UNIVERSIDADE FEDERAL DE PELOTAS

Instituto de Física e Matemática Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática



Dissertação

Solução da Equação de Difusão de Nêutrons Multigrupo Multirregião Estacionária em Geometria Cartesiana pelo Método da Potência via Fronteiras Fictícias

Rodrigo Zanette

Rodrigo Zanette

Solução da Equação de Difusão de Nêutrons Multigrupo Multirregião Estacionária em Geometria Cartesiana pelo Método da Potência via Fronteiras Fictícias

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática da Universidade Federal de Pelotas, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Modelagem Matemática

Orientador: Prof. Dr. Claudio Zen Petersen

Universidade Federal de Pelotas / Sistema de Bibliotecas Catalogação na Publicação

Z28s Zanette, Rodrigo

Solução da equação de difusão de nêutrons multigrupo multirregião estacionária em geometria cartesiana pelo método da potência via fronteiras fictícias / Rodrigo Zanette ; Claudio Zen Petersen, orientador. — Pelotas, 2017.

70 f.

Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática, Instituto de Física e Matemática, Universidade Federal de Pelotas, 2017.

1. Equação da difusão de nêutrons. 2. Método da potência. 3. Fronteiras fictícias. 4. Interpolação. I. Petersen, Claudio Zen, orient. II. Título.

CDD: 539.7213

Rodrigo Zanette

Solução da Equação de Difusão de Nêutrons Multigrupo Multirregião Estacionária em Geometria Cartesiana pelo Método da Potência via Fronteiras Fictícias

Dissertação aprovada, como requisito parcial, para obtenção do grau de Mestre em Modelagem Matemática, Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática, Instituto de Física e Matemática, Universidade Federal de Pelotas.

Data da Defesa: 8 de março de 2017

Banca examinadora:

Prof.	Dr.	Claudio	7en	Petersen	(Orientador)

Doutor em Engenharia Mecânica pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Brasil

Frof. Dr. Glênio Aguiar Goncalves

Doutor em Engenharia Mecânica pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Brasil

Profa. Dra. Liliane Basso Barichello

Doutora em Engenharia Mecânica pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Brasil

Prof. Dr. Marcelo Schramm

Doutor em Engenharia Mecânica pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Brasil

Prof. Dr. Régis Sperotto de Quadros

Doutor em Matemática Aplicada pela Technische Universität Darmstadt, Alemanha

AGRADECIMENTOS

No final deste ciclo, grande é a minha gratidão a todos que propiciaram meu crescimento humano e intelectual. De modo especial, agradeço a Deus pelo dom da vida e por todos os sinais de providência.

Agradeço a minha família que sempre me apoiou e incentivou ao longo de todos os anos de estudo.

Agradeço ao meu orientador Prof. Claudio Zen Petersen pela oportunidade de realização deste trabalho, pela orientação, pelos ensinamentos e pela amizade.

Agradeço a todos os professores e colegas do Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática da UFPel pela troca de conhecimento, pela amizade e pelo apoio.

Por fim, agradeço a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo suporte financeiro.

RESUMO

ZANETTE, Rodrigo. Solução da Equação de Difusão de Nêutrons Multigrupo Multirregião Estacionária em Geometria Cartesiana pelo Método da Potência via Fronteiras Fictícias. 2017. 70 f. Dissertação (Mestrado em Modelagem Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática, Instituto de Física e Matemática, Universidade Federal de Pelotas, Pelotas, 2017.

Neste trabalho é apresentada uma solução da equação de difusão de nêutrons multigrupo multirregião estacionária em geometria cartesiana pelo método da potência via fronteiras fictícias. A equação é resolvida aplicando um método iterativo de fonte, denominado método da potência, que consiste em resolver a equação de difusão de nêutrons a cada iteração, em que o termo fonte é sempre atualizado pelo fluxo de nêutrons da iteração anterior. Esse processo é mantido até um determinado critério de parada para a convergência da solução. Entretanto, em cada nova iteração, o termo fonte recebe novos termos, o que torna o processo muito trabalhoso. Para superar este problema é proposta a reconstrução do fluxo de nêutrons através de uma interpolação. Assim, a solução permanece em uma forma padrão para todas as iterações. Todavia, quando se modelam problemas com longos domínios e várias regiões, necessitam-se polinômios de alta ordem para descrever o fluxo de nêutrons com precisão. Neste processo de interpolação as matrizes envolvidas possuem grandes dimensões, tanto devido à ordem do polinômio quanto ao número de pontos do domínio. A fim de reduzir a ordem do polinômio e as dimensões das matrizes envolvidas, para tornar o processo mais rápido do ponto de vista computacional, o domínio é subdividido em R regiões fictícias na qual interpola-se e resolve-se a equação de difusão de nêutrons localmente em cada uma dessas regiões. As constantes arbitrárias que surgem da solução homogênea são encontradas aplicando condições de contorno, continuidade de fluxo e continuidade de densidade de corrente nas interfaces. Para analisar a sensibilidade dos parâmetros nucleares na convergência e no comportamento da solução é introduzida uma perturbação em cada parâmetro de mesma ordem de magnitude, utilizando uma flutuação randômica multiplicada por uma constante. Os resultados obtidos são comparados com os resultados presentes na literatura.

Palavras-chave: Equação da Difusão de Nêutrons, Método da Potência, Fronteiras Fictícias, Interpolação.

ABSTRACT

ZANETTE, Rodrigo. Solution of the Stationary Multi-layer Multi-group Neutron Diffusion Equation in Cartesian Geometry by Fictitious Borders Power Method. 2017. 70 f. Dissertação (Mestrado em Modelagem Matemática) — Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática, Instituto de Física e Matemática, Universidade Federal de Pelotas, Pelotas, 2017.

In this work it is presented a solution of the stationary multi-layer multi-group neutron diffusion equation in cartesian geometry by fictitious borders power method. The equation is solved applying the iterative power method that consists in solving the neutron diffusion equation for each iteration in which the source term is always updated by neutron flux on the previous iteration. This process is held until a determined stop criterion for the convergence of the solution. However, for each new iteration, new terms are added, which becomes very laborious. To overcome this problem it is proposed the reconstruction of the neutron flux by interpolation. The solution remains in a standard form for all iterations. Nevertheless, when the problem has large dimensions and various regions, polynomials of high order to describe the neutron flux accurately are needed. In this interpolation process the matrices involved have large dimensions, both due to the order of the polynomial as the number of domain points. With the aim of reducing the order of the polynomial and the dimensions of the matrices involved, making the process faster in computational point of view, the domain is divided into R fictitious regions that interpolates and solves the diffusion equation neutron locally in each region. The arbitrary constants arising from solution of the homogeneous problem are found by apply boundary conditions, flux and current density continuity at interfaces. To analyze the sensitivity of the nuclear parameters in the convergence and behavior of the solution it is inserted a perturbation for each parameter of same magnitude order using a random fluctuation multiplied by a constant. The results obtained are compared with results present in the literature.

