\partial y}\right) = -\frac{\partial}{\partial y}\left(a(y)\frac{\partial u_1}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(a(y)\frac{\partial u_1}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(a(y)\frac{du_0}{dx}\right) + f(x, y), \tag{2.53}$$

ou seja,

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(a(y)\frac{\partial u_2}{\partial y}\right) = -\frac{d\left(a(y)N_1(y)\right)}{dy}\frac{d^2u_0}{dx^2} - a(y)\frac{dN_1(y)}{dy}\frac{d^2u_0}{dx^2} - a(y)\frac{d^2u_0}{dx^2} + f(x, y). \tag{2.54}$$

Observa-se que na equação (2.54) tem-se $L = \mathcal{L}_{yy}$, $N = u_2$ e $F = -\dfrac{d(a(y)N_1(y))}{dy}\dfrac{d^2u_0}{dx^2} - a(y)\dfrac{dN_1(y)}{dy}\dfrac{d^2u_0}{dx^2} - a(y)\dfrac{d^2u_0}{dx^2} + f(x, y)$. Aplicando o operador de valor médio em F, de forma que o problema para u_2 tenha solução 1-periódica, chega-se em

$$\left\langle -\frac{d(a(y)N_1(y))}{dy}\frac{d^2u_0}{dx^2} - \hat{a}\frac{d^2u_0}{dx^2} + f(x, y) \right\rangle = 0, \tag{2.55}$$

dessa forma, pode-se escrever essa última equação como

$$-\left\langle \frac{d(a(y)N_1(y))}{dy}\frac{d^2u_0}{dx^2}\right\rangle - \left\langle \hat{a}\frac{d^2u_0}{dx^2}\right\rangle + \langle f(x,y)\rangle = 0, \tag{2.56}$$

e assim,

$$\hat{a}\frac{d^2u_0}{dx^2} - \langle f(x,y)\rangle = 0, \tag{2.57}$$

pois $a(y)$ e $N_1(y)$ são 1-periódicos com respeito a y. Assim, chega-se no problema homogeneizado, onde a equação é dada por (2.57) e que resulta na solução u_0. As condições de contorno para esse problema são dadas a partir de (2.12) e (2.29), chegando em

$$u_0(0,0) = u_0(0) = q_1, \tag{2.58}$$

$$u_0(1,0) = u_0(1) = q_2. \tag{2.59}$$

Portanto, o problema homogeneizado é

$$\begin{cases} \hat{a}\dfrac{d^2u_0}{dx^2} = \hat{f}(x), \quad x \in (0,1), \\ u_0(0) = q_1 \;\; u_0(1) = q_2, \end{cases} \tag{2.60}$$

onde $\hat{f}(x) = \langle f(x,y)\rangle$.

Em trabalhos mais tradicionais do MHA utilizam-se os resultados encontrados até aqui, isto é, os coeficientes $u_0(x,y)$, $u_1(x,y)$ e o problema homogeneizado que foi obtido através da aplicação do Lema 2.1.1 no problema (2.20), para $u_2(x,y)$. Por esse motivo utiliza-se a SAF proposta em (2.2). Mas nesta dissertação um dos objetivos principais é encontrar todos os termos dessa SAF, então basta encontrar a expressão para $u_2(x,y)$. Para isso, considerando (2.54) e (2.57) obtém-se

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(a(y)\frac{\partial u_2}{\partial y}\right) = -\frac{d(a(y)N_1(y))}{dy}\frac{d^2u_0}{dx^2} - \hat{a}\frac{d^2u_0}{dx^2} + f(x,y). \tag{2.61}$$

Supõe-se que

$$u_2(x,y) = N_2(y)\frac{d^2u_0}{dx^2}. \tag{2.62}$$

Então (2.61) passa a ser

$$\frac{d}{dy}\left(a(y)\frac{dN_2(y)}{dy}\right)\frac{d^2u_0}{dx^2} = -\frac{d(a(y)N_1(y))}{dy}\frac{d^2u_0}{dx^2} - \hat{a}\frac{d^2u_0}{dx^2} + f(x,y). \tag{2.63}$$

Supondo que existe $b = b(y)$ tal que $f(x, y)$ pode ser escrita como[1]

$$f(x, y) = b(y)\frac{d^2u_0}{dx^2}, \tag{2.64}$$

da equação (2.63) tem-se que

$$\frac{d}{dy}\left(a(y)\frac{dN_2(y)}{dy}\right)\frac{d^2u_0}{dx^2} = -\frac{d(a(y)N_1(y))}{dy}\frac{d^2u_0}{dx^2} - \hat{a}\frac{d^2u_0}{dx^2} + b(y)\frac{d^2u_0}{dx^2}, \tag{2.65}$$

considerando $\frac{d^2u_0}{dx^2} \neq 0$ chega-se em

$$\frac{d}{dy}\left(a(y)\frac{dN_2(y)}{dy}\right) = -\frac{d(a(y)N_1(y))}{dy} - \hat{a} + b(y), \tag{2.66}$$

que é a equação do segundo problema local:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dy}\left(a(y)\dfrac{dN_2(y)}{dy}\right) = -\dfrac{d(a(y)N_1(y))}{dy} - \hat{a} + b(y), \\ N_2(0) = 0. \end{cases} \tag{2.67}$$

Para verificar que existe solução 1-periódica para o problema (2.67) aplica-se o Lema 2.1.1, onde $L = \mathcal{L}_{yy}$, $N = N_2(y)$ e $F = -\dfrac{d(a(y)N_1(y))}{dy} - \hat{a} + b(y)$. Logo,

$$\left\langle -\frac{d(a(y)N_1(y))}{dy} - \hat{a} + b(y) \right\rangle = 0. \tag{2.68}$$

E assim, como $a(y)N_1(y)$ é uma função 1-periódica, tem-se a condição

$$\langle b(y) \rangle = \hat{a}, \tag{2.69}$$

e dessa forma a equação (2.68) é satisfeita. Observe que (2.69) também pode ser obtida através da equação (2.57) do problema homogeneizado.

Integrando a equação (2.66) e considerando K_2 constante, tem-se

$$a(y)\frac{dN_2(y)}{dy} + a(y)N_1(y) = \int_0^y (-\hat{a} + b(s))ds + K_2. \tag{2.70}$$

[1] Usualmente, nos modelos estudados na literatura, a fonte f não depende de y, o que implica em $\langle f(x) \rangle = f(x)$. Dessa forma, considerando a equação do problema homogeneizado, os últimos dois termos em (2.54) se anulam, o que gera cálculos posteriores mais simples. Do conhecimento da literatura utilizada, a proposta de decomposição para $f(x, y)$ em (2.64) é original e permite dar um tratamento à equação (2.54) similar à abordagem tradicional.

E ainda,

$$\frac{dN_2(y)}{dy} = \frac{1}{a(y)}\left(\int_0^y(-\hat{a}+b(s))ds + K_2\right) - N_1(y), \tag{2.71}$$

onde aplicando o operador de valor médio chega-se em

$$\left\langle\frac{dN_2(y)}{dy}\right\rangle = \left\langle\frac{1}{a(y)}\left(\int_0^y(-\hat{a}+b(s))ds + K_2\right) - N_1(y)\right\rangle, \tag{2.72}$$

ou seja,

$$\int_0^1 \frac{dN_2(y)}{dy}\,dy = \left\langle\frac{1}{a(y)}\left(\int_0^y(-\hat{a}+b(s))ds\right)\right\rangle + K_2\left\langle\frac{1}{a(y)}\right\rangle - \langle N_1(y)\rangle, \tag{2.73}$$

que implica

$$N_2(1) - N_2(0) = \left\langle\frac{1}{a(y)}\left(\int_0^y(-\hat{a}+b(s))ds\right)\right\rangle + K_2\left\langle\frac{1}{a(y)}\right\rangle - \langle N_1(y)\rangle, \tag{2.74}$$

ou ainda, pela 1-periodicidade de $N_2(y)$

$$0 = \left\langle\frac{1}{a(y)}\left(\int_0^y(-\hat{a}+b(s))ds\right)\right\rangle + K_2\left\langle\frac{1}{a(y)}\right\rangle - \langle N_1(y)\rangle. \tag{2.75}$$

E portanto,

$$K_2 = -\left\langle\int_0^y(-\hat{a}+b(s))ds\right\rangle + \langle N_1(y)\rangle\hat{a}, \tag{2.76}$$

com $\hat{a}$ obtido em (2.48). Logo, da condição de unicidade $N_2(0) = 0$ pode-se chegar em uma expressão para $N_2(y)$ da seguinte forma

$$N_2(y) = \int_0^y \frac{1}{a(s)}\left(\int_0^s(-\hat{a}+b(r))\,dr - \left\langle\int_0^y(-\hat{a}+b(s))\,ds\right\rangle + \langle N_1(y)\rangle\hat{a}\right)ds - \int_0^y N_1(s)ds. \tag{2.77}$$

E assim, da equação (2.2) e das relações (2.40) e (2.62) referentes à $u_1(x,y)$ e $u_2(x,y)$, a SAF pode ser obtida a partir da seguinte expressão

$$u^{(2)}(x,\varepsilon) = u_0(x) + \varepsilon N_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{du_0(x)}{dx} + \varepsilon^2 N_2\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{d^2u_0(x)}{dx^2}, \tag{2.78}$$

em que N_1 e N_2 são calculadas como em (2.51) e (2.77), e a partir delas pode-se analisar o comportamento local do meio na microescala. E resolvendo o problema homogeneizado se chega na solução u_0. Assim, pode-se encontrar a SAF suposta

para o problema original, pois u_1 e u_2 dependem de u_0. E finalmente, encontra-se o comportamento efetivo do meio homogêneo, que é equivalente ao meio heterogêneo. A prova disso será dada a seguir, onde é feito o estudo da relação de proximidade das soluções do problema original u^ε e do problema homogeneizado u_0.

2.2 Relação de Proximidade entre as Soluções

Prova-se agora a proximidade entre as soluções do problema original e do problema homogeneizado. Ou seja, é necessário demonstrar que

$$||u^\varepsilon - u_0||_{\mathcal{C}([0,1])} = \mathcal{O}(\varepsilon). \tag{2.79}$$

Supõem-se primeiramente, o problema auxiliar

$$\begin{cases} \mathcal{L}^\varepsilon u^{(1)} = f(x,y) - F(x,\varepsilon), \quad x \in \Omega, \\ u^{(1)}(0) = q_1, \quad u^{(1)}(1) = q_2, \end{cases} \tag{2.80}$$

onde $u^{(1)}$ é uma nova SAF para o problema (1.1), dada por

$$u^{(1)}(x,\varepsilon) = u_0(x) + \varepsilon u_1(x,y), \tag{2.81}$$

com $y = x/\varepsilon$ e $F(x,\varepsilon)$ sendo o erro encontrado quando se supõe $u^{(1)}$ como SAF do problema (1.1).

Subtraindo (1.1) de (2.80) obtém-se

$$\begin{cases} \mathcal{L}^\varepsilon(u^\varepsilon - u^{(1)}) = F(x,\varepsilon), \quad x \in \Omega, \\ (u^\varepsilon - u^{(1)})(0) = 0, \quad (u^\varepsilon - u^{(1)})(1) = 0. \end{cases} \tag{2.82}$$

Aplicando agora o Princípio do Máximo (Anexo A.1), que se encontra na seção 2.1 do livro de LARSSON; THOMEE (2009), chega-se em

$$||u^\varepsilon - u^{(1)}||_{\mathcal{C}([0,1])} \leq C||\mathcal{L}(u^\varepsilon - u^{(1)})||_{\mathcal{C}([0,1])}, \tag{2.83}$$

que é equivalente a

$$||u^\varepsilon - u^{(1)}||_{\mathcal{C}([0,1])} \leq C||F(x,\varepsilon)||_{\mathcal{C}([0,1])}. \tag{2.84}$$

Mas, do operador dado em (1.12) e da regra da cadeia (1.10) tem-se que

$$\mathcal{L}^\varepsilon u^{(1)} - f(x,y) = \frac{d}{dx}\left(a(y)\frac{d}{dx}(u_0(x) + \varepsilon u_1(x,y))\right) - f(x,y), \tag{2.85}$$

que pode ser escrita como

$$\mathcal{L}^{\varepsilon}u^{(1)} - f(x,y) = \frac{d}{dx}\left(a(y)\frac{d}{dx}\left(u_0(x) + \varepsilon N_1(y)\frac{du_0}{dx}\right)\right) - f(x,y), \tag{2.86}$$

e assim

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{\varepsilon}u^{(1)} - f(x,y) &= a(y)\frac{d^2u_0}{dx^2} + \varepsilon^{-1}\frac{da(y)}{dy}\frac{du_0}{dx} + \varepsilon a(y)N_1(y)\frac{d^3u_0}{dx^3} \\ &+ \frac{d(a(y)N_1(y))}{dy}\frac{d^2u_0}{dx^2} + a(y)\frac{dN_1(y)}{dy}\frac{d^2u_0}{dx^2} + \varepsilon^{-1}\frac{da(y)}{dy}\frac{d^2N_1(y)}{dy^2}\frac{du_0}{dx} - f(x,y),\end{aligned} \tag{2.87}$$

que é equivalente a

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{\varepsilon}u^{(1)} - f(x,y) &= \varepsilon a(y)N_1(y)\frac{d^3u_0}{dx^3} + \frac{d(a(y)N_1(y))}{dy}\frac{d^2u_0}{dx^2} \\ &+ \varepsilon^{-1}\frac{d}{dy}\left(a(y)\frac{dN_1(y)}{dy} + a(y)\right)\frac{du_0}{dx} + \left(a(y)\frac{dN_1(y)}{dy} + a(y)\right)\frac{d^2u_0}{dx^2} - f(x,y).\end{aligned} \tag{2.88}$$

Do problema (2.80), a equação (2.9) passa a ser

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(a(y)\frac{du_0}{dx}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(a(y)\frac{\partial u_1}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(a(y)\frac{\partial u_1}{\partial y}\right) - f(x,y) = 0, \tag{2.89}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\left(a(y)\frac{du_0}{dx}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(a(y)\frac{\partial}{\partial x}\left(N_1(y)\frac{du_0}{dx}\right)\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(a(y)\frac{\partial}{\partial y}\left(N_1(y)\frac{du_0}{dx}\right)\right) \\ - f(x,y) = 0,\end{aligned} \tag{2.90}$$

logo

$$a(y)\frac{d^2u_0}{dx^2} + \frac{d(a(y)N_1(y))}{dy}\frac{d^2u_0}{dx^2} + a(y)\frac{dN_1(y)}{dy}\frac{d^2u_0}{dx^2} - f(x,y) = 0, \tag{2.91}$$

que é equivalente a

$$\frac{d(a(y)N_1(y))}{dy}\frac{d^2u_0}{dx^2} + \hat{a}\frac{d^2u_0}{dx^2} - f(x,y) = 0, \tag{2.92}$$

chegando em

$$\frac{d(a(y)N_1(y))}{dy}\frac{d^2u_0}{dx^2} = -\hat{f}(x) + f(x,y). \tag{2.93}$$

E assim, substituindo (2.93) em (2.88) obtém-se

$$\mathcal{L}^{\varepsilon}u^{(1)} - f(x,y) = \varepsilon a(y)N_1(y)\frac{d^3u_0}{dx^3}. \tag{2.94}$$

Disso e de (2.80) tem-se que

$$F(x,\varepsilon) = -\varepsilon a(y)N_1(y)\frac{d^3u_0}{dx^3}. \tag{2.95}$$

E então

$$||F(x,\varepsilon)||_{\mathcal{C}[0,1]} = \max_{x\in[0,1]}|F(x,\varepsilon)| = \max_{x\in[0,1]}\left|\varepsilon a(y)N_1(y)\frac{d^3u_0}{dx^3}\right|. \tag{2.96}$$

Se $u_0 \in \mathcal{C}^3([0,1])$, então pelo Teorema de Weierstrass (KUDRIAVTSEV, 1983) existem constantes A_1, A_2 e A_3 positivas, tais que

$$|a(y)| \leq A_1, \;\; |N_1(y)| \leq A_2, \;\; \left|\frac{d^3u_0}{dx^3}\right| \leq A_3. \tag{2.97}$$

Dessa forma, a partir de (2.96) e de (2.97) se tem

$$||F(x,\varepsilon)||_{\mathcal{C}([0,1])} \leq \varepsilon A_1A_2A_3, \tag{2.98}$$

ou seja, sendo A_4 uma constante, obtém-se

$$||F(x,\varepsilon)||_{\mathcal{C}([0,1])} \leq \varepsilon A_4. \tag{2.99}$$

Portanto, de (2.84) e de (2.99), conclui-se que

$$||u^{\varepsilon} - u^{(1)}||_{\mathcal{C}([0,1])} \leq C||F(x,\varepsilon)||_{\mathcal{C}([0,1])} \leq \varepsilon A_4, \tag{2.100}$$

que é equivalente a

$$||u^{\varepsilon} - u^{(1)}||_{\mathcal{C}([0,1])} = \mathcal{O}(\varepsilon). \tag{2.101}$$

Assim, quando $\varepsilon \to 0^+$ a solução $u^{\varepsilon}(x)$ do problema original tende para a SAF $u^{(1)}(x,\varepsilon)$. Da mesma forma, se mostra que quando $\varepsilon \to 0^+$ a SAF $u^{(1)}(x,\varepsilon)$ tende para a solução $u_0(x)$ do problema homogeneizado, ou seja,

$$||u^{(1)} - u_0||_{\mathcal{C}([0,1])} = \mathcal{O}(\varepsilon). \tag{2.102}$$

E ainda,

$$||u^{\varepsilon} - u_0||_{\mathcal{C}([0,1])} = ||u^{\varepsilon} - u^{(1)} + u^{(1)} - u_0||_{\mathcal{C}([0,1])}, \tag{2.103}$$

da desigualdade triangular tem-se que

$$||u^{\varepsilon} - u^{(1)} + u^{(1)} - u_0||_{\mathcal{C}([0,1])} \leq ||u^{\varepsilon} - u^{(1)}||_{\mathcal{C}([0,1])} + ||u^{(1)} - u_0||_{\mathcal{C}([0,1])}. \tag{2.104}$$

Disso e das relações (2.101), (2.102) e (2.103) chega-se em

$$||u^{\varepsilon} - u_0||_{\mathcal{C}([0,1])} = \mathcal{O}(\varepsilon). \tag{2.105}$$

Portanto, a solução $u^{\varepsilon}(x)$ do problema original tende para a solução $u_0(x)$ do problema homogeneizado, quando $\varepsilon \to 0^+$.

2.3 Cálculo das Soluções Analíticas dos Problemas Original e Homogeneizado

As soluções dos problemas original e homogeneizado podem ser encontradas de forma analítica. Dessa forma, do problema original (1.1) pode-se integrar a equação, tendo assim

$$a^{\varepsilon}(x)\frac{du^{\varepsilon}(x)}{dx} = \int_0^x f^{\varepsilon}(s)ds + c_1, \tag{2.106}$$

com c_1 sendo uma constante real. E ainda, pode-se reescrever (2.106) como

$$\frac{du^{\varepsilon}(x)}{dx} = \frac{1}{a^{\varepsilon}(x)}\int_0^x f^{\varepsilon}(s)ds + c_1. \tag{2.107}$$

Integrando novamente a equação resulta em

$$u^{\varepsilon}(x) = \int_0^x \left(\frac{1}{a^{\varepsilon}(r)}\int_0^r f^{\varepsilon}(s)ds + c_1\right)dr + c_2, \tag{2.108}$$

onde c_2 é uma constante real. Das condições de contorno obtém-se

$$u^{\varepsilon}(0) = q_1 = c_2, \tag{2.109}$$

e

$$u^{\varepsilon}(1) = q_2 = \int_0^1 \left(\frac{1}{a^{\varepsilon}(r)}\int_0^r f^{\varepsilon}(s)ds + c_1\right)dr + q_1, \tag{2.110}$$

ou seja,

$$c_1 = \frac{(q_2 - q_1) - \int_0^1 \left(\frac{1}{a^\varepsilon(r)} \int_0^r f^\varepsilon(s)ds \right) dr}{\int_0^1 \frac{1}{a^\varepsilon(r)} dr}. \tag{2.111}$$

Portanto, a solução analítica para o problema original é:

$$u^\varepsilon(x) = \int_0^x \frac{1}{a^\varepsilon(r)} \left(\int_0^r f^\varepsilon(s)ds + \hat{a} \left((q_2 - q_1) - \int_0^1 \left(\frac{1}{a^\varepsilon(v)} \int_0^v f^\varepsilon(s)ds \right) dv \right) \right) dr + q_1. \tag{2.112}$$

A solução do problema homogeneizado (2.60) é obtida de forma semelhante. Assim, integrando a equação do problema chega-se em

$$\frac{du_0(x)}{dx} = \frac{1}{\hat{a}} \int_0^x \hat{f}(s)ds + c_3, \tag{2.113}$$

onde c_3 é uma constante real. Então, integrando novamente a equação chega-se em

$$u_0(x) = \frac{1}{\hat{a}} \int_0^x \left(\int_0^r \hat{f}(s)ds + c_3 \right) dr + c_4, \tag{2.114}$$

com c_4 uma constante real. Das condições de contorno dadas no problema tem-se

$$u_0(0) \;\; = \;\; q_1 = c_4, \tag{2.115}$$

e

$$u_0(1) = q_2 = \frac{1}{\hat{a}} \int_0^1 \left(\int_0^r \hat{f}(s)ds + c_3 \right) dr + q_1, \tag{2.116}$$

ou seja,

$$c_3 \;\; = \;\; \hat{a}(q_2 - q_1) - \int_0^1 \left(\int_0^r \hat{f}(s)ds \right) dr. \tag{2.117}$$

Então, a solução do problema homogeneizado é da seguinte forma

$$u_0(x) = \frac{1}{\hat{a}} \int_0^x \left(\int_0^r \hat{f}(s)ds + \hat{a}(q_2 - q_1) - \int_0^1 \left(\int_0^v \hat{f}(s)ds \right) dv \right) dr + q_1. \tag{2.118}$$

Com isso, pode-se verificar e comparar a proximidade da soluções analíticas u^ε do problema original e u_0 do problema homogeneizado, respectivamente. Além disso, pode-se comparar essas soluções com as SAFs $u^{(1)}(x, \varepsilon)$ e $u^{(2)}(x, \varepsilon)$.

Neste capítulo mostrou-se que o MHA é uma boa forma de resolver problemas unidimensionais térmicos estáticos com coeficientes rapidamente oscilantes. Outros estudos podem ser realizados por meio de aplicações semelhantes, como problemas lineares multidimensionais com coeficientes que variam de forma rápida que descrevem o comportamento de meios microperiódicos térmicos e elásticos. Esses dois casos são apresentados no próximo capítulo, e são resolvidos através do MHA.

3 APLICAÇÃO DO MÉTODO DE HOMOGENEIZAÇÃO ASSINTÓTICA EM MEIOS MULTIDIMENSIONAIS

Neste capítulo o MHA será aplicado em problemas multidimensionais com coeficientes rapidamente oscilantes. Como no capítulo anterior, serão encontrados o problema homogeneizado, os problemas locais e, consequentemente, os termos das SAFs de primeira e segunda ordens. Em um primeiro momento o MHA é utilizado para encontrar a solução de problemas com coeficientes continuamente diferenciáveis, que modelam o comportamento térmico e estático de materiais micro-heterogêneos. E logo após, um desenvolvimento semelhante é proposto, com o intuito de solucionar problemas que modelam o comportamento elástico e estático de um compósito periódico. Neste caso, os problemas são apresentados com componentes funcionalmente graduados e então são consideradas condições de contato entre as fases do meio micro-heterogêneo.

3.1 Desenvolvimento do Problema para Casos Térmicos Lineares com Coeficientes Contantes

3.1.1 Aplicação do MHA

Considera-se um domínio micro-heterogêneo e periódico dado por $\overline{\Omega} = [0,1]^d$, $d = 2,3$. Considera-se ainda que $x = (x_1, ..., x_d)$ e $y = x/\varepsilon$, e utilizando a notação de Einstein[1], tem-se o problema dado pela equação que descreve o campo térmico estacionário, com condições de contorno

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}^{\varepsilon}(x)\dfrac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial x_j}\right) = f^{\varepsilon}(x), \quad x \in \Omega, \\ u^{\varepsilon}(x) = h(x), \quad x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.1}$$

[1]Essa notação é uma simplificação de escrita para somatórios. Com esse intuito, neste caso, considera-se os índices mudos $i, j = 1, ..., d$, e as definições $x = (x_1, ..., x_d)$ e $a^{\varepsilon}(x) = (a_{ij}^{\varepsilon}(x))$. Dessa forma, a notação de Einstein identifica a soma sobre os índices que aparecem repetidos em uma expressão, então na equação do problema (3.1) fica evidente a soma dos termos por i e j, podendo dessa forma ignorar o símbolo de somatório $\sum_{i,j=1}^{d}$.

onde $f^{\varepsilon}(x) = f(x,y) \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ é uma função que representa a densidade de fonte de calor, $h(x) \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ é a temperatura no contorno do domínio Ω, $u^{\varepsilon} = u^{\varepsilon}(x) \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ é a temperatura e, ainda, $a_{ij}^{\varepsilon}(x) \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ são as componentes do tensor de condutividade, para cada $i,j = 1,...,d$. Definindo a célula básica como $Y = [0,1]^d$, então os coeficientes com variação rápida são ditos εY-periódicos. Além disso, esses coeficientes cumprem as seguintes propriedades

- Simetria

$$a_{ij}(y) = a_{ji}(y), \tag{3.2}$$

- Caráter definido positivo

$$\forall \eta \in \mathbb{R}^d,\ \exists\ c > 0 : a_{ij}(y)\eta_i\eta_j \geq c\eta_j\eta_j. \tag{3.3}$$

Aplicando-se o MHA, propõem-se uma SAF para o problema original (3.1)

$$u^{(2)}(x,\varepsilon) = u_0(x,y) + \varepsilon u_1(x,y) + \varepsilon^2 u_2(x,y), \tag{3.4}$$

com $y = x/\varepsilon$ e onde os termos $u_k(x,y) \in \mathcal{C}^2(\Omega \times Y)$ para $k = 0,1,2$ são Y-periódicos com relação à y. Substituindo a SAF (3.4) na equação do problema (3.1) obtém-se

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(y)\frac{\partial(u_0(x,y) + \varepsilon u_1(x,y) + \varepsilon^2 u_2(x,y))}{\partial x_j}\right) = f(x,y). \tag{3.5}$$

Com a regra da cadeia, dada por

$$\frac{\partial}{\partial x_i} g\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) = \left(\frac{\partial g(x,y)}{\partial x_i} + \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial g(x,y)}{\partial y_i}\right)\Bigg|_{y=\frac{x}{\varepsilon}}, \tag{3.6}$$

tem-se que (3.5) passa a ser

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(y)\left(\frac{\partial u_0}{\partial x_j} + \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial u_0}{\partial y_j} + \varepsilon\frac{\partial u_1}{\partial x_j} + \frac{\partial u_1}{\partial y_j} + \varepsilon^2\frac{\partial u_2}{\partial x_j} + \varepsilon\frac{\partial u_2}{\partial y_j}\right)\right) = f(x,y), \tag{3.7}$$

que equivale a

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(y)\frac{\partial u_0}{\partial x_j}\right)+\varepsilon^{-1}\frac{\partial}{\partial y_i}\left(a_{ij}(y)\frac{\partial u_0}{\partial x_j}\right)+\varepsilon^{-1}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(y)\frac{\partial u_0}{\partial y_j}\right)+\varepsilon^{-2}\frac{\partial}{\partial y_i}\left(a_{ij}(y)\frac{\partial u_0}{\partial y_j}\right)\\
&+\varepsilon\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(y)\frac{\partial u_1}{\partial x_j}\right)+\frac{\partial}{\partial y_i}\left(a_{ij}(y)\frac{\partial u_1}{\partial x_j}\right)+\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(y)\frac{\partial u_1}{\partial y_j}\right)+\varepsilon^{-1}\frac{\partial}{\partial y_i}\left(a_{ij}(y)\frac{\partial u_1}{\partial y_j}\right)\\
&+\varepsilon^{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(y)\frac{\partial u_2}{\partial x_j}\right)+\varepsilon\frac{\partial}{\partial y_i}\left(a_{ij}(y)\frac{\partial u_2}{\partial x_j}\right)+\varepsilon\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(y)\frac{\partial u_2}{\partial y_j}\right)+\frac{\partial}{\partial y_i}\left(a_{ij}(y)\frac{\partial u_2}{\partial y_j}\right)\\
&=f(x,y). \quad (3.8)
\end{aligned}$$

Agrupando essa última equação em potências de ε obtém-se

$$\begin{aligned}
&\varepsilon^{-2}\left[\frac{\partial}{\partial y_i}\left(a_{ij}(y)\frac{\partial u_0}{\partial y_j}\right)\right]\\
&\quad+\varepsilon^{-1}\left[\frac{\partial}{\partial y_i}\left(a_{ij}(y)\frac{\partial u_0}{\partial x_j}\right)+\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(y)\frac{\partial u_0}{\partial y_j}\right)+\frac{\partial}{\partial y_i}\left(a_{ij}(y)\frac{\partial u_1}{\partial y_j}\right)\right]\\
&\quad+\varepsilon^{0}\left[\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(y)\frac{\partial u_0}{\partial x_j}\right)+\frac{\partial}{\partial y_i}\left(a_{ij}(y)\frac{\partial u_1}{\partial x_j}\right)+\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(y)\frac{\partial u_1}{\partial y_j}\right)+\right.\\
&\qquad\left.\frac{\partial}{\partial y_i}\left(a_{ij}(y)\frac{\partial u_2}{\partial y_j}\right)-f(x,y)\right]=\mathcal{O}(\varepsilon). \quad (3.9)
\end{aligned}$$

Observa-se que (3.9) só é satisfeita quando as expressões que acompanham as potências de ε são nulas. Logo, chega-se na seguinte sequência recorrente de equações

$$\varepsilon^{-2} \;:\; \frac{\partial}{\partial y_i}\left(a_{ij}(y)\frac{\partial u_0}{\partial y_j}\right)=0, \quad (3.10)$$

$$\varepsilon^{-1} \;:\; \frac{\partial}{\partial y_i}\left(a_{ij}(y)\frac{\partial u_1}{\partial y_j}\right)=-\frac{\partial}{\partial y_i}\left(a_{ij}(y)\frac{\partial u_0}{\partial x_j}\right)-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(y)\frac{\partial u_0}{\partial y_j}\right), \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon^{0} \;:\; &\frac{\partial}{\partial y_i}\left(a_{ij}(y)\frac{\partial u_2}{\partial y_j}\right)=-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(y)\frac{\partial u_0}{\partial x_j}\right)-\frac{\partial}{\partial y_i}\left(a_{ij}(y)\frac{\partial u_1}{\partial x_j}\right) \quad (3.12)\\
&-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(y)\frac{\partial u_1}{\partial y_j}\right)+f(x,y).
\end{aligned}$$

E, da mesma forma que no capítulo anterior, obtém-se os problemas para cada $u_k(x,y)$

$$\begin{cases}\mathcal{L}_{yy}u_0=0, & x\in\Omega,\\ u_0(x,y)=h(x), & x\in\partial\Omega,\end{cases} \quad (3.13)$$

$$\begin{cases}\mathcal{L}_{yy}u_1=-\mathcal{L}_{yx}u_0-\mathcal{L}_{xy}u_0, & x\in\Omega,\\ u_1(x,y)=0, & x\in\partial\Omega,\end{cases} \quad (3.14)$$

$$\begin{cases}\mathcal{L}_{yy}u_2=-\mathcal{L}_{xx}u_0-\mathcal{L}_{yx}u_1-\mathcal{L}_{xy}u_1+f(x,y), & x\in\Omega,\\ u_2(x,y)=0, & x\in\partial\Omega,\end{cases} \quad (3.15)$$

onde o operador linear é definido como

$$\mathcal{L}_{\alpha\beta} = \sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \left(a_{ij}(y) \frac{\partial}{\partial \beta_j} \right). \tag{3.16}$$

E assim serão resolvidos os problemas para cada $u_k(x, y)$ da SAF (3.4), dados através de (3.13)-(3.15). Para isso, enuncia-se o seguinte lema.

Lema 3.1.1. *Sejam $F(y)$ e $a_{ij}(y)$ funções diferenciáveis e Y-periódicas, com $a_{ij}(y)$ definido positivo e simétrico. Uma condição necessária e suficiente para existir uma solução Y-periódica para a equação $\mathcal{L}_{yy}N = F$ é que $\langle F(y) \rangle = 0$. Além disso, a solução é única e da forma $N(y) = \widetilde{N}(y) + C$, onde C é uma constante arbitrária e $\widetilde{N}$ é solução Y-periódica de $\mathcal{L}_{yy}N = F$ com a condição de que $\langle \widetilde{N} \rangle = 0$ (BAKHVALOV; PANASENKO, 1989).*

Assim, pelo problema (3.13) observa-se que $F = 0$, ou seja, $\langle F \rangle = 0$. Portanto existe uma solução Y-periódica da forma $u_0(x, y) = \widetilde{u}(x, y) + c_0(x)$. Como no capítulo anterior, chega-se em

$$u_0(x, y) = u_0(x), \tag{3.17}$$

ou seja, a expressão para u_0 não depende da variável local y.