Keywords: Neutron diffusion equation, power method, fictitious borders, interpolation.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Volume arbitrario V com area de superfície A	21
Figura 2	Representação de uma problema com duas regiões reais e R regiões	32
Figura 3	fictícias	32
Figura 4	Gráfico do CT1-2G1R	35
Figura 5	Gráfico do CT1-2G2R	37
Figura 6	Gráfico do CT2-2G2R	39
Figura 7	Gráfico do CT3-2G3R	41
Figura 8	Gráficos do fluxo de nêutrons rápido: com e sem perturbação	45
Figura 9	Gráficos do fluxo de nêutrons térmico: com e sem perturbação	46
Figura 10	Esboço de uma placa plana com suas r regiões	49
Figura 11	Adaptando o domínio para a solução do problema	52
Figura 12	Fluxo escalar de nêutrons rápido e térmico do problema homogêneo	
	quando $y=0.$	54
Figura 13	Fluxo escalar de nêutrons rápido e térmico do problema homogêneo	54
Figura 14	Ilustração da configuração do problema heterogêneo	55
Figura 15	Gráfico do fluxo escalar de nêutrons rápido nos cortes transversais em	
	y=2 e $y=6$	57
Figura 16	Gráfico do fluxo escalar de nêutrons térmico nos cortes transversais em	
	y=2 e $y=6$	57
Figura 17	Ilustração do gráfico do fluxo escalar de nêutrons rápido	58
Figura 18	Ilustração do gráfico do fluxo escalar de nêutrons térmico.	58
Figura 19	Ilustração do fluxo escalar de nêutrons rápido perturbado no corte trans-	00
	versal em $y=6$	60

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	Parâmetros nucleares do CT1-2G1R	34
Tabela 2	Autovalores dominantes (K_{eff}) para CT1-2G1R	34
Tabela 3	Fluxo escalar de nêutrons para CT1-2G1R	35
Tabela 4	Parâmetros nucleares do CT1-2G2R	36
Tabela 5	Autovalores dominantes (K_{eff}) para CT1-2G2R	36
Tabela 6	Fluxo escalar de nêutrons para CT1-2G2R	37
Tabela 7	Parâmetros nucleares do CT2-2G2R	38
Tabela 8	Autovalores dominantes (K_{eff}) para CT2-2G2R	38
Tabela 9	Fluxo escalar de nêutrons para CT2-2G2R	38
Tabela 10	Parâmetros nucleares do CT3-2G3R	39
Tabela 11	Resultados do K_{eff} e da potência por regiões para CT3-2G3R	40
Tabela 12	Fluxo escalar de nêutrons para CT3-2G3R	40
Tabela 13	Percentuais máximos da perturbação	42
Tabela 14	Perturbação dos parâmetros nucleares	43
Tabela 15	Valores dos K_{eff} para cada parâmetro perturbado	44
Tabela 16	Parâmetros nucleares do problema homogêneo	52
Tabela 17	Valores de cada termo do somatório	53
Tabela 18	Fluxo escalar de nêutrons rápidos do problema homogêneo	53
Tabela 19	Fluxo escalar de nêutrons térmicos do problema homogêneo	54
Tabela 20	Parâmetros nucleares do problema heterogêneo	55
Tabela 21	Fluxo escalar de nêutrons rápidos do caso heterogêneo	56
Tabela 22	Fluxo escalar de nêutrons térmicos do caso heterogêneo	56
Tabela 23	Perturbação dos parâmetros nucleares do caso bidimensional	59
Tabela 24	Valores dos K_{eff} para cada parâmetro perturbado	59

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

EDNMM Equação de Difusão de Nêutrons Multigrupo Multirregião

EDO Equação Diferencial Ordinária

EDO's Equações Diferenciais Ordinárias

EFG Element-free Galerkin

GITT Técnica da Transformada Integral Generalizada

MEC Método de Elementos de Contorno

MEF Método dos Elementos Finitos

MEFG Método dos Elementos Finitos Galerkin

MMR Método de Matrizes Respostas

MPFF Método da Potência via Fronteiras Fictícias

TFFS Transformada Finita de Fourier Seno

TTL Técnica da Transformada de Laplace

LISTA DE SÍMBOLOS

```
Área da superfície, [cm^2].
A
D(\vec{u})
          Coeficiente de difusão no ponto \vec{u}, [cm].
          Coeficiente de difusão do grupo g, [cm].
D_g
D_a^{(r)}
          Coeficiente de difusão do grupo g na região r, [cm].
dA
          Elemento de área da superfície, [cm^2].
E
          Quantidade de energia gerada por fissão, [MeV].
          Grupo de energia, no qual g = 1 : G.
g
G
          Número de grupo de energia.
\vec{J}(\vec{u},t)
          Densidade de corrente de nêutrons no ponto \vec{u} no tempo t, [cm^{-2}s^{-1}].
K_{eff}
          Fator de multiplicação efetivo.
\vec{n}
          Vetor unitário na direção de saída do volume V.
          Densidade de nêutrons no ponto \vec{u} no tempo t, [cm^{-3}].
n(\vec{u},t)
P
          Potência prescrita, [W].
\widehat{P}
          Potência gerada, [W].
          Regiões reais.
r
          Número de regiões fictícias.
R
          Fonte de nêutrons, [cm^{-3}s^{-1}].
S
         Fonte de nêutrons no ponto \vec{u} no tempo t, [cm^{-3}s^{-1}].
S(\vec{u},t)
S_q(\vec{u},t) Fonte de nêutrons do grupo g no ponto \vec{u} no tempo t, [cm^{-3}s^{-1}].
          Fonte externa de nêutrons do grupo q, [cm^{-3}s^{-1}].
          Tempo, [s].
          Posição espacial, [cm].
\vec{u}
          Velocidade escalar, [cm \, s^{-1}].
v
          Velocidade escalar do grupo g, [cm s^{-1}].
v_q
          Volume arbitrário, [cm^3].
V
```

Porcentagem de variação.

 γ

- ϵ Critério de parada para o método da potência.
- λ_{tr} Livre caminho médio de transporte, [cm].
- $\bar{\mu}$ Cosseno do ângulo médio de espalhamento.
- ν_g Número médio de nêutrons liberado por fissão do grupo g.
- Σ Seção de choque macroscópica, $[cm^{-1}]$.
- $\Sigma_a(\vec{u})$ Seção de choque macroscópica de absorção no ponto \vec{u} , $[cm^{-1}]$.
- $\Sigma_{aq}(\vec{u})$ Seção de choque macroscópica de absorção do grupo g no ponto \vec{u} , $[cm^{-1}]$.
- Σ_f Seção de choque macroscópica de fissão, $[cm^{-1}]$.
- Σ_{fg} Seção de choque macroscópica de fissão do grupo g, $[cm^{-1}]$.
- $\Sigma_{fg}^{(r)}$ Seção de choque macroscópica de fissão do grupo g na região $r, [cm^{-1}].$
- Σ_s Seção de choque macroscópica de espalhamento, $[cm^{-1}]$.
- $\Sigma_{sg'g}$ Seção de choque macroscópica de espalhamento do grupo g' para o grupo g, $[cm^{-1}]$.
- $\Sigma_{sg'g}^{(r)}$ Seção de choque macroscópica de espalhamento do grupo g' para o grupo g na região $r, [cm^{-1}].$
- Σ_R Seção de choque macroscópica de remoção, $[cm^{-1}]$.
- Σ_{Rg} Seção de choque macroscópica de remoção do grupo g, $[cm^{-1}]$.
- $\Sigma_{Rq}^{(r)}$ Seção de choque macroscópica de remoção do grupo g na região r, $[cm^{-1}]$.
- Σ_t Seção de choque macroscópica total, $[cm^{-1}]$.
- Σ_{tr} Seção de choque macroscópica de transporte, $[cm^{-1}]$.
- $ec{arphi}$ Vetor fluxo escalar de nêutrons, $[cm^{-2}s^{-1}]$.
- $\phi(\vec{u},t)$ Fluxo escalar de nêutrons no ponto \vec{u} no tempo t, $[cm^{-2}s^{-1}]$.
- ϕ_g Fluxo escalar de nêutrons do grupo g, $[cm^{-2}s^{-1}]$.
- $\phi_q^{(r)}$ Fluxo escalar de nêutrons do grupo g na região r, $[cm^{-2}s^{-1}]$.
- ϕ_g^N Fluxo escalar de nêutrons do grupo g normalizado pela potência, $[cm^{-2}s^{-1}]$.
- χ_g Espectro integrado de fissão do grupo g.
- ψ_{Rg} Fluxo escalar de nêutrons na região fictícia R do grupo g, $[cm^{-2}s^{-1}]$.
- $\widehat{\phi}$ Fluxo escalar de nêutrons transformado, $[cm^{-2}s^{-1}]$.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	14
2 FORMULAÇÃO DO MODELO FÍSICO-MATEMÁTICO DE EQUAÇÃO DA DIFUSÃO DE NÊUTRONS	20 21 25 27
3 SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE DIFUSÃO DE NÊUTRONS MULTIGRUPO MULTIRREGIÃO ESTACIONÁRIA UNIDIMENSIONAL EM GEOMETRIA CARTESIANA	28
3.1 Métodologia para o caso unidimensional 3.1.1 Método da potência via fronteiras fictícias (unidimensional) 3.2 Resultados para o caso unidimensional 3.2.1 Caso Teste 1 (CT1) 3.2.2 Caso Teste 2 (CT2) 3.2.3 Caso Teste 3 (CT3) 3.3 Análise perturbativa para o caso unidimensional	28 30 34 34 37 39 41
4 SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE DIFUSÃO DE NÊUTRONS MULTIGRUPO MULTIRREGIÃO ESTACIONÁRIA BIDIMENSIONAL EM GEOMETRIA CARTESIANA	48 49 51 52 55 58
5 CONCLUSÃO	61
REFERÊNCIAS	63
APÊNDICE A TIPOS DE REATOR	67
APÊNDICE B COMPARAÇÃO DO FLUXO DE NÊUTRONS COM E SEM INTERPOLAÇÃO	69

1 INTRODUÇÃO

O crescimento econômico de um país está diretamente relacionado à sua capacidade produtiva de energia, conforme o país se desenvolve, mais energia é consumida. Assim é de suma importância diversificar e ampliar a matriz energética, priorizando os investimentos em energias que não liberem resíduos no meio ambiente, como CO_2 , atendendo o Protocolo de Quioto (BRASIL (2004)) e mais recentemente o Acordo de Paris (UNITED NATIONS (2015)).

Neste contexto, a energia provinda de reatores nucleares está sendo vista como uma ótima alternativa, uma vez que além de atender ao protocolo e o acordo, não possui dependência de fatores climáticos, como é o caso das usinas hidroelétricas. Além disso, apresenta enorme eficiência e pequenos volumes de combustível, quando comparada com a queima de combustíveis fósseis: carvão, óleo ou gás natural (ROSA (2007)). Tem-se que para cada átomo de carbono em uma reação de combustão são liberados 4,0eV, enquanto que para cada átomo de urânio fissionado produz-se cerca de 200 milhões de eV. Deste modo, um átomo de urânio em fissão é responsável por liberar aproximadamente 50 milhões de vezes mais energia que um átomo de carbono em combustão LEWIS (2008).

Recentemente, o então ministro de Minas e Energia, Eduardo Braga, anunciou a reestruturação do Programa Nuclear Brasileiro com a flexibilização do monopólio da União em toda cadeia produtiva nuclear. Com a participação da iniciativa privada, está previsto a construção de quatro novas usinas nucleares até 2030 e de mais oito até 2050 (BRASIL NUCLEAR (2015)). Deste modo, o Brasil entra de vez no cenário mundial dos países que geram de forma significativa a energia nucleoelétrica atendendo a necessidade energética do país.

A produção deste tipo de energia exige um continuo estudo do fenômeno físico e dos modelos matemáticos que o descrevem, visando um processo mais eficiente e seguro. O enfoque principal na produção de energia nucleoelétrica é o controle da população de nêutrons dentro dos reatores nucleares, pois estas partículas são as responsáveis pela fissão nuclear. Ao fissionar um átomo de urânio-235 são gerados pelo menos outros dois átomos de número atômico menor que seu precursor. Também há

liberação de energia (calor) e aproximadamente 2 a 3 novos nêutrons (LEWIS (2008)). Esses nêutrons por sua vez são responsáveis pelo fissão de outros átomos de urânio, estabelecendo assim uma reação em cadeia autossustentável. Para que esta reação não fuja do controle e provoque um acidente nuclear é feito um controle da população de nêutrons de uma geração para a outra subsequente. O ideal é que a razão entre a população de nêutrons de uma geração e da geração anterior seja em torno de 1. Esta razão chama-se criticalidade ou fator de multiplicação efetivo. Caso esta razão seja menor que 1, o reator está no estado subcrítico, quando for igual a 1, no estado crítico, e se for maior que 1 supercrítico. Esse fator de multiplicação efetivo (K_{eff}) ou criticalidade é um dos principais cálculos a serem realizados em física de reatores não só para fins de licenciamento, mas também para o acompanhamento e operação de uma usina nuclear durante seu tempo de vida.

Com o passar do tempo, novos modelos e métodos são propostos para realizar esses cálculos, porém deve-se sempre realizar testes para verificar, tanto a capacidade do modelo, quanto ao do método a ser empregado de prever situações específicas, definindo limites de validade (qualificação do modelo e método). Esses testes são realizados utilizando-se problemas de referência (padrões) em física de reatores chamados de problemas *benchmark*. A complexidade desses cálculos está associada a dois fatores fundamentais: no fato do núcleo dos reatores nucleares serem compostos por diferentes materiais (heterogeneidade) e no fato de haver aproximadamente nove ordens de magnitude de variação na gama de energia dos nêutrons (STACEY (2001)).

Com relação ao primeiro aspecto, dentro do núcleo de um reator nuclear existem variedades de materiais utilizados como combustível, líquido de arrefecimento, moderador, refletor dentre outros componentes estruturais, tornando o cálculo não tão simples. Uma tática usual para tratar esta heterogeneidade é dividir o reator em regiões, o que chama-se de um modelo multirregião, na qual os parâmetros nucleares são considerados homogêneos (constantes) nas respectivas regiões.

Com relação ao segundo aspecto, para cálculos globais de física, dentro do núcleo do reator encontram-se nêutrons com diferentes níveis de energia. Para melhor modelagem do fenômeno, ao invés de tratar a dependência energética dos nêutrons de forma contínua, discretiza-se o domínio energético dos nêutrons em intervalos ou grupos contíguos. Isto é, divide-se o domínio energético em *G* grupos de energia, o que chama-se de um modelo multigrupo (DUDERSTADT; HAMILTON (1976)).

A equação que melhor descreve a população de nêutrons em um reator é dada pela equação de transporte de Boltzmann, originária da teoria cinética dos gases (DU-DERSTADT; HAMILTON (1976)). CASE; ZWEIFEL (1967) foram os primeiros a apresentar uma solução analítica para a equação de transporte em geometria cartesiana, porém ainda limitada ao caso monoenergético e unidimensional. Mais recentemente, outros autores apresentaram a solução desta equação em diferentes geometrias e

multidimensões, como, por exemplo, GONÇALVES (2003), FILHO (2012), TOMAS-CHEWSKI (2016), LAZZARI (2016).