Disso e da equação (3.11) tem-se que

$$\frac{\partial}{\partial y_i} \left(a_{ij}(y) \frac{\partial u_1}{\partial y_j} \right) = -\frac{\partial}{\partial y_i} \left(a_{ij}(y) \frac{\partial u_0}{\partial x_j} \right), \tag{3.18}$$

pois o segundo termo se anula. Agora, é necessário verificar se existe solução Y-periódica para o problema (3.14) usando (3.18). Para isso, aplica-se o Lema 3.1.1 com $\mathcal{L}_{yy}N = \mathcal{L}_{yy}u_1$ e $F = -\mathcal{L}_{yx}u_0$, como segue

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial y_i} \left(a_{ij}(y) \frac{\partial u_0}{\partial x_j} \right) \right\rangle = \int_{|Y|} \frac{\partial}{\partial y_i} \left(a_{ij}(y) \frac{\partial u_0}{\partial x_j} \right) dy, \tag{3.19}$$

mas $Y = [0, 1]^3$ é o domínio da célula básica, então $|Y| = Y$. Logo, pode-se escrever

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial y_i} \left(a_{ij}(y) \frac{\partial u_0}{\partial x_j} \right) \right\rangle = \frac{\partial u_0}{\partial x_j} \int_Y \frac{\partial a_{ij}(y)}{\partial y_i} dy. \tag{3.20}$$

Além disso, ∂Y é a superfície do contorno de Y. Logo, do Teorema da Divergência (BERTRAM, 1984) tem-se que

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial y_i} \left(a_{ij}(y) \frac{\partial u_0}{\partial x_j} \right) \right\rangle = \frac{\partial u_0}{\partial x_j} \oint_{\partial Y} a_{ij}(y) n_i dy = 0, \tag{3.21}$$

com n_i sendo o vetor unitário em ∂Y para cada $x \in \Omega$. E como $a_{ij}(y)$ são Y-periódicas com relação à variável y, a expressão (3.21) se anula. Com isso, sabe-se que existe solução Y-periódica para o problema para $u_1(x, y)$. Supondo, por separação de variáveis, que

$$u_1(x, y) = N_l(y)\frac{\partial u_0}{\partial x_l}, \tag{3.22}$$

e substituindo na equação (3.18) resulta em

$$\frac{\partial}{\partial y_i}\left(a_{ij}(y)\frac{\partial N_l(y)}{\partial y_j}\right)\frac{\partial u_0}{\partial x_l} + \frac{\partial a_{ij}(y)}{\partial y_i}\frac{\partial u_0}{\partial x_j} = 0. \tag{3.23}$$

Readaptando o índice mudo j por l, no segundo termo de (3.23), chega-se em

$$\frac{\partial}{\partial y_i}\left(a_{ij}(y)\frac{\partial N_l(y)}{\partial y_j}\right)\frac{\partial u_0}{\partial x_l} + \frac{\partial a_{il}(y)}{\partial y_i}\frac{\partial u_0}{\partial x_l} = 0, \tag{3.24}$$

equivalente a

$$\frac{\partial}{\partial y_i}\left(a_{ij}(y)\frac{\partial N_l(y)}{\partial y_j} + a_{il}(y)\right)\frac{\partial u_0}{\partial x_l} = 0. \tag{3.25}$$

Assumindo $\dfrac{\partial u_0}{\partial x_l} \neq 0$, a equação (3.25) é satisfeita quando

$$\frac{\partial}{\partial y_i}\left(a_{ij}(y)\frac{\partial N_l(y)}{\partial y_j} + a_{il}(y)\right) = 0, \tag{3.26}$$

onde (3.26) é a equação do seguinte problema local

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial y_i}\left(a_{ij}(y)\dfrac{\partial N_l(y)}{\partial y_j} + a_{il}(y)\right) = 0, \quad y \in Y, \\ \langle N_l(y)\rangle = 0. \end{cases} \tag{3.27}$$

Pelo Lema 3.1.1 pode-se mostrar que, resolvendo de forma semelhante ao que foi feito em (3.19)-(3.21), existe solução Y-periódica para este problema, pois $\mathcal{L}_{yy}N = \mathcal{L}_{yy}N_l$ e $F = \dfrac{\partial a_{il}(y)}{\partial y_i}$, logo $\langle F\rangle = 0$.

A expressão para $u_2(x, y)$ será encontrada aplicando-se o Lema 3.1.1 no problema (3.15), onde se tem $F = -\dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(y)\dfrac{\partial u_0}{\partial x_j}\right) - \dfrac{\partial}{\partial y_i}\left(a_{ij}(y)\dfrac{\partial u_1}{\partial x_j}\right) - \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(y)\dfrac{\partial u_1}{\partial y_j}\right) + f(x, y)$. Logo, $\langle F\rangle = 0$ para que exista solução Y-periódica. Assim,

$$-\left\langle a_{ij}(y)\frac{\partial^2 u_0}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial(a_{ij}(y)N_l(y))}{\partial y_i}\frac{\partial^2 u_0}{\partial x_j \partial x_l} + a_{ij}(y)\frac{\partial N_l(y)}{\partial y_j}\frac{\partial^2 u_0}{\partial x_i \partial x_l}\right\rangle + \langle f(x, y)\rangle = 0. \tag{3.28}$$

Com o intuito de simplificar ou manipular os cálculos obtidos modificam-se alguns índices mudos. Na equação (3.28) isso é feito para os dois primeiros termos, onde o índice j no primeiro termo é substituído pelo índice mudo l e os índices i e j invertem de posição, obtendo-se assim

$$-\left\langle a_{il}(y)\frac{\partial^2 u_0}{\partial x_i \partial x_l} + \frac{\partial(a_{ji}(y)N_l(y))}{\partial y_j}\frac{\partial^2 u_0}{\partial x_i \partial x_l} + a_{ij}(y)\frac{\partial N_l(y)}{\partial y_j}\frac{\partial^2 u_0}{\partial x_i \partial x_l}\right\rangle + \langle f(x,y)\rangle = 0, \tag{3.29}$$

e então

$$-\left\langle a_{il}(y) + \frac{\partial(a_{ji}(y)N_l(y))}{\partial y_j} + a_{ij}(y)\frac{\partial N_l(y)}{\partial y_j}\right\rangle \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_i \partial x_l} + \langle f(x,y)\rangle = 0. \tag{3.30}$$

Como $a_{ji}(y)$ e $N_l(y)$ são Y-periódicos

$$\left\langle \frac{\partial(a_{ji}(y)N_l(y))}{\partial y_j}\right\rangle = 0. \tag{3.31}$$

Portanto, a equação (3.30) passa a ser

$$-\left\langle a_{il}(y) + a_{ij}(y)\frac{\partial N_l(y)}{\partial y_j}\right\rangle \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_i \partial x_l} = -\langle f(x,y)\rangle, \tag{3.32}$$

ou ainda,

$$\hat{a}_{il}\frac{\partial^2 u_0}{\partial x_i \partial x_l} = \langle f(x,y)\rangle. \tag{3.33}$$

Com $\hat{a}_{il}$ sendo o coeficiente efetivo

$$\hat{a}_{il} = \left\langle a_{il}(y) + a_{ij}(y)\frac{\partial N_l(y)}{\partial y_j}\right\rangle. \tag{3.34}$$

Esse coeficiente deve cumprir as condições que o coeficiente a_{ij} do problema original cumpre. Dessa forma, mais adiante serão provadas as condições de simetria e positividade de $\hat{a}_{il}$. Assim, com $\langle f(x,y)\rangle = \hat{f}(x)$ chega-se no seguinte problema homogeneizado

$$\begin{cases} \hat{a}_{il}\dfrac{\partial^2 u_0}{\partial x_i \partial x_l} = \hat{f}(x), \quad x \in \Omega, \\ u_0(x) = h(x), \quad x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.35}$$

Resta ainda encontrar a expressão para $u_2(x,y)$ da SAF (3.4). Supondo, por separação de variáveis, que

$$u_2(x,y) = N_{pl}(y)\frac{\partial^2 u_0}{\partial x_p \partial x_l}. \tag{3.36}$$

Substituindo (3.36) na equação (3.12) chega-se em

$$a_{ij}(y)\frac{\partial^2 u_0}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial (a_{ij}(y)N_l(y))}{\partial y_i}\frac{\partial^2 u_0}{\partial x_j \partial x_l} + a_{ij}(y)\frac{\partial N_l(y)}{\partial y_j}\frac{\partial^2 u_0}{\partial x_i \partial x_l} + \frac{\partial}{\partial y_i}\left(a_{ij}(y)\frac{\partial N_{pl}(y)}{\partial y_j}\right)\frac{\partial^2 u_0}{\partial x_p \partial x_l} - f(x,y) = 0. \tag{3.37}$$

Modificando alguns índices mudos e assumindo que $\dfrac{\partial^2 u_0}{\partial x_p \partial x_l} \neq 0$ obtém-se

$$a_{pl}(y)\frac{\partial^2 u_0}{\partial x_p \partial x_l} + \frac{\partial (a_{ip}(y)N_l(y))}{\partial y_i}\frac{\partial^2 u_0}{\partial x_p \partial x_l} + a_{pj}(y)\frac{\partial N_l(y)}{\partial y_j}\frac{\partial^2 u_0}{\partial x_p \partial x_l} + \frac{\partial}{\partial y_i}\left(a_{ij}(y)\frac{\partial N_{pl}(y)}{\partial y_j}\right)\frac{\partial^2 u_0}{\partial x_p \partial x_l} - f(x,y) = 0. \tag{3.38}$$

Assumindo que existam funções $b_{il}(y)$, tais que $f(x,y) = b_{pl}(y)\dfrac{\partial^2 u_0(x)}{\partial x_p \partial x_l}$, então

$$\left[\frac{\partial}{\partial y_i}\left(a_{ij}(y)\frac{\partial N_{pl}(y)}{\partial y_j}\right) + a_{pl}(y) + \frac{\partial (a_{ip}(y)N_l(y))}{\partial y_i} + a_{pj}(y)\frac{\partial N_l(y)}{\partial y_j} - b_{pl}(y)\right]\frac{\partial^2 u_0}{\partial x_p \partial x_l} = 0, \tag{3.39}$$

logo

$$\frac{\partial}{\partial y_i}\left(a_{ij}(y)\frac{\partial N_{pl}(y)}{\partial y_j}\right) + a_{pl}(y) + \frac{\partial (a_{ip}(y)N_l(y))}{\partial y_i} + a_{pj}(y)\frac{\partial N_l(y)}{\partial y_j} - b_{pl}(y) = 0. \tag{3.40}$$

Assim, tem-se o problema local para $N_{pl}(y)$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial y_i}\left(a_{ij}(y)\dfrac{\partial N_{pl}(y)}{\partial y_j}\right) + a_{pl}(y) + \dfrac{\partial (a_{ip}(y)N_l(y))}{\partial y_i} + a_{pj}(y)\dfrac{\partial N_l(y)}{\partial y_j} - b_{pl}(y) = 0, \\ \langle N_{pl}(y)\rangle = 0, \end{cases} \tag{3.41}$$

com $y \in Y$. É necessário verificar se este problema admite solução Y-periódica, ou seja, se satisfaz o Lema 3.1.1. Logo, com $F = -a_{pl}(y) - \dfrac{\partial (a_{ip}(y)N_l(y))}{\partial y_i} - a_{pj}(y)\dfrac{\partial N_l(y)}{\partial y_j} + b_{pl}(y)$ tem-se

$$\langle F\rangle = \left\langle -a_{pl}(y) - \frac{\partial (a_{ip}(y)N_l(y))}{\partial y_i} - a_{pj}(y)\frac{\partial N_l(y)}{\partial y_j} + b_{pl}(y)\right\rangle, \tag{3.42}$$

ou ainda,

$$\langle F \rangle = -\left\langle \frac{\partial(a_{ip}(y)N_l(y))}{\partial y_i} \right\rangle - \hat{a}_{pl} + \langle b_{pl} \rangle = 0, \tag{3.43}$$

pois $a_{ip}(y)$ e $N_l(y)$ são Y-periódicos com relação à y e assume-se que $\hat{a}_{pl} = \langle b_{pl}(y) \rangle$, onde esta relação também pode ser obtida da equação (3.33). Com isso, existe solução Y-periódica para o problema (3.41).

E portanto, a SAF de segunda ordem é da forma

$$u^{(2)}(x,\varepsilon) = u_0(x) + \varepsilon N_l\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial u_0(x)}{\partial x_l} + \varepsilon^2 N_{pl}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial^2 u_0(x)}{\partial x_p \partial x_l}. \tag{3.44}$$

3.1.2 Conservação de Propriedades pelo Coeficiente Efetivo

Conservação da Simetria

Serão realizadas agora as provas da simetria e do caráter definido positivo do coeficiente efetivo $\hat{a}_{il}$, referente ao problema homogeneizado (3.35). Para isso considera-se δ_{lj} o delta de Kronecker, ou seja,

$$\delta_{lj} = \begin{cases} 1, & \text{se } l = j, \\ 0, & \text{se } l \neq j. \end{cases} \tag{3.45}$$

Note que (3.45) pode ser escrito como

$$\delta_{lj} = \frac{\partial y_l}{\partial y_j}. \tag{3.46}$$

Assim, a equação do coeficiente efetivo (3.34) pode ser escrita como (CAMACHO, 2010)

$$\hat{a}_{il} = \left\langle a_{ij}(y)\delta_{lj} + a_{ij}(y)\frac{\partial N_l(y)}{\partial y_j} \right\rangle, \tag{3.47}$$

ou ainda,

$$\hat{a}_{il} = \left\langle a_{ij}(y)\frac{\partial y_l}{\partial y_j} + a_{ij}(y)\frac{\partial N_l(y)}{\partial y_j} \right\rangle, \tag{3.48}$$

logo

$$\hat{a}_{il} = \left\langle a_{ij}(y)\frac{\partial(y_l + N_l(y))}{\partial y_j} \right\rangle. \tag{3.49}$$

Agora, chamando uma nova variável $M_l(y) = y_l + N_l(y)$ obtém-se

$$\hat{a}_{il} = \left\langle a_{ij}(y)\frac{\partial M_l(y)}{\partial y_j} \right\rangle, \tag{3.50}$$

que equivale a

$$\hat{a}_{il} = \left\langle a_{pj}(y)\delta_{ip}\frac{\partial M_l(y)}{\partial y_j} \right\rangle. \tag{3.51}$$

De (3.46) tem-se

$$\hat{a}_{il} = \left\langle a_{pj}(y)\frac{\partial y_i}{\partial y_p}\frac{\partial M_l(y)}{\partial y_j} \right\rangle, \tag{3.52}$$

que pode ser escrita como

$$\hat{a}_{il} = \left\langle a_{pj}(y)\frac{\partial (M_i(y) - N_i(y))}{\partial y_p}\frac{\partial M_l(y)}{\partial y_j} \right\rangle, \tag{3.53}$$

e portanto

$$\hat{a}_{il} = \left\langle a_{pj}(y)\frac{\partial M_i(y)}{\partial y_p}\frac{\partial M_l(y)}{\partial y_j} \right\rangle - \left\langle a_{pj}(y)\frac{\partial N_i(y)}{\partial y_p}\frac{\partial M_l(y)}{\partial y_j} \right\rangle. \tag{3.54}$$

Considere agora a equação do problema local (3.27), onde tem-se

$$\frac{\partial}{\partial y_i}\left(a_{ij}(y)\frac{\partial N_l(y)}{\partial y_j} + a_{ij}(y)\delta_{lj} \right) = 0, \tag{3.55}$$

ou seja,

$$\frac{\partial}{\partial y_i}\left(a_{ij}(y)\frac{\partial N_l(y)}{\partial y_j} + a_{ij}(y)\frac{\partial y_l}{\partial y_j} \right) = 0, \tag{3.56}$$

e ainda

$$\frac{\partial}{\partial y_i}\left(a_{ij}(y)\frac{\partial M_l(y)}{\partial y_j} \right) = 0. \tag{3.57}$$

Multiplicando uma função $\phi(y)$, suave e Y-periódica, pela equação (3.57) chega-se em

$$\frac{\partial}{\partial y_i}\left(a_{ij}(y)\frac{\partial M_l(y)}{\partial y_j} \right)\phi(y) = 0. \tag{3.58}$$

Observe que

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial y_i}\left(a_{ij}(y)\frac{\partial M_l(y)}{\partial y_j}\phi(y)\right)\right\rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial y_i}\left(a_{ij}(y)\frac{\partial M_l(y)}{\partial y_j}\right)\phi(y)\right\rangle + \left\langle a_{ij}(y)\frac{\partial M_l(y)}{\partial y_j}\frac{\partial \phi(y)}{\partial y_i}\right\rangle \quad (3.59)$$

é equivalente a

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial y_i}\left(a_{ij}(y)\frac{\partial M_l(y)}{\partial y_j}\phi(y)\right)\right\rangle = \left\langle a_{ij}(y)\frac{\partial M_l(y)}{\partial y_j}\frac{\partial \phi(y)}{\partial y_i}\right\rangle. \quad (3.60)$$

Mas

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial y_i}\left(a_{ij}(y)\frac{\partial M_l(y)}{\partial y_j}\phi(y)\right)\right\rangle = 0, \quad (3.61)$$

pois $a_{ij}(y)$, $\phi(y)$ e $\dfrac{\partial M_l(y)}{\partial y_j}$ são funções Y-periódicas, para todo $y \in Y$. Portanto, de (3.60) e (3.61)

$$\left\langle a_{ij}(y)\frac{\partial M_l(y)}{\partial y_j}\frac{\partial \phi(y)}{\partial y_i}\right\rangle = 0. \quad (3.62)$$

Escolhendo, convenientemente, $\phi(y) = N_p(y)$ a equação (3.62) passa a ser

$$\left\langle a_{ij}(y)\frac{\partial M_l(y)}{\partial y_j}\frac{\partial N_p(y)}{\partial y_i}\right\rangle = 0. \quad (3.63)$$

Disso e da equação (3.54) tem-se

$$\hat{a}_{il} = \left\langle a_{pj}(y)\frac{\partial M_i(y)}{\partial y_p}\frac{\partial M_l(y)}{\partial y_j}\right\rangle. \quad (3.64)$$

Logo,

$$\hat{a}_{il} = \left\langle a_{pj}(y)\frac{\partial M_i(y)}{\partial y_p}\frac{\partial M_l(y)}{\partial y_j}\right\rangle = \left\langle a_{jp}(y)\frac{\partial M_l(y)}{\partial y_j}\frac{\partial M_i(y)}{\partial y_p}\right\rangle = \hat{a}_{li}, \quad (3.65)$$

pois da condição dada em (3.2) tem-se $a_{ij}(y) = a_{ji}(y)$. O que prova a simetria para $\hat{a}_{il}$, ou seja, $\hat{a}_{il} = \hat{a}_{li}$.

Conservação do Caráter Definido Positivo

Agora, mostra-se que para o coeficiente efetivo também é preservado o caráter definido positivo. Tem-se pela equação (3.64) que

$$\hat{a}_{il}\eta_i\eta_l = \left\langle a_{pj}(y)\frac{\partial M_i(y)}{\partial y_p}\frac{\partial M_l(y)}{\partial y_j}\right\rangle \eta_i\eta_l = \left\langle a_{pj}(y)\eta_i\frac{\partial M_i(y)}{\partial y_p}\eta_l\frac{\partial M_l(y)}{\partial y_j}\right\rangle. \tag{3.66}$$

Da condição dada em (3.3) tem-se que para todo $\eta \in \mathbb{R}^d$ existe $c > 0$ tal que

$$a_{pj}(y)\eta_p\eta_j \geq c\eta_j\eta_j, \ \ \forall y \in \mathbb{R}^d, \tag{3.67}$$

então

$$a_{pj}(y)\eta_i\frac{\partial M_i(y)}{\partial y_p}\eta_l\frac{\partial M_l(y)}{\partial y_j} \geq c\eta_l\frac{\partial M_l(y)}{\partial y_j}\eta_l\frac{\partial M_l(y)}{\partial y_j}. \tag{3.68}$$

Assim, de (3.66) e (3.68) tem-se

$$\hat{a}_{il}\eta_i\eta_l \geq c\sum_{j=1}^{d}\left\langle\left(\eta_l\frac{\partial M_l(y)}{\partial y_j}\right)^2\right\rangle. \tag{3.69}$$

Da desigualdade de Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz (KOLMOGOROV; FOMIN, 1975), a qual diz que $\langle f\rangle^2\langle g\rangle^2 \geq \langle fg\rangle^2$ tem-se que

$$\hat{a}_{il}\eta_i\eta_l \geq c\sum_{j=1}^{d}\left\langle\eta_l\frac{\partial M_l(y)}{\partial y_j}\right\rangle^2. \tag{3.70}$$

Assim, como $M_l(y) = y_l + N_l(y)$ então

$$\hat{a}_{il}\eta_i\eta_l \geq c\sum_{j=1}^{d}\left[\left\langle\eta_l\frac{\partial y_l(y)}{\partial y_j}\right\rangle + \left\langle\eta_l\frac{\partial N_l(y)}{\partial y_j}\right\rangle\right]^2. \tag{3.71}$$

Note que o último termo se anula, pois $N_l(y)$ é Y-periódico. E ainda,

$$\left\langle\eta_l\frac{\partial y_l(y)}{\partial y_j}\right\rangle = \eta_l\langle\delta_{lj}\rangle = \eta_j. \tag{3.72}$$

Portanto, (3.71) é reescrita como

$$\hat{a}_{il}\eta_i\eta_l \geq c\sum_{j=1}^{d}\eta_j^2, \tag{3.73}$$

equivalente a

$$\hat{a}_{il}\eta_i\eta_l \geq c\eta_j\eta_j. \tag{3.74}$$

Logo, $\hat{a}_{il}$ preserva o caráter definido positivo de $a_{il}(y)$.

3.1.3 Relação de Proximidade entre as Soluções

Considerando que os coeficientes do problema são continuamente diferenciáveis, prova-se agora a relação de proximidade $\|u^\varepsilon - u_0\|_{\mathcal{C}(\Omega)} = \mathcal{O}(\varepsilon)$. Para isso é feita uma adaptação da condição de contorno quando se propõe $u^{(2)}(x,\varepsilon)$ como SAF do problema original (3.1). Pois, tem-se pelo Lema 3.1.1 que uma das condições para a unicidade de solução $\widetilde{N}$ Y-periódica para o problema $\mathcal{L}_{yy}N = F$ é que $\langle\widetilde{N}\rangle = 0$. Com isso, a SAF $u^{(2)}(x,\varepsilon)$ não cumpre a condição de contorno do problema original (3.1), ou seja, considerando a condição do problema homogeneizado chega-se em

$$u^{(2)}(x,\varepsilon) = u_0(x) + \varepsilon u_1(x,y) + \varepsilon^2 u_2(x,y), \quad x \in \partial\Omega. \tag{3.75}$$

Assim, para forçar que a condição seja a mesma do problema original, utiliza-se uma função de corte $\mathcal{X}(x)$ (BAKHVALOV; PANASENKO, 1989). Essa função é infinitamente diferenciável, com suporte contido no interior da ε-vizinhança de $\partial\Omega$ e satisfaz as seguintes condições

$$\mathcal{X}(x)\Big|_{x\in\partial\Omega} = 1, \quad |\mathcal{X}(x)| \leq 1 \ \text{ e } \ \left\|\varepsilon\frac{\partial\mathcal{X}(x)}{\partial x_j}\right\|_{\mathcal{C}(\overline{\Omega})} \leq C_1, \tag{3.76}$$

com C_1 sendo uma constante independente de ε.

De (3.76) e (3.75), e considerando $y = x/\varepsilon$ tem-se uma nova função, que se comporta de forma semelhante a SAF $u^{(2)}(x,y)$

$$\widetilde{u}^{(2)}(x,\varepsilon) = u^{(2)}(x,\varepsilon) - \mathcal{X}(x)(\varepsilon u_1(x,y) + \varepsilon^2 u_2(x,y)), \tag{3.77}$$

ou ainda,

$$\widetilde{u}^{(2)}(x,\varepsilon) = u_0(x) + \varepsilon u_1(x,y) + \varepsilon^2 u_2(x,y) - \mathcal{X}(x)(\varepsilon u_1(x,y) + \varepsilon^2 u_2(x,y)), \tag{3.78}$$

e então

$$\widetilde{u}^{(2)}(x,\varepsilon) = u_0(x) + \varepsilon(1-\mathcal{X}(x))u_1(x,y) + \varepsilon^2(1-\mathcal{X}(x))u_2(x,y). \tag{3.79}$$

Assim, de (3.76) tem-se que

$$\widetilde{u}^{(2)}(x,\varepsilon) = h(x), \quad x \in \partial\Omega. \tag{3.80}$$

E por outro lado, no interior da ε-vizinhança de Ω, tem-se que

$$\widetilde{u}^{(2)}(x,\varepsilon) = u^{(2)}(x,\varepsilon). \tag{3.81}$$

Agora, substituindo a SAF (3.4) no problema chega-se da equação (3.8), de onde se obtém

$$\mathcal{L}^{\varepsilon}u^{(2)} - f(x,y) = \varepsilon r^{(2)}(x,\varepsilon), \tag{3.82}$$

tal que $u^{(2)}(x,\varepsilon)$ é da forma encontrada em (3.44) e $\varepsilon r^{(2)}(x,\varepsilon)$ é o erro ao se propor $u^{(2)}(x,\varepsilon)$ como solução do problema original (3.1), e é escrito como

$$\varepsilon r^{(2)}(x,\varepsilon) = \varepsilon(\mathcal{L}_{xy}u_2 + \mathcal{L}_{yx}u_2 + \mathcal{L}_{xx}u_1) + \varepsilon^2\mathcal{L}_{xx}u_2. \tag{3.83}$$

Observa-se que

$$||\varepsilon r^{(2)}(x,\varepsilon)||_{\mathcal{C}(\Omega)} = \max_{x\in\Omega}|\varepsilon r^{(2)}(x,\varepsilon)|, \tag{3.84}$$

ou seja,

$$\varepsilon||r^{(2)}(x,\varepsilon)||_{\mathcal{C}(\Omega)} = \max_{x\in\Omega}\left|\varepsilon\left(\mathcal{L}_{xy}u_2 + \mathcal{L}_{yx}u_2 + \mathcal{L}_{xx}u_1 + \varepsilon\mathcal{L}_{xx}u_2\right)\right|, \tag{3.85}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}\varepsilon||r^{(2)}(x,\varepsilon)||_{\mathcal{C}(\Omega)} = \max_{x\in\Omega}\Bigg|\varepsilon\Bigg(&\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(y)\frac{\partial u_2}{\partial y_j}\right) + \frac{\partial}{\partial y_i}\left(a_{ij}(y)\frac{\partial u_2}{\partial x_j}\right)\\ &+ \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(y)\frac{\partial u_1}{\partial x_j}\right) + \varepsilon\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(y)\frac{\partial u_2}{\partial x_j}\right)\Bigg)\Bigg|,\end{aligned} \tag{3.86}$$

com $y = x/\varepsilon$. E assim,

$$\begin{aligned}\varepsilon||r^{(2)}(x,\varepsilon)||_{\mathcal{C}(\Omega)} = \max_{x\in\Omega}\Bigg|\varepsilon\Bigg(&a_{ij}(y)\frac{\partial N_{pl}(y)}{\partial y_j}\frac{\partial^3 u_0}{\partial x_i\partial x_p\partial x_l} + \frac{\partial(a_{ij}(y)N_{pl}(y))}{\partial y_i}\frac{\partial^3 u_0}{\partial x_p\partial x_l\partial x_j}\\ &+ a_{ij}(y)N_l(y)\frac{\partial^3 u_0}{\partial x_i\partial x_l\partial x_j} + \varepsilon a_{ij}(y)N_{pl}(y)\frac{\partial^4 u_0}{\partial x_i\partial x_p\partial x_l\partial x_j}\Bigg)\Bigg|,\end{aligned} \tag{3.87}$$

logo

$$\begin{aligned}\varepsilon||r^{(2)}(x,\varepsilon)||_{\mathcal{C}(\Omega)} = \max_{x\in\Omega}\Bigg|\varepsilon\Bigg(&a_{ij}(y)\frac{\partial N_{pl}(y)}{\partial y_j}\frac{\partial^3 u_0}{\partial x_i\partial x_p\partial x_l} + \frac{\partial a_{ij}(y)}{\partial y_i}N_{pl}(y)\frac{\partial^3 u_0}{\partial x_p\partial x_l\partial x_j}\\ &+ a_{ij}(y)\frac{\partial N_{pl}(y)}{\partial y_i}\frac{\partial^3 u_0}{\partial x_p\partial x_l\partial x_j} + a_{ij}(y)N_l(y)\frac{\partial^3 u_0}{\partial x_i\partial x_l\partial x_j} + \varepsilon a_{ij}(y)N_{pl}(y)\frac{\partial^4 u_0}{\partial x_i\partial x_p\partial x_l\partial x_j}\Bigg)\Bigg|.\end{aligned} \tag{3.88}$$

Do Teorema de Weierstrass e considerando $u_0 \in \mathcal{C}^4(\Omega)$, pode-se admitir que existem constantes $D_0, D_1, D_2, D_3, D_4, D_5$ e D_6 tais que

$$|a_{ij}(y)| \leq D_0, \quad \left|\frac{\partial N_{pl}(y)}{\partial y_j}\right| \leq D_1, \quad \left|\frac{\partial^3 u_0}{\partial x_i \partial x_p \partial x_l}\right| \leq D_2, \quad \left|\frac{\partial a_{ij}(y)}{\partial y_i}\right| \leq D_3, \quad |N_{pl}(y)| \leq D_4,$$
$$|N_l(y)| \leq D_5, \quad \text{e} \quad \left|\frac{\partial^4 u_0}{\partial x_i \partial x_p \partial x_l \partial x_j}\right| \leq D_6. \tag{3.89}$$

Assim, (3.88) é reescrita como

$$\varepsilon||r^{(2)}(x,\varepsilon)||_{\mathcal{C}(\Omega)} \leq \max_{x\in\Omega} |\varepsilon(D_0D_1D_2 + D_3D_4D_2 + D_0D_1D_2 + D_0D_5D_2 + \varepsilon D_0D_4D_6)|, \tag{3.90}$$

ou seja, se $E = \max\{D_0, D_1, D_2, D_3, D_4, D_5, D_6\}$ então

$$\varepsilon||r^{(2)}(x,\varepsilon)||_{\mathcal{C}(\Omega)} \leq E^3 \max_{x\in\Omega} |4\varepsilon + \varepsilon^2| = E^3(4\varepsilon + \varepsilon^2), \tag{3.91}$$

logo

$$\varepsilon||r^{(2)}(x,\varepsilon)||_{\mathcal{C}(\Omega)} = \mathcal{O}(\varepsilon) \tag{3.92}$$

E então tem-se que

$$||r^{(2)}(x,\varepsilon)||_{\mathcal{C}(\Omega)} = \mathcal{O}(1). \tag{3.93}$$

Além disso, da substituição da função $\widetilde{u}^{(2)}(x,\varepsilon)$ no problema original (3.1) obtém-se

$$\mathcal{L}^\varepsilon \widetilde{u}^{(2)} - f(x,y)$$
$$= \varepsilon r^{(2)}(x,\varepsilon) - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(y)\left(\varepsilon\frac{\partial(\mathcal{X}(x)u_1(x,y))}{\partial x_j} + \varepsilon^2\frac{\partial(\mathcal{X}(x)u_2(x,y))}{\partial x_j}\right)\right), \tag{3.94}$$

com $y = x/\varepsilon$. E ainda, considerando a função $\sigma_i(x,\varepsilon)$, tal que

$$\sigma_i(x,\varepsilon) = a_{ij}(y)\left(\varepsilon\frac{\partial(\mathcal{X}(x)u_1(x,y))}{\partial x_j} + \varepsilon^2\frac{\partial(\mathcal{X}(x)u_2(x,y))}{\partial x_j}\right), \tag{3.95}$$

pode-se reescrever (3.94) como

$$\mathcal{L}^\varepsilon \widetilde{u}^{(2)} - f(x,y) = \varepsilon r^{(2)}(x,\varepsilon) - \frac{\partial}{\partial x_i}\sigma_i(x,\varepsilon). \tag{3.96}$$

Observe que

$$||\sigma_i(x,\varepsilon)||_{\mathcal{C}(\Omega)} = \max_{x\in\Omega} |\sigma_i(x,\varepsilon)|, \tag{3.97}$$

equivale a

$$||\sigma_i(x,\varepsilon)||_{\mathcal{C}(\Omega)} = \max_{x\in\Omega}\left|a_{ij}(y)\left(\varepsilon\frac{\partial(\mathcal{X}(x)u_1(x,y))}{\partial x_j} + \varepsilon^2\frac{\partial(\mathcal{X}(x)u_2(x,y))}{\partial x_j}\right)\right|, \tag{3.98}$$

ou ainda, com $y = x/\varepsilon$ tem-se que

$$\begin{aligned}||\sigma_i(x,\varepsilon)||_{\mathcal{C}(\Omega)} = \max_{x\in\Omega}\Bigg|&a_{ij}(y)\left(\varepsilon N_l(y)\left(\frac{\partial\mathcal{X}(x)}{\partial x_j}\frac{\partial u_0}{\partial x_l} + \mathcal{X}(x)\frac{\partial^2 u_0}{\partial x_l\partial x_j}\right)\right)\\ &+ a_{ij}(y)\left(\varepsilon^2 N_{pl}(y)\left(\frac{\partial\mathcal{X}(x)}{\partial x_j}\frac{\partial^2 u_0}{\partial x_p\partial x_l} + \mathcal{X}(x)\frac{\partial^3 u_0}{\partial x_p\partial x_l\partial x_j}\right)\right)\Bigg|,\end{aligned} \tag{3.99}$$

que pode ser escrita como

$$\begin{aligned}||\sigma_i(x,\varepsilon)||_{\mathcal{C}(\Omega)} = \max_{x\in\Omega}\Bigg|&a_{ij}(y)\varepsilon N_l(y)\left(\frac{\partial\mathcal{X}(x)}{\partial x_j}\frac{\partial u_0}{\partial x_l}\right) + a_{ij}(y)\varepsilon N_l(y)\mathcal{X}(x)\frac{\partial^2 u_0}{\partial x_l\partial x_j}\\ &+ a_{ij}(y)\varepsilon^2 N_{pl}(y)\left(\frac{\partial\mathcal{X}(x)}{\partial x_j}\frac{\partial^2 u_0}{\partial x_p\partial x_l}\right) + a_{ij}(y)\varepsilon^2 N_{pl}(y)\mathcal{X}(x)\frac{\partial^3 u_0}{\partial x_p\partial x_l\partial x_j}\Bigg|.\end{aligned} \tag{3.100}$$

Disso e do Teorema de Weierstrass existem constantes A_0, A_1 e A_2 tais que

$$|a_{ij}(y)| \leq A_0, \;\; |N_l(y)| \leq A_1 \;\text{ e }\; |N_{pl}(y)| \leq A_2. \tag{3.101}$$

Assim, dessas condições e de (3.100) chega-se em

$$\begin{aligned}||\sigma_i(x,\varepsilon)||_{\mathcal{C}(\Omega)} \leq \max_{x\in\Omega}\Bigg|&A_0A_1\left|\varepsilon\frac{\partial\mathcal{X}(x)}{\partial x_j}\right|\left|\frac{\partial u_0}{\partial x_l}\right| + A_0A_1\varepsilon\left|\mathcal{X}(x)\right|\left|\frac{\partial^2 u_0}{\partial x_l\partial x_j}\right|\\ &+ A_0A_2\varepsilon\left|\varepsilon\frac{\partial\mathcal{X}(x)}{\partial x_j}\right|\left|\frac{\partial^2 u_0}{\partial x_p\partial x_l}\right| + A_0A_2\varepsilon^2\left|\mathcal{X}(x)\right|\left|\frac{\partial^3 u_0}{\partial x_p\partial x_l\partial x_j}\right|\Bigg|.\end{aligned} \tag{3.102}$$

Agora, se $B_0 = \max\{A_0, A_1, A_2\}$ então

$$\begin{aligned}||\sigma_i(x,\varepsilon)||_{\mathcal{C}(\Omega)} \leq B_0^2\max_{x\in\Omega}\Bigg|\Bigg|&\varepsilon\frac{\partial\mathcal{X}(x)}{\partial x_j}\Bigg|\left|\frac{\partial u_0}{\partial x_l}\right| + \varepsilon\left|\mathcal{X}(x)\right|\left|\frac{\partial^2 u_0}{\partial x_l\partial x_j}\right|\\ &+ \varepsilon\left|\varepsilon\frac{\partial\mathcal{X}(x)}{\partial x_j}\right|\left|\frac{\partial^2 u_0}{\partial x_p\partial x_l}\right| + \varepsilon^2\left|\mathcal{X}(x)\right|\left|\frac{\partial^3 u_0}{\partial x_p\partial x_l\partial x_j}\right|\Bigg|.\end{aligned} \tag{3.103}$$

Além disso, se $u_0 \in \mathcal{C}^4(\Omega)$, então segundo o Teorema de Weierstrass vão existir constantes A_4, A_5, A_6 e A_7 que satisfazem as seguintes desigualdades

$$\left|\varepsilon\frac{\partial\mathcal{X}(x)}{\partial x_j}\right| \leq A_4, \;\; \left|\frac{\partial u_0}{\partial x_l}\right| \leq A_5, \;\; \left|\frac{\partial^2 u_0}{\partial x_p\partial x_l}\right| \leq A_6 \;\text{ e }\; \left|\frac{\partial^3 u_0}{\partial x_p\partial x_l\partial x_j}\right| \leq A_7. \tag{3.104}$$

Com isso, de (3.76) e se $B_1 = \max\{A_4, A_5, A_6, A_7\}$ tem-se

$$||\sigma_i(x,\varepsilon)||_{\mathcal{C}(\Omega)} \leq B_0^2 B_1^2 \max_{x\in\Omega} \left|1 + 2\varepsilon + \varepsilon^2\right| = B_0^2 B_1^2 (1 + 2\varepsilon + \varepsilon^2). \tag{3.105}$$

E portanto,

$$||\sigma_i(x,\varepsilon)||_{\mathcal{C}(\Omega)} = \mathcal{O}(\varepsilon). \tag{3.106}$$

Além disso, subtraindo os problemas (3.96) e (3.1) encontra-se

$$\mathcal{L}^\varepsilon(\widetilde{u}^{(2)} - u^\varepsilon) = \varepsilon r^{(2)}(x,\varepsilon) - \frac{\partial}{\partial x_i}\sigma_i(x,\varepsilon). \tag{3.107}$$

E assim, do Princípio do Máximo (Anexo A.2) tem-se, para alguma constante C_2, que

$$||\widetilde{u}^{(2)} - u^\varepsilon||_{\mathcal{C}(\Omega)} \leq ||\widetilde{u}^{(2)} - u^\varepsilon||_{\mathcal{C}(\partial\Omega)} + C_2||\mathcal{L}^\varepsilon(\widetilde{u}^{(2)} - u^\varepsilon)||_{\mathcal{C}(\Omega)}, \tag{3.108}$$

mas através de (3.1) e (3.80) obtém-se $||\widetilde{u}^{(2)} - u^\varepsilon||_{\mathcal{C}(\partial\Omega)} = 0$, então

$$||\widetilde{u}^{(2)} - u^\varepsilon||_{\mathcal{C}(\Omega)} \leq C_2||\mathcal{L}^\varepsilon(\widetilde{u}^{(2)} - u^\varepsilon)||_{\mathcal{C}(\Omega)}, \tag{3.109}$$

ou seja,

$$||\widetilde{u}^{(2)} - u^\varepsilon||_{\mathcal{C}(\Omega)} \leq C_2 \left(\varepsilon||r^{(2)}(x,\varepsilon)||_{\mathcal{C}(\Omega)} + ||\sigma_i(x,\varepsilon)||_{\mathcal{C}(\Omega)}\right). \tag{3.110}$$

Portanto, de (3.92) e (3.106) chega-se em

$$||\widetilde{u}^{(2)} - u^\varepsilon||_{\mathcal{C}(\Omega)} = \mathcal{O}(\varepsilon). \tag{3.111}$$

Fazendo $u_2(x,y) = 0$ tem-se

$$||\widetilde{u}^{(1)} - u^\varepsilon||_{\mathcal{C}(\Omega)} = \mathcal{O}(\varepsilon), \tag{3.112}$$

ou ainda

$$||u^\varepsilon - \widetilde{u}^{(1)}||_{\mathcal{C}(\Omega)} = \mathcal{O}(\varepsilon), \tag{3.113}$$

Da mesma forma encontra-se

$$||\widetilde{u}^{(1)} - u_0||_{\mathcal{C}(\Omega)} = \mathcal{O}(\varepsilon). \tag{3.114}$$

Desses resultados, tem-se que

$$||u^{\varepsilon} - u_0||_{\mathcal{C}(\Omega)} \leq ||u^{\varepsilon} - \widetilde{u}^{(1)}||_{\mathcal{C}(\Omega)} + ||\widetilde{u}^{(1)} - u_0||_{\mathcal{C}(\Omega)}. \tag{3.115}$$

Logo,

$$||u^{\varepsilon} - u_0||_{\mathcal{C}(\Omega)} = \mathcal{O}(\varepsilon). \tag{3.116}$$

Portanto, pôde-se mostrar que as soluções dos problemas original e homogeneizado apresentam uma proximidade de ordem ε para o caso térmico multidimensional quando aplica-se o MHA no problema.

3.2 Desenvolvimento do Problema para Casos Elásticos Lineares com Coeficientes Funcionalmente Graduados

3.2.1 Aplicação do MHA

Dado um material microperiódico elástico linear em um domínio $\overline{\Omega} = \Omega \bigcup \partial\Omega = [0,1]^d$, com sua fronteira suave ou suave por partes. E ainda, $\Omega = \Omega_M \bigcup \Omega_I \bigcup \Gamma^{\varepsilon}$, em que Ω_M é a matriz, Ω_I é a união de todos os domínios I que se distribuem dentro da matriz e Γ^{ε} corresponde ao conjunto de superfícies de contato entre Ω_M e Ω_I na macroescala. Para ilustrar, considere a Figura 8. Assim, assume-se a variável lenta definida como $x = (x_1, x_2, ..., x_d)$ e a variável rápida como $y = x/\varepsilon$.

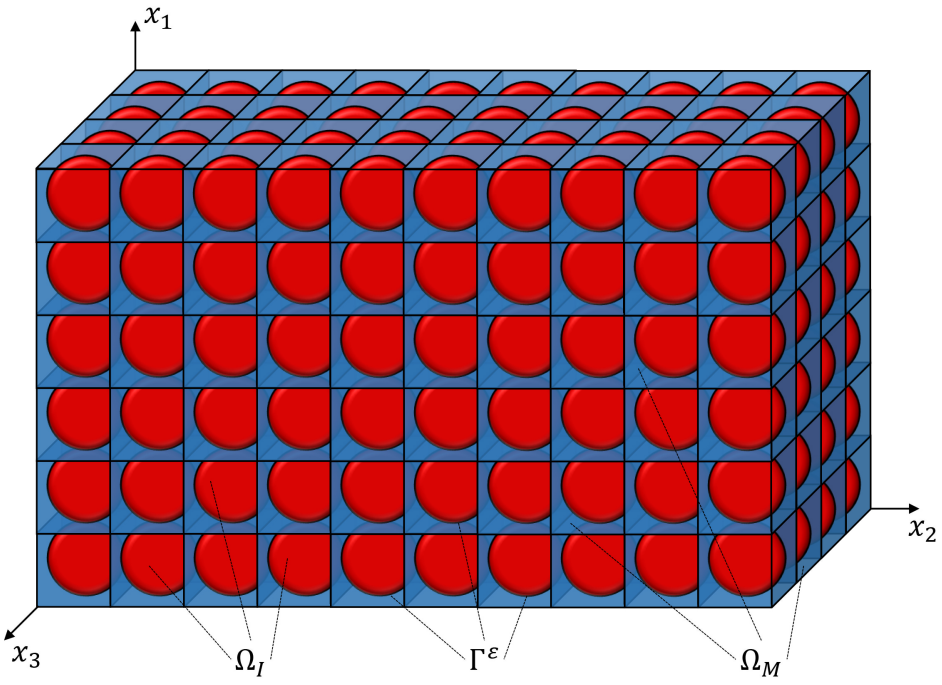

Figura 8: Ilustração do domínio $\Omega = \Omega_M \bigcup \Omega_I \bigcup \Gamma^{\varepsilon}$.

Considere ainda que $f_i^\varepsilon(x) = f_i(x,y) \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ representa as componentes do vetor das forças de corpo, $u_k^\varepsilon = u_k^\varepsilon(x) \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ descreve as componentes do vetor deslocamento, $h_k(x) \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ são as componentes do vetor deslocamento no contorno do meio e o tensor de elasticidade Y-periódico denotado por $C_{ijkl}^\varepsilon(x) = C_{ijkl}\left(x/\varepsilon\right) = C_{ijkl}(y)$ satisfaz as seguintes propriedades para todo $y \in Y = [0,1]^d$

- Simetria

$$C_{ijkl}(y) = C_{jikl}(y) = C_{ijlk}(y) = C_{klij}(y), \tag{3.117}$$

- Caráter definido positivo

$$\forall \eta \in \mathbb{R}^d, \exists\, K > 0 : C_{ijkl}(y)\eta_{ij}\eta_{kl} \geq K\eta_{kl}\eta_{kl}. \tag{3.118}$$

Observa-se que esse tensor apresenta 81 coeficientes que descrevem as propriedades do sólido em um sistema fixo de coordenadas, mas pelas propriedades de simetria em (3.117), esse número diminui para 21 coeficientes linearmente independentes. Dessa forma pode-se representar C_{ijkl} pela matriz simétrica

$$C_{ijkl} = \begin{pmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1123} & C_{1113} & C_{1112} \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2223} & C_{2213} & C_{2212} \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & C_{3323} & C_{3313} & C_{3312} \\ C_{2311} & C_{2322} & C_{2333} & C_{2323} & C_{2313} & C_{2312} \\ C_{1311} & C_{1322} & C_{1333} & C_{1323} & C_{1313} & C_{1312} \\ C_{1211} & C_{1222} & C_{1233} & C_{1223} & C_{1213} & C_{1212} \end{pmatrix}. \tag{3.119}$$

Dessas hipóteses e da teoria da elasticidade (SOKOLNIKOFF, 1956) chega-se no problema de valor de contorno

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(C_{ijkl}^\varepsilon(x)\dfrac{\partial u_k^\varepsilon}{\partial x_l}\right) = f_i^\varepsilon(x), \;\; x \in \Omega_M \bigcup \Omega_I, \\ [\![u_k^\varepsilon(x)]\!] = 0, \;\; x \in \Gamma^\varepsilon, \\ \left[\!\!\left[C_{ijkl}^\varepsilon(x)\dfrac{\partial u_k^\varepsilon(x)}{\partial x_l}\right]\!\!\right] n_j = 0, \;\; x \in \Gamma^\varepsilon, \\ u_k^\varepsilon = h_k(x), \;\; x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.120}$$

No problema (3.120) $[\![\vartheta(x)]\!]$ representa o salto de ϑ através de Γ^ε, e as condições correspondentes indicam que há contato perfeito entre as fases do material, em que n_j é a componente do vetor normal a Γ^ε na direção $j = 1,2,3$. Dessa forma, preserva-se a continuidade de $u^\varepsilon(x)$ e da tensão $C_{ijkl}^\varepsilon(x)\dfrac{\partial u_k^\varepsilon(x)}{\partial x_l}$.

Assim, supõe-se a seguinte SAF[2] para o problema (3.120)

$$u_k^{(2)}(x,\varepsilon) = u_{0,k}(x,y) + \varepsilon u_{1,k}(x,y) + \varepsilon^2 u_{2,k}(x,y). \tag{3.121}$$

Substituindo (3.121) na equação do problema (3.120) tem-se

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(C_{ijkl}(y)\frac{\partial(u_{0,k}(x,y) + \varepsilon u_{1,k}(x,y) + \varepsilon^2 u_{2,k}(x,y))}{\partial x_l}\right) = f_i(x,y), \tag{3.122}$$

e pela regra da cadeia descrita em (3.6)

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(C_{ijkl}(y)\left(\frac{\partial u_{0,k}}{\partial x_l} + \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial u_{0,k}}{\partial y_l} + \varepsilon\frac{\partial u_{1,k}}{\partial x_l} + \frac{\partial u_{1,k}}{\partial y_l} + \varepsilon^2\frac{\partial u_{2,k}}{\partial x_l} + \varepsilon\frac{\partial u_{2,k}}{\partial y_l}\right)\right) = f_i(x,y). \tag{3.123}$$

Aplicando novamente regra da cadeia, a equação (3.123) torna-se

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x_j}\left(C_{ijkl}(y)\frac{\partial u_{0,k}}{\partial x_l}\right) + \varepsilon^{-1}\frac{\partial}{\partial y_j}\left(C_{ijkl}(y)\frac{\partial u_{0,k}}{\partial x_l}\right) + \varepsilon^{-1}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(C_{ijkl}(y)\frac{\partial u_{0,k}}{\partial y_l}\right)\\
+ \;&\varepsilon^{-2}\frac{\partial}{\partial y_j}\left(C_{ijkl}(y)\frac{\partial u_{0,k}}{\partial y_l}\right) + \varepsilon\frac{\partial}{\partial x_j}\left(C_{ijkl}(y)\frac{\partial u_{1,k}}{\partial x_l}\right) + \frac{\partial}{\partial y_j}\left(C_{ijkl}(y)\frac{\partial u_{1,k}}{\partial x_l}\right)\\
+ \;&\frac{\partial}{\partial x_j}\left(C_{ijkl}(y)\frac{\partial u_{1,k}}{\partial y_l}\right) + \varepsilon^{-1}\frac{\partial}{\partial y_j}\left(C_{ijkl}(y)\frac{\partial u_{1,k}}{\partial y_l}\right) + \varepsilon^2\frac{\partial}{\partial x_j}\left(C_{ijkl}(y)\frac{\partial u_{2,k}}{\partial x_l}\right)\\
+ \;&\varepsilon\frac{\partial}{\partial y_j}\left(C_{ijkl}(y)\frac{\partial u_{2,k}}{\partial x_l}\right) + \varepsilon\frac{\partial}{\partial x_j}\left(C_{ijkl}(y)\frac{\partial u_{2,k}}{\partial y_l}\right) + \frac{\partial}{\partial y_j}\left(C_{ijkl}(y)\frac{\partial u_{2,k}}{\partial y_l}\right) = f_i(x,y).
\end{aligned} \tag{3.124}$$

Agrupando em potências de ε pode-se chegar em uma sequência recorrente de equações, como segue

$$\varepsilon^{-2} \;:\; \frac{\partial}{\partial y_j}\left(C_{ijkl}(y)\frac{\partial u_{0,k}}{\partial y_l}\right) = 0, \tag{3.125}$$

$$\varepsilon^{-1} \;:\; \frac{\partial}{\partial y_j}\left(C_{ijkl}(y)\frac{\partial u_{0,k}}{\partial x_l}\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(C_{ijkl}(y)\frac{\partial u_{0,k}}{\partial y_l}\right) + \frac{\partial}{\partial y_j}\left(C_{ijkl}(y)\frac{\partial u_{1,k}}{\partial y_l}\right) = 0, \tag{3.126}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon^{0} \;:\; &\frac{\partial}{\partial x_j}\left(C_{ijkl}(y)\frac{\partial u_{0,k}}{\partial x_l}\right) + \frac{\partial}{\partial y_j}\left(C_{ijkl}(y)\frac{\partial u_{1,k}}{\partial x_l}\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(C_{ijkl}(y)\frac{\partial u_{1,k}}{\partial y_l}\right)\\
&+\frac{\partial}{\partial y_j}\left(C_{ijkl}(y)\frac{\partial u_{2,k}}{\partial y_l}\right) - f_i(x,y) = 0.
\end{aligned} \tag{3.127}$$

[2]A notação $u_{i,k}$ não corresponde à derivada $\dfrac{\partial u_i}{\partial x_k}$ como muitos livros utilizam. Os coeficientes da SAF são escritos em termos de k pois a solução do problema original e a SAF são vetores em termos desse índice, onde $k = 1, 2, 3$.

Substituindo (3.121) nas condições de contato chega-se em

$$[\![u_{0,k}(x,y) + \varepsilon u_{1,k}(x,y) + \varepsilon^2 u_{2,k}(x,y)]\!] = 0, \tag{3.128}$$

ou seja,

$$[\![u_{0,k}(x,y)]\!] = 0, \;\; [\![u_{1,k}(x,y)]\!] = 0 \;\text{ e }\; [\![u_{2,k}(x,y)]\!] = 0. \tag{3.129}$$

E ainda,

$$\left[\!\!\left[C_{ijkl}(y) \frac{\partial (u_{0,k}(x,y) + \varepsilon u_{1,k}(x,y) + \varepsilon^2 u_{2,k}(x,y))}{\partial x_l} \right]\!\!\right] n_j = 0, \tag{3.130}$$

a qual torna-se, pela regra da cadeia (3.6)

$$\left[\!\!\left[C_{ijkl}(y) \left(\frac{\partial u_{0,k}}{\partial x_l} + \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial u_{0,k}}{\partial y_l} + \varepsilon \frac{\partial u_{1,k}}{\partial x_l} + \frac{\partial u_{1,k}}{\partial y_l} + \varepsilon^2 \frac{\partial u_{2,k}}{\partial x_l} + \varepsilon \frac{\partial u_{2,k}}{\partial y_l} \right) \right]\!\!\right] n_j = 0. \tag{3.131}$$

Agrupando em potências de ε obtém-se

$$\varepsilon^{-1} \;:\; \left[\!\!\left[C_{ijkl}(y) \frac{\partial u_{0,k}}{\partial y_l} \right]\!\!\right] n_j = 0, \tag{3.132}$$

$$\varepsilon^{0} \;:\; \left[\!\!\left[C_{ijkl}(y) \left(\frac{\partial u_{0,k}}{\partial x_l} + \frac{\partial u_{1,k}}{\partial y_l} \right) \right]\!\!\right] n_j = 0, \tag{3.133}$$

$$\varepsilon^{1} \;:\; \left[\!\!\left[C_{ijkl}(y) \left(\frac{\partial u_{1,k}}{\partial x_l} + \frac{\partial u_{2,k}}{\partial y_l} \right) \right]\!\!\right] n_j = 0, \tag{3.134}$$

E assim, tem-se os seguintes problemas para cada $u_{w,k}$ da SAF, com $w = \{1,2,3\}$

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{yy} u_{0,k} = 0, \;\; x \in \Omega, \\ [\![u_{0,k}(x,y)]\!] = 0, \;\; x \in \Gamma^\varepsilon, \\ \left[\!\!\left[C_{ijkl}(y) \dfrac{\partial u_{0,k}}{\partial y_l} \right]\!\!\right] n_j = 0, \;\; x \in \Gamma^\varepsilon, \\ u_{0,k}(x,y) = h_k(x), \;\; x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.135}$$

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{yy} u_{1,k} = -\mathcal{L}_{yx} u_{0,k} - \mathcal{L}_{xy} u_{0,k}, \;\; x \in \Omega, \\ [\![u_{1,k}(x,y)]\!] = 0, \;\; x \in \Gamma^\varepsilon, \\ \left[\!\!\left[C_{ijkl}(y) \left(\dfrac{\partial u_{0,k}}{\partial x_l} + \dfrac{\partial u_{1,k}}{\partial y_l} \right) \right]\!\!\right] n_j = 0, \;\; x \in \Gamma^\varepsilon, \\ u_{1,k}(x,y) = 0, \;\; x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.136}$$

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{yy} u_{2,k} = -\mathcal{L}_{xx} u_{0,k} - \mathcal{L}_{yx} u_{1,k} - \mathcal{L}_{xy} u_{1,k} + f_i(x,y), \;\; x \in \Omega, \\ [\![u_{2,k}(x,y)]\!] = 0, \;\; x \in \Gamma^\varepsilon, \\ \left[\!\!\left[C_{ijkl}(y) \left(\dfrac{\partial u_{1,k}}{\partial x_l} + \dfrac{\partial u_{2,k}}{\partial y_l} \right) \right]\!\!\right] n_j = 0, \;\; x \in \Gamma^\varepsilon, \\ u_{2,k}(x,y) = 0, \;\; x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.137}$$

onde $\mathcal{L}_{\alpha\beta}$ é o operador linear definido como

$$\mathcal{L}_{\alpha\beta} = \frac{\partial}{\partial \alpha_j}\left(C_{ijkl}(y)\frac{\partial}{\partial \beta_l}\right). \tag{3.138}$$

Dessa forma, utiliza-se o seguinte lema para encontrar as soluções referentes aos problemas (3.135)-(3.137).

Lema 3.2.1. *Sejam $F_i(y)$ e $C_{ijkl}(y)$ funções suaves por partes e Y-periódicas, com $C_{ijkl}(y)$ sendo um tensor de elasticidade simétrico e definido positivo. Uma condição necessária e suficiente para a existência de uma solução Y-periódica do problema*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial y_j}\left(C_{ijkl}(y)\dfrac{\partial N_k(y)}{\partial y_l}\right) = F_i + \dfrac{\partial F_{1ij}}{\partial y_j}, \;\; y \in Y, \\ [\![N_k(y)]\!] = 0, \;\; y \in \Gamma, \\ \left[\!\!\left[C_{ijkl}(y)\dfrac{\partial N_k(y)}{\partial x_l} - F_{1ij}\right]\!\!\right] n_j = 0, \;\; y \in \Gamma, \end{cases} \tag{3.139}$$

é que $\langle F_i(y)\rangle = 0$. Além disso, a solução é única e da forma $N_k(y) = \widetilde{N}_k(y) + C$, onde C é um vetor constante arbitrário e $\widetilde{N}_k$ é solução Y-periódica do problema com a condição de unicidade $\langle \widetilde{N}_k\rangle = 0$ (BAKHVALOV; PANASENKO, 1989).

Da equação do problema (3.135) tem-se que a fonte é nula. Portanto, do Lema 3.2.1. existe uma solução Y-periódica. E como no capítulo anterior, pode-se provar que essa solução não depende da variável y, ou seja, a expressão para $u_{0,k}$ é

$$u_{0,k}(x,y) = u_{0,k}(x). \tag{3.140}$$

Para resolver o problema (3.136) utiliza-se (3.140), onde tem-se que o segundo termo se anula. E assim

$$\frac{\partial}{\partial y_j}\left(C_{ijkl}(y)\frac{\partial u_{1,k}(x,y)}{\partial y_l}\right) = -\frac{\partial}{\partial y_j}\left(C_{ijkl}(y)\frac{\partial u_{0,k}(x)}{\partial x_l}\right). \tag{3.141}$$

Supondo agora, por separação de variáveis, que $u_{1,k}$ seja da forma

$$u_{1,k}(x,y) = N_{kpq}(y)\frac{\partial u_{0,p}(x)}{\partial x_q}. \tag{3.142}$$

Então substituindo (3.142) em (3.141) chega-se em

$$\frac{\partial}{\partial y_j}\left(C_{ijkl}(y)\frac{\partial N_{kpq}(y)}{\partial y_l}\right)\frac{\partial u_{0,p}(x)}{\partial x_q} = -\frac{\partial}{\partial y_j}\left(C_{ijkl}(y)\right)\frac{\partial u_{0,k}(x)}{\partial x_l}. \tag{3.143}$$

Modificando os índices mudos do lado direito da equação (3.143) obtém-se

$$\frac{\partial}{\partial y_j}\left(C_{ijkl}(y)\frac{\partial N_{kpq}(y)}{\partial y_l}\right)\frac{\partial u_{0,p}(x)}{\partial x_q} = -\frac{\partial}{\partial y_j}\left(C_{ijpq}(y)\right)\frac{\partial u_{0,p}(x)}{\partial x_q}, \tag{3.144}$$

e assumindo que $\dfrac{\partial u_{0,p}(x)}{\partial x_q} \neq 0$ tem-se

$$\frac{\partial}{\partial y_j}\left(C_{ijkl}(y)\frac{\partial N_{kpq}(y)}{\partial y_l} + C_{ijpq}(y)\right) = 0. \tag{3.145}$$

A equação encontrada em (3.145) é a equação do problema local definida para $y \in Y$ e para todo $x \in \Omega$. Onde a solução Y-periódica é $N_{kpq}(y)$. Para a prova basta considerar o Lema 3.2.1, onde a fonte em (3.145) é dada por $F = -\dfrac{\partial}{\partial y_j}\left(C_{ijpq}(y)\right)$. E assim, pelo Teorema da Divergência (BERTRAM, 1984) obtém-se

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial y_j}\left(C_{ijpq}(y)\right)\right\rangle = \int_Y \frac{\partial C_{ijpq}(y)}{\partial y_j} dy, \tag{3.146}$$

que equivale a

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial y_j}\left(C_{ijpq}(y)\right)\right\rangle = \oint_{\partial Y} C_{ijpq}(y)\eta_j dY, \tag{3.147}$$

ou ainda, como $C_{ijkl}(y)$ é Y-periódico

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial y_j}\left(C_{ijpq}(y)\right)\right\rangle = 0. \tag{3.148}$$

Da condição obtida em (3.133) e das expressões para $u_{0,k}$ e $u_{1,k}$ observe que

$$\left[\!\left[C_{ijkl}(y)\frac{\partial N_{kpq}(y)}{\partial y_l}\frac{\partial u_{0,p}(x)}{\partial x_q}\right]\!\right] n_j = -\left[\!\left[C_{ijkl}(y)\frac{\partial u_{0,k}(x)}{\partial x_l}\right]\!\right] n_j, \tag{3.149}$$

modificando os índices obtém-se

$$\left[\!\left[C_{ijkl}(y)\frac{\partial N_{kpq}(y)}{\partial y_l}\right]\!\right] n_j = -\left[\!\left[C_{ijpq}(y)\right]\!\right] n_j, \tag{3.150}$$

pois $\dfrac{\partial u_{0,p}(x)}{\partial x_q} \neq 0$. Logo, para $y \in \Gamma$ tem-se

$$\left[\!\left[C_{ijkl}(y)\frac{\partial N_{kpq}(y)}{\partial y_l} - C_{ijpq}(y)\right]\!\right] n_j = 0. \tag{3.151}$$

E ainda, das condições expressas em (3.129)

$$[\![N_{kpq}(y)]\!] = 0. \tag{3.152}$$

E então, chega-se no problema local para $N_{kpq}(y)$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial y_j}\left(C_{ijkl}(y)\dfrac{\partial N_{kpq}(y)}{\partial y_l} + C_{ijpq}(y)\right) = 0, \quad y \in Y, \\ \left[\!\!\left[C_{ijkl}(y)\dfrac{\partial N_{kpq}(y)}{\partial y_l} - C_{ijpq}(y)\right]\!\!\right] n_j = 0, \quad y \in \Gamma, \\ [\![N_{kpq}(y)]\!] = 0, \quad y \in \Gamma, \\ \langle N_{kpq}\rangle = 0, \end{cases} \tag{3.153}$$

Agora, do problema (3.137) para $u_{2,k}$ tem-se

$$\mathcal{L}_{yy}u_{2,k} = -\mathcal{L}_{xx}u_{0,k} - \mathcal{L}_{yx}u_{1,k} - \mathcal{L}_{xy}u_{1,k} + f_i(x,y). \tag{3.154}$$

Assim, para possuir solução Y-periódica é necessário que o operador de valor médio aplicado nos termos do lado direito da igualdade em (3.154) seja nulo. Portanto,

$$-\langle \mathcal{L}_{xx}u_{0,k} + \mathcal{L}_{yx}u_{1,k} + \mathcal{L}_{xy}u_{1,k} - f_i(x,y)\rangle = 0. \tag{3.155}$$

E então

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x_j}\left(C_{ijkl}(y)\frac{\partial u_{0,k}}{\partial x_l}\right) + \frac{\partial}{\partial y_j}\left(C_{ijkl}(y)\frac{\partial u_{1,k}}{\partial x_l}\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(C_{ijkl}(y)\frac{\partial u_{1,k}}{\partial y_l}\right) - f_i(x,y)\right\rangle = 0, \tag{3.156}$$

ou seja,

$$\left\langle C_{ijkl}(y)\frac{\partial^2 u_{0,k}}{\partial x_j \partial x_l} + \frac{\partial (C_{ijkl}(y)N_{kpq}(y))}{\partial y_j}\frac{\partial^2 u_{0,p}}{\partial x_l \partial x_q} + C_{ijkl}(y)\frac{\partial N_{kpq}(y)}{\partial y_l}\frac{\partial^2 u_{0,p}}{\partial x_j \partial x_q}\right\rangle - \langle f_i(x,y)\rangle = 0. \tag{3.157}$$

Modificando os índices mudos tem-se que

$$\left\langle C_{ijpq}(y)\frac{\partial^2 u_{0,p}}{\partial x_j \partial x_q} + \frac{\partial (C_{ilkj}(y)N_{kpq}(y))}{\partial y_l}\frac{\partial^2 u_{0,p}}{\partial x_j \partial x_q} + C_{ijkl}(y)\frac{\partial N_{kpq}(y)}{\partial y_l}\frac{\partial^2 u_{0,p}}{\partial x_j \partial x_q}\right\rangle - \langle f_i(x,y)\rangle = 0, \tag{3.158}$$

que é equivalente a

$$\left\langle C_{ijpq}(y) + C_{ijkl}(y)\frac{\partial N_{kpq}(y)}{\partial y_l}\right\rangle \frac{\partial^2 u_{0,p}}{\partial x_j \partial x_q} - \langle f_i(x,y)\rangle = 0, \tag{3.159}$$

pois $C_{ilkj}(y)$ e $N_{kpq}(y)$ são Y-periódicos. Então, com $\hat{f}_i(x) = \langle f_i(x,y)\rangle$, o problema homogeneizado é dado pela equação (3.159), e pode ser escrito como

$$\begin{cases} \hat{C}_{ijpq}\dfrac{\partial^2 u_{0,p}}{\partial x_j \partial x_q} = \hat{f}_i(x), \quad x \in \Omega, \\ u_{0,p}(x) = h_k(x), \quad x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.160}$$

com $\hat{C}_{ijpq}$ sendo o tensor de coeficientes efetivos, denotado por

$$\hat{C}_{ijpq} = \left\langle C_{ijpq}(y) + C_{ijkl}(y)\frac{\partial N_{kpq}(y)}{\partial y_l} \right\rangle. \tag{3.161}$$

Por fim, deve-se encontrar a expressão para $u_{2,k}(x,y)$. Para isso, assume-se que essa é da seguinte forma

$$u_{2,k}(x,y) = N_{krpq}(y)\frac{\partial^2 u_{p,0}(x)}{\partial x_r \partial x_q}. \tag{3.162}$$

Então substituindo (3.162) na equação do problema (3.137), e alterando os índices necessários, tem-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y_j}\left(C_{ijkl}(y)\frac{\partial N_{krpq}}{\partial y_l}\right)\frac{\partial^2 u_{0,p}}{\partial x_r \partial x_q} &= -C_{irpq}(y)\frac{\partial^2 u_{0,p}}{\partial x_r \partial x_q} \\ &- \frac{\partial (C_{ijkr}(y)N_{kpq}(y))}{\partial y_j}\frac{\partial^2 u_{0,p}}{\partial x_r \partial x_q} - C_{irkl}(y)\frac{\partial N_{kpq}(y)}{\partial y_l}\frac{\partial^2 u_{0,p}}{\partial x_r x_q} + f_i(x,y). \end{aligned} \tag{3.163}$$

Logo, se existem funções $B_{irpq}(y)$ tais que $f_i(x,y) = B_{irpq}(y)\dfrac{\partial^2 u_{0,p}}{\partial x_r \partial x_q}$ e $\langle B_{irpq}\rangle = \hat{C}_{irpq}$, com $\dfrac{\partial^2 u_{0,p}}{\partial x_r \partial x_q} \neq 0$, tem-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y_j}\left(C_{ijkl}(y)\frac{\partial N_{krpq}}{\partial y_l}\right) &= -C_{irpq}(y) - \frac{\partial (C_{ijkr}(y)N_{kpq}(y))}{\partial y_j} - C_{irkl}(y)\frac{\partial N_{kpq}(y)}{\partial y_l} \\ &+ B_{irpq}(y). \end{aligned} \tag{3.164}$$

Assim, segue o problema local para $N_{krpq}(y)$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial y_j}\left(C_{ijkl}(y)\dfrac{\partial N_{krpq}}{\partial y_l}\right) = \mathcal{F}_{irpq}, \quad y \in Y, \\ \langle N_{krpq}\rangle = 0, \end{cases} \tag{3.165}$$

sendo

$$\mathcal{F}_{irpq} = -C_{irpq}(y) - \frac{\partial (C_{ijkr}(y)N_{kpq}(y))}{\partial y_j} - C_{irkl}(y)\frac{\partial N_{kpq}(y)}{\partial y_l} + B_{irpq}. \tag{3.166}$$

Para saber se existe solução Y-periódica para o problema (3.165) é necessário que $\langle \mathcal{F}_{irpq} \rangle = 0$. Dessa forma, considerando (3.161) tem-se

$$\langle \mathcal{F}_{irpq} \rangle = \left\langle -C_{irpq}(y) - \frac{\partial (C_{ijkr}(y) N_{kpq}(y))}{\partial y_j} - C_{irkl}(y) \frac{\partial N_{kpq}(y)}{\partial y_l} + B_{irpq} \right\rangle, \quad (3.167)$$

ou ainda,

$$\langle \mathcal{F}_{irpq} \rangle = \left\langle -C_{irpq}(y) - \frac{\partial (C_{ijkr}(y) N_{kpq}(y))}{\partial y_j} - C_{irkl}(y) \frac{\partial N_{kpq}(y)}{\partial y_l} + C_{irpq}(y) + C_{irkl}(y) \frac{\partial N_{kpq}(y)}{\partial y_l} \right\rangle, \quad (3.168)$$

logo

$$\langle \mathcal{F}_{irpq} \rangle = 0, \quad (3.169)$$

pois $C_{ijkr}(y)$ e $N_{kpq}(y)$ são Y-periódicos.