A solução da equação de transporte é um desafio para ser resolvida, principalmente pelo fato de ser uma equação íntegro-diferencial e, em problemas realísticos, o caráter multirregião e multigrupo de energia. Para isto é feita uma aproximação do modelo de transporte para o modelo da difusão de nêutrons, utilizando-se a Lei de Fick (DUDERSTADT; HAMILTON (1976)). Embora as condições exigidas para a validade da teoria da difusão sejam raramente satisfeitas na prática de problemas de reatores nucleares, o uso deste modelo usualmente resulta em uma boa aproximação para a solução exata da equação de transporte.

Ao longo dos anos, uma grande variedade de métodos foram desenvolvidos para resolver a Equação de Difusão de Nêutrons. Esses métodos (analíticos, numéricos e híbridos) para problemas multidimensionais foram bastante úteis devido a possibilidade de recuperar informações sobre as características físicas do sistema e realizar estudos paramétricos extensos.

Com relação aos híbridos e analíticos destacam-se: método que utiliza a Técnica da Transformada de Laplace (TTL), LEMOS (2005) aplica está técnica para o caso unidimensional multirregião com dois grupos de energia. A metodologia utilizada é a aplicação da TTL separadamente em cada uma das regiões homogêneas e, em seguida, inverte-se o fluxo transformado analiticamente pela da técnica da expansão de Heaviside. Por fim, acoplam-se as regiões através de um sistema algébrico provindo da aplicação das condições de contorno e de continuidade do fluxo nas interfaces. Para completar a resolução analítica, calcula-se o valor do fator de multiplicação efetivo K_{eff} pelo método da bissecção. Já para o caso bidimensional HEINEN (2009) e BODMANN et al. (2010) apresentam um método que combina da TTL com Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT sigla inglesa de Generalised Integral Transform Technique), em que a ordem da aplicação das transformadas depende das características do problema proposto. Em geral, aplica-se primeiro a GITT em uma das variáveis espaciais, que consiste na expansão do fluxo escalar de nêutrons em uma base de autovalores e autovetores determinados a partir de um problema de Sturm-Liouville associado ao problema a ser resolvido. Após expandir o fluxo, o problema deve ser integrado em todo domínio nesta mesma variável espacial fazendo o uso de sua propriedade de ortogonalidade, obtendo assim um problema transformado. Em seguida, aplica-se a TTL no problema transformado, onde é obtida sua solução. Por fim, ao utilizar a fórmula da inversa da GITT obtendo a solução do problema original. Porém, todos estes procedimentos algébricos-analíticos demandam um enorme custo computacional, tornando a resolução um pouco lenta.

Ainda dentro dos métodos híbridos e analíticos estão PETERSEN et al. (2010) que utilizaram a técnica de diagonalização de matrizes e um K_{eff} prescrito. Estes iniciam

reescrevendo a equação de difusão de nêutrons na forma matricial, assim a matriz que contém os parâmetros nucleares possui os autovalores distintos. Deste modo, esta matriz é decomposta na matriz dos seus autovetores multiplicada pela matriz diagonal dos seus autovalores e pela matriz inversa dos seus autovetores. Com esta técnica, a equação matricial é desacoplada em um sistema de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem, em relação a cada grupo de energia, por fim é calculado o novo K_{eff} . Recentemente, CEOLIN (2014) e SCHRAMM (2016) resolveram a equação de difusão de nêutrons expandindo o fluxo escalar de nêutrons em uma série de Taylor. Primeiramente, o domínio é dividido em pequenas regiões homogêneas, para que a série de Taylor possa ser truncada com baixo número de termos. Em seguida, em cada uma destas pequenas regiões o fluxo de nêutrons é expandido em uma série e, por fim, com o uso das condições de contorno e interface (continuidade do fluxo e de densidade de corrente), os coeficientes das séries são encontrados e, ao mesmo tempo, une as regiões. Para calcular o autovalor K_{eff} utilizam o método da potência.

Entre os métodos numéricos destacam-se: CAVDAR; OZGENER (2004), OLI-VEIRA (1980), MAIANI; MONTAGNINI (1999), HOSSEINI; VOSOUGHI (2013), RO-KROK; MINUCHEHR; ZOLFAGHARI (2012), SILVA; MARTINEZ; GONÇALVES (2012) e VOSOUGHI; SALEHI; SHAHRIARI (2004). O método apresentado por CAVDAR; OZGENER (2004) utiliza uma mescla do Método dos Elementos Finitos (MEF) e do Método de Elementos de Contorno (MEC), aplicando o MEF nas regiões de combustível e o MEC nas regiões de refletor. Esta aplicação se deve, segundo os autores, por duas razões: o MEF provou-se muito eficiente nas regiões onde possuem fontes de nêutrons e o MEC é muito eficiente nas regiões refletoras, onde não há fontes de fissão de nêutrons. Entretanto, cada um destes métodos geram mais incógnitas que equações, deste modo, são utilizadas as condições de contorno reflexiva, de *vacuum* e condições continuidade nas interfaces, tornando este sistema possível de ser resolvido.

Outro método numérico é o Método de Matrizes Respostas (MMR), OLIVEIRA (1980), na qual cada região do reator é vista como uma "caixa preta", importando-se apenas com o que ocorre nas interfaces. Deste modo, o reator completo é como um conjunto de caixas, na qual cada uma tem seus respectivos parâmetros nucleares. A relação do que entra e do que sai de cada uma destas caixas formam as matrizes de transmissão e reflexão. Assim, ao acoplar todas as soluções de cada região obtêm-se as equações do fluxo. Posteriormente, MAIANI; MONTAGNINI (1999) acoplaram o MMR com o MEC, de forma natural visto que ambos métodos trabalham com o contorno de cada região. Este acoplamento se dá em dois passos, primeiro através do MEC são obtidos os elementos das matrizes respostas para cada uma das regiões do domínio. Em seguida, com os elementos das várias regiões já encontradas, com o MMR é encontrada a solução global de todo o sistema. Recentemente,

HOSSEINI; VOSOUGHI (2013) apresentaram o MEF Galerkin¹ (MEFG), em que consiste na discretização espacial das equações utilizando elementos triangulares não estruturados. Uma das principais vantagens da utilização destes elementos é a sua superioridade no mapeamento das fronteiras curvas ou interfaces materiais. Os testes mostraram a necessidade de triângulos menores em locais próximos às barras de controle e no limite entre o refletor e o núcleo para uma maior precisão e rapidez nos cálculos. ROKROK; MINUCHEHR; ZOLFAGHARI (2012) desenvolveram um método nodal, *Element-free* Galerkin (EFG), na qual a novidade está no livre refinamento da distribuição de nós, fato de grande valia nas regiões onde os gradientes de fluxo são grandes. Também adotando um método nodal, SILVA; MARTINEZ; GONÇALVES (2012) utilizaram uma malha grossa para obter o fluxo de nêutrons e em seguida, a fim de poder descrever o fluxo de nêutrons em qualquer ponto do núcleo do reator, o fluxo é reconstruido empregando a solução analítica da equação de Helmholtz.

Ainda numericamente, VOSOUGHI; SALEHI; SHAHRIARI (2004) construíram a equação de difusão de nêutrons na forma discreta evitando as derivadas de segunda ordem para o fluxo de nêutrons. A formulação discreta trabalha com variáveis globais associadas com as estruturas finitas de espaço (volume, superfície, linhas e pontos). Na discretização, o fluxo de nêutrons é uma variável de orientação interna, enquanto a população e densidade da corrente de nêutrons é associada com o volume e a superfície de orientação externa. Aplicando o método, as regiões do núcleo do reator são divididas em células menores, onde se dá a vinculação interna ou externa. Com essas células é construída a equação de equilíbrio entre a taxa líquida de produção de nêutrons (fissão-absorção) no interior da célula e a taxa líquida de fuga de nêutrons que saem dos limites célula.