Portanto, a SAF é da seguinte forma

$$u_k^{(2)}(x, \varepsilon) = u_{0,k}(x) + \varepsilon N_{kpq}(y) \frac{\partial u_{0,p}(x)}{\partial x_q} + \varepsilon^2 N_{krpq}(y) \frac{\partial^2 u_{0,p}(x)}{\partial x_r \partial x_q}. \quad (3.170)$$

3.2.2 Conservação de Propriedades pelo Coeficiente Efetivo

Conservação da Simetria

Considere uma nova notação para C_{ijkl} da forma

$$A_{jq} = \begin{pmatrix} a_{jq}^{11} & a_{jq}^{12} & a_{jq}^{13} \\ a_{jq}^{21} & a_{jq}^{22} & a_{jq}^{23} \\ a_{jq}^{31} & a_{jq}^{32} & a_{jq}^{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{1j1q} & C_{1j2q} & C_{1j3q} \\ C_{2j1q} & C_{2j2q} & C_{2j3q} \\ C_{3j1q} & C_{3j2q} & C_{3j3q} \end{pmatrix}. \quad (3.171)$$

Pode-se escrever (3.161) como (PRADO et al., 2010)

$$\hat{a}_{jq}^{ip} = \left\langle a_{jq}^{ip}(y) + a_{jl}^{ik}(y) \frac{\partial n_k^{qp}(y)}{\partial y_l} \right\rangle. \quad (3.172)$$

Da condição dada em (3.117) tem-se que $C_{ijpq} = C_{jipq}$. Assim, como os índices são mudos pode-se modificar a equação anterior chegando em

$$\hat{a}_{jq}^{ip} = \left\langle a_{jq}^{ip}(y) + a_{jl}^{ik}(y) \frac{\partial n_k^{qp}(y)}{\partial y_l} \right\rangle = \left\langle a_{iq}^{jp}(y) + a_{il}^{jk}(y) \frac{\partial n_k^{qp}(y)}{\partial y_l} \right\rangle = \hat{a}_{iq}^{jp}, \quad (3.173)$$

ou seja, $\hat{a}_{jq}^{ip} = \hat{a}_{iq}^{jp}$ e portanto $\hat{C}_{ijpq} = \hat{C}_{jipq}$.

Agora, observa-se que é possível escrever $u_{1,k}(x,y) = n_k^{qp}(y)\dfrac{\partial u_{0,p}}{\partial x_q}$. Dessa forma tem-se que $n_k^{qp}(y)\dfrac{\partial u_{0,p}}{\partial x_q} = n_k^{pq}(y)\dfrac{\partial u_{0,q}}{\partial x_p}$, pois p e q são índices mudos. E ainda, sabe-se que $C_{ijpq}(y) = C_{ijqp}(y)$, então

$$\hat{a}_{jq}^{ip} = \left\langle a_{jq}^{ip}(y) + a_{jl}^{ik}(y)\frac{\partial n_k^{qp}(y)}{\partial y_l} \right\rangle = \left\langle a_{jp}^{iq}(y) + a_{jl}^{ik}(y)\frac{\partial n_k^{pq}(y)}{\partial y_l} \right\rangle = \hat{a}_{jp}^{iq}, \tag{3.174}$$

tendo assim $\hat{a}_{jq}^{ip} = \hat{a}_{jp}^{iq}$, ou seja, $\hat{C}_{ijpq} = \hat{C}_{ijqp}$.

Por fim, da equação do tensor de coeficientes efetivos (3.161) tem-se que

$$\hat{A}_{jq} = \left\langle A_{jq}(y) + A_{jl}(y)\frac{\partial N_q(y)}{\partial y_l} \right\rangle, \tag{3.175}$$

equivalente a

$$\hat{A}_{jq} = \left\langle A_{jl}(y)\frac{\partial y_q}{\partial y_l} + A_{jl}(y)\frac{\partial N_q(y)}{\partial y_l} \right\rangle, \tag{3.176}$$

pois $\dfrac{\partial y_q}{\partial y_l} = \delta_{ql}$, onde δ_{ql} é o delta de Kronecker. E ainda, se I_n é a matriz identidade de ordem n, com $n = 3$, tem-se que

$$\hat{A}_{jq} = \left\langle A_{jl}(y)\frac{\partial (y_q I_n + N_q(y))}{\partial y_l} \right\rangle. \tag{3.177}$$

Dessa forma, assumindo que $M_q(y) = y_q I_n + N_q(y)$ chega-se em

$$\hat{A}_{jq} = \left\langle A_{jl}(y)\frac{\partial M_q(y)}{\partial y_l} \right\rangle. \tag{3.178}$$

Considerando $m_k^{qr}(y)$ como os elementos da matriz $M_q(y)$ tem-se

$$\hat{a}_{jq}^{ir} = \left\langle a_{jl}^{ik}(y)\frac{\partial m_k^{qr}(y)}{\partial y_l} \right\rangle, \tag{3.179}$$

ou ainda,

$$\hat{a}_{jq}^{ir} = \left\langle a_{sl}^{vk}(y)\frac{\partial m_k^{qr}(y)}{\partial y_l}\frac{\partial y_j}{\partial y_s}\delta_{iv} \right\rangle. \tag{3.180}$$

Por outro lado, da equação do problema local (3.153) obtém-se que

$$\frac{\partial}{\partial y_s}\left(A_{sl}(y)\frac{\partial M_q(y)}{\partial y_l} \right) = 0, \tag{3.181}$$

e multiplicando essa última equação por uma função matricial Y-periódica $\phi(y)$ de

ordem n, que possui elementos da forma ϕ_{iv}, chega-se em

$$\frac{\partial}{\partial y_s}\left(A_{sl}(y)\frac{\partial M_q(y)}{\partial y_l}\right)\phi(y) = 0. \tag{3.182}$$

Observa-se que, reescrevendo a última equação e aplicando o operador de valor médio tem-se que

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial y_s}\left(a_{sl}^{vk}(y)\frac{\partial m_k^{qr}(y)}{\partial y_l}\right)\phi_{iv}(y)\right\rangle = 0. \tag{3.183}$$

E ainda, obtém-se a seguinte relação

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{\partial}{\partial y_s}\left(\left(a_{sl}^{vk}(y)\frac{\partial m_k^{qr}(y)}{\partial y_l}\right)\phi_{iv}(y)\right)\right\rangle \\ = \left\langle \frac{\partial}{\partial y_s}\left(a_{sl}^{vk}(y)\frac{\partial m_k^{qr}(y)}{\partial y_l}\right)\phi_{iv}(y)\right\rangle + \left\langle a_{sl}^{vk}(y)\frac{\partial m_k^{qr}(y)}{\partial y_l}\frac{\partial \phi_{iv}(y)}{\partial y_s}\right\rangle,\end{aligned} \tag{3.184}$$

onde tem-se que o termo da esquerda é nulo, pois $a_{sl}^{vk}(y)$ e $m_k^{qr}(y)$ são Y-periódicas. Então

$$\left\langle a_{sl}^{vk}(y)\frac{\partial m_k^{qr}(y)}{\partial y_l}\frac{\partial \phi_{iv}(y)}{\partial y_s}\right\rangle = 0. \tag{3.185}$$

Somando (3.180) e (3.185) chega-se em

$$\hat{a}_{jq}^{ir} = \left\langle a_{sl}^{vk}(y)\frac{\partial m_k^{qr}(y)}{\partial y_l}\frac{\partial (y_j\delta_{iv} + \phi_{iv}(y))}{\partial y_s}\right\rangle, \tag{3.186}$$

e assim, assumindo convenientemente que $\phi_{iv}(y) = N_j^T(y)$ pode-se dizer que $M_j(y) = y_j\delta_{iv} + N_j^T(y)$. E ainda,

$$\hat{a}_{jq}^{ir} = \left\langle a_{sl}^{vk}(y)\frac{\partial m_k^{qr}(y)}{\partial y_l}\frac{\partial m_v^{ji}(y)}{\partial y_s}\right\rangle = \left\langle a_{ls}^{kv}(y)\frac{\partial m_v^{ji}(y)}{\partial y_s}\frac{\partial m_k^{qr}(y)}{\partial y_l}\right\rangle = \hat{a}_{qj}^{ri}. \tag{3.187}$$

Ou seja, $\hat{a}_{jq}^{ip} = \hat{a}_{qj}^{pi}$ e portanto $\hat{C}_{ijpq} = \hat{C}_{pqij}$. Provou-se então que os coeficientes efetivos cumprem a condição de simetria.

Conservação do Caráter Definido Positivo

Para provar que os coeficientes efetivos satisfazem a condição de positividade deve-se mostrar que

$$\hat{a}_{jq}^{ir}\eta_q^r\eta_j^i = \left\langle a_{sl}^{vk}(y)\frac{\partial(\eta_q^r m_k^{qr}(y))}{\partial y_l}\frac{\partial(\eta_j^i m_v^{ji}(y))}{\partial y_s}\right\rangle \geq \kappa\eta_j^i\eta_j^i, \tag{3.188}$$

com $\kappa \in \mathbb{R}$. Para isso utiliza-se a relação dada em (3.118), onde essa pode ser escrita como

$$a_{sl}^{vk}(y)\frac{\partial(\eta_q^r m_k^{qr}(y))}{\partial y_l}\frac{\partial(\eta_j^i m_v^{ji}(y))}{\partial y_s} \geq \kappa \sum_{s,v}\left(\frac{\partial(\eta_j^i m_v^{ji}(y))}{\partial y_s}\right)^2. \tag{3.189}$$

Assim, de (3.189) e (3.188) tem-se que

$$\hat{a}_{jq}^{ir}\eta_q^r\eta_j^i \geq \kappa \sum_{s,v}\left\langle\left(\frac{\partial(\eta_j^i m_v^{ji}(y))}{\partial y_s}\right)^2\right\rangle, \tag{3.190}$$

e aplicando a desigualdade de Cauchy-Bunyakowski-Schwarz do lado direito da equação (3.190) obtém-se que

$$\hat{a}_{jq}^{ir}\eta_q^r\eta_j^i \geq \kappa \sum_{s,v}\left\langle\frac{\partial(\eta_j^i m_v^{ji}(y))}{\partial y_s}\right\rangle^2. \tag{3.191}$$

Observa-se que, se $m_v^{ji}(y) = n_v^{ji}(y)$ se $i \neq v$ e $m_v^{ji}(y) = n_v^{jv}(y) + y_j$ para $i = v$. Então pode-se escrever (3.191) como

$$\hat{a}_{jq}^{ir}\eta_q^r\eta_j^i \geq \kappa \sum_{s,v}\left\langle\frac{\partial(\eta_j^v(n_v^{jv}(y) + y_j))}{\partial y_s}\right\rangle^2, \tag{3.192}$$

que equivale a

$$\hat{a}_{jq}^{ir}\eta_q^r\eta_j^i \geq \kappa \sum_{s,v}\left\langle\frac{\partial(\eta_j^v n_v^{jv}(y))}{\partial y_s} + \frac{\partial(\eta_j^v y_j)}{\partial y_s}\right\rangle^2. \tag{3.193}$$

Como $N_q(y)$ é uma função Y-periódica então $\left\langle\frac{\partial(\eta_j^v n_v^{jv}(y))}{\partial y_s}\right\rangle = 0$. Assim

$$\hat{a}_{jq}^{ir}\eta_q^r\eta_j^i \geq \kappa \sum_{s,v}\left\langle\eta_j^v\frac{\partial y_j}{\partial y_s}\right\rangle^2. \tag{3.194}$$

Como $\frac{\partial y_j}{\partial y_s} = \delta_{js}$ tem-se que

$$\eta_j^v\frac{\partial y_j}{\partial y_s} = \eta_j^v\delta_{js} = \eta_s^v. \tag{3.195}$$

Logo

$$\hat{a}_{jq}^{ir}\eta_q^r\eta_j^i \geq \kappa \sum_{s,v}(\eta_s^v)^2, \tag{3.196}$$

e portanto

$$\hat{a}^{ir}_{jq}\eta^r_q\eta^i_j \geq \kappa\eta^v_s\eta^v_s. \tag{3.197}$$

E então

$$\hat{C}_{ijpq}\eta_{ij}\eta_{pq} \geq \kappa\eta_{pq}\eta_{pq}. \tag{3.198}$$

3.2.3 Relação de Proximidade entre as Soluções

Como no caso condutivo multidimensional, para a prova da relação de proximidade entre a solução u^ε_k do problema original e a solução $u_{0,k}$ do problema homogeneizado é necessário criar uma nova função, que se comporta de forma semelhante a SAF. Para isso, considera-se uma função de corte $\mathcal{Y}(x)$ (BAKHVALOV; PANASENKO, 1989) que, por sua vez, possui suporte em uma ε-vizinhança do contorno do domínio. E onde tal função possui as seguintes propriedades, para C_3 constante

$$\mathcal{Y}(x)\Big|_{x\in\partial\Omega} = 1, \;\; |\mathcal{Y}(x)| \leq 1 \;\; \text{e} \;\; \left|\left|\varepsilon\frac{\partial\mathcal{Y}(x)}{\partial x_i}\right|\right|_{\mathcal{C}(\overline{\Omega})} \leq C_3. \tag{3.199}$$

Assim, da condição de contorno do problema homogeneizado e da SAF (3.121) chega-se em

$$u^{(2)}_k(x,\varepsilon) = h_k(x) + \varepsilon u_{1,k}(x,y) + \varepsilon^2 u_{2,k}(x,y), \;\; x\in\partial\Omega, \tag{3.200}$$

com $y = x/\varepsilon$. Dessa forma, tem-se a nova função

$$\widetilde{u}^{(2)}_k(x,\varepsilon) = u^{(2)}_k(x,\varepsilon) - \mathcal{Y}(x)(\varepsilon u_{1,k}(x,y) + \varepsilon^2 u_{2,k}(x,y)), \tag{3.201}$$

ou seja, no interior da ε-vizinhança do contorno tem-se $\widetilde{u}^{(2)}_k(x,\varepsilon) = u^{(2)}_k(x,\varepsilon)$ e no contorno

$$\widetilde{u}^{(2)}_k(x,\varepsilon) = h_k(x). \tag{3.202}$$

Substituindo a SAF (3.121) no problema original (3.120) obtém-se

$$\mathcal{L}^\varepsilon u^{(2)}_k - f_i(x,y) = \varepsilon r^{(2)}_i(x,\varepsilon), \tag{3.203}$$

onde

$$\varepsilon r^{(2)}_i(x,\varepsilon) = \varepsilon(\mathcal{L}_{xx}u_{1,k} + \mathcal{L}_{yx}u_{2,k} + \mathcal{L}_{xy}u_{2,k}) + \varepsilon^2\mathcal{L}_{xx}u_{2,k}. \tag{3.204}$$

De forma semelhante ao que foi feito no capítulo anterior, prova-se que

$$||r_i^{(2)}(x,\varepsilon)||_{L^2(\Omega)} = \mathcal{O}(1). \tag{3.205}$$

E substituindo a função $\widetilde{u}_k^{(2)}$ no problema original (3.120) chega-se em

$$\mathcal{L}^\varepsilon \widetilde{u}_k^{(2)} - f_i(x,y) = \varepsilon r_i^{(2)}(x,\varepsilon) - \frac{\partial}{\partial x_j}\rho_j(x,\varepsilon), \tag{3.206}$$

onde

$$\rho_j(x,\varepsilon) = C_{ijkl}(y)\left(\varepsilon\frac{\partial(\mathcal{Y}(x)u_{1,k})}{\partial x_l} + \varepsilon^2\frac{\partial(\mathcal{Y}(x)u_{2,k})}{\partial x_l}\right). \tag{3.207}$$

E ainda, do mesmo modo que no capítulo anterior, é possível mostrar que

$$||\rho_j(x,\varepsilon)||_{L^2(\Omega)} = \mathcal{O}(\varepsilon). \tag{3.208}$$

Com isso, de subtrair os problemas (3.206) e (3.120) tem-se que

$$\mathcal{L}^\varepsilon(\widetilde{u}_k^{(2)} - u_k^\varepsilon) = \varepsilon r_i^{(2)}(x,\varepsilon) - \frac{\partial}{\partial x_j}\rho_j(x,\varepsilon). \tag{3.209}$$

E do Princípio do Máximo[3] em (3.209) obtém-se

$$||\widetilde{u}_k^{(2)} - u_k^\varepsilon||_{\mathcal{H}^1(\Omega)} \leq C_4\left(\varepsilon||r_i^{(2)}(x,\varepsilon)||_{L^2(\Omega)} + ||\rho_j(x,\varepsilon)||_{L^2(\Omega)}\right). \tag{3.210}$$

Então,

$$||\widetilde{u}_k^{(2)} - u_k^\varepsilon||_{\mathcal{H}^1(\Omega)} = \mathcal{O}(\varepsilon), \tag{3.211}$$

e como caso particular tem-se que

$$||u_k^\varepsilon - \widetilde{u}_k^{(1)}||_{\mathcal{H}^1(\Omega)} = \mathcal{O}(\varepsilon). \tag{3.212}$$

E ainda,

$$||\widetilde{u}_k^{(1)} - u_{0,k}||_{\mathcal{H}^1(\Omega)} = \mathcal{O}(\varepsilon). \tag{3.213}$$

Assim, da desigualdade triangular chega-se em

$$||u_k^\varepsilon - u_{0,k}||_{\mathcal{H}^1(\Omega)} \leq ||u_k^\varepsilon - \widetilde{u}_k^{(1)}||_{\mathcal{H}^1(\Omega)} + ||\widetilde{u}_k^{(1)} - u_{0,k}||_{\mathcal{H}^1(\Omega)}. \tag{3.214}$$

[3]Observe que não existe uma forma geral do Princípio de Máximo para problemas elásticos, pois esses problemas são formulados por sistemas de equações. Mas em alguns casos particulares, como os apresentados nesta dissertação, pode-se aplicar esse princípio (WHEELER, 1996).

Logo,

$$||u_k^\varepsilon - u_{0,k}||_{\mathcal{H}^1(\Omega)} = \mathcal{O}(\varepsilon). \tag{3.215}$$

Portanto, a solução u_k^ε do problema original converge para a solução $u_{0,k}$ do problema homogeneizado quando $\varepsilon \to 0^+$ para o caso elástico multidimensional.

4 EXEMPLOS

Neste capítulo alguns exemplos são resolvidos para os casos unidimensional, apresentado no Capítulo 2, e multidimensionais, apresentados no Capítulo 3.

4.1 Caso Térmico Unidimensional

4.1.1 Exemplo 1

Considere o problema (1.1) com condições de contorno não homogêneas $u^{\varepsilon}(0) = 0$ e $u^{\varepsilon}(1) = 1$. Além disso, o coeficiente original é dado por $a\,(y) = 1 + 0.25\cos\,(2\pi y)$ e a fonte é da forma $f\,(x, y) = \cos\,(2\pi y)$. Assim, tem-se o seguinte problema de valor de contorno

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}\left(a^{\varepsilon}(x)\dfrac{du^{\varepsilon}}{dx}\right) = \cos\left(2\pi\dfrac{x}{\varepsilon}\right), \quad x \in \Omega, \\ u^{\varepsilon}(0) = 0, \quad u^{\varepsilon}(1) = 1. \end{cases} \tag{4.1}$$

Pode-se observar, a partir da Figura 9, a rápida variação do coeficiente do problema original cada vez que ε tende para um valor mais próximo de zero. Além disso, é fácil notar que esse coeficiente é positivo, limitado e bem definido em todos os pontos do intervalo $[0, 1]$.

Calcula-se primeiramente o coeficiente efetivo, a partir da equação (2.48), onde chega-se em (ver Anexo B.1)

$$\hat{a} = \frac{\sqrt{15}}{4}. \tag{4.2}$$

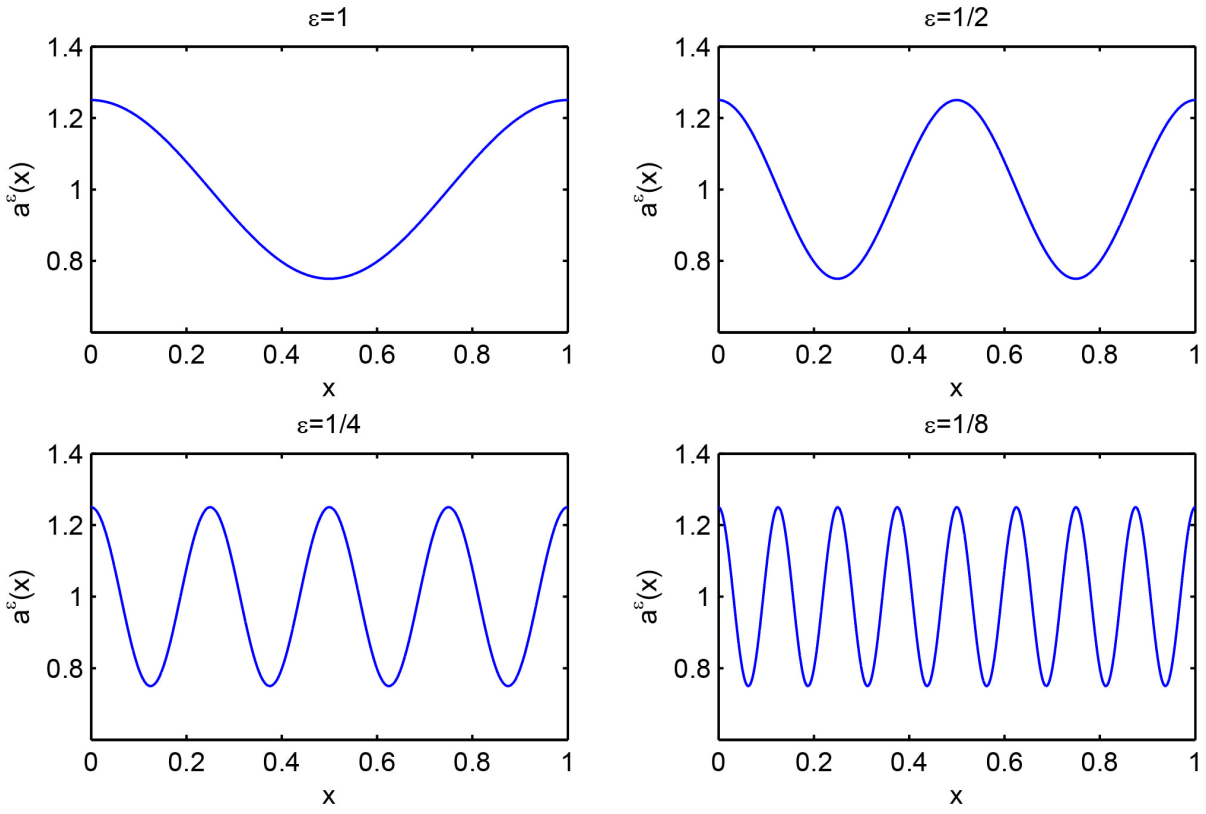

Figura 9: Variação do coeficiente de condutividade, para diferentes valores de ε.

Para encontrar a SAF $u^{(2)}(x,\varepsilon)$ é necessário resolver os problemas locais. A partir de (2.51) e das condições de contorno do problema (2.38) pode-se chegar na solução para $N_1(y)$. Tendo assim, sua forma primitiva dada por uma função separada por intervalos, a qual é exibida em (4.3). O desenvolvimento para obter essa solução é mostrado detalhadamente no Anexo B.2, onde também é provada a continuidade e a antissimetria dessa função (Anexos B.3 e B.4). O comportamento dessa solução é ilustrado na Figura 10, onde os gráficos mostram a rápida oscilação de $N_1(y)$ à medida em que ε tende a zero.

$$N_1(y) = \begin{cases} 0, \ \text{ se } \ y = 1/2, \\ \dfrac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\dfrac{3}{5}}\operatorname{tg}(\pi y)\right) - y, \ \text{ se } \ 0 < y < 1/2, \\ \dfrac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\dfrac{3}{5}}\operatorname{tg}(\pi y)\right) - y + 1, \ \text{ se } \ 1/2 < y < 1. \end{cases} \tag{4.3}$$

Além disso, da Figura 10 pode-se observar que $N_1\left(x/\varepsilon\right)$ é uma função limitada e preserva as condições de periodicidade e continuidade. E também, quando $\varepsilon = 1$ fica evidente que $N_1(x)$ é antissimétrica com relação ao ponto $y = 1/2$, e isso é provado

no Anexo B.4. Dessa última informação pode-se concluir que

$$\int_0^1 N_1(y)dy = 0, \tag{4.4}$$

ou seja,

$$\langle N_1(y) \rangle = 0. \tag{4.5}$$

Esse resultado aparece de forma natural para casos multidimensionais (CIORANESCU; DONATO, 1999).

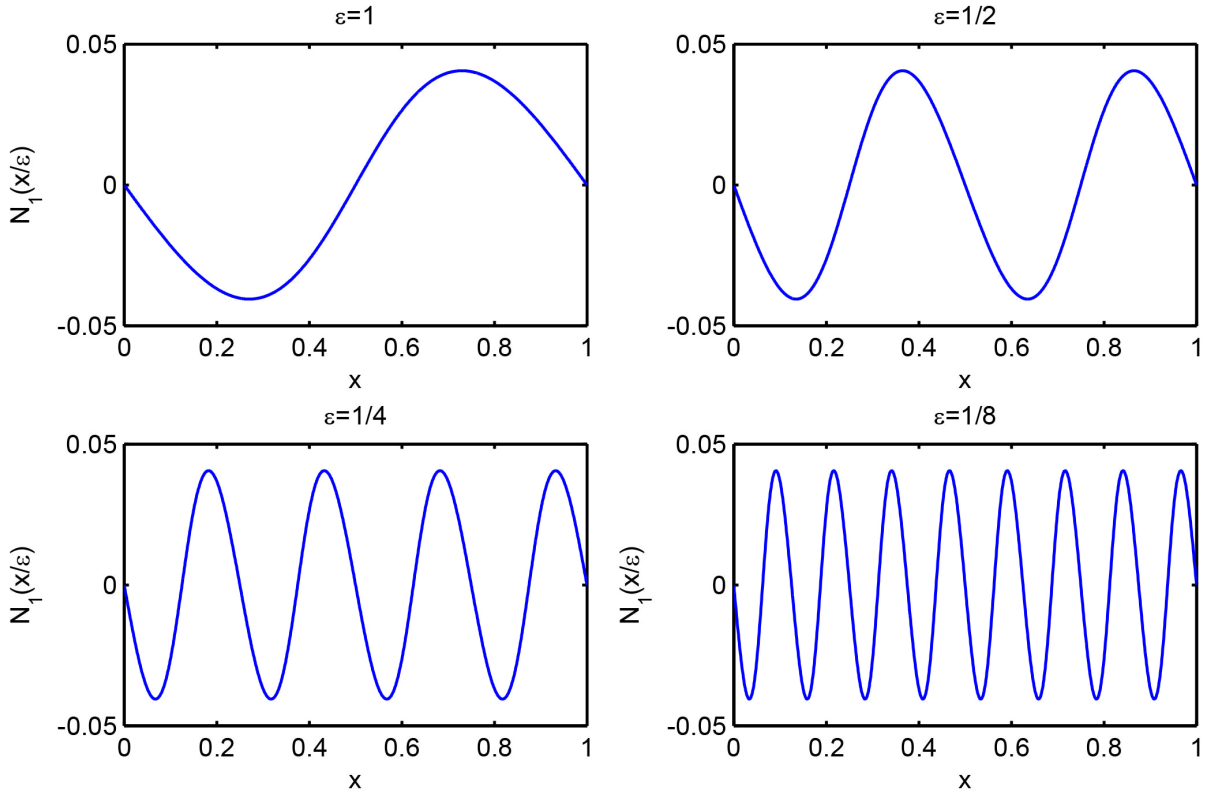

Figura 10: Solução $N_1(x/\varepsilon)$ do problema local, para diferentes valores de ε.

Como $\hat{f}(x) = 0$ neste exemplo, o problema homogeneizado será

$$\begin{cases} \dfrac{d^2u_0}{dx^2} = 0, \quad x \in \Omega, \\ u_0(0) = 0, \quad u_0(1) = 1. \end{cases} \tag{4.6}$$

E assim, da expressão (2.118) chega-se na solução $u_0(x)$

$$u_0(x) = x. \tag{4.7}$$

Por (4.7) tem-se que $\frac{du_0}{dx} = 1$ e $\frac{d^2u_0}{dx^2} = 0$. Então, a SAF $u^{(2)}(x,\varepsilon)$, proposta através do MHA, será idêntica à solução $u^{(1)}(x,\varepsilon)$, ou seja,

$$u^{(2)}(x,\varepsilon) = u^{(1)}(x,\varepsilon) = x + \varepsilon N_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right). \tag{4.8}$$

E ainda, neste exemplo, a solução $u_1(x,y)$ possui o mesmo comportamento de $N_1(y)$ e pode ser analisada através da Figura 11.

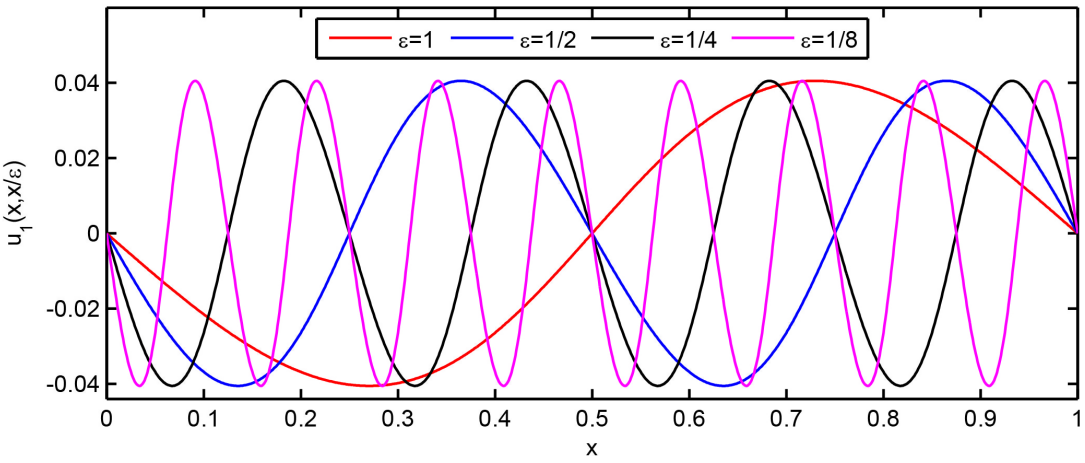

Figura 11: Solução $u_1(x,y)$, para diferentes valores de ε.

Pelas condições de contorno, do coeficiente efetivo e da equação (2.112) chega-se na solução analítica do problema original (4.1)

$$u^{\varepsilon}(x) = -\frac{\varepsilon^2}{\pi^2}\ln\left|\frac{1+0.25\cos\left(2\pi x/\varepsilon\right)}{1.25}\right| + \frac{\sqrt{15}}{4}\left(1+\frac{\varepsilon^2}{\pi^2}\ln\left|\frac{1+0.25\cos\left(2\pi/\varepsilon\right)}{1.25}\right|\right)\int_0^x \frac{1}{1+0.25\cos\left(2\pi r/\varepsilon\right)}dr. \tag{4.9}$$

Dessa forma, é possível comparar as soluções $u_0(x)$ do problema homogeneizado e a assintótica formal $u^{(1)}(x,\varepsilon)$ com a solução original $u^{\varepsilon}(x)$. Além disso, com o intuito de comparar a solução do problema original numérica com a analítica (4.9), aplicou-se o método das diferenças finitas na equação do problema original (4.1), escrita como

$$\frac{d^2u^{\varepsilon}(x)}{dx^2} - \frac{\pi}{2\varepsilon}\frac{\operatorname{sen}(2\pi x/\varepsilon)}{1+0.25\cos(2\pi x/\varepsilon)}\frac{du^{\varepsilon}(x)}{dx} = \frac{\cos(2\pi x/\varepsilon)}{1+0.25\cos(2\pi x/\varepsilon)}. \tag{4.10}$$

Os detalhes desse método estão no Anexo C e foram definidos a partir da teoria apresentada por CONTE; DE BOOR (1980).

As representações gráficas das soluções encontradas são ilustradas na Figura 12, onde é fácil notar a proximidade entre as soluções $u_0(x)$, $u^{(1)}(x,\varepsilon)$ e $u^{\varepsilon}(x)$ para $\varepsilon \to 0$.

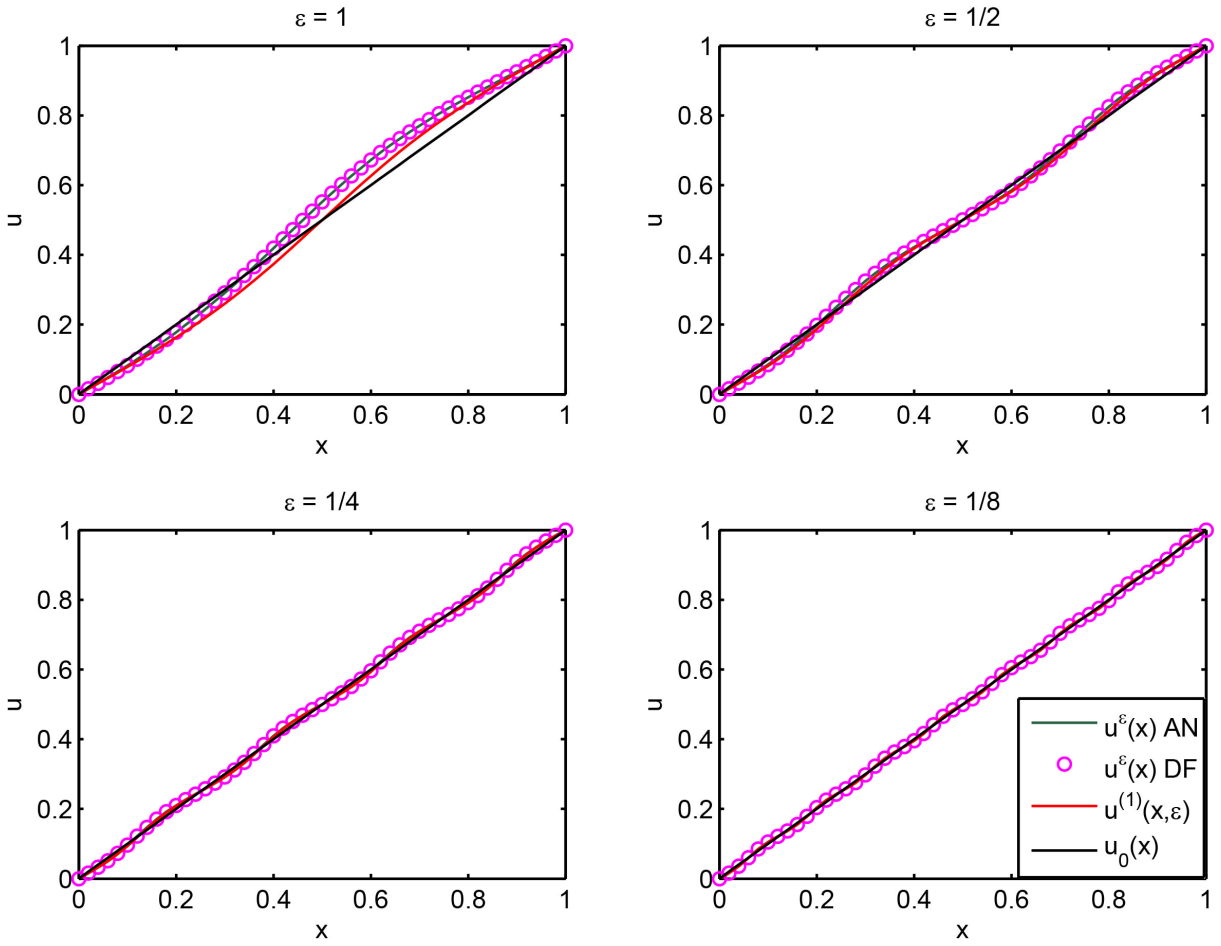

Figura 12: Soluções: $u_0(x)$ do problema homogeneizado, $u^{(1)}(x,\varepsilon)$ da SAF e $u^{\varepsilon}(x)$ do problema original.

Observa-se que as soluções $u^{\varepsilon}(x)$ exata e assintótica (curva vermelha) do problema original apresentam o mesmo comportamento e ainda, ambas tendem para a solução u_0 do problema homogeneizado (curva preta) quando ε decresce. Percebe-se também que a solução analítica (4.9) (curva verde: AN) coincide com a solução numérica (circunferências rosas: DF) de $u^{\varepsilon}(x)$.

Neste exemplo aplicou-se o MHA em um problema de valor de contorno com condições de Dirichlet não homogêneas. Ainda, encontrou-se o problema homogeneizado com fonte nula e sua solução dada por uma função linear. Com isso, obteve-se a mesma solução para as SAFs de segunda e primeira ordens. No exemplo a seguir um novo problema é proposto, onde suas condições de contorno são homogêneas e onde o problema homogeneizado apresenta fonte não nula. Dessa forma, encontra-se a SAF de segunda ordem com um termo a mais se comparada com a SAF de primeira ordem.

4.1.2 Exemplo 2

Seja o coeficiente original e a fonte dados, respectivamente, por $a\,(y) = 1 + 0.25\cos\,(2\pi y)$ e $f\,(x,y) = -1 + \cos\,(2\pi y)$. Considerando condições de contorno homogêneas tem-se o seguinte problema original

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}\left(a^{\varepsilon}(x)\dfrac{du^{\varepsilon}}{dx}\right) = -1 + \cos\left(2\pi\dfrac{x}{\varepsilon}\right), \quad x \in \Omega, \\ u^{\varepsilon}(0) = 0, \quad u^{\varepsilon}(1) = 0. \end{cases} \tag{4.11}$$

Do Exemplo 1 as soluções $\hat{a}$ do coeficiente efetivo e $N_1(y)$ do problema local, expressas em (4.2) e (4.3), são as mesmas para o Exemplo 2, pois os coeficientes $a(y)$ coincidem. Mas da fonte $f(x,y)$ tem-se que

$$\hat{f}(x) = -1. \tag{4.12}$$

Logo, o problema homogeneizado é

$$\begin{cases} \dfrac{\sqrt{15}}{4}\dfrac{d^2u_0}{dx^2} = -1, \quad x \in \Omega, \\ u_0(0) = 0, \quad u_0(1) = 0, \end{cases} \tag{4.13}$$

onde a solução $u_0(x)$ é da forma

$$u_0(x) = \frac{2}{\sqrt{15}}(-x^2 + x). \tag{4.14}$$

Agora, observe que $f(x,y) = b(y)\dfrac{d^2u_0}{dx^2}$, assim

$$-1 + \cos(2\pi y) = -b(y)\frac{4}{\sqrt{15}}, \tag{4.15}$$

ou seja,

$$b(y) = \frac{\sqrt{15}}{4}(1 - \cos(2\pi y)). \tag{4.16}$$

Disso, de (2.77) e sabendo que $\langle N_1(y)\rangle = 0$ (Anexo B.4), $N_2(y)$ é

$$N_2(y) = -\int_0^y \frac{1}{1 + 0.25\cos(2\pi s)}\left(\int_0^s \cos(2\pi r)dr - \left\langle \int_0^y \cos(2\pi y)dy \right\rangle\right) ds \\ - \int_0^y N_1(s)ds, \tag{4.17}$$

que é equivalente a

$$N_2(y) = \frac{1}{\pi^2} \ln \left| \frac{1 + 0.25\cos(2\pi y)}{1.25} \right| - \int_0^y N_1(s)ds. \tag{4.18}$$

O gráfico desta função é ilustrado na Figura 13, onde podem ser observados os comportamentos de $N_1(x/\varepsilon)$ e $N_2(x/\varepsilon)$. Em especial, pode-se notar que $N_2(x/\varepsilon)$ é limitada, contínua e bem definida em todos os pontos do intervalo $[0, 1]$.

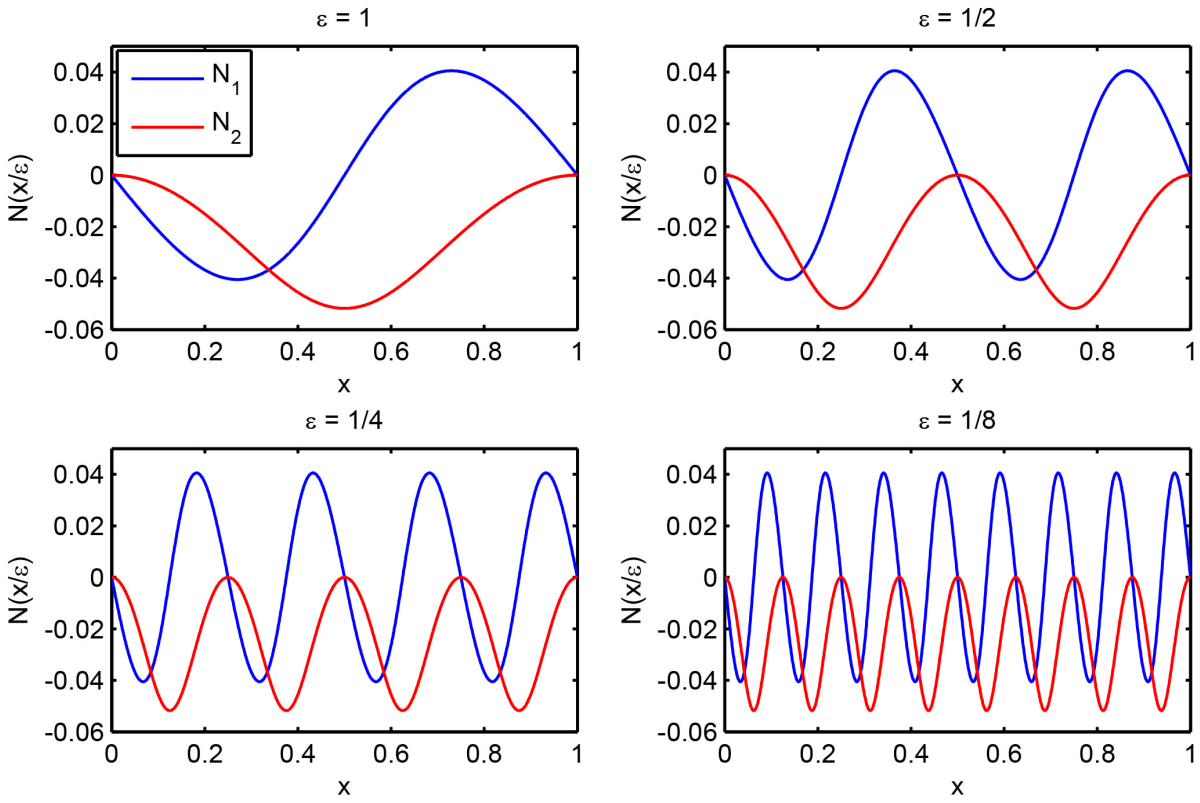

Figura 13: Soluções $N_1(x/\varepsilon)$ e $N_2(x/\varepsilon)$ dos problemas locais, para diferentes valores de ε.

As soluções $u_1(x, y)$ e $u_2(x, y)$ são encontradas através das soluções $N_1(x/\varepsilon)$ e $N_2(x/\varepsilon)$, onde chega-se em

$$u_1(x, y) = -\frac{(4x - 2)}{\sqrt{15}} N_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \quad \text{e} \quad u_2(x, y) = -\frac{4}{\sqrt{15}} N_2\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \tag{4.19}$$

e são ilustradas na Figura 14, onde percebe-se a rápida variação quando ε diminui.

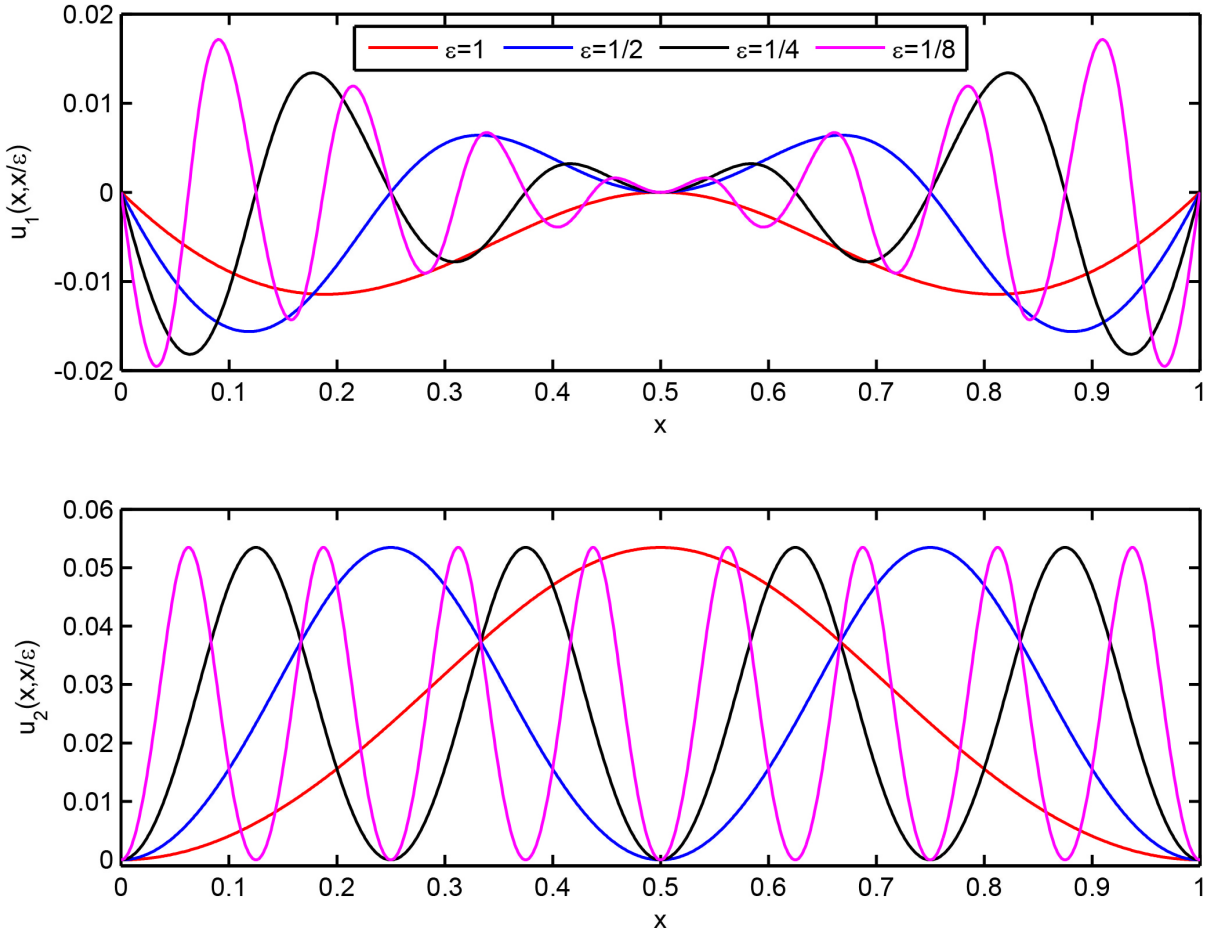

Figura 14: Soluções $u_1(x, y)$ e $u_2(x, y)$, para diferentes valores de ε.

Assim, $u^{(2)}(x, \varepsilon)$ é obtida da equação (2.78) e das soluções dos problemas homogeneizado e locais

$$u^{(2)}(x,\varepsilon) = \frac{2}{\sqrt{15}}(-x^2 + x) - \varepsilon\frac{(4x-2)}{\sqrt{15}}N_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) - \varepsilon^2\frac{4}{\sqrt{15}}N_2\left(\frac{x}{\varepsilon}\right). \tag{4.20}$$

Através dos gráficos apresentados pode-se constatar que existem diferenças para os casos em que se considera essa solução com mais ou menos termos.

Para comparar os resultados obtidos, encontra-se a solução do problema original a partir de (2.112)

$$u^{\varepsilon}(x) = -\int_0^x \frac{r}{1+0.25\cos(2\pi r/\varepsilon)}dr - \frac{\varepsilon^2}{\pi^2}\ln\left|\frac{1+0.25\cos\left(2\pi x/\varepsilon\right)}{1.25}\right|$$
$$+\frac{\sqrt{15}}{4}\left(\int_0^1 \frac{v dv}{1+0.25\cos(2\pi v/\varepsilon)} + \frac{\varepsilon^2}{\pi^2}\ln\left|\frac{1+0.25\cos\left(2\pi/\varepsilon\right)}{1.25}\right|\right)\int_0^x \frac{dr}{1+0.25\cos(2\pi r/\varepsilon)}. \tag{4.21}$$

Pela complexidade desta solução optou-se por compará-la com a solução obtida pela aplicação direta do método das diferenças finitas (ver Anexo C) no problema original. Para aplicar o método, a equação do problema original (4.11) é escrita da forma

$$\frac{d^2u^\varepsilon(x)}{dx^2} - \frac{\pi}{2\varepsilon}\frac{\operatorname{sen}(2\pi x/\varepsilon)}{1+0.25\cos(2\pi x/\varepsilon)}\frac{du^\varepsilon(x)}{dx} = \frac{-1+\cos(2\pi x/\varepsilon)}{1+0.25\cos(2\pi x/\varepsilon)}. \tag{4.22}$$

Na Figura 15 tem-se o comportamento da solução: $u^\varepsilon(x)$ do problema original, via método das diferenças finitas (circunferências rosas: DF) e a partir da implementação da expressão (4.21) (curva verde: AN); assintótica formal de segunda ordem $u^{(2)}(x,\varepsilon)$ (curva vermelha); assintótica formal de primeira ordem $u^{(1)}(x,\varepsilon)$ (curva azul) e $u_0(x)$ (curva preta) do problema homogeneizado. Primeiramente, pode-se verificar que as curvas da solução $u^\varepsilon(x)$ do problema original, por diferenças finitas e por resolução direta, apresentam o mesmo comportamento. Analisando cada uma das soluções é fácil ver que $u^\varepsilon(x)$, $u^{(1)}(x,\varepsilon)$ e $u^{(2)}(x,\varepsilon)$ tendem para a solução $u_0(x)$ do problema homogeneizado quando ε tende a zero.

Além disso, um resultado interessante é com relação às SAFs. Observando a curva que corresponde a solução $u^{(2)}(x,\varepsilon)$, pode-se verificar que essa possui um comportamento mais semelhante ao comportamento da solução exata $u^\varepsilon(x)$ do problema, o que não ocorre com a solução $u^{(1)}(x,\varepsilon)$ para os gráficos correspondentes a $\varepsilon = 1$ e $\varepsilon = 1/2$, pois a SAF $u^{(1)}(x,\varepsilon)$ possui um comportamento apenas em torno da solução $u_0(x)$ do problema homogeneizado. Dessa forma, apesar da solução $u^{(1)}(x,\varepsilon)$ ser próxima da solução exata do problema quando ε é suficientemente pequeno, às vezes ela não consegue reproduzir os detalhes do comportamento local de $u^\varepsilon(x)$. Nesses casos é necessário considerar mais termos na SAF. Neste exemplo foi considerado $u^{(2)}(x,\varepsilon)$ que apresenta uma aproximação local mais completa se comparada com a solução exata. Com isso, pode-se concluir através desse exemplo que a influência de mais termos na SAF, quando analisada localmente, gera uma aproximação mais detalhada para a solução exata do problema.

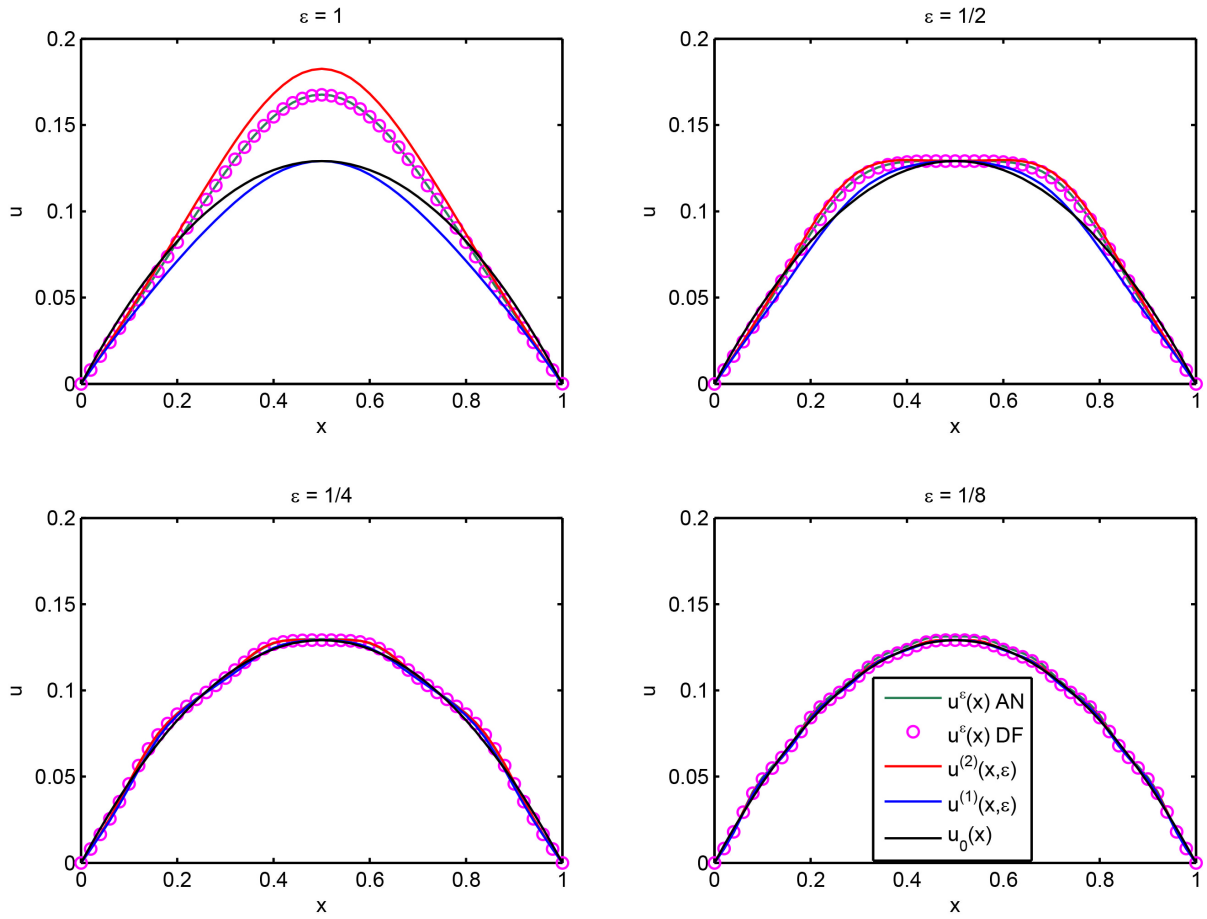

Figura 15: Soluções: $u_0(x)$ do problema homogeneizado, $u^{(2)}(x,\varepsilon)$, $u^{(1)}(x,\varepsilon)$ assintóticas formais e $u^{\varepsilon}(x)$ exata do problema original.

4.2 Caso Térmico Multidimensional

Será resolvido um exemplo para o caso condutivo multidimensional. Seja o domínio dado por $\overline{\Omega} = [0,1]^3$. Considere o coeficiente original $a_{ij}(y)$, com $y = x/\varepsilon$, como

$$a_{ij}(y) = \begin{cases} 1 + 0.25\,\mathrm{sen}(2\pi y_3), & i = j = 1,2 \\ 1 + 0.25\cos(2\pi y_3), & i = j = 3 \\ 0, & i \neq j \end{cases} \tag{4.23}$$

ou seja,

$$a_{ij} = \begin{pmatrix} 1 + 0.25\,\mathrm{sen}(2\pi y_3) & 0 & 0 \\ 0 & 1 + 0.25\,\mathrm{sen}(2\pi y_3) & 0 \\ 0 & 0 & 1 + 0.25\cos(2\pi y_3) \end{pmatrix}. \tag{4.24}$$

E ainda, seja a fonte dada por $f(x,y) = -1$. Assim, se a condição de contorno é nula chega-se em

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}^{\varepsilon}(x)\dfrac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial x_j}\right) = -1, \quad x \in \Omega, \\ u^{\varepsilon}(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.25}$$

Observa-se que como $a_{ij}(y) \equiv a_{ij}(y_3)$ o coeficiente do problema original varia em apenas uma direção. Assim, pode-se considerar que a solução do problema local percorre apenas a direção y_3, ou seja, $N_l(y) \equiv N_l(y_3)$. Dessa forma, os termos $\dfrac{\partial N_l(y_3)}{\partial y_1}$ e $\dfrac{\partial N_l(y_3)}{\partial y_2}$ se anulam. Disso, da equação do coeficiente efetivo (3.34) e considerando que $\hat{a}_{33}$ pode ser escrito como $\hat{a}_{33} = \langle a_{33}^{-1}(y)\rangle^{-1}$, a matriz dos coeficientes efetivos é

$$\hat{a}_{il} = \begin{pmatrix} \langle a_{11}(y)\rangle & 0 & 0 \\ 0 & \langle a_{22}(y)\rangle & 0 \\ 0 & 0 & \langle a_{33}^{-1}(y)\rangle^{-1} \end{pmatrix}, \tag{4.26}$$

ou seja,

$$\hat{a}_{il} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\sqrt{15}}{4} \end{pmatrix}. \tag{4.27}$$

No Anexo D.1 chega-se nas equações do problema local (3.27) para $N_l(y)$, onde obtém-se que $N_1(y) = N_2(y) = 0$ e

$$N_3(y) = \begin{cases} 0, \quad \text{se} \quad y = 1/2, \\ \dfrac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\dfrac{3}{5}}\operatorname{tg}(\pi y)\right) - y, \quad \text{se} \quad 0 < y < 1/2, \\ \dfrac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\dfrac{3}{5}}\operatorname{tg}(\pi y)\right) - y + 1, \quad \text{se} \quad 1/2 < y < 1. \end{cases} \tag{4.28}$$

Observa-se que $N_3(y)$ é equivalente a (4.3), onde é uma função antissimétrica com relação ao ponto $y = 1/2$, e então $\langle N_3(y)\rangle = 0$ (ver Anexo B.4), satisfazendo assim a condição do Lema 3.1.1.

E ainda,

$$\hat{f}(x) = \langle f(x,y)\rangle = \langle -1\rangle = -1. \tag{4.29}$$

Então, o problema homogeneizado será da forma

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_0}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 u_0}{\partial x_2^2} + \dfrac{\sqrt{15}}{4}\dfrac{\partial^2 u_0}{\partial x_3^2} = -1, \;\; x \in \Omega, \\ u^{\varepsilon}(x) = 0, \;\; x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.30}$$

Para resolver analiticamente esse problema utilizou-se o método de Fourier (WEINBERGER, 1995), onde o desenvolvimento é apresentado no Anexo D.2. Dessa forma, tem-se a seguinte solução para $u_0(x)$

$$u_0(x) = \frac{64}{\pi^5} \sum_{i,j,k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}((2i-1)\pi x_1)\operatorname{sen}((2j-1)\pi x_2)\operatorname{sen}((2k-1)\pi x_3)}{\left((2i-1)^2 + (2j-1)^2 + \dfrac{\sqrt{15}}{4}(2k-1)^2\right)(2i-1)(2j-1)(2k-1)}. \tag{4.31}$$

Os cálculos para encontrar a solução $N_{pl}(y)$ do problema local (3.40) foram apresentados no Anexo D.3, onde chegou-se primeiramente em

$$N_{12}(y) = N_{13}(y) = N_{21}(y) = N_{23}(y) = N_{31}(y) = N_{32}(y) = 0. \tag{4.32}$$

E ainda,

$$N_{11}(y) = N_{22}(y) = -\frac{1}{2\pi} N_3(y), \tag{4.33}$$

A obtenção analítica da solução $N_{33}(y)$ é apresentada no Anexo D.3, mas aqui utilizou-se também o método das diferenças finitas para obtê-la mediante o algoritmo no Anexo C aplicado na equação a seguir

$$\frac{d^2 N_{33}(y)}{dy^2} + \frac{1}{a_{33}(y)}\frac{da_{33}(y)}{dy}\frac{dN_{33}(y)}{dy} = \frac{b_{33}(y)}{a_{33}(y)} - \frac{N_3(y)}{a_{33}(y)}\frac{da_{33}(y)}{dy} - 2\frac{dN_3(y)}{dy} - 1. \tag{4.34}$$

E assim, essas soluções podem ser observadas na Figura 16, onde é evidente a continuidade e a variação rápida para ε cada vez menor.

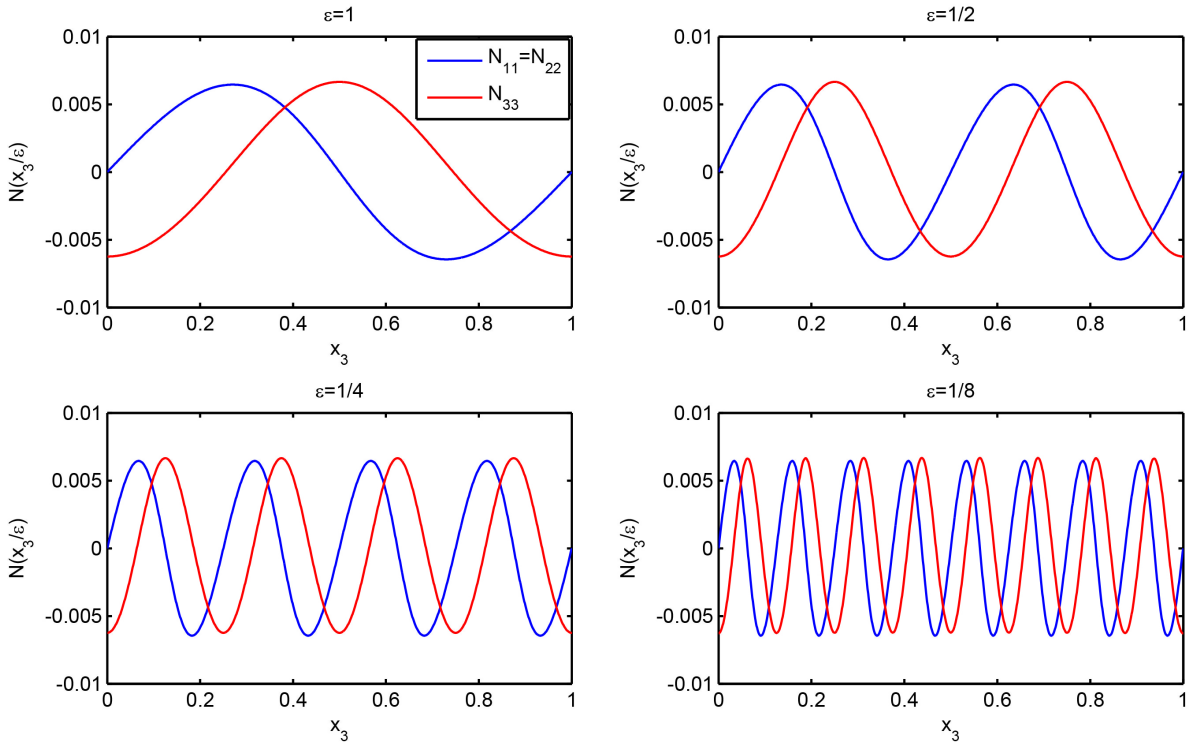

Figura 16: Soluções $N_{11}(x/\varepsilon)$, $N_{22}(x/\varepsilon)$ e $N_{33}(x/\varepsilon)$ dos problemas locais, para diferentes valores de ε.

Com isso, chega-se nos termos $u_1(x,y)$ e $u_2(x,y)$:

$$\begin{aligned} u_1(x,y) &= N_3\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{du_0(x)}{dx_3} \text{ e} \\ u_2(x,y) &= -\frac{1}{2\pi}N_3\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\left(\frac{d^2u_0(x)}{dx_1^2}+\frac{d^2u_0(x)}{dx_2^2}\right)+N_{33}\frac{d^2u_0(x)}{dx_3^2}, \end{aligned} \tag{4.35}$$

onde, fixando $x_2 = 0.5$, essas soluções são apresentadas graficamente na Figura 17.

E portanto obtém-se a SAF de segunda ordem

$$\begin{aligned} u^{(2)}(x,\varepsilon) = u_0(x) &+ \varepsilon N_3\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{du_0(x)}{dx_3} \\ &+ \varepsilon^2\left(-\frac{1}{2\pi}N_3\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\left(\frac{d^2u_0(x)}{dx_1^2}+\frac{d^2u_0(x)}{dx_2^2}\right)+N_{33}\frac{d^2u_0(x)}{dx_3^2}\right). \end{aligned} \tag{4.36}$$

Dessa forma, pode-se comparar essa solução com as soluções do problema homogeneizado e assintótica formal de primeira ordem referente ao problema original, onde essas soluções são ilustradas nos gráficos da Figura 18. Nota-se que essas soluções oscilam de forma mais rápida quando $\varepsilon \to 0$.