HAN; DULLA; RAVETTO (2009) trazem uma abordagem dos métodos de Diferenças Finitas, Nodal e Elementos de Contorno verificando o desempenho destas abordagens numéricas pela comparação com resultados *benchmark*. Os autores utilizaram problemas bidimensionais estacionários da difusão de nêutrons. Nestes testes, o método nodal e o método elementos de contorno apresentaram um melhor desempenho e convergência. No caso do método de diferenças finitas foi necessário uma malha muito fina para obter resultados próximos com os da referência.

Com o referencial apresentado percebe-se que muitos métodos já foram implementados para resolver a Equação de Difusão de Nêutrons Multigrupo Multirregião (EDNMM) estacionária, todavia o dilema entre precisão e rapidez ainda pode ser explorado. Neste contexto, no presente trabalho propõe-se resolver a EDNMM estacionária em geometria cartesiana por um método que possibilite predizer o fluxo

¹O método de Galerkin é um procedimento numérico para a determinação da solução aproximada de equações diferenciais parciais que pode ser aplicado para problemas de valor de contorno (REZENDE (2005)).

escalar de nêutrons e o K_{eff} com satisfatória precisão e rapidez. Para isto, utiliza-se o método da potência com a novidade que, a cada iteração, a equação de difusão de nêutrons seja resolvida de forma analítica, através do método dos coeficientes a determinar. A cada iteração do método da potência, o termo fonte é atualizado com a expressão do fluxo de nêutrons da iteração anterior. Assim, para que esta expressão mantenha sempre uma estrutura padrão, propõe-se que ela seja sempre reconstruída através de uma mesma interpolação polinomial. Com a finalidade de trabalhar com matrizes menores e melhor condicionadas no processo de interpolação, gerando um ganho computacional, o domínio é subdividido em fronteiras fictícias, porém respeitando a homogeneidade de cada região. Desta modo, as equações de difusão de nêutrons são resolvidas localmente nas regiões fictícias e unidas com a aplicação das condições de contorno, continuidade de fluxo e densidade de corrente nas interfaces, garantindo que o fluxo seja continuo e sem saltos nas interfaces.

Sendo assim, a metodologia proposta em que utiliza o Método da Potência via Fronteiras Fictícias (MPFF) é primeiramente aplicada em problemas unidimensionais, mais simples, com a finalidade de realizar testes avaliando seu desempenho. Posteriormente é aplicado em problemas bidimensionais onde se faz necessário o uso de uma transformada integral para recair em um problema unidimensional em que a resolução já será conhecida.

A presente dissertação encontra-se estruturada da seguinte forma: no capítulo 2, apresenta-se a construção do modelo físico-matemático de difusão de nêutrons. No capítulo 3, desenvolve-se uma metodologia para a resolução do problema unidimensional. Em seguida, aplica-se o MPFF em casos testes para a comparação dos resultados com trabalhos presentes na literatura e realiza-se uma análise de sensibilidade da solução ao inserir uma perturbação nos parâmetros nucleares. No capítulo 4, apresenta-se uma proposta de resolução do problema bidimensional e, com o intuito de verificar a metodologia, resolvem-se alguns casos testes. Por fim, no capítulo 5 encontram-se as conclusões e as perspectivas de trabalhos futuros.

2 FORMULAÇÃO DO MODELO FÍSICO-MATEMÁTICO DE EQUAÇÃO DA DIFUSÃO DE NÊUTRONS

A equação que melhor descreve o comportamento da população de nêutrons é a equação de transporte de partículas desenvolvida por Ludwig Boltzmann¹. A equação do transporte de Boltzmann representa um balanço matemático da produção e perda física de partículas em um espaço de fase. O resultado, em sua generalidade, é uma equação íntegro-diferencial com sete variáveis independentes, isto é, três variáveis espaciais, uma variável energética, duas variáveis direcionais e uma variável temporal. Em geral, devido à complexidade do tratamento da equação do transporte de Boltzmann e alto tempo computacional para resolvê-la, utilizam-se algumas aproximações e simplificações.

Uma aproximação da equação do transporte de nêutrons muito útil em análises neutrônicas é a equação de difusão de nêutrons. A equação da difusão é computacionalmente menos custosa para ser resolvida do que a equação de transporte, pois é feita uma aproximação linear na dependência angular, assim eliminando a caráter integral da equação de transporte. Além disso, a teoria da difusão reduz o número máximo de variáveis independentes de sete para cinco, isto é, três variáveis espaciais, uma variável energética e uma variável temporal. Matematicamente, a aproximação da difusão gera restrições severas na dependência angular da densidade de nêutrons. Fisicamente, essas restrições traduzem duas exigências fundamentais (STACEY (2001)):

- i) o processo de migração dos nêutrons tem que ser dominado por interações de espalhamento, isto é, o meio material tem que ser fracamente absorvedor de nêutrons;
- ii) o processo de migração dos nêutrons tem que ocorrer longe de descontinuidades de materiais, onde esperam-se pequenos gradientes no fluxo de nêutrons.

Na prática, a teoria da difusão tem sido exaustivamente aplicada em análise de reatores nucleares e, em geral, considerada satisfatória. Algumas correções baseadas na

¹Ludwig Eduard Boltzmann (1844 - 1906), físico austríaco, é reconhecido como o primeiro a aplicar teoria atômica (probabilística) no estudo da termodinâmica e da teoria cinética dos gases.

teoria da transporte, como por exemplo, a teoria da homogeneização² são feitas na preparação dos dados da seção de choque (STACEY (2001)). Essas correções são responsáveis pelo sucesso da teoria da difusão em cálculos neutrônicos globais em física de reatores. No entanto, existem alguns casos na qual a teoria da difusão não se aplica, porque grandes gradientes estão presentes. Como por exemplo, o ligamento e desligamento dos reatores nucleares; os locais onde são inseridas as barras de controle; em cálculos de blindagem; próximo das fontes de nêutrons e dos contornos, etc (DUDERSTADT; HAMILTON (1976),LAMARSH (1966)). Nesses casos, as interações entre nêutrons e núcleo-alvo são altamente absorvedoras e há grandes variações da população de nêutrons, e portanto, a teoria da difusão não pode ser aplicada com confiabilidade. Ademais, a migração de nêutrons no interior de blindagens tende a ser fortemente anisotrópica e a equação da difusão aproxima esta situação muito pobremente.

2.1 Equação de Difusão de Nêutrons

Se for considerado um volume arbitrário V não reentrante, Figura 1, com nêutrons monoenergéticos, com o passar do tempo, alguns desses nêutrons podem sofrer algum tipo de interação ou até escapam do meio.

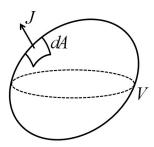


Figura 1: Volume arbitrário V com área de superfície A.

Caso este sistema possua uma fonte ela fornece nêutrons adicionais ao problema em questão. A taxa de mudança temporal do número de nêutrons no volume V deve ser igual à taxa com que os nêutrons são produzidos, menos a taxa que os nêutrons são absorvidos e que escapam de V. Este balanço pode ser escrito como:

$$\frac{d}{dt} \int_{V} n(\vec{u}, t) dV = \begin{bmatrix} \text{Taxa de} \\ \text{produção} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \text{Taxa de} \\ \text{absorção} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \text{Taxa de} \\ \text{fuga} \end{bmatrix}, \tag{1}$$

onde $n(\vec{u}, t)$ é a densidade de nêutrons no ponto \vec{u} no tempo t, $[cm^{-3}]$.

²A teoria de homogeneização nos cálculos de física de reatores consiste em métodos que substitua uma estrutura heterogênea, materiais de propriedades diferentes, em uma mistura homogênea equivalente destes materiais.

Ao considerar que todos os nêutrons presentes no volume V são monoenergéticos, que possuem a mesma energia cinética, quer dizer que todos eles possuem a mesma velocidade escalar v dada em $[cm\ s^{-1}]$. Assim, ao multiplicar a densidade de nêutrons no ponto \vec{u} pela velocidade dos nêutrons, obtém-se o fluxo escalar de nêutrons, $\phi(\vec{u},t)$, no ponto \vec{u} no tempo t, dado da seguinte forma:

$$\phi(\vec{u}, t) = n(\vec{u}, t)v,\tag{2}$$

onde $\phi(\vec{u},t)$ é dado em $[cm^{-2}s^{-1}]$.

Os nêutrons produzidos podem ser representados por uma fonte $S(\vec{u},t)$ em um determinado ponto \vec{u} e tempo t. Com isso, a taxa de produção é dada por:

Taxa de Produção
$$=\int_V S(\vec{u},t)dV.$$
 (3)

Antes de descrever a taxa de absorção é necessário definir o conceito de seção de choque, que é um dos principais conceitos físicos utilizados em cálculos de física de reatores. A seção de choque é uma medida probabilística da ocorrência de interação entre os nêutrons e os núcleos-alvos. A área alvo que cada núcleo oferece para a ocorrência da interação nêutron-núcleo é chamada de seção de choque microscópica, $[cm^2]$. Ao multiplicá-la pelo número de núcleos por unidade de volume presentes em V, obtém-se a seção de choque macroscópica Σ dada em $[cm^{-1}]$ (LAMARSH (1966);STACEY (2001)).

Deste modo, a taxa de absorção pode ser escrita em termos do fluxo escalar de nêutrons e da seção de choque de absorção em um dado volume, dada por:

Taxa de Absorção
$$=\int_{V}\Sigma_{a}(\vec{u})\phi(\vec{u},t)dV,$$
 (4)

onde $\Sigma_a(\vec{u})$ é a seção de choque macroscópica de absorção.

Os nêutrons que escapam do sistema podem ser expressos em termos do vetor densidade de corrente de nêutrons $\vec{J}(\vec{u},t)$, em que a taxa líquida de nêutrons que cruzam um diferencial de área dA é dada por $\vec{J}(\vec{u},t) \cdot \vec{n} \, dA$, onde \vec{n} é um vetor unitário normal apontando para fora do volume V. Assim, a taxa líquida total de fuga pelo contorno do volume V é dado por

Taxa de Fuga =
$$\oint_A \vec{J}(\vec{u}, t) \cdot \vec{n} \, dA$$
. (5)

Desta forma tem-se:

$$\int_{V} \frac{1}{v} \frac{\partial \phi(\vec{u}, t)}{\partial t} dV = \int_{V} S(\vec{u}, t) dV - \int_{V} \Sigma_{a}(\vec{u}) \phi(\vec{u}, t) dV - \oint_{A} \vec{J}(\vec{u}, t) \cdot \vec{n} \, dA. \tag{6}$$

Para o prosseguimento da formulação, é conveniente converter a expressão da taxa de fuga em uma integral de volume. Para isto, utiliza-se o Teorema de Gauss (EDWARDS; PENNEY (2002)):

$$\oint_{A} \vec{J}(\vec{u}, t) \cdot \vec{n} \, dA = \int_{V} \nabla \cdot \vec{J}(\vec{u}, t) dV. \tag{7}$$

Assim, tem-se:

$$\int_{V} \left[\frac{1}{v} \frac{\partial \phi(\vec{u}, t)}{\partial t} - S(\vec{u}, t) + \Sigma_{a}(\vec{u})\phi(\vec{u}, t) + \nabla \cdot \vec{J}(\vec{u}, t) \right] dV = 0.$$
 (8)

Deste modo, a equação (6) resulta na seguinte equação:

$$\frac{1}{v}\frac{\partial\phi(\vec{u},t)}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J}(\vec{u},t) + \Sigma_a(\vec{u})\phi(\vec{u},t) = S(\vec{u},t). \tag{9}$$

Na equação (9) tem-se uma grandeza vetorial, a densidade de corrente, $\vec{J}(\vec{u},t)$, e uma grandeza escalar, o fluxo escalar de nêutrons, $\phi(\vec{u},t)$. Assim, necessita-se uma expressão que permita relacionar estas duas grandezas, para que a equação seja escrita com apenas uma incógnita. Recorre-se à Lei de Fick, originária da química, que descreve a difusão química de um soluto. Esta lei expressa que a concentração de um soluto difunde da região de maior concentração para a de menor concentração, e afirma que a taxa de fluxo é proporcional ao negativo do gradiente da concentração do soluto (LAMARSH (1966)).

A difusividade da densidade de nêutrons é semelhante à do soluto, em que ocorre da região de maior densidade para a de menor. Cabe ressaltar, este comportamento dos nêutrons não é pelo simples fato de se deslocarem de uma região de maior concentração para uma de menor concentração, mas pelo fato que em média os nêutrons migram da região de maior concentração para a de menor. Desta forma tem-se:

$$\vec{J}(\vec{u},t) = -D(\vec{u})\nabla\phi(\vec{u},t),\tag{10}$$

onde $D(\vec{u})$ é o coeficiente de difusão, fornecendo assim, uma relação entre fluxo e corrente. Sendo que o coeficiente de difusão é encontrado através do livre caminho médio de transporte, $\lambda_{tr}(\vec{u})$, dados em [cm]:

$$D(\vec{u}) = \frac{\lambda_{tr}(\vec{u})}{3},\tag{11}$$

onde o livre caminho médio é a distância média percorrida por um nêutron até acontecer uma reação, na qual é o inverso da seção de choque macroscópica de transporte, Σ_{tr} , dados em $[cm^{-1}]$:

$$\lambda_{tr}(\vec{u}) = \frac{1}{\Sigma_{tr}(\vec{u})} = \frac{1}{\Sigma_{t}(\vec{u}) - \bar{\mu}\Sigma_{s}(\vec{u})}.$$
(12)

Aqui Σ_t é a seção de choque macroscópica de total, $[cm^{-1}]$, $\bar{\mu}$ é o cosseno do ângulo médio de espalhamento e Σ_s é a seção de choque macroscópica de espalhamento, $[cm^{-1}]$.

Na difusão usual, a variância do livre caminho médio está relacionado à dependência linear do tempo, $(\triangle u(t))^2 \propto t$, na qual aplica-se satisfatoriamente a lei de Fick. Mas devido as aproximações dessa lei assumem-se algumas restrições, tais como: meio infinito e meio homogêneo, na qual todas as seções de choques são constantes e independentes da posição. Ademais, é preciso que não exista uma fonte de nêutrons no meio. Além disso, o espalhamento deve ser isotrópico (no máximo linearmente anisotrópico (DUDERSTADT; HAMILTON (1976))) e o fluxo de nêutrons necessita variar lentamente em função da posição. Mesmo sem cumprir estas restrições da Lei de Fick, ainda assim ao utilizá-la obtêm-se bons resultados (LAMARSH (1966)).