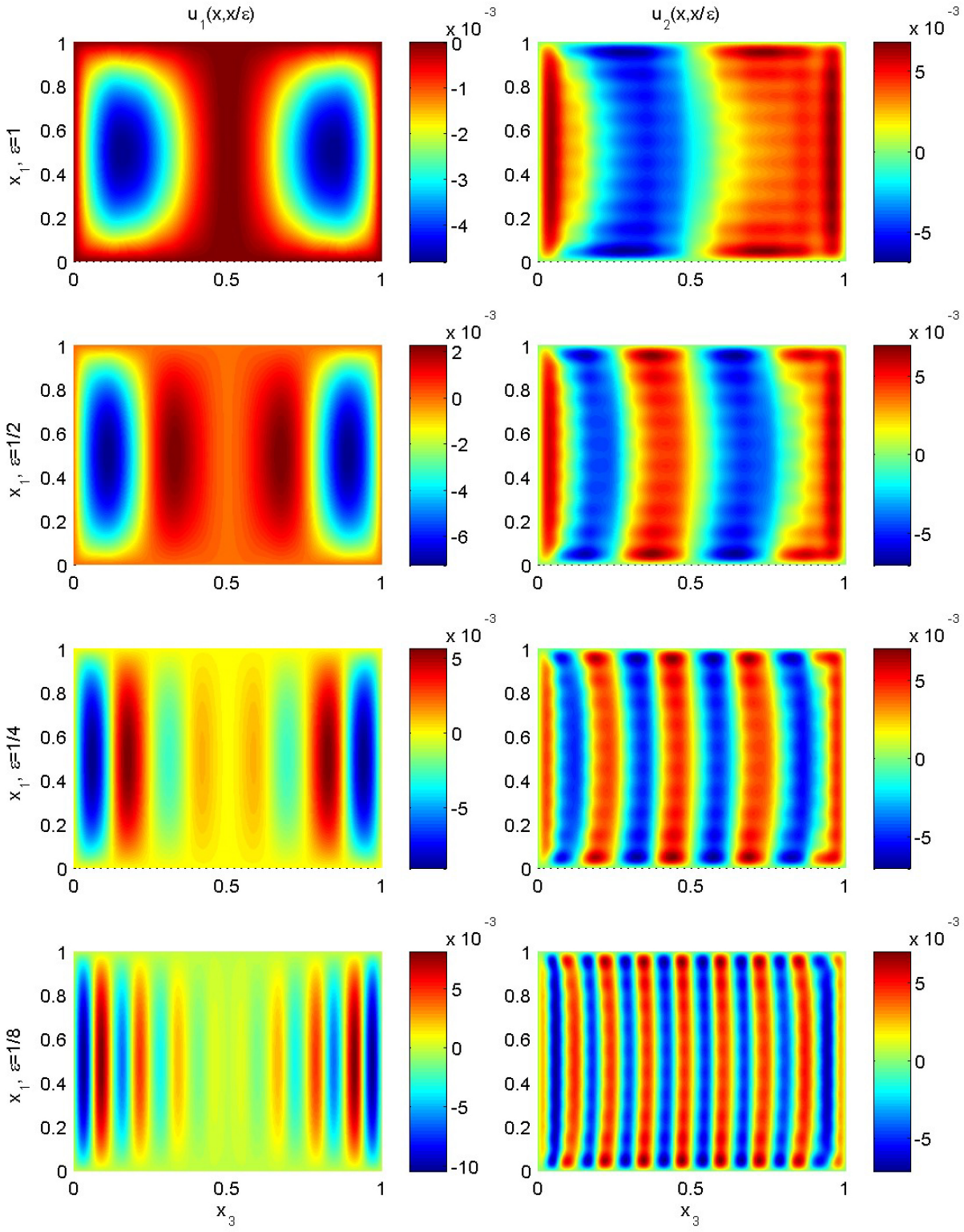

Figura 17: Soluções $u_1(x, y)$ e $u_2(x, y)$, para diferentes valores de ε.

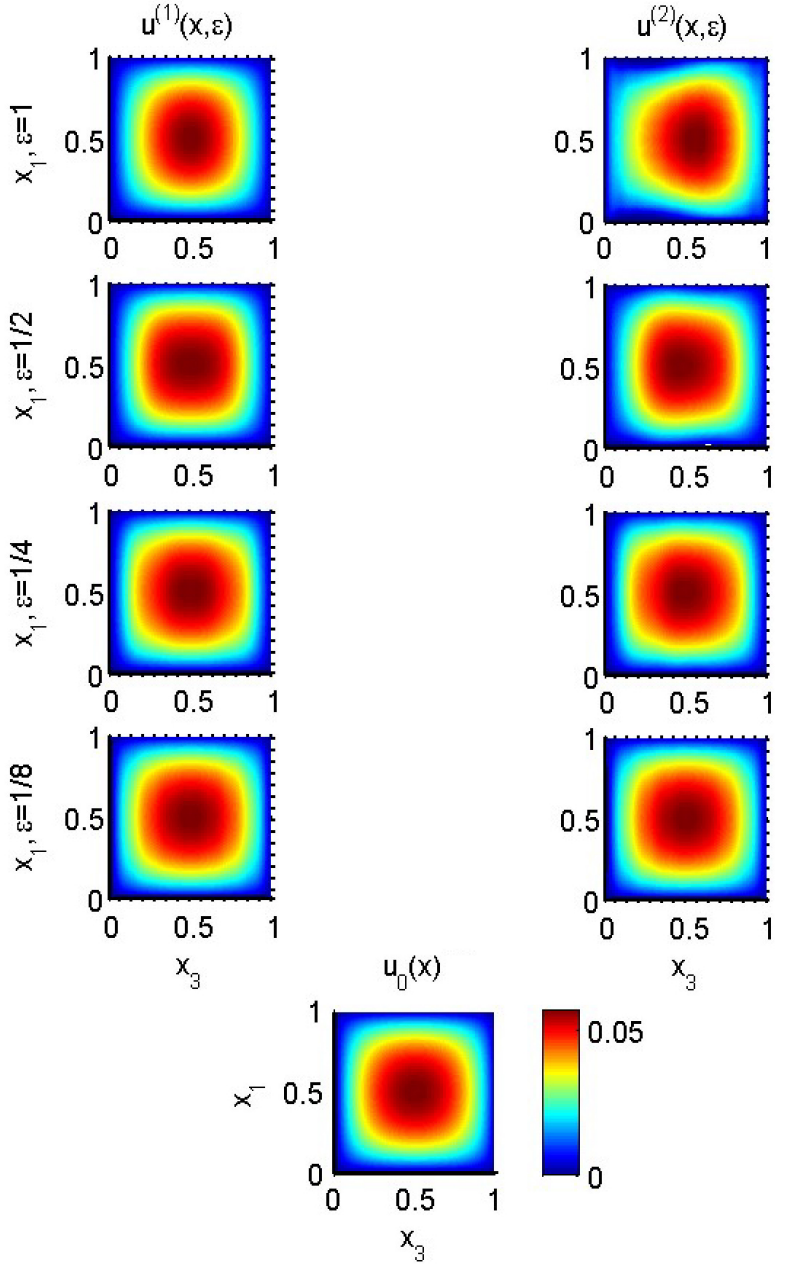

Figura 18: Soluções: $u_0(x)$ do problema homogeneizado, $u^{(2)}(x,\varepsilon)$ e $u^{(1)}(x,\varepsilon)$ assintóticas formais do problema original.

Assim, pode-se observar que as SAFs de primeira e segunda ordens se aproximam da solução do problema homogeneizado quando ε diminui. E, além disso, a SAF de primeira ordem possui um comportamento regular, enquanto a SAF de segunda ordem apresenta um comportamento local mais detalhado. Nos gráficos para $\varepsilon = 1$ e $\varepsilon = 1/2$ é fácil notar essas diferenças. Com base nessa análise, pode-se concluir que localmente a SAF de segunda ordem é uma solução mais próxima da solução do problema original.

4.3 Caso Elástico Multidimensional

As seções anteriores foram dedicadas ao objetivo direto da aplicação do MHA, ou seja, encontrar SAFs de problemas para meios heterogêneos. Nesta seção aplica-se o MHA no seu segundo objetivo tradicional, isto é, a obtenção de propriedades efetivas de meios heterogêneos. Em particular é estudado o comportamento efetivo de meios elásticos lineares através das suas propriedades efetivas.

Considere o caso onde a heterogeneidade do material na microescala varia na direção y_3, dessa forma pode-se assumir que $y \equiv y_3$. Seja o tensor de elasticidade definido como

$$C_{ijkl}(y) = \lambda(y)\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(y)(\delta_{il}\delta_{jk} + \delta_{ik}\delta_{jl}), \tag{4.37}$$

em que, através da matriz expressa em (3.119), pode-se escrever

$$C_{ijkl} = \begin{pmatrix} \lambda(y)+2\mu(y) & \lambda(y) & \lambda(y) & 0 & 0 & 0 \\ \lambda(y) & \lambda(y)+2\mu(y) & \lambda(y) & 0 & 0 & 0 \\ \lambda(y) & \lambda(y) & \lambda(y)+2\mu(y) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu(y) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu(y) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu(y) \end{pmatrix}, \tag{4.38}$$

com $y = x/\varepsilon$ e onde $\lambda(y)$ e $\mu(y)$ são funções tais que

$$\lambda(y) = \begin{cases} 1, \text{ se } y \in \left[0, \dfrac{1}{5}\right], \\ 1 + 0.25\cos\left(\dfrac{5\pi}{2}y\right), \text{ se } y \in \left(\dfrac{1}{5}, 1\right], \end{cases} \tag{4.39}$$

$$\mu(y) = \begin{cases} 1 + 0.25\,\mathrm{sen}\,(5\pi y), \text{ se } y \in \left[0, \dfrac{1}{5}\right], \\ 1, \text{ se } y \in \left(\dfrac{1}{5}, 1\right]. \end{cases} \tag{4.40}$$

Dessa forma, na Figura 19 pode-se observar que as funções $\lambda\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right)$ e $\mu\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right)$ são limitadas, positivas e contínuas para todo x. E além disso, possuem uma rápida oscilação quando ε tende a zero. Para $\varepsilon = 1$ tem-se o comportamento das funções no intervalo $[0, x]$. Para os outros valores de ε os intervalos são $\left[0, \dfrac{x}{\varepsilon}\right]$, tendo assim uma reprodução periódica das funções $\lambda(y)$ e $\mu(y)$.

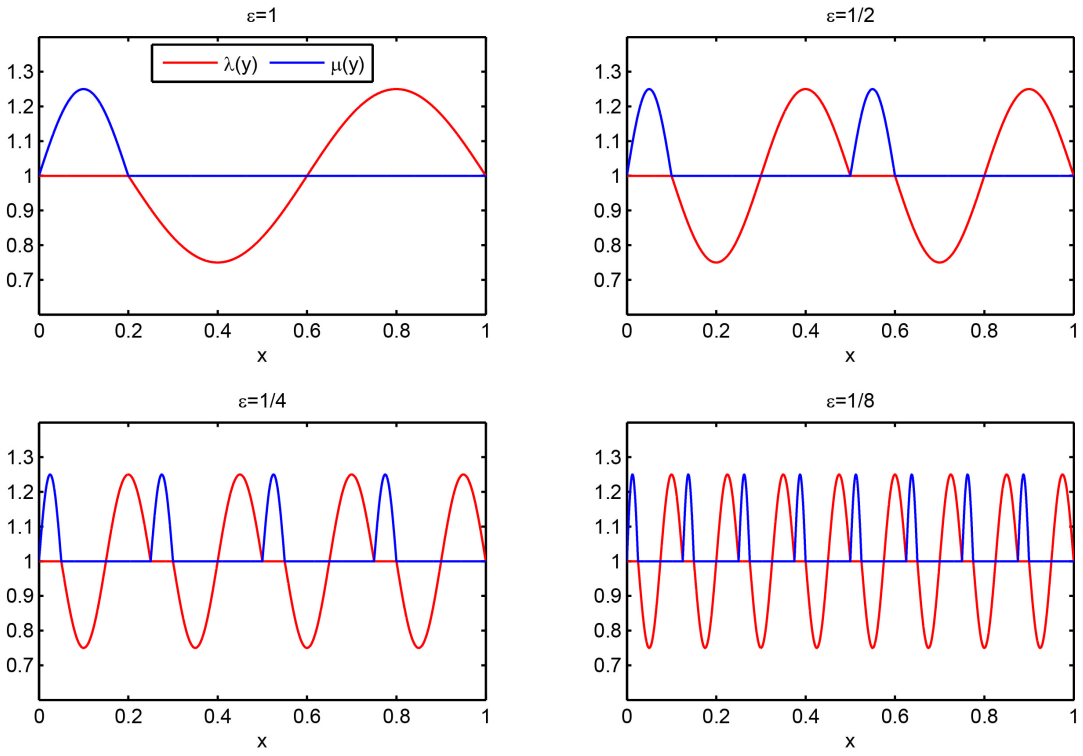

Figura 19: Variação das funções $\lambda(y)$ e $\mu(y)$, para diferentes valores de ε.

Se, neste exemplo, as condições de contorno são nulas, o problema original será da forma

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(C^{\varepsilon}_{ijkl}(x)\dfrac{\partial u^{\varepsilon}_k}{\partial x_l}\right) = f^{\varepsilon}_i(x), \quad x \in \Omega, \\ [\![u^{\varepsilon}_k(x)]\!] = 0, \quad x \in \Gamma^{\varepsilon}, \\ \left[\!\!\left[C^{\varepsilon}_{ijkl}(x)\dfrac{\partial u^{\varepsilon}_k(x)}{\partial x_l}\right]\!\!\right] n_j = 0, \quad x \in \Gamma^{\varepsilon}, \\ u^{\varepsilon}_k = 0, \quad x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.41}$$

E então, para $f^{\varepsilon}_i(x) = 1$ tem-se o problema homogeneizado

$$\begin{cases} \hat{C}_{ijpq}\dfrac{\partial^2 u_{0,p}}{\partial x_j \partial x_q} = 1, \quad x \in \Omega, \\ u_{0,p}(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.42}$$

com $\hat{C}_{ijpq} = \left\langle C_{ijpq}(y) + C_{ijkl}(y)\dfrac{\partial N_{kpq}(y)}{\partial y_l}\right\rangle$, em que $N_{kpq}(y)$ foram obtidos no Anexo E.2. E ainda, o tensor de coeficientes efetivos resume-se em cinco coeficientes line-

armente independentes (ver AnexoE.1)

$$\hat{C}_{ijpq} = \begin{pmatrix} 3.0553 & 0.9917 & 0.9915 & 0 & 0 & 0 \\ 0.9917 & 3.0553 & 0.9915 & 0 & 0 & 0 \\ 0.9915 & 0.9915 & 3.0487 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0274 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0274 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0318 \end{pmatrix}, \tag{4.43}$$

onde observa-se que os coeficientes cumprem a propriedade de simetria. Além disso, pode-se verificar a condição de positividade do coeficiente efetivo, para isso calcula-se os seguintes determinantes das submatrizes de (4.43)

$$\begin{aligned} M_1 &= |3.0553| = 3.0553, \\ M_2 &= \begin{vmatrix} 3.0553 & 0.9917 \\ 0.9917 & 3.0553 \end{vmatrix} = 8.3514, \\ M_3 &= \begin{vmatrix} 3.0553 & 0.9917 & 0.9915 \\ 0.9917 & 3.0553 & 0.9915 \\ 0.9915 & 0.9915 & 3.0487 \end{vmatrix} = 21.4035, \\ M_4 &= \begin{vmatrix} 3.0553 & 0.9917 & 0.9915 & 0 \\ 0.9917 & 3.0553 & 0.9915 & 0 \\ 0.9915 & 0.9915 & 3.0487 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0274 \end{vmatrix} = 21.99, \\ M_5 &= \begin{vmatrix} 3.0553 & 0.9917 & 0.9915 & 0 & 0 \\ 0.9917 & 3.0553 & 0.9915 & 0 & 0 \\ 0.9915 & 0.9915 & 3.0487 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0274 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0274 \end{vmatrix} = 22.5925, \\ M_6 &= \begin{vmatrix} 3.0553 & 0.9917 & 0.9915 & 0 & 0 & 0 \\ 0.9917 & 3.0553 & 0.9915 & 0 & 0 & 0 \\ 0.9915 & 0.9915 & 3.0487 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0274 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0274 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0318 \end{vmatrix} = 23.311. \end{aligned} \tag{4.44}$$

Como os menores principais da matriz (4.43) são todos positivos, então a matriz é positiva (KUROSH, 1980).

5 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS.

Este trabalho apresentou a teoria e aplicações da homogeneização assintótica em meios micro-heterogêneos, periódicos e lineares. No Capítulo 2 o MHA foi aplicado em um problema unidimensional formulado por uma equação elíptica que descreve o comportamento térmico estacionário do meio, onde a solução analítica desse problema foi obtida. Encontraram-se assim os problemas locais e o problema homogeneizado, e as respectivas expressões das soluções analíticas. E, dessa forma, obtiveram-se as assintóticas formais de primeira e segunda ordens. Além disso, demonstrou-se a proximidade entre as soluções exata e assintóticas formais do problema original e a solução do problema homogeneizado.

No Capítulo 3 o desenvolvimento do MHA foi estendido para casos multidimensionais estáticos. Esse processo foi realizado de forma detalhada para os problemas térmico e elástico, conseguindo portanto encontrar os problemas locais e homogeneizado, e também expressões para as SAFs de primeira e segunda ordens. Além disso, as demonstrações das relações de proximidade entre as soluções dos problemas original e homogeneizado foi realizada para ambos os casos. E ainda, foram apresentadas as demonstrações da conservação das propriedades de simetria e positividade dos coeficientes efetivos em relação aos coeficientes dos problemas originais.

Com o intuito de ilustrar os desenvolvimentos apresentados nos Capítulos 2 e 3 foram resolvidos alguns exemplos no Capítulo 4. Para o caso unidimensional apresentaram-se dois problemas. O primeiro resultou em um problema homogeneizado com equação homogênea e com condições de contorno não homogêneas e, além disso, as SAFs de primeira e segunda ordens resultaram iguais. Já no segundo problema, encontrou-se um problema homogeneizado com equação não homogênea e condições de contorno homogêneas. Nesse exemplo as SAFs de primeira e segunda ordens foram obtidas e, consequentemente, comparadas e analisadas individualmente. Além disso, nesses dois exemplos encontraram-se as soluções dos problemas locais e, ainda, compararam-se as soluções do problema homogeneizado e assintóticas formais com as soluções dos problemas originais. No exemplo do caso térmico multidimensional obtiveram-se os coeficientes efetivos, as soluções dos pro-

blemas locais e a solução do problema homogeneizado. E assim, encontrou-se as SAFs de primeira e segunda ordens. E para o caso elástico um problema com coeficientes continuamente diferenciáveis por partes foi apresentado com o intuito de encontrar os coeficientes efetivos do meio, para o qual encontraram-se de forma analítica as soluções dos problemas locais de primeira ordem.

Conclui-se assim que, através dos cálculos e desenvolvimentos apresentados neste trabalho, o MHA é uma boa escolha para resolver os problemas térmicos unidimensional e multidimensional, e elástico multidimensional. Ficou evidente que as soluções dos problemas homogeneizados encontradas foram uma boa aproximação para as soluções dos problemas originais, onde encontrou-se o comportamento efetivo do meio. E além disso, considerando as SAFs de primeira e segunda ordens pôde-se verificar através de exemplos que a quantidade de termos na SAF influencia o comportamento dessa solução. Dessa forma, a SAF de segunda ordem apresentou um comportamento local mais detalhado se comparada com a SAF de primeira ordem. E através da SAF de segunda ordem obteve-se uma aproximação mais precisa da solução do problema original. Assim, quando é necessário obter de forma mais detalhada o comportamento local da solução do problema, a SAF de primeira ordem, que resulta da abordagem tradicional do MHA, não é suficiente. Ou seja, é necessário considerar SAFs de ordens superiores, como ilustrado nos exemplos do Capítulo 4.

Trabalhos futuros podem ser realizados com o intuito de estender o que foi apresentado nos casos térmico e elástico multidimensionais para problemas mais complexos, com o objetivo de encontrar as SAFs de primeira e segunda ordens. Isto é, aplicar o MHA em problemas que são formulados por sistemas de equações diferenciais parciais com coeficientes rapidamente oscilantes e encontrar as SAFs para obter o comportamento do meio heterogêneo e analisar a influência da quantidade de termos nessas soluções. Dentre os problemas que se pretende estudar estão os modelos matemáticos que descrevem o comportamento termo-magneto-eletro-elástico de materiais compósitos considerando contato perfeito e imperfeito entre as fases constituintes. Ainda, pretende-se estudar meios não periódicos e não lineares.

REFERÊNCIAS

ALLAIRE, G.; BAL, G. Homogenization of the Criticality Spectral Equation in Neutron Transport. **ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis**, [S.l.], v.33, n.4, p.721–746, 1999.

BABUSKA, I. Solutions of Interface Problems by Homogenization, Part 1. **SIAM Journal os Mathematical Analysis**, [S.l.], v.7, n.5, p.603–634, 1976a.

BABUSKA, I. Solutions of Interface Problems by Homogenization, Part 2. **SIAM Journal os Mathematical Analysis**, [S.l.], v.7, n.5, p.635–645, 1976b.

BABUSKA, I. Solutions of Interface Problems by Homogenization, Part 3. **SIAM Journal os Mathematical Analysis**, [S.l.], v.8, n.6, p.923–937, 1976c.

BAKHVALOV, N. S. Averaged Characteristics of Bodies with Periodic Structure. **Doklady Akademii Nauk SSSR**, [S.l.], v.218, n.5, p.1046–1048, 1974.

BAKHVALOV, N. S. Averaged of Partial Differential Equations with Rapidly Oscillating Coefficients. **Doklady Akademii Nauk SSSR**, [S.l.], v.224, n.2, p.351–355, 1975a.

BAKHVALOV, N. S. Averaged of Nonlinear Partial Differential Equations with Rapidly Oscillating Coefficients. **Doklady Akademii Nauk SSSR**, [S.l.], v.225, n.2, p.249–252, 1975b.

BAKHVALOV, N. S.; PANASENKO, G. P. **Homogenisation**: Averaging Processes in Periodic Media. [S.l.]: Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1989.

BECK, A. T.; PEREZ-FERNANDEZ, L. D. Failure Detection in Umbilical Cables via Electroactive Elements–A Mathematical Homogenization Approach. **International Journal of Modeling and Simulation for the Petroleum Industry**, [S.l.], v.8, n.1, 2014.

BENDSOE, M. P. Optimal Shape Design as a Material Distribution Problem. **Structural Optimization**, [S.l.], v.1, p.193–202, 1989.

BENDSOE, M. P.; KIKUCHI, N. Generating Optimal Topologies in Structural Design using Homogenization Method. **Computer Methods in Applied Mechanis and Engineering**, [S.l.], v.71, p.197–224, 1988.

BENDSOE, M. P.; SIGMUND, O. **Topology Optimization**: Theory, Methods and Applications. [S.l.]: Springer, 2013.

BENSOUSSAN, A.; LIONS, J. L.; PAPANICOLAU, G. **Asymptotic Analysis for Periodic Structures**. [S.l.]: Amsterdam: North-Holland, 1978.

BENVENISTE, Y. Magnetoelectric Effect in Fibrous Composites with Piezoeletric and Piezomagnetic Phases. **Physical Review B**, [S.l.], v.51, p.16424–16427, 1995.

BERTRAM, A. **Calculo de Tensores**: Introduccion para Ingenieros. [S.l.]: Universidad Industrial de Santander, 1984.

BRAVO-CASTILLERO, J.; GUINOVART-DIAZ, R.; SABINA, F. J.; RODRIGUEZ-RAMOS, R. Closed-form Expression for Effective Coefficients of Fibre-reinforced Composite with Transversely Isotropic Constituents II. Piezoelectric and Square Symmetry. **Mechanics of Materials**, [S.l.], v.33, p.237–248, 2001.

BRAVO-CASTILLERO, J.; OTERO, J. A.; RODRIGUEZ-RAMOS, R.; BOURGEAT, A. Asymptotic Homogenization of Laminated Piezocomposite Materials. **International Journal of Solids and Structures**, [S.l.], v.35, n.5-6, p.527–541, 1998.

CAMACHO, L. M. S. **Homogeneizacioon de Compuestos Termo-Magneto-Electro-Elásticos con Estructura Periódica**. 2010. Dissertação de Mestrado — Universidad de La Habana, La Habana.

CAPDEVILLE, Y.; GUILLOT, L.; MARIGO, J.-J. 1-D Non-periodic Homogenization for the Seismic Wave Equation. **Geophysical Journal International**, [S.l.], v.181, n.2, p.897–910, 2010a.

CAPDEVILLE, Y.; GUILLOT, L.; MARIGO, J.-J. 2-d Non-periodic Homogenization to Upscale Elastic Media for p–sv Waves. **Geophysical Journal International**, [S.l.], v.182, n.2, p.903–922, 2010b.

CHRISTENSEN, R. M. **Mechanics of Composite Materials**. [S.l.: s.n.], 1979.

CIORANESCU, D.; DONATO, P. An Introduction to Homogenization. **Oxford Lecture Series in Mathematics and Its Applications**, [S.l.], v.17, 1999.

CIORANESCU, D.; PAULIN, J. S. J. Homogenization in Open Sets with Holes. **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, [S.l.], v.71, p.590–607, 1979.

CONTE, S. D.; DE BOOR, C. **Elementary Numerical Analysis**: an Algorithmic Approach - Third Edition. [S.l.]: McGraw: Hill Book Company, 1980.

DE GIORGI, E.; SPAGNOLO, S. Sulla Convergenza degli Integrali Dell'energia par Operatori Ellittici del Secondo Ordine. **Bollettino dell'Unione Matematica Italiana**, [S.l.], v.8, p.391–411, 1973.

DIMITRIENKO, Y. I. Mechanics of Porous Media with Phase Transformations and Periodical Structures 1. Method of Asymptotic Averaging. **Eur. J., A/Solids**, [S.l.], v.17, p.305–319, 1988a.

DIMITRIENKO, Y. I. Mechanics of Porous Media with Phase Transformations and Periodical Structures 2. Solution of Local and Global Problems. **Eur. J., A/Solids**, [S.l.], v.17, p.321–337, 1988b.

DONG, Q. L.; CAO, L. Q. Multiscale Asymptotic Expansions Methods and Numerical Algorithms for the Wave Equations in Perforated Domains. **Applied Mathematics and Computation**, [S.l.], v.232, p.872–887, 2014.

EINSTEIN, A. Eine neue Bestimmung der Moleküldimensionen. **Annalen der Physik**, [S.l.], v.19, p.289–306, 1906.

GUINOVART-DIAZ, R.; BRAVO-CASTILLERO, J.; RODRIGUEZ-RAMOS, R.; SABINA, F. J. Modeling of Elastic Transversely Isotropic Composites Using the Asymptotic Method. Some Comparisons with Others Models. **Journal of the Mechanics and Physics os Sólids**, [S.l.], v.49, p.1445–1462, 2001.

HASHIN, Z. Analysis of Composite Materials. **Journal of the Mechanics and Physics os Solids**, [S.l.], v.11, n.2, p.127–140, 1963.

HASSANI, B.; HINTON, E. A Review of Homogenization and Topology Optimization I – Homogenization Theory for Media with Periodic Structure. **Computers and Structures**, [S.l.], v.69, p.707–717, 1998a.

HASSANI, B.; HINTON, E. A Review of Homogenization and Topology Optimization II – Analytical and Numerical Solution of Homogenization Equations. **Computers and Structures**, [S.l.], v.69, p.719–738, 1998b.

HASSANI, B.; HINTON, E. A Review of Homogenization and Topology Optimization III – Topology Optimization Using Optimality Criteria. **Computers and Structures**, [S.l.], v.69, p.739–756, 1998c.

HOLLISTER, S. J.; FYHRIE, D. P.; JEPSEN, K. J.; GOLDSTEIN, S. A. Analysis of Trabecular Bone Micromechanics Using Homogenization Theory with Comparison to Experimental Results. **Journal of Biomechanics**, [S.l.], v.22, n.10, p.1025, 1989.

KAW, A. K. **Mechanics of Composite Materials - Second Edition**. [S.l.]: Taylor and Francis, 2006.

KOLMOGOROV, A. N.; FOMIN, S. V. **Elementos de la Teoria de Funciones y del Analisis Funcional**. [S.l.]: Moscou: Mir, 1975.

KUDRIAVTSEV, L. D. **Curso de Análisis Matemático**: Tomo I. [S.l.]: Moscou: Mir, 1983.

KUROSH, A. G. **Higher Algebra (English translation from Russian by G. Yankovsky)**. [S.l.]: Moscow Mir Publishers, 1980.

LARSSON, S.; THOMEE, V. **Partial Differential Equations with Numerical Methods**. [S.l.: s.n.], 2009.

LIMA, M. P. **Homogeneização Matemática de Meios Micro-heterogêneos com Estrutura Periódica**. 2016. Dissertação de Mestrado — Universidade Federal de Pelotas, Pelotas.

MARCHENKO, V. A.; KRUSLOV, E. Y. **Boundary Value Problems in Domains with Fine-Grained Boundary**. [S.l.]: Kiev:Naukova Dumba, 1974.

MAXWELL, J. C. **Treatise on Electricity and Magnetism**. [S.l.]: Oxford: Clarendon Press, 1873.

OLEINIK, O. A. On convergence of Solutions of Elliptic and Parabolic Equations when Coefficients Weakly Converge. **Uspekhi Matematcheskikh Nauk**, [S.l.], v.30, n.4, p.257–258, 1975.

OTERO, J. A. Dynamical Behavior of a Layered Piezocomposite Using the Asymptotic Homogenization Method. **Mechanics of Materials**, [S.l.], v.37, p.33–44, 2005.

OTERO, J. A.; BRAVO-CASTILLERO, J.; RODRIGUEZ-RAMOS, R. Homogenization of Heterogeneous Piezoelectric Medium. **Mechanics Research Communications**, [S.l.], v.24, n.1, p.75–84, 1997.

PANASENKO, G. P. **Multi-scale Modelling for Structures and Composites**. [S.l.]: Springer, 2005.

PEREZ-FERNANDEZ, L. D.; BRAVO-CASTILLERO, J.; RODRIGUEZ-RAMOS, R.; SABINA, F. Estimation of Very Narrow Bounds to the Behavior of Nonlinear Incompressible Elastic Composites. **Archive of Applied Mechanics**, [S.l.], v.77, n.4, p.229–239, 2007a.

PEREZ-FERNANDEZ, L. D.; BRAVO-CASTILLERO, J.; SABINA, F. J. Variational Bounds for Nonlinear Magneto-electro-elastic Composites. **Proceedings of Pan-American Congress of Applied Mechanics XI**, [S.l.], p.PAC0263, 2008.

PEREZ-FERNANDEZ, L. D.; GOMEZ-MUNOZ, J. L.; BRAVO-CASTILLERO, J.; GUINOVART-DIAZ, R.; RODRIGUEZ-RAMOS, R.; SABINA, F. J.; LIS, J. C. Sabina de. An Integrated Approach for Nonlinear Model of Composite Rod (Asymptotic Homogenization vs. Variational Principles). **Problems of Nonlinear Analysis in Engineering Systems**, [S.l.], v.13, p.50–63, 2007b.

PEREZ-FERNANDEZ, L. D.; LEON-MECIAS, A.; BRAVO-CASTILLERO, J. About the Improvement of Variational Bounds for Nonlinear Composite Dielectrics. **Materials Letters**, [S.l.], v.59, p.1552–1557, 2005.

PRADO, E. B. T.; ROCHA, F. C.; DA ROCHA, G. L.; DE MATOS, L.; SAMPAIO, M. S. M.; DA SILVA, U. P. O Método de Homogeneização Assintótica aplicado na Obtenção dos Coeficientes Efetivos de um Compósito Elástico Linear. **Cadernos de Engenharia de Estruturas**, [S.l.], v.12, n.55, p.67–86, 2010.

RAYLEIGH, L. On the Influence of Obstacles arranged in a Rectangular Order upon the Properties of medium. **Philosophical Magazine**, [S.l.], v.34, p.481–502, 1892.

RODRIGUEZ-RAMOS, R.; SABINA, F. J.; GUINOVART-DIAZ, R.; BRAVO-CASTILLERO, J. Closed-form Expression for Effective Coefficients of Fibre-reinforced Composite with Transversely Isotropic Constituents. I: Elastic and Square Symmetry. **Mechanics of Materials**, [S.l.], v.33, p.223–235, 2001.

ROZVANY, G. I. N.; ZHOU, M.; BIRKER, T. Generalized Shape Optimization. **Structural Optimization**, [S.l.], v.4, p.250–254, 1992.

SABINA, F. J.; RODRIGUEZ-RAMOS, R.; BRAVO-CASTILLERO, J.; GUINOVART-DIAZ, R. Closed-form Expression for Effective Coefficients of Fibre-reinforced Composite with Transversely Isotropic Constituents II. Piezoelectric and Hexagonal Symmetry. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, [S.l.], v.49, p.1463–1479, 2001.

SADD, M. H. **Elasticity**: Theory, Applications, and Numerics. [S.l.]: Academic Press, 2014.

SANCHEZ-PALANCIA, E. Solutions périodiques par rapport aux variables d'espace et applications. **Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Academie des Sciences Série A- Sciences Mathématiques**, [S.l.], v.271, p.1129–1132, 1970.

SANCHEZ-PALANCIA, E. **Nonhomegeneous Media and Vibration Theory**. [S.l.]: New York: Springer-Verlag, 1980.

SOKOLNIKOFF, I. S. **Mathematical Theory of Elasticity**. [S.l.]: McGraw-Hill book company, 1956.

SU, F.; XU, Z.; CUI, J. Z.; DONG, Q. L. Multi-scale Method for The Quasi-Periodic Structures of Composite Materials. **Applied Mathematics and Computation**, [S.l.], v.217, n.12, p.5847–5852, 2011.

SU, F.; XU, Z.; DONG, Q. L.; JIANG, H. Multiscale Computation Method for Parabolic Problems of Composite Materials. **Applied Mathematics and Computation**, [S.l.], v.217, n.21, p.8337–8342, 2011.