Nestas restrições o processo de difusão não segue a lei de Fick, pois pode ocorrer uma difusão anômala. De um modo geral, na difusão anômala, a variância do livre caminho médio está relacionado ao crescimento não-linear do tempo, $\left(\Delta u(t)\right)^2 \propto t^\eta$. Quando tem-se: $\eta < 1$, chama-se de um processo subdifusivo, $\eta = 1$, chama-se de um processo difusivo normal, $\eta > 1$, chama-se de um processo superdifusivo (PE-DRON; MENDES (2005)). Alguns estudos já estão sendo feitos para descrever este aspecto da difusão anômala, na qual descrevem o termo difusivo através de derivadas fracionárias (SCHRAMM et al. (2013)).

Neste trabalho adota-se o processo de difusão usual, assim a equação (9) resulta em

$$\frac{1}{v}\frac{\partial\phi(\vec{u},t)}{\partial t} - \nabla \cdot D(\vec{u})\nabla\phi(\vec{u},t) + \Sigma_a(\vec{u})\phi(\vec{u},t) = S(\vec{u},t), \tag{13}$$

esta é a equação da difusão de nêutrons monoenergética.

2.1.1 Teoria multigrupo para a Equação de Difusão de Nêutrons

A equação de difusão de nêutrons monoenergética apresenta limitação ao considerar que todos os nêutrons envolvidos na difusão possuem a mesma energia cinética. Na realidade, os nêutrons presentes em um reator nuclear possuem uma grande variação de energia. Há ínfima quantidade de nêutrons com energia inferior a 0,001eV, por isto assume-se uma faixa de variação de 0,001eV até 10MeV de energia (LEWIS (2008)). O espectro de energia é considerado uma variável contínua, mas em física de reatores assume-se a energia como uma variável discreta, na qual seu domínio é dividido em G intervalos de energia, conforme esquema abaixo:

$$E_1 > E_2 > \dots > E_{G-1} > E_G$$

onde cada um destes intervalos são chamados de grupos de energia, por este fato chama-se de um problema multigrupo.

Ao se deslocarem, estes nêutrons podem colidir com os núcleos atômicos presentes no reator, e ao colidir ou eles são absorvidos pelo núcleo ou são espalhados. No caso de serem espalhados, a colisão com o núcleo foi elástica, ou seja, não houve troca de energia, ou foi inelástico, ocorrendo troca de energia. Em geral ao espalharem, os nêutrons perdem energia e assim são removidos para o grupo de menor energia.

O parâmetro que descreve a medida probabilística de um nêutron espalhar de um grupo g' para outro g é chamada de seção de choque macroscópica de espalhamento $\Sigma_{sg'g}(\vec{u})$. Desta forma, para cada grupo de energia há a possibilidade de ganhar ou perder nêutrons devido ao espalhamento. Os grupos em que há ganhos de nêutrons por espalhamento são representado por:

Ganhos por espalhamento =
$$\sum_{\substack{g'=1\\g'\neq g}}^G \Sigma_{sg'g}(\vec{u})\phi_{g'}(\vec{u},t), \tag{14}$$

e os grupos em que há perdas de nêutrons por espalhamento são representado por

Perdas por espalhamento =
$$\sum_{\substack{g'=1\\g'\neq g}}^G \Sigma_{sgg'}(\vec{u})\phi_{g'}(\vec{u},t). \tag{15}$$

Note que o termo $\Sigma_{sgg}(\vec{u})$ que representa o espalhamento intragrupo não está nem em ganhos nem em perdas, pois a perda por espalhamento é insuficiente para que troque de grupo de energia.

Desta forma, a remoção dos nêutrons do grupo g é dada pela soma dos nêutrons absorvidos e pelos nêutrons espalhados para fora do grupo g. Assim, obtém-se a seção de choque macroscópica de remoção do grupo g dada por:

$$\Sigma_{Rg}(\vec{u}) = \sum_{\substack{g'=1\\g'\neq g}}^{G} \Sigma_{sgg'}(\vec{u}) + \Sigma_{ag}(\vec{u}).$$
(16)

Define-se também o termo de fonte no grupo g como $S_g(\vec{u},t)$, combinando estas definições e com a consideração que os valores dos parâmetros nucleares são constantes, ou seja, o volume é considerado um material homogêneo. Assim, pode-se desconsiderar a dependência espacial dos mesmos. Desta forma tem-se:

$$\frac{1}{v_g} \frac{\partial \phi_g(\vec{u}, t)}{\partial t} - D_g \nabla^2 \phi_g(\vec{u}, t) + \Sigma_{Rg} \phi_g(\vec{u}, t) = S_g(\vec{u}, t) + \sum_{\substack{g'=1\\g' \neq g}}^G \Sigma_{sg'g} \phi_{g'}(\vec{u}, t). \tag{17}$$

No interior de um reator nuclear pode existir duas formas de produção de nêutrons, uma delas em função das fissões e outra pela emissão da fonte externa, desta maneira o termo fonte pode ser expresso pela soma de dois novos termos:

$$S_g(\vec{u}, t) = \chi_g \sum_{g'=1}^G \nu_{g'} \Sigma_{fg'} \phi_{g'}(\vec{u}, t) + S_g^{ext}(\vec{u}, t),$$
(18)

onde χ_g é a probabilidade do nêutron gerado em uma fissão esteja com energia no grupo g, Σ_{fg} é a seção de choque macroscópica de fissão do grupo g, ν_g é o número médio de nêutrons produzidos por fissão no grupo g e S_g^{ext} é a fonte externa que introduz nêutrons do grupo g no sistema. Substituindo a expressão (18) na equação (17) chega-se a Equação de Difusão de Nêutrons Multigrupo que é um sistema acoplado de equações, dadas por:

$$\frac{1}{v_g} \frac{\partial \phi_g(\vec{u}, t)}{\partial t} - D_g \nabla^2 \phi_g(\vec{u}, t) + \Sigma_{Rg} \phi_g(\vec{u}, t) =
\chi_g \sum_{g'=1}^G \nu_{g'} \Sigma_{fg'} \phi_{g'}(\vec{u}, t) + \sum_{\substack{g'=1\\g'\neq g}}^G \Sigma_{sg'g} \phi_{g'}(\vec{u}, t) + S_g^{ext}(\vec{u}, t).$$
(19)

Em física de reatores é muito utilizada a Equação de Difusão de Nêutrons Multigrupo no estado estacionário para prever o comportamento da população de nêutrons a partir da configuração das características geométricas e material do reator, entretanto, para cálculos realísticos é introduzido um autovalor K_{eff} que descreve a criticalidade do reator. Este problema de autovalor é criado pela característica intrínseca de não ter fonte externa e ter condições de contorno homogênea.

2.1.2 Problemas de autovalores

A Equação da Difusão de Nêutrons Multigrupo estacionária acrescida de um autovalor e sem uma fonte externa é dada da seguinte forma:

$$-D_{g}\nabla^{2}\phi_{g}(\vec{u}) + \Sigma_{Rg}\phi_{g}(\vec{u}) = \frac{1}{K_{eff}}\chi_{g}\sum_{g'=1}^{G}\nu_{g'}\Sigma_{fg'}\phi_{g'}(\vec{u}) + \sum_{\substack{g'=1\\g'\neq g}}^{G}\Sigma_{sg'g}\phi_{g'}(\vec{u}), \tag{20}$$

onde K_{eff} é o fator de multiplicação efetivo. A equação (20) é um problema de autovalores e autofunções associados, na qual apenas o autovalor dominante e sua autofunção correspondente são de interesse para os cálculos globais de reatores nucleares. Este autovalor dominante, K_{eff} , é o parâmetro que descreve a criticalidade do reator: caso a perda de nêutrons for maior do que a produção têm-se um reator subcrítico ($K_{eff} < 1$), caso houve um balanço perfeito entre perdas e produção têm-se um reator crítico ($K_{eff} = 1$) e caso a produção for maior que as perdas o reator será supercrítico($K_{eff} > 1$).