SUZUKI, K.; KIKUCHI, N. A Homogenization Method for Shape and Topology Optimization. **Computer Methods in Applied Mechanis and Engineering**, [S.l.], v.93, p.291–318, 1991.

TORQUATO, S. Optimal Design of Heterogeneous Materials. **Annual review of materials research**, [S.l.], v.40, p.101–129, 2010.

WEINBERGER, H. F. **A First Course in Partial Differential Equations with Complex Variables and Transform Methods**. [S.l.]: New York: Dover, 1995.

WHEELER, L. T. Maximum Principles in Classical Elasticity. In: Mathematical Problems in Elasticity. **Series on Advances in Mathematics for Applied Sciences**, [S.l.], v.38, p.157–185, 1996.

ANEXO A PRINCÍPIOS DO MÁXIMO PARA EQUAÇÕES ELÍPTICAS

A.1 Caso Unidimensional com Coeficientes Contínuos

Seja $u \in \mathcal{C}^2(0,1)$ a solução do problema de valor de contorno dado por

$$\begin{cases} \mathcal{L}u \equiv -\dfrac{d}{dx}\left(a\dfrac{du}{dx}\right) + b\dfrac{du}{dx} + cu = f, \quad x \in (0,1), \\ u(0) = u_0, \quad u(1) = u_1, \end{cases} \tag{A.1}$$

em que os coeficientes $a = a(x)$, $b = b(x)$ e $c = c(x)$ são continuamente diferenciáveis, tais que

$$a(x) \geq a_0 > 0, \quad c(x) \geq 0, \tag{A.2}$$

e a função $f = f(x)$ e os valores $u_0,\ u_1$ são dados. Dessa forma, a seguinte estimativa é válida

$$||u||_{\mathcal{C}(0,1)} \leq \max\{|u(0)|, |u(1)|\} + C||\mathcal{L}u||_{\mathcal{C}(0,1)}, \tag{A.3}$$

onde C depende apenas dos coeficientes de $\mathcal{L}$, mas não de u (LARSSON; THOMEE, 2009).

A.2 Caso Multidimensional Generalizado

Seja $u \in \mathcal{H}^1(\Omega)$ a solução do problema de valor de contorno dado por

$$\begin{cases} \mathcal{L}u \equiv \dfrac{\partial}{\partial x_i}\Big(A_{ij}\dfrac{\partial u}{\partial x_j}\Big) + \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(A_i u\right) + B_i\dfrac{\partial u}{\partial x_i} + Au = f + \dfrac{\partial f_i}{\partial x_i}, \quad x \in \Omega \setminus \Gamma, \\ u(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{A.4}$$

onde o domínio é dado por $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, com sua fronteira $\partial\Omega$ sendo suave ou suave por partes. E ainda, A_{ij} são componentes de um tensor de segunda ordem, simétrico e

definido positivo, ou seja, para todo $\eta \in \mathbb{R}^d$ tem-se

$$A_{ij}(x) = A_{ji}(x), \tag{A.5}$$

$$A_{ij}(x)\eta_i\eta_j \geq \kappa\eta_i\eta_i, \tag{A.6}$$

com $\kappa > 0$ uma constante. E ainda, $A_{ij}(x)$, $A_i(x)$, $B_i(x)$, $A(x)$, $f(x)$ e $f_i(x)$ são infinitamente continuamente diferenciáveis por partes. E assim, a seguinte estimativa é válida

$$||u||_{\mathcal{H}^1(\Omega)} \leq c\left(||f||_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{d} ||f_i||_{L^2(\Omega)}\right), \tag{A.7}$$

com c dependente dos coeficientes de $\mathcal{L}$, mas não de u (BAKHVALOV; PANASENKO, 1989).

ANEXO B CASO CONDUTIVO UNIDIMENSIONAL: EXEMPLOS

B.1 Cálculo da Solução do Coeficiente Efetivo $\hat{a}$

Da equação (2.48) tem-se

$$\hat{a} = \langle a(y)^{-1} \rangle^{-1} = \left(\int_0^1 \frac{1}{1 + 0.25\cos(2\pi y)} dy \right)^{-1}, \tag{B.1}$$

onde a solução analítica da integral em (B.1) é da seguinte forma

$$\int \frac{1}{1 + 0.25\cos(2\pi y)} dy = \frac{4}{\sqrt{15}\pi} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{3}{5}} \operatorname{tg}(\pi y) \right) + C, \tag{B.2}$$

com C uma constante. E assim,

$$\hat{a} = \left(\left(\frac{4}{\sqrt{15}\pi} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{3}{5}} \operatorname{tg}(\pi y) \right) \right) \Bigg|_0^1 \right)^{-1}, \tag{B.3}$$

ou ainda,

$$\hat{a} = \left(\lim_{h_1 \to \frac{1}{2}^-} \left(\frac{4}{\sqrt{15}\pi} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{3}{5}} \operatorname{tg}(\pi y) \right) \right) \Bigg|_0^{h_1} + \lim_{h_2 \to \frac{1}{2}^+} \left(\frac{4}{\sqrt{15}\pi} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{3}{5}} \operatorname{tg}(\pi y) \right) \right) \Bigg|_{h_2}^1 \right)^{-1}, \tag{B.4}$$

que equivale a

$$\hat{a} = \left(\frac{4}{\sqrt{15}\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) \right)^{-1}, \tag{B.5}$$

logo

$$\hat{a} = \frac{\sqrt{15}}{4}.$$

B.2 Cálculo da Solução $N_1(y)$ do Problema Local

Da equação (2.60), que é a expressão para se chegar na solução para $N_1(y)$, tem-se que

$$N_1(y) = \int_0^y \left(\frac{\hat{a}}{a(s)} - 1 \right) ds.$$

Do Exemplo 1 do Capítulo 4, o coeficiente do problema foi dado como $a(y) = 1 + 0.25\cos(2\pi y)$. E ainda, obteve-se o coeficiente efetivo da forma $\hat{a} = \sqrt{15}/4$. Assim, $N_1(y)$ passa a ser

$$N_1(y) = \frac{\sqrt{15}}{4} \int_0^y \left(\frac{1}{1 + 0.25\cos(2\pi s)} \right) ds - y. \tag{B.6}$$

A solução da integral parte da igualdade dada em (B.2). Dessa forma, observa-se que deve haver o estudo da função, pois há uma singularidade no ponto $y = 1/2$ por parte da função $\mathrm{tg}(\pi y)$. Logo,

- se $0 < y < 1/2$ então

$$N_1(y) = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{3}{5}} \mathrm{tg}(\pi s) \right) \Bigg|_0^y - y, \tag{B.7}$$

  ou seja,

$$N_1(y) = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{3}{5}} \mathrm{tg}(\pi y) \right) - y, \tag{B.8}$$

- se $1/2 < y < 1$ então

$$N_1(y) = \frac{1}{\pi} \left(\lim_{h_1 \to \frac{1}{2}^-} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{3}{5}} \mathrm{tg}(\pi s) \right) \Bigg|_0^{h_1} + \lim_{h_2 \to \frac{1}{2}^+} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{3}{5}} \mathrm{tg}(\pi s) \right) \Bigg|_{h_2}^{y} \right) - y, \tag{B.9}$$

que equivale a

$$N_1(y) = \frac{1}{\pi}\left(\lim_{h_1\to\frac{1}{2}^-} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\operatorname{tg}(\pi h_1)\right)\right) + \frac{1}{\pi}\left(\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\operatorname{tg}(\pi y)\right) - \lim_{h_2\to\frac{1}{2}^+} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\operatorname{tg}(\pi h_2)\right)\right) - y, \quad \text{(B.10)}$$

logo,

$$N_1(y) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{\pi}\left(\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\operatorname{tg}(\pi y)\right) + \frac{\pi}{2}\right) - y. \quad \text{(B.11)}$$

E portanto,

$$N_1(y) = \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\operatorname{tg}(\pi y)\right) - y + 1. \quad \text{(B.12)}$$

Se, além disso, admitir-se que $N_1(1/2) = 0$, então a solução é da forma

$$N_1(y) = \begin{cases} 0, \ \text{se} \ y = 1/2, \\ \dfrac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\dfrac{3}{5}}\operatorname{tg}(\pi y)\right) - y, \ \text{se} \ 0 < y < 1/2, \\ \dfrac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\dfrac{3}{5}}\operatorname{tg}(\pi y)\right) - y + 1, \ \text{se} \ 1/2 < y < 1. \end{cases}$$

B.3 Prova da Continuidade de $N_1(y)$

Para provar a continuidade de $N_1(y)$ será analisado o comportamento da função quando y se aproxima de $1/2$, pois nesse ponto $\operatorname{tg}(\pi y)$ apresenta singularidade. Assim, dos limites laterais tem-se

- para y tendendo a $1/2$ pela esquerda

$$\lim_{y\to\frac{1}{2}^-} N_1(y) = \lim_{y\to\frac{1}{2}^-}\left(\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\operatorname{tg}(\pi y)\right) - y\right), \quad \text{(B.13)}$$

que resulta em

$$\lim_{y\to\frac{1}{2}^-} N_1(y) = \left(\frac{1}{\pi}\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\right) = 0. \quad \text{(B.14)}$$

- para y tendendo a $1/2$ pela direita

$$\lim_{y\to\frac{1}{2}^+} N_1(y) = \lim_{y\to\frac{1}{2}^+} \left(\frac{1}{\pi} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{3}{5}} \operatorname{tg}(\pi y) \right) - y \right) + 1, \tag{B.15}$$

ou seja,

$$\lim_{y\to\frac{1}{2}^+} N_1(y) = \left(-\frac{1}{\pi}\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \right) + 1 = 0. \tag{B.16}$$

E como $N(1/2) = 0$ tem-se que a função é contínua.

B.4 Antissimetria de $N_1(y)$

Através do gráfico de $N_1(y)$ ilustrado na Figura 10 pode-se observar que a função é antissimétrica com relação ao ponto $y = 1/2$, mas é necessário provar que

$$N_1\left(\frac{1}{2} - y\right) = -N_1\left(y - \frac{1}{2}\right). \tag{B.17}$$

Mas nota-se que se $0 < y < 1/2$ então é necessário provar que

$$N_1\left(\frac{1}{2} - y\right) = -N_1\left(y + \frac{1}{2}\right), \tag{B.18}$$

pois, considerando o intervalo $[0, 1]$ tem-se que $N_1\left(y - \frac{1}{2}\right) = N_1\left(y + \frac{1}{2}\right)$ pela 1-periodicidade de $N_1(y)$. De fato tem-se que

$$N_1\left(\frac{1}{2} - y\right) = \frac{1}{\pi}\left(\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{3}{5}} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \pi y\right) \right) \right) - \frac{1}{2} + y, \tag{B.19}$$

pela relação $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot(\alpha)$, obtém-se

$$N_1\left(\frac{1}{2} - y\right) = \frac{1}{\pi}\left(\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{3}{5}} \cot(\pi y) \right) \right) - \frac{1}{2} + y. \tag{B.20}$$

E, por outro lado

$$-N_1\left(y + \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{\pi}\left(\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{3}{5}} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \pi y\right) \right) \right) - \frac{1}{2} + y, \tag{B.21}$$

assim, sabendo que $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\cot(\alpha)$ então

$$-N_1\left(y+\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{\pi}\left(\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\cot\left(\pi y\right)\right)\right) - \frac{1}{2} + y, \tag{B.22}$$

e como $\operatorname{arctg}(-\alpha) = -\operatorname{arctg}(\alpha)$

$$-N_1\left(y+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\pi}\left(\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\cot\left(\pi y\right)\right)\right) - \frac{1}{2} + y. \tag{B.23}$$

Portanto $N_1\left(\frac{1}{2}-y\right) = -N_1\left(y+\frac{1}{2}\right)$.

Agora, para $1/2 < y < 1$ mostra-se que

$$N_1\left(\frac{3}{2}-y\right) = -N_1\left(y-\frac{1}{2}\right), \tag{B.24}$$

pois a partir do intervalo $[0,1]$ e pela 1-periodicidade de N_1 tem-se que $N_1\left(\frac{1}{2}-y\right) = N_1\left(\frac{3}{2}-y\right)$. Assim, do lado esquerdo obtém-se

$$N_1\left(\frac{3}{2}-y\right) = \frac{1}{\pi}\left(\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-\pi y\right)\right)\right) - \frac{3}{2} + y, \tag{B.25}$$

e ainda, da relação $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cot(\alpha)$ chega-se em

$$N_1\left(\frac{3}{2}-y\right) = \frac{1}{\pi}\left(\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\cot\left(\pi y\right)\right)\right) - \frac{3}{2} + y. \tag{B.26}$$

E do lado direito tem-se que

$$-N_1\left(y-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{\pi}\left(\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\operatorname{tg}\left(\pi y-\frac{\pi}{2}\right)\right)\right) - \frac{3}{2} + y, \tag{B.27}$$

sabendo que $\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}(\alpha)$ resulta

$$-N_1\left(y-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{\pi}\left(\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\pi y\right)\right)\right) - \frac{3}{2} + y, \tag{B.28}$$

e como $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cot(\alpha)$ e $\operatorname{arctg}(-\alpha)=-\operatorname{arctg}(\alpha)$ então

$$-N_1\left(y-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{\pi}\left(\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\cot\left(\pi y\right)\right)\right)-\frac{3}{2}+y. \tag{B.29}$$

Logo $N_1\left(\frac{1}{2}-y\right)=N_1\left(\frac{3}{2}-y\right)$. E portanto, $N_1(y)$ é uma função ímpar. Dessa forma, provou-se que $N_1(y)$ é antissimétrica com relação ao ponto $y=1/2$.

ANEXO C MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS PARA PROBLEMAS DE VALOR DE CONTORNO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS LINEARES DE SEGUNDA ORDEM

Considere um problema que apresenta uma equação diferencial linear de ordem maior que um, com condições de contorno, em um intervalo $[a, b]$. Seja $N > 0$ um número natural, assim divide-se o intervalo $[a, b]$ em N partes iguais de largura h. Dessa forma, define-se $x_0 = a$, $x_N = b$ e os pontos interiores do intervalo como

$$x_n = x_0 + nh, \tag{C.1}$$

em que $n = 1, 2, ..., N - 1$. E assim, os valores de y nestes pontos são

$$y_n = y(x_0 + nh), \tag{C.2}$$

com $n = 0, 1, 2, ..., N$. No processo para encontrar a solução do problema utiliza-se alguns pontos que se encontram fora do intervalo $[a, b]$, chamados pontos de malha exteriores. Os pontos que estão à esquerda do intervalo são denotados por

$$x_{-p} = x_0 - ph \text{ e } y_{-p} = y(x_0 - ph), \tag{C.3}$$

com $p = 1, 2, 3, ...$ E os pontos à direita do intervalo são

$$x_{N+p} = x_N + ph \text{ e } y_{N+p} = y(x_N + ph). \tag{C.4}$$

Para resolver problemas de valor de contorno pelo método de diferenças finitas cada derivada que aparece na equação é substituída por aproximações apropriadas, assim como as condições de contorno (CONTE; DE BOOR, 1980). Utilizando aproximações centrais tem-se uma maior precisão nos resultados, onde cada representação de diferença finita é uma aproximação de ordem h^2 com relação a respectiva derivada.

Com isso, tem-se

$$y'(x_n) \approx \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2h}, \tag{C.5}$$

$$y''(x_n) \approx \frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{h^2}. \tag{C.6}$$

Então, considere a equação diferencial de segunda ordem expressa por

$$y''(x) - f(x)y'(x) + g(x)y = q(x), \tag{C.7}$$

e as seguintes condições de contorno

$$y(x_0) = y_0 = \alpha, \;\; y(x_N) = y_N = \beta. \tag{C.8}$$

Assim, a aproximação em diferenças finitas da equação (C.7) é

$$\frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{h^2} + \frac{f(x_n)(y_{n+1} - y_{n-1})}{2h} + g(x_n)y_n = q(x_n), \tag{C.9}$$

com $n = 1, 2, ..., N-1$. Chamando $f(x_n) = f_n$, $g(x_n) = g_n$ e $q(x_n) = q_n$, e multiplicando a equação (C.9) por h^2 obtém-se

$$\left(1 - \frac{h}{2}f_n\right) y_{n-1} + \left(-2 + h^2 g_n\right) y_n + \left(1 + \frac{h}{2}f_n\right) y_{n+1} = h^2 q_n. \tag{C.10}$$

Dessa última expressão e das condições de contorno (C.8) tem-se um sistema linear de $N-1$ equações com $N-1$ incógnitas y_n, em que $n = 1, 2, ..., N-1$. E assim, as equações desse sistema podem ser escritas como

$$\begin{gathered}
(-2 + h^2 g_1) y_1 + \left(1 + \frac{h}{2}f_1\right) y_2 = h^2 q_1 - \left(1 - \frac{h}{2}f_1\right) \alpha, \\
\left(1 - \frac{h}{2}f_2\right) y_1 + (-2 + h^2 g_2) y_2 + \left(1 + \frac{h}{2}f_2\right) y_3 = h^2 q_2, \\
\left(1 - \frac{h}{2}f_3\right) y_2 + (-2 + h^2 g_3) y_3 + \left(1 + \frac{h}{2}f_3\right) y_4 = h^2 q_3, \\
\vdots \\
\left(1 - \frac{h}{2}f_{N-2}\right) y_{N-3} + (-2 + h^2 g_{N-2}) y_{N-2} + \left(1 + \frac{h}{2}f_{N-2}\right) y_{N-1} = h^2 q_{N-2}, \\
\left(1 - \frac{h}{2}f_{N-1}\right) y_{N-2} + (-2 + h^2 g_{N-1}) y_{N-1} = h^2 q_{N-1} - \left(1 + \frac{h}{2}f_{N-1}\right) \beta.
\end{gathered} \tag{C.11}$$

Observa-se que este é um sistema linear de equações da forma $Ay = b$, com $y = (y_1, y_2, ..., y_{N-1})^T$, b é o vetor que possui os termos do lado direito correspondentes a

cada equação em (C) e A é uma matriz tridiagonal de ordem $N-1$ tal que

$$A = \begin{pmatrix} d_1 & c_1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & d_2 & c_2 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & d_3 & c_3 & ... & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & a_{N-2} & d_{N-2} & c_{N-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & a_{N-1} & d_{N-1} \end{pmatrix}. \tag{C.12}$$

O sistema tridiagonal $Ay = b$ pode ser resolvido por eliminação mediante o algoritmo 4.3 da página 154 do livro CONTE; DE BOOR (1980) como segue. Dados os coeficientes a_n, d_n, c_n e $b = b_n$ para $n = 1, ..., N-1$, tais que $a_1 = c_{N-1} = 0$ e

$$a_n y_{n-1} + d_n y_n + c_n y_{n+1} = b_n. \tag{C.13}$$

Para $k = 2, ..., N-1$: se $d_{k-1} \neq 0$ então $d_k := d_k - \frac{a_k}{d_{k-1}} c_{k-1}$ e $b_k := b_k - \frac{a_k}{d_{k-1}} b_{k-1}$.
Logo, se $d_{N-1} \neq 0$ então $y_{N-1} := \frac{b_{N-1}}{d_{N-1}}$ e para $k = N-2, ..., 1$: $y_k := \frac{b_k - c_k y_{k+1}}{d_k}$.

Esse algoritmo foi implementado através do software MATLAB para resolver alguns problemas apresentados nesta dissertação.

ANEXO D CASO CONDUTIVO MULTIDIMENSIONAL: EXEMPLO

D.1 Cálculo da Solução do Problema Local para $N_l(y)$

Do problema local (3.27) tem-se que

$$\frac{\partial}{\partial y_i}\left(a_{il}(y)+a_{ij}(y)\frac{\partial N_l(y)}{\partial y_j}\right)=0,$$

assim, de $i,j=1,2,3$ pode-se escrever

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y_1}\left(a_{1l}(y)+a_{11}(y)\frac{\partial N_l(y)}{\partial y_1}+a_{12}(y)\frac{\partial N_l(y)}{\partial y_2}+a_{13}(y)\frac{\partial N_l(y)}{\partial y_3}\right)\\ +\frac{\partial}{\partial y_2}\left(a_{2l}(y)+a_{21}(y)\frac{\partial N_l(y)}{\partial y_1}+a_{22}(y)\frac{\partial N_l(y)}{\partial y_2}+a_{23}(y)\frac{\partial N_l(y)}{\partial y_3}\right)\\ +\frac{\partial}{\partial y_3}\left(a_{3l}(y)+a_{31}(y)\frac{\partial N_l(y)}{\partial y_1}+a_{32}(y)\frac{\partial N_l(y)}{\partial y_2}+a_{33}(y)\frac{\partial N_l(y)}{\partial y_3}\right)=0.\end{aligned}$$

Logo, da matriz do coeficiente original (4.24) chega-se em

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y_1}\left(a_{1l}(y)+a_{11}(y)\frac{\partial N_l(y)}{\partial y_1}\right)+\frac{\partial}{\partial y_2}\left(a_{2l}(y)+a_{22}(y)\frac{\partial N_l(y)}{\partial y_2}\right)\\ +\frac{\partial}{\partial y_3}\left(a_{3l}(y)+a_{33}(y)\frac{\partial N_l(y)}{\partial y_3}\right)=0.\end{aligned}$$

Fixando l igual a 1, 2 e 3, respectivamente, tem-se que

$$\frac{\partial}{\partial y_1}\left(a_{11}(y)+a_{11}(y)\frac{\partial N_1(y)}{\partial y_1}\right)+\frac{\partial}{\partial y_2}\left(a_{21}(y)+a_{22}(y)\frac{\partial N_1(y)}{\partial y_2}\right)$$
$$+\frac{\partial}{\partial y_3}\left(a_{31}(y)+a_{33}(y)\frac{\partial N_1(y)}{\partial y_3}\right)=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial y_1}\left(a_{12}(y)+a_{11}(y)\frac{\partial N_2(y)}{\partial y_1}\right)+\frac{\partial}{\partial y_2}\left(a_{22}(y)+a_{22}(y)\frac{\partial N_2(y)}{\partial y_2}\right)$$
$$+\frac{\partial}{\partial y_3}\left(a_{32}(y)+a_{33}(y)\frac{\partial N_2(y)}{\partial y_3}\right)=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial y_1}\left(a_{13}(y)+a_{11}(y)\frac{\partial N_3(y)}{\partial y_1}\right)+\frac{\partial}{\partial y_2}\left(a_{23}(y)+a_{22}(y)\frac{\partial N_3(y)}{\partial y_2}\right)$$
$$+\frac{\partial}{\partial y_3}\left(a_{33}(y)+a_{33}(y)\frac{\partial N_3(y)}{\partial y_3}\right)=0. \tag{D.1}$$

Mas nota-se que, da seção 4.2 do Capítulo 4, $a(y)\equiv a(y_3)$, então $N_l(y)\equiv N_l(y_3)$ e assume-se que $y\equiv y_3$. Com isso, $\frac{\partial N_l(y_3)}{\partial y_1}=0$ e $\frac{\partial N_l(y_3)}{\partial y_2}=0$. Considerando novamente os termos da matriz do coeficiente original chega-se assim em

$$\frac{d}{dy}\left(a_{33}(y)\frac{dN_1(y)}{dy}\right)=0, \tag{D.2}$$
$$\frac{d}{dy}\left(a_{33}(y)\frac{dN_2(y)}{dy}\right)=0, \tag{D.3}$$
$$\frac{d}{dy}\left(a_{33}(y)+a_{33}(y)\frac{dN_3(y)}{dy}\right)=0. \tag{D.4}$$

Observa-se que $N_1(y)=N_2(y)$, assim integrando a equação para N_1 obtém-se

$$N_1(y)=V_0\int_0^y\frac{1}{a_{33}(s)}ds+V_1, \tag{D.5}$$

com V_0 e V_1 constantes. Da condição de periodicidade $N(0)=N(1)$ tem-se que

$$0+V_1=V_0\frac{4}{\sqrt{15}}+V_1, \tag{D.6}$$

logo

$$V_0=0. \tag{D.7}$$

E da condição $\langle N_1(y)\rangle = 0$ chega-se em

$$V_1 = 0. \tag{D.8}$$

Portanto $N_1(y) = N_2(y) = 0$. Agora, de integrar a equação para $N_3(y)$ tem-se

$$\frac{dN_3(y)}{dy} = \frac{V_2}{a_{33}(y)} - 1, \tag{D.9}$$

Aplicando o operador de valor médio chega-se em

$$\left\langle \frac{dN_3(y)}{dy} \right\rangle = \left\langle \frac{V_2}{a_{33}(y)} - 1 \right\rangle, \tag{D.10}$$

que é equivalente a

$$0 = V_2 \int_0^1 \frac{1}{a_{33}(y)} dy_3 - 1, \tag{D.11}$$

ou seja,

$$V_2 = \left\langle a_{33}^{-1}(y_3)\right\rangle^{-1} \equiv \hat{a}_{33}. \tag{D.12}$$

Substituindo em (D.9) e integrando a equação obtém-se

$$N_3(y) = \hat{a}_{33} \int_0^y \left(\frac{1}{1 + 0.25\cos(2\pi s)} \right) ds - y + V_3. \tag{D.13}$$

Se $N_3(0) = 0$ tem-se que

$$V_3 = 0. \tag{D.14}$$

Além disso, se $N_3(1) = 0$ chegamos novamente no resultado $V_3 = 0$. E então

$$N_3(y) = \begin{cases} 0, \ \text{ se } \ y = 1/2, \\ \dfrac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\dfrac{3}{5}}\operatorname{tg}(\pi y)\right) - y, \ \text{ se } \ 0 < y < 1/2, \\ \dfrac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\dfrac{3}{5}}\operatorname{tg}(\pi y)\right) - y + 1, \ \text{ se } \ 1/2 < y < 1. \end{cases}$$

D.2 Cálculo da Solução $u_0(x)$ do Problema Homogeneizado

Considere uma família ortogonal de funções da forma $\{\operatorname{sen}(n\pi x_i)\}_{(n,i)\in\mathbb{N}\times\{1,2,3\}}$, tal que $\operatorname{sen}(m\pi x_i)$ e $\operatorname{sen}(n\pi x_i)$ são ortogonais se

$$\int_0^1 \operatorname{sen}(m\pi x_i)\operatorname{sen}(n\pi x_i)dx_i = 0,\ \forall m,n\in\mathbb{N},\ m\neq n, \tag{D.15}$$

com $i=\{1,2,3\}$. Assim, suponha a seguinte solução para o problema homogeneizado (4.30)

$$u_0(x) = \sum_{i,j,k=1}^{\infty} K_{ijk}\operatorname{sen}(i\pi x_1)\operatorname{sen}(j\pi x_2)\operatorname{sen}(k\pi x_3). \tag{D.16}$$

Dessa forma, substituindo (D.16) na equação do problema e derivar duas vezes cada termo da esquerda chega-se em

$$\pi^2\sum_{i,j,k=1,2,3}^{\infty} K_{ijk}\left(i^2+j^2+\frac{\sqrt{15}}{4}k^2\right)\operatorname{sen}(i\pi x_1)\operatorname{sen}(j\pi x_2)\operatorname{sen}(k\pi x_3) = 1. \tag{D.17}$$

Agora, basta encontrar as constantes K_{ijk}. Para isso considera-se um número natural I tal que $i=I$. E assim, multiplica-se a equação (D.17) por $\operatorname{sen}(I\pi x_1)$. Tem-se então

$$\pi^2\sum_{j,k=1,2,3}^{\infty} K_{Ijk}\left(I^2+j^2+\frac{\sqrt{15}}{4}k^2\right)\operatorname{sen}^2(I\pi x_1)\operatorname{sen}(j\pi x_2)\operatorname{sen}(k\pi x_3) = \operatorname{sen}(I\pi x_1). \tag{D.18}$$

Aplicando a integral definida com relação a x_1 chega-se em

$$\pi^2\sum_{j,k=1,2,3}^{\infty} K_{Ijk}\left(I^2+j^2+\frac{\sqrt{15}}{4}k^2\right)\operatorname{sen}(j\pi x_2)\operatorname{sen}(k\pi x_3)\int_0^1 \operatorname{sen}^2(I\pi x_1)dx_1 = \int_0^1 \operatorname{sen}(I\pi x_1)dx_1. \tag{D.19}$$

Observa-se que, resolvendo a integral do lado direito obtém-se

$$\int_0^1 \operatorname{sen}(I\pi x_1)dx_1 = -\frac{\cos(I\pi x_1)}{I\pi}\Bigg|_0^1, \tag{D.20}$$

assim, se I é um número par a integral se anula. Logo, considera-se I como um número ímpar da forma $I=(2i-1)$. Com isso, a equação (D.19) passa a ser

$$\sum_{j,k=1,2,3}^{\infty} K_{Ijk}\left(I^2+j^2+\frac{\sqrt{15}}{4}k^2\right)\operatorname{sen}(j\pi x_2)\operatorname{sen}(k\pi x_3) = \frac{4}{I\pi^3}. \tag{D.21}$$

De forma semelhante, fixando $j = J$ com $J = (2j-1)$, multiplica-se a expressão (D.21) por $\operatorname{sen}(J\pi x_2)$ e em seguida aplica-se a integral definida com relação a x_2, chegando assim em

$$\sum_{k=1,2,3}^{\infty} K_{IJk}\left(I^2 + J^2 + \frac{\sqrt{15}}{4}k^2\right)\operatorname{sen}(k\pi x_3) = \frac{16}{IJ\pi^4}. \tag{D.22}$$

Por fim, o mesmo processo é feito para $k = K$, onde $K = (2k-1)$. Tendo assim

$$K_{IJK} = \frac{64}{\left(I^2 + J^2 + \frac{\sqrt{15}}{4}K^2\right)IJK\pi^5}. \tag{D.23}$$

Logo, $u_0(x)$ é da forma

$$u_0(x) = \frac{64}{\pi^5}\sum_{i,j,k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}((2i-1)\pi x_1)\operatorname{sen}((2j-1)\pi x_2)\operatorname{sen}((2k-1)\pi x_3)}{\left((2i-1)^2 + (2j-1)^2 + \frac{\sqrt{15}}{4}(2k-1)^2\right)(2i-1)(2j-1)(2k-1)}. \tag{D.24}$$

D.3 Cálculo da Solução do Problema Local para $N_{pl}(y)$

Com o intuito de resolver o problema local para $N_{pl}(y)$ serão primeiramente encontrados os $b_{pl}(y)$. Lembrando da seção 4.2 do Capítulo 4, tem-se que a fonte é $f(x,y) = -1$. E ainda, da decomposição $f(x,y) = b_{pl}(y)\dfrac{\partial^2 u_0(x)}{\partial x_p \partial x_l}$ e da equação do problema homogeneizado $\hat{a}_{pl}\dfrac{\partial^2 u_0(x)}{\partial x_p \partial x_l} = \hat{f}(x)$, chega-se em

$$b_{pl} = \hat{a}_{pl}. \tag{D.25}$$

Da equação do problema local (3.41) tem-se que

$$\frac{\partial}{\partial y_i}\left(a_{ij}(y)\frac{\partial N_{pl}(y)}{\partial y_j}\right) + a_{pl}(y) + \frac{\partial(a_{ip}(y)N_l(y))}{\partial y_i} + a_{pj}(y)\frac{\partial N_l(y)}{\partial y_j} - b_{pl}(y) = 0. \tag{D.26}$$

Abrindo o somatório para $i, j = 1, 2, 3$ chega-se em

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial y_1}\left(a_{11}(y)\frac{\partial N_{pl}(y)}{\partial y_1}\right) + \frac{\partial}{\partial y_1}\left(a_{12}(y)\frac{\partial N_{pl}(y)}{\partial y_2}\right) + \frac{\partial}{\partial y_1}\left(a_{13}(y)\frac{\partial N_{pl}(y)}{\partial y_3}\right) \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial y_2}\left(a_{21}(y)\frac{\partial N_{pl}(y)}{\partial y_1}\right) + \frac{\partial}{\partial y_2}\left(a_{22}(y)\frac{\partial N_{pl}(y)}{\partial y_2}\right) + \frac{\partial}{\partial y_2}\left(a_{23}(y)\frac{\partial N_{pl}(y)}{\partial y_3}\right) \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial y_3}\left(a_{31}(y)\frac{\partial N_{pl}(y)}{\partial y_1}\right) + \frac{\partial}{\partial y_3}\left(a_{32}(y)\frac{\partial N_{pl}(y)}{\partial y_2}\right) + \frac{\partial}{\partial y_3}\left(a_{33}(y)\frac{\partial N_{pl}(y)}{\partial y_3}\right) \\
&\quad + \frac{\partial(a_{1p}(y)N_l(y))}{\partial y_1} + \frac{\partial(a_{2p}(y)N_l(y))}{\partial y_2} + \frac{\partial(a_{3p}(y)N_l(y))}{\partial y_3} \\
&\quad + a_{p1}(y)\frac{\partial N_l(y)}{\partial y_1} + a_{p2}(y)\frac{\partial N_l(y)}{\partial y_2} + a_{p3}(y)\frac{\partial N_l(y)}{\partial y_3} + a_{pl}(y) - b_{pl}(y) = 0. \quad \text{(D.27)}
\end{aligned}$$

No exemplo tem-se que $a_{ij}(y) \equiv a_{ij}(y_3)$, assim $N_{pl}(y) \equiv N_{pl}(y_3)$, e então admite-se que $y \equiv y_3$. Disso, $\dfrac{\partial N_{pl}(y)}{\partial y_1} = 0$ e $\dfrac{\partial N_{pl}(y)}{\partial y_2} = 0$. E ainda, considerando os termos da matriz (4.24) do coeficiente original, a equação (D.27) é reduzida a

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial y_3}\left(a_{33}(y)\frac{\partial N_{pl}(y)}{\partial y_3}\right) + \frac{\partial(a_{1p}(y)N_l(y))}{\partial y_1} + \frac{\partial(a_{2p}(y)N_l(y))}{\partial y_2} + \frac{\partial(a_{3p}(y)N_l(y))}{\partial y_3} \\
&\quad + a_{p3}(y)\frac{\partial N_l(y)}{\partial y_3} + a_{pl}(y) - b_{pl}(y) = 0. \quad \text{(D.28)}
\end{aligned}$$

Para p fixo de 1 a 3 chega-se, respectivamente, em

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y_3}\left(a_{33}(y)\frac{\partial N_{1l}(y)}{\partial y_3}\right) + \frac{\partial(a_{11}(y)N_l(y))}{\partial y_1} + a_{1l}(y) - b_{1l}(y) = 0, \\
\frac{\partial}{\partial y_3}\left(a_{33}(y)\frac{\partial N_{2l}(y)}{\partial y_3}\right) + \frac{\partial(a_{22}(y)N_l(y))}{\partial y_2} + a_{2l}(y) - b_{2l}(y) = 0, \\
\frac{\partial}{\partial y_3}\left(a_{33}(y)\frac{\partial N_{3l}(y)}{\partial y_3}\right) + \frac{\partial(a_{33}(y)N_l(y))}{\partial y_3} + a_{33}(y)\frac{\partial N_l(y)}{\partial y_3} + a_{3l}(y) - b_{3l}(y) = 0. \quad \text{(D.29)}
\end{aligned}$$

Como $N_{pl}(y) \equiv N_{pl}(y_3)$, fixando $l = 1$ e considerando as soluções obtidas para $N_l(y)$ e b_{pl} tem-se que

$$\frac{d}{dy}\left(a_{33}(y)\frac{dN_{11}(y)}{dy}\right) = b_{11}(y) - a_{11}(y), \quad \text{(D.30)}$$

$$\frac{d}{dy}\left(a_{33}(y)\frac{dN_{21}(y)}{dy}\right) = 0, \quad \text{(D.31)}$$

$$\frac{d}{dy}\left(a_{33}(y)\frac{dN_{31}(y)}{dy}\right) = 0. \quad \text{(D.32)}$$

Para $l = 2$ fixo

$$\frac{d}{dy}\left(a_{33}(y)\frac{dN_{12}(y)}{dy}\right) = 0, \tag{D.33}$$

$$\frac{d}{dy}\left(a_{33}(y)\frac{dN_{22}(y)}{dy}\right) = b_{22}(y) - a_{22}(y), \tag{D.34}$$

$$\frac{d}{dy}\left(a_{33}(y)\frac{dN_{32}(y)}{dy}\right) = 0. \tag{D.35}$$

E para $l = 3$

$$\frac{d}{dy}\left(a_{33}(y)\frac{dN_{13}(y)}{dy}\right) = 0, \tag{D.36}$$

$$\frac{d}{dy}\left(a_{33}(y)\frac{dN_{23}(y)}{dy}\right) = 0, \tag{D.37}$$

$$\frac{d}{dy}\left(a_{33}(y)\frac{dN_{33}(y)}{dy}\right) = b_{33}(y) - \frac{d(a_{33}(y)N_3(y))}{dy} - a_{33}(y)\frac{dN_3(y)}{dy} - a_{33}(y). \tag{D.38}$$

Logo, das equações para N_{pl}, com $p \neq l$ segue que

$$N_{12}(y) = N_{13}(y) = N_{21}(y) = N_{23}(y) = N_{31}(y) = N_{32}(y). \tag{D.39}$$

Assim, integrando a equação para $N_{21}(y)$ tem-se

$$\frac{dN_{21}(y)}{dy} = \frac{C_0}{a_{33}(y)}, \tag{D.40}$$

onde C_0 é uma constante. Integrando novamente a equação, chega-se em

$$N_{21}(y) = \int_0^y \frac{C_0}{a_{33}(s)}ds + C_1, \tag{D.41}$$

com C_1 constante. Logo, da condição de periodicidade $N_{21}(0) = N_{21}(1)$ tem-se

$$C_1 = 0. \tag{D.42}$$

E considerando a condição do Lema 3.1.1 $\langle N_{21}(y)\rangle = 0$ obtém-se que

$$C_0 = 0. \tag{D.43}$$

Portanto,

$$N_{12}(y) = N_{13}(y) = N_{21}(y) = N_{23}(y) = N_{31}(y) = N_{32}(y) = 0.$$

Do exemplo tem-se que $a_{11}(y) = a_{22}(y) = 1 + 0.25\,\mathrm{sen}(2\pi y_3)$. Além disso, sabe-se

que $b_{11} = b_{22} = 1$, então $N_{11}(y) = N_{22}(y)$. Dessa forma, como $y \equiv y_3$, integrando a equação para $N_{11}(y)$ chega-se em

$$a_{33}(y)\frac{dN_{11}(y)}{dy} = -\frac{1}{4}\int_0^y \operatorname{sen}(2\pi s)ds + C_2, \tag{D.44}$$

com C_2 constante. Como $a_{33}(y) = 1 + 0.25\cos(2\pi y)$ então

$$\frac{dN_{11}(y)}{dy} = \frac{1}{1 + 0.25\cos(2\pi y)}\left(\frac{1}{8\pi}\cos(2\pi y) - \frac{1}{8\pi} + C_2\right). \tag{D.45}$$

Aplicando o operador de valor médio tem-se que

$$\left\langle \frac{dN_{11}(y)}{dy} \right\rangle = \left\langle \frac{1}{1 + 0.25\cos(2\pi y)}\left(\frac{1}{8\pi}\cos(2\pi y) - \frac{1}{8\pi} + C_2\right)\right\rangle, \tag{D.46}$$

ou ainda,

$$0 = \frac{1}{8\pi}\int_0^1 \frac{\cos(2\pi y)}{1 + 0.25\cos(2\pi y)}dy + \left(-\frac{1}{8\pi} + C_2\right)\int_0^1 \frac{1}{1 + 0.25\cos(2\pi y)}dy. \tag{D.47}$$

Do Exemplo 1 do Capítulo 4 a segunda integral resulta em $\frac{4}{\sqrt{15}}$. Já a primeira integral possui a seguinte solução analítica

$$\int \frac{\cos(2\pi y)}{1 + 0.25\cos(2\pi y)}dy = 4y - \frac{16}{\sqrt{15}\pi}\operatorname{arctg}\left(\frac{3}{\sqrt{15}}\operatorname{tg}(\pi y)\right). \tag{D.48}$$

Disso, a integral no intervalo $[0, 1]$ equivale a

$$\int_0^1 \frac{\cos(2\pi y)}{1 + 0.25\cos(2\pi y)}dy = \left(4y - \frac{16}{\sqrt{15}\pi}\operatorname{arctg}\left(\frac{3}{\sqrt{15}}\operatorname{tg}(\pi y)\right)\right)\Bigg|_0^1, \tag{D.49}$$

ou seja,

$$\int_0^1 \frac{\cos(2\pi y)}{1 + 0.25\cos(2\pi y)}dy = 4 - \frac{16}{\sqrt{15}\pi}\left(\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{3}{\sqrt{15}}\operatorname{tg}(\pi y)\right)\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{2}^-} + \left(\operatorname{arctg}\left(\frac{3}{\sqrt{15}}\operatorname{tg}(\pi y)\right)\right)\Bigg|_{\frac{1}{2}^+}^1\right), \tag{D.50}$$

e então

$$\int_0^1 \frac{\cos(2\pi y)}{1 + 0.25\cos(2\pi y)}dy = 4 - \frac{16}{\sqrt{15}\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = 4 - \frac{16}{\sqrt{15}}. \tag{D.51}$$

Assim, substituindo esses resultados na equação (D.47) chega-se em

$$C_2 = \frac{5-\sqrt{15}}{8\pi}. \tag{D.52}$$

Integrando agora a equação (D.45) obtém-se

$$N_{11}(y) = \frac{1}{8\pi}\int_0^y \frac{\cos(2\pi s)}{1+0.25\cos(2\pi s)}ds + \left(\frac{4-\sqrt{15}}{8\pi}\right)\int_0^y \frac{1}{1+0.25\cos(2\pi s)}ds + C_3, \tag{D.53}$$

onde $C_3 \in \mathbb{R}$. Observa-se que,

$$N_{11}(y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^y \left(1 - \frac{1}{1+0.25\cos(2\pi s)}\right)ds + \left(\frac{4-\sqrt{15}}{8\pi}\right)\int_0^y \frac{1}{1+0.25\cos(2\pi s)}ds + C_3, \tag{D.54}$$

ou ainda,

$$N_{11}(y) = \frac{1}{2\pi}\left(y - \frac{\sqrt{15}}{4}\int_0^y \frac{1}{1+0.25\cos(2\pi s)}ds\right) + C_3, \tag{D.55}$$

que equivale a

$$N_{11}(y) = -\frac{1}{2\pi}N_3(y) + C_3. \tag{D.56}$$

Lembrando que $\langle N_3(y)\rangle = 0$ tem-se

$$\langle N_{11}(y)\rangle = C_3, \tag{D.57}$$

e pela condição do Lema 3.1.1 $\langle N_{11}\rangle = 0$ chega-se em

$$C_3 = 0. \tag{D.58}$$

Portanto,

$$N_{11}(y) = N_{22}(y) = -\frac{1}{2\pi}N_3(y).$$

A última equação a ser resolvida será para $N_{33}(y)$, de onde tem-se que

$$\frac{d^2N_{33}(y)}{dy^2} + \frac{1}{a_{33}(y)}\frac{da_{33}(y)}{dy}\frac{dN_{33}(y)}{dy} = \frac{b_{33}(y)}{a_{33}(y)} - \frac{N_3(y)}{a_{33}(y)}\frac{da_{33}(y)}{dy} - 2\frac{dN_3(y)}{dy} - 1.$$

Primeiramente será feita uma redução de ordem para resolver essa equação. Assim, considere $P = \dfrac{dN_{33}(y)}{dy}$, tal que

$$\frac{dP}{dy} + P_1(y)P = P_2(y), \tag{D.59}$$

onde

$$P_1(y) = a_{33}^{-1}(y)\frac{da_{33}(y)}{dy} = -\frac{\pi \operatorname{sen}(2\pi y)}{2(1 + 0.25\cos(2\pi y))}. \tag{D.60}$$

Nota-se que

$$\frac{dN_3(y)}{dy} = \sqrt{\frac{3}{5}}\frac{\sec^2(\pi y)}{1 + 3/5\,\mathrm{tg}^2(\pi y)} - 1 = \frac{\sqrt{15}}{4}\frac{1}{1 + 0.25\cos(2\pi y)} - 1, \tag{D.61}$$

então

$$P_2(y) = \frac{1}{1 + 0.25\cos(2\pi y)}\left(\frac{\pi}{2}N_3(y)\operatorname{sen}(2\pi y) + \frac{1}{4}\cos(2\pi y) + \frac{4 - \sqrt{15}}{4}\right). \tag{D.62}$$

Assim, considere o fator integrante $e^{\int P_1(y)dy}$, ou ainda

$$e^{\int P_1(y)dy} = e^{\ln|1+0.25\cos(2\pi y)|} = 1 + 0.25\cos(2\pi y). \tag{D.63}$$

Multiplicando esse fator pela equação (D.59) obtém-se

$$\frac{d(Pe^{\int P_1(y)dy})}{dy} = P_2(y)e^{\int P_1(y)dy}, \tag{D.64}$$

que equivale a

$$\frac{dN_{33}(y)}{dy} = e^{-\int P_1(y)dy}\left(\int\left(\frac{\pi}{2}N_3(y)\operatorname{sen}(2\pi y) + \frac{1}{4}\cos(2\pi y) + \frac{4 - \sqrt{15}}{4}\right)ds + C_5\right), \tag{D.65}$$

com $C_5 = \dfrac{5}{4}\left(\dfrac{dN_{33}(y)}{dy}\right)\Bigg|_{y=0}$. E ainda, pode-se mostrar que $\dfrac{dN_{33}(y)}{dy}$ é contínua. Pela

condição de periodicidade chega-se em

$$N_{33}(1) - N_{33}(0) = 0 = \int_0^1 \frac{1}{1+0.25\cos(2\pi y)} \int \left(\frac{\pi}{2} N_3(y)\,\mathrm{sen}(2\pi y) + \frac{1}{4}\cos(2\pi y) + \frac{4-\sqrt{15}}{4} \right) dydy + \int_0^1 \frac{C_5}{1+0.25\cos(2\pi y)} dy,$$

ou seja,

$$C_5 = -\frac{\sqrt{15}}{4} \int_0^1 \left(\frac{1}{1+0.25\cos(2\pi y)} \int \left(\frac{\pi}{2} N_3(y)\,\mathrm{sen}(2\pi y) + \frac{1}{4}\cos(2\pi y) + \frac{4-\sqrt{15}}{4} \right) dy \right) dy, \tag{D.66}$$

ou ainda,

$$C_5 = -\frac{\sqrt{15}}{4} \int_0^1 \frac{1}{1+0.25\cos(2\pi y)} \left(\frac{\pi}{2} F(y) + \frac{1}{8\pi}\,\mathrm{sen}(2\pi y) + \frac{4-\sqrt{15}}{4} y \right) dy, \tag{D.67}$$

onde

$$F(y) = \int \left(N_3(y)\,\mathrm{sen}(2\pi y) \right) dy. \tag{D.68}$$

Nota-se que se $0 < y < 1/2$ então

$$\int \left(N_3(y)\,\mathrm{sen}(2\pi y) \right) dy = \frac{1}{\pi} \int \mathrm{arctg}\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\,\mathrm{tg}(\pi y) \right) \mathrm{sen}(2\pi y) dy - \int y\,\mathrm{sen}(2\pi y) dy. \tag{D.69}$$

Da primeira integral do lado direito da equação (D.69) tem-se

$$\int \mathrm{arctg}\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\,\mathrm{tg}(\pi y) \right) \mathrm{sen}(2\pi y) dy = 2 \int \mathrm{arctg}\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\,\mathrm{tg}(\pi y) \right) \frac{\mathrm{tg}(\pi y)}{(1+\,\mathrm{tg}^2(\pi y))^2 \cos^2(\pi y)} dy, \tag{D.70}$$

resolvendo por substituição, considere $z = \sqrt{\frac{3}{5}}\,\mathrm{tg}(\pi y)$. Assim,

$$\int \mathrm{arctg}\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\,\mathrm{tg}(\pi y) \right) \mathrm{sen}(2\pi y) dy = \frac{6}{5\pi} \int \frac{\mathrm{arctg}(z) z}{(3/5+z^2)^2} dz. \tag{D.71}$$

Pelo método de integração por partes, pode-se assumir que $u = \operatorname{arctg}(z)$ e $dv = \dfrac{zdz}{(3/5+z^2)^2}$, obtendo

$$\int \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\operatorname{tg}(\pi y)\right)\operatorname{sen}(2\pi y)dy = \frac{6}{5\pi}\left(-\frac{1}{2}\frac{\operatorname{arctg}(z)}{3/5+z^2}+\frac{1}{2}\int\frac{dz}{(1+z^2)(3/5+z^2)}\right), \quad \text{(D.72)}$$

e por frações parciais chega-se em

$$\int \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\operatorname{tg}(\pi y)\right)\operatorname{sen}(2\pi y)dy = \frac{6}{5\pi}\left(-\frac{1}{2}\frac{\operatorname{arctg}(z)}{3/5+z^2}-\frac{5}{4}\left(\int\frac{dz}{1+z^2}-\int\frac{dz}{3/5+z^2}\right)\right), \quad \text{(D.73)}$$

logo

$$\int \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\operatorname{tg}(\pi y)\right)\operatorname{sen}(2\pi y)dy = -\frac{6}{5\pi}\left(\frac{1}{2}\frac{\operatorname{arctg}(z)}{3/5+z^2}+\frac{5}{4}\left(\operatorname{arctg}(z)-\sqrt{\frac{5}{3}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{5}{3}}z\right)\right)\right), \quad \text{(D.74)}$$

e substituindo z tem-se

$$\int \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\operatorname{tg}(\pi y)\right)\operatorname{sen}(2\pi y)dy = -\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\operatorname{tg}(\pi y)\right)\cos^2(\pi y) - \frac{3}{2\pi}\left(\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\operatorname{tg}(\pi y)\right)-\sqrt{\frac{5}{3}}\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}(\pi y)\right)\right). \quad \text{(D.75)}$$

Já a segunda integral na equação (D.69) pode ser resolvida pelo método de integração por partes, resultando assim

$$\int y\operatorname{sen}(2\pi y)dy = -\frac{y\cos(2\pi y)}{2\pi}+\frac{\operatorname{sen}(2\pi y)}{4\pi^2}. \quad \text{(D.76)}$$

Portanto, para $0 < y < 1/2$ obtém-se

$$\int (N_3(y)\operatorname{sen}(2\pi y))dy = -\frac{1}{\pi^2}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\operatorname{tg}(\pi y)\right)\cos^2(\pi y) - \frac{3}{2\pi^2}\left(\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\operatorname{tg}(\pi y)\right)-\sqrt{\frac{5}{3}}\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}(\pi y)\right)\right)+\frac{y\cos(2\pi y)}{2\pi}-\frac{\operatorname{sen}(2\pi y)}{4\pi^2}. \quad \text{(D.77)}$$

E para $\frac{1}{2} < y < 1$ tem-se que

$$\int (N_3(y)\,\mathrm{sen}(2\pi y))\,dy = \frac{1}{\pi}\int \mathrm{arctg}\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\,\mathrm{tg}(\pi y)\right)\mathrm{sen}(2\pi y)dy - \int y\,\mathrm{sen}(2\pi y)dy + \int \mathrm{sen}(2\pi y)dy, \quad \text{(D.78)}$$

e então

$$\int (N_3(y)\,\mathrm{sen}(2\pi y))dy = -\frac{1}{\pi^2}\,\mathrm{arctg}\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\,\mathrm{tg}(\pi y)\right)\cos^2(\pi y) - \frac{3}{2\pi^2}\left(\mathrm{arctg}\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\,\mathrm{tg}(\pi y)\right) - \sqrt{\frac{5}{3}}\,\mathrm{arctg}\,(\,\mathrm{tg}(\pi y))\right) + \frac{y\cos(2\pi y)}{2\pi} - \frac{\mathrm{sen}(2\pi y)}{4\pi^2} - \frac{\cos(2\pi y)}{2\pi}. \quad \text{(D.79)}$$

Portanto $F(y)$ é da forma

$$F(y) = \begin{cases} G(y), & \text{se } 0 < y < 1/2, \\ G(y) - \dfrac{\cos(2\pi y)}{2\pi}, & \text{se } 1/2 < y < 1, \end{cases} \quad \text{(D.80)}$$

em que

$$G(y) = -\frac{1}{\pi^2}\,\mathrm{arctg}\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\,\mathrm{tg}(\pi y)\right)\cos^2(\pi y) - \frac{3}{2\pi^2}\left(\mathrm{arctg}\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\,\mathrm{tg}(\pi y)\right) - \sqrt{\frac{5}{3}}\,\mathrm{arctg}\,(\,\mathrm{tg}(\pi y))\right) + \frac{y\cos(2\pi y)}{2\pi} - \frac{\mathrm{sen}(2\pi y)}{4\pi^2}. \quad \text{(D.81)}$$

Substituindo a função $F(y)$ na equação (D.67), e resolvendo via implementação numérica obtém-se

$$C_5 \approx -0.0159. \quad \text{(D.82)}$$

E então, a equação (D.65) é escrita como

$$N_{33}(y) = \int_0^y e^{-\int P_1(s)ds}\left(\int P_2(s)e^{\int P_1(s)ds}ds - 0.0159\right)ds + C_6, \quad \text{(D.83)}$$

em que $C_6 = N_{33}(0)$. Ou ainda,

$$N_{33}(y) = \int_0^y \frac{1}{1 + 0.25\cos(2\pi s)} \left(\frac{\pi}{2} F(s) + \frac{1}{8\pi} \operatorname{sen}(2\pi s) + \frac{4 - \sqrt{15}}{4} s - 0.0159 \right) ds + C_6. \tag{D.84}$$

ANEXO E CASO ELÁSTICO MULTIDIMENSIONAL: EXEMPLO

E.1 Cálculo da Solução do Tensor de Coeficientes Efetivos $\hat{C}_{ijkl}$

Da seção 4.3 do Capítulo 4 para problemas elásticos lineares tem-se que a heterogeneidade do meio percorre y_3, e então $y \equiv y_3$. Logo, da equação do problema local (3.153) chega-se em

$$\frac{d}{dy_3}\left(C_{i3k3}(y_3)\frac{dN_{kpq}(y_3)}{dy_3} + C_{i3pq}(y_3)\right) = 0, \tag{E.1}$$

ou ainda,

$$\frac{d}{dy}\left(C_{i3k3}(y)\frac{dN_{kpq}(y)}{dy} + C_{i3pq}(y)\right) = 0. \tag{E.2}$$

Para cada $i = \{1, 2, 3\}$ obtém-se

$$\frac{d}{dy}\left(C_{13k3}(y)\frac{dN_{kpq}(y)}{dy} + C_{13pq}(y)\right) = 0, \tag{E.3}$$

$$\frac{d}{dy}\left(C_{23k3}(y)\frac{dN_{kpq}(y)}{dy} + C_{23pq}(y)\right) = 0, \tag{E.4}$$

$$\frac{d}{dy}\left(C_{33k3}(y)\frac{dN_{kpq}(y)}{dy} + C_{33pq}(y)\right) = 0. \tag{E.5}$$

Integrando cada equação com relação a y tem-se

$$C_{13k3}(y)\frac{dN_{kpq}(y)}{dy} + C_{13pq}(y) = A_{13pq}, \tag{E.6}$$

$$C_{23k3}(y)\frac{dN_{kpq}(y)}{dy} + C_{23pq}(y) = A_{23pq}, \tag{E.7}$$

$$C_{33k3}(y)\frac{dN_{kpq}(y)}{dy} + C_{33pq}(y) = A_{33pq}, \tag{E.8}$$

com A_{13pq}, A_{23pq} e A_{33pq} constantes. Da representação matricial (4.38) do tensor de coeficientes originais do problema, obtém-se para cada $k = \{1, 2, 3\}$

$$\begin{pmatrix} \mu(y) & 0 & 0 \\ 0 & \mu(y) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda(y) + 2\mu(y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{dN_{1pq}(y)}{dy} \\ \dfrac{dN_{2pq}(y)}{dy} \\ \dfrac{dN_{3pq}(y)}{dy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{13pq} - C_{13pq}(y) \\ A_{23pq} - C_{23pq}(y) \\ A_{33pq} - C_{33pq}(y) \end{pmatrix}, \tag{E.9}$$

Aplicando o operador de valor médio nesse novo sistema chega-se em

$$\left\langle \frac{dN_{1pq}(y)}{dy} \right\rangle = A_{13pq} \left\langle \frac{1}{\mu(y)} \right\rangle - \left\langle \frac{C_{13pq}(y)}{\mu(y)} \right\rangle, \tag{E.10}$$

$$\left\langle \frac{dN_{2pq}(y)}{dy} \right\rangle = A_{23pq} \left\langle \frac{1}{\mu(y)} \right\rangle - \left\langle \frac{C_{23pq}(y)}{\mu(y)} \right\rangle, \tag{E.11}$$

$$\left\langle \frac{dN_{3pq}(y)}{dy} \right\rangle = A_{33pq} \left\langle \frac{1}{\lambda(y) + 2\mu(y)} \right\rangle - \left\langle \frac{C_{33pq}(y)}{\lambda(y) + 2\mu(y)} \right\rangle. \tag{E.12}$$

E assim,

$$A_{13pq} = \left\langle \frac{1}{\mu(y)} \right\rangle^{-1} \left\langle \frac{C_{13pq}(y)}{\mu(y)} \right\rangle, \tag{E.13}$$

$$A_{23pq} = \left\langle \frac{1}{\mu(y)} \right\rangle^{-1} \left\langle \frac{C_{23pq}(y)}{\mu(y)} \right\rangle, \tag{E.14}$$

$$A_{33pq} = \left\langle \frac{1}{\lambda(y) + 2\mu(y)} \right\rangle^{-1} \left\langle \frac{C_{33pq}(y)}{\lambda(y) + 2\mu(y)} \right\rangle. \tag{E.15}$$

pois $N_{kpq}(y)$ é Y-periódico. E portanto

$$\frac{dN_{1pq}(y)}{dy} = \frac{1}{\mu(y)} \left\langle \frac{1}{\mu(y)} \right\rangle^{-1} \left\langle \frac{C_{13pq}(y)}{\mu(y)} \right\rangle - \frac{C_{13pq}(y)}{\mu(y)}, \tag{E.16}$$

$$\frac{dN_{2pq}(y)}{dy} = \frac{1}{\mu(y)} \left\langle \frac{1}{\mu(y)} \right\rangle^{-1} \left\langle \frac{C_{23pq}(y)}{\mu(y)} \right\rangle - \frac{C_{23pq}(y)}{\mu(y)}, \tag{E.17}$$

$$\frac{dN_{3pq}(y)}{dy} = \frac{1}{\lambda(y) + 2\mu(y)} \left\langle \frac{1}{\lambda(y) + 2\mu(y)} \right\rangle^{-1} \left\langle \frac{C_{33pq}(y)}{\lambda(y) + 2\mu(y)} \right\rangle - \frac{C_{33pq}(y)}{\lambda(y) + 2\mu(y)}. \tag{E.18}$$

Substituindo (E.16)-(E.18) na equação do tensor de coeficientes efetivos (3.161) tem-se

$$\hat{C}_{ijpq} = \langle C_{ijpq}(y)\rangle + \left\langle \frac{C_{ij13}(y)}{\mu(y)} \right\rangle \left\langle \frac{C_{13pq}(y)}{\mu(y)} \right\rangle \left\langle \frac{1}{\mu(y)} \right\rangle^{-1} - \left\langle \frac{C_{ij13}(y)C_{13pq}(y)}{\mu(y)} \right\rangle + \left\langle \frac{C_{ij23}(y)}{\mu(y)} \right\rangle \left\langle \frac{C_{23pq}(y)}{\mu(y)} \right\rangle \left\langle \frac{1}{\mu(y)} \right\rangle^{-1} - \left\langle \frac{C_{ij23}(y)C_{23pq}(y)}{\mu(y)} \right\rangle + \left\langle \frac{C_{ij33}(y)}{\lambda(y)+2\mu(y)} \right\rangle \left\langle \frac{C_{33pq}(y)}{\lambda(y)+2\mu(y)} \right\rangle \left\langle \frac{1}{\lambda(y)+2\mu(y)} \right\rangle^{-1} - \left\langle \frac{C_{ij33}(y)C_{33pq}(y)}{\lambda(y)+2\mu(y)} \right\rangle. \quad \text{(E.19)}$$

Calculando a equação (E.19) para cada $i, j, p, q = \{1, 2, 3\}$ chega-se em

$$\hat{C}_{1111} = \hat{C}_{2222} = \langle \lambda(y) + 2\mu(y)\rangle + \left\langle \frac{\lambda(y)}{\lambda(y)+2\mu(y)} \right\rangle^2 \left\langle \frac{1}{\lambda(y)+2\mu(y)} \right\rangle^{-1} - \left\langle \frac{\lambda^2(y)}{\lambda(y)+2\mu(y)} \right\rangle,$$

$$\hat{C}_{3333} = \left\langle \frac{1}{\lambda(y)+2\mu(y)} \right\rangle^{-1}, \quad \hat{C}_{1313} = \hat{C}_{2323} = \left\langle \frac{1}{\mu(y)} \right\rangle^{-1},$$

$$\hat{C}_{1212} = \frac{1}{2}(\hat{C}_{1111} - \hat{C}_{1122}) = \langle \mu(y)\rangle,$$

$$\hat{C}_{1133} = \hat{C}_{3311} = \hat{C}_{2233} = \hat{C}_{3322} = \left\langle \frac{\lambda(y)}{\lambda(y)+2\mu(y)} \right\rangle \left\langle \frac{1}{\lambda(y)+2\mu(y)} \right\rangle^{-1}, \quad \text{(E.20)}$$

onde o restante dos termos são nulos. Pode-se então escrever esses termos em forma de matriz, a qual é exibida em (4.43).

E.2 Cálculo da Solução do Problema Local para $N_{kpq}(y)$

Para encontrar a solução do problema local (3.153) primeiramente obtém-se as constantes A_{i3pq} através das equações (E.13)-(E.15), onde tem-se que $A_{1313} = A_{2323} = 1.0274$, $A_{3311} = A_{3322} = 2.9674$ e $A_{3333} = 3.0488$ e as demais são iguais a zero. Assim, dos problemas (E.16)-(E.18) pode-se chegar nas soluções não nulas: $N_{113}(y)$, $N_{123}(y)$, $N_{311}(y)$, $N_{322}(y)$ e $N_{333}(y)$. Das equações (E.16) e (E.17) pode-se observar que $N_{113}(y) = N_{223}(y)$. Dessa forma, integrando (E.16) chega-se em

$$N_{113}(y) = N_{223}(y) = \int_0^y \frac{1.0274}{\mu(s)} ds - y + C_{113}, \quad \text{(E.21)}$$

com $C_{113} = N_{113}(0) = N_{223}(0)$. E então

$$N_{133}(y) = N_{223}(y) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^y \frac{1.0274}{1+0.25\,\mathrm{sen}(5\pi s)}ds - y + C_{113}, \text{ se } y \in \left(0, \frac{1}{5}\right), \\ \displaystyle\int_0^{\frac{1}{5}} \frac{1.0274}{1+0.25\,\mathrm{sen}(5\pi s)}ds + 1.0274\int_{\frac{1}{5}}^y ds - y + C_{113}, \text{ se } y \in \left(\frac{1}{5}, 1\right), \end{cases} \tag{E.22}$$

ou ainda,

$$N_{133}(y) = N_{223}(y) = \begin{cases} \dfrac{8.2192}{5\pi\sqrt{15}}\,\mathrm{arctg}\left(\dfrac{4}{\sqrt{15}}\,\mathrm{tg}\left(\dfrac{5\pi}{2}y\right) + \dfrac{1}{\sqrt{15}}\right) - y - 0.0341 + C_{113}, \text{ se } y \in \left(0, \dfrac{1}{5}\right), \\ 0.0274y - 0.0274 + C_{113}, \text{ se } y \in \left(\dfrac{1}{5}, 1\right). \end{cases} \tag{E.23}$$

De (E.18) tem-se que $N_{311}(y) = N_{322}(y)$. Logo, integrando a equação tem-se que

$$N_{311}(y) = N_{322}(y) = \int_0^y \frac{2.9674}{\lambda(s)+2\mu(s)}ds - \int_0^y \frac{\lambda(s)}{\lambda(s)+2\mu(s)}ds + C_{311}, \tag{E.24}$$

onde $C_{311} = N_{311}(0) = N_{322}(0)$. Assim,

$$N_{311}(y) = N_{322}(y) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^y \frac{1.9674}{3+0.5\,\mathrm{sen}(5\pi s)}ds + C_{311}, \text{ se } y \in \left(0, \frac{1}{5}\right), \\ \displaystyle\int_0^{\frac{1}{5}} \frac{1.9674}{3+0.5\,\mathrm{sen}(5\pi y)}dy + \int_{\frac{1}{5}}^y \frac{1.9674 - 0.25\cos(0.2\pi s)}{3+0.25\cos(0.2\pi s)}ds + C_{311}, \text{ se } y \in \left(\frac{1}{5}, 1\right), \end{cases} \tag{E.25}$$

que equivale a

$$N_{311}(y) = N_{322}(y) = \begin{cases} \dfrac{7.8696}{5\pi\sqrt{35}}\,\mathrm{arctg}\left(\dfrac{6}{\sqrt{35}}\,\mathrm{tg}\left(\dfrac{5\pi}{2}y\right) + \dfrac{1}{\sqrt{35}}\right) - 0.0142 + C_{311}, \text{ se } y \in \left(0, \dfrac{1}{5}\right), \\ \dfrac{79.4784}{5\pi\sqrt{143}}\,\mathrm{arctg}\left(\dfrac{11}{\sqrt{143}}\,\mathrm{tg}\left(\dfrac{5\pi}{4}y\right)\right) - y + 0.0041 + C_{311}, \text{ se } y \in \left(\dfrac{1}{5}, 1\right). \end{cases} \tag{E.26}$$

Finalmente, integrando a equação (E.18) para $N_{333}(y)$ tem-se que

$$N_{333}(y) = \int_0^y \frac{3.0488}{\lambda(s)+2\mu(s)}ds - y + C_{333}, \tag{E.27}$$

com $C_{333} = N_{333}(0)$. E então

$$N_{333}(y) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^y \frac{3.0488}{3+0.5\,\mathrm{sen}(5\pi s)}ds - y + C_{333}, \text{ se } y \in \left(0, \frac{1}{5}\right), \\ \displaystyle\int_0^{\frac{1}{5}} \frac{3.0488}{3+0.5\,\mathrm{sen}(5\pi s)}ds + \int_{\frac{1}{5}}^y \frac{3.0488}{3+0.25\cos(0.2\pi s)}ds - y + C_{333}, \text{ se } y \in \left(\frac{1}{5}, 1\right), \end{cases} \tag{E.28}$$

resultando em

$$N_{333}(y) = \begin{cases} \dfrac{12.1952}{5\pi\sqrt{35}}\,\mathrm{arctg}\left(\dfrac{6}{\sqrt{35}}\,\mathrm{tg}\left(\dfrac{5\pi}{2}y\right) + \dfrac{1}{\sqrt{35}}\right) - y - 0.022 + C_{333}, \text{ se } y \in \left(0, \dfrac{1}{5}\right), \\ \dfrac{48.7808}{5\pi\sqrt{143}}\,\mathrm{arctg}\left(\dfrac{11}{\sqrt{143}}\,\mathrm{tg}\left(\dfrac{5\pi}{4}y\right)\right) - y - 0.0089 + C_{333}, \text{ se } y \in \left(\dfrac{1}{5}, 1\right). \end{cases} \tag{E.29}$$