Outro aspecto de fundamental importância nos cálculos é que os núcleos dos reatores são formados por diversas regiões, como por exemplo, as regiões combustíveis e as regiões refletoras, melhor descritas e ilustradas no Apêndice A. Assim, cada uma destas regiões podem possuir parâmetros distintos, tornando-se um modelo multir-região dada por:

$$-D_g^{(r)} \nabla^2 \phi_g^{(r)}(\vec{u}) + \Sigma_{Rg}^{(r)} \phi_g^{(r)}(\vec{u}) = \frac{1}{K_{eff}} \chi_g \sum_{g'=1}^G \nu_{g'} \Sigma_{fg'}^{(r)} \phi_{g'}^{(r)}(\vec{u}) + \sum_{\substack{g'=1\\g' \neq g}}^G \Sigma_{sg'g}^{(r)} \phi_{g'}^{(r)}(\vec{u}), \tag{21}$$

onde r são as regiões, na qual o material é considerado homogêneo.

3 SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE DIFUSÃO DE NÊUTRONS MULTIGRUPO MULTIRREGIÃO ESTACIONÁRIA UNIDIMENSIONAL EM GEOMETRIA CARTESIANA

Neste capítulo, apresenta-se a solução da EDNMM estacionária unidimensional em geometria cartesiana pelo Método da Potência via Fronteiras Fictícias (MPFF). São realizados casos testes, comparando-os com resultados presentes na literatura. No final do capítulo é realizado uma análise perturbativa, na qual deseja-se perceber a interferência de cada parâmetro nuclear no comportamento da solução do problema.

3.1 Metodologia para o caso unidimensional

Sem perda de generalidade da Equação (21), a EDNMM estacionária unidimensional em geometria cartesiana sem fonte externa, que fornece um balanço entre perdas e ganhos de nêutrons, dada por:

$$-D_g^{(r)}\frac{d^2}{dx^2}\phi_g^{(r)}(x) + \Sigma_{Rg}^{(r)}\phi_g^{(r)}(x) = \frac{1}{K_{eff}}\chi_g \sum_{g'=1}^G \nu_{g'}\Sigma_{fg'}^{(r)}\phi_{g'}^{(r)}(x) + \sum_{\substack{g'=1\\g'\neq g}}^G \Sigma_{sg'g}^{(r)}\phi_{g'}^{(r)}(x), \qquad (22)$$

onde $0 \le x \le L$, na qual:

L é o comprimento do meio;

r indica as regiões;

q são os grupos de energia, em que q=1:G;

 $D_q^{(r)}$ é o coeficiente de difusão do grupo g na região r;

 $\phi_g^{(r)}(x)$ é o fluxo de nêutrons do grupo g na região r;

 $\Sigma_{Ra}^{(r)}$ é a seção de choque macroscópica de remoção do grupo g na região r;

 K_{eff} é o fator de multiplicação efetivo;

 χ_g é o espectro integrado de fissão do grupo g;

 $\nu_{g'}$ é o número médio de nêutrons liberado por fissão do grupo g';

 $\Sigma_{fg}^{(r)}$ é a seção de choque macroscópica de fissão do grupo g na região r;

 $\Sigma_{sg'g}^{(r)}$ é a seção de choque macroscópica de espalhamento do grupo g' para o g na região r.

Nota-se que o lado esquerdo da equação (22) representa as perdas de nêutrons por fuga e remoção e o lado direito os ganhos por fissão e espalhamento. A equação (22) pode ser reescrita na forma matricial, na qual assume-se $\mathbf{M} = \mathbf{M^{(r)}}, \ \vec{\varphi} = \vec{\varphi}^{(r)}$ e $\mathbf{F} = \mathbf{F^{(r)}}$, dada por:

$$\mathbf{M}\vec{\varphi}(x) = \frac{1}{K_{eff}} \mathbf{F}\vec{\varphi}(x), \tag{23}$$

na qual a matriz M é dada da seguinte forma:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} -D_{1}^{(r)} \frac{d^{2}}{dx^{2}} + \sum_{R1}^{(r)} & -\sum_{s21}^{(r)} & \cdots & -\sum_{sG1}^{(r)} \\ -\sum_{s12}^{(r)} & -D_{2}^{(r)} \frac{d^{2}}{dx^{2}} + \sum_{R2}^{(r)} & \cdots & -\sum_{sG2}^{(r)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\sum_{s1G}^{(r)} & -\sum_{s2G}^{(r)} & \cdots & -D_{G}^{(r)} \frac{d^{2}}{dx^{2}} + \sum_{RG}^{(r)} \end{bmatrix}_{G \times G},$$
(24)

o vetor coluna $\vec{\varphi}(x)$:

$$\vec{\varphi}(x) = \begin{bmatrix} \phi_1^{(r)}(x) \\ \phi_2^{(r)}(x) \\ \vdots \\ \phi_G^{(r)}(x) \end{bmatrix}_{G \times 1}$$
 (25)

e a matriz F:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \chi_{1}\nu_{1} \sum_{f1}^{(r)} & \chi_{1}\nu_{2} \sum_{f2}^{(r)} & \cdots & \chi_{1}\nu_{G} \sum_{fG}^{(r)} \\ \chi_{2}\nu_{1} \sum_{f1}^{(r)} & \chi_{2}\nu_{2} \sum_{f2}^{(r)} & \cdots & \chi_{2}\nu_{G} \sum_{fG}^{(r)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \chi_{G}\nu_{1} \sum_{f1}^{(r)} & \chi_{G}\nu_{2} \sum_{f2}^{(r)} & \cdots & \chi_{G}\nu_{G} \sum_{fG}^{(r)} \end{bmatrix}_{G \times G},$$
(26)

sendo $S = \mathbf{F}\vec{\varphi}(x)$.

A equação descrita em (23) está sujeita as condições de contorno dada por:

$$\alpha_g \phi_g(x) + \beta_g \frac{d\phi_g(x)}{dx} = 0, \tag{27}$$

onde $g=1:G, \alpha$ e β são constantes e $|\alpha|+|\beta|>0$. Com uma escolha adequada de α e β , estas condições de contorno abrangem as condições de Dirichlet, Neumann, Cauchy ou alguma combinação destas (DUDERSTADT; HAMILTON (1976)).

Na resolução do problema multirregião utilizam-se nas interfaces continuidade de fluxo e densidade de corrente dadas, respectivamente, por:

$$\phi_g^{(r)}(x) = \phi_g^{(r+1)}(x), \qquad -D_g^{(r)} \frac{d\phi_g^{(r)}(x)}{dx} = -D_g^{(r+1)} \frac{d\phi_g^{(r+1)}(x)}{dx}.$$
 (28)

Para resolver o problema de autovalor, K_{eff} , e autovetor , $\phi_g^{(r)}(x)$, dominantes em uma placa plana heterogênea, resolve-se a equação (23) aplicando o Método da Potência. Tal método iterativo de fonte é descrito por DUDERSTADT; HAMILTON (1976) da seguinte forma:

- 1. Entrada dos parâmetros nucleares e da geometria do problema;
- 2. Estimativa inicial para $\vec{\varphi}^{[1]}$ e $K_{eff}^{[1]}$;
- 3. Resolução da equação $\mathbf{M} \vec{arphi}^{[i+1]} = rac{1}{K_{eff}^{[i]}} \mathbf{S}^{[i]}, \, i \in \mathbb{N};$
- 4. Atualização do K_{eff} conforme

$$K_{eff}^{[i+1]} = K_{eff}^{[i]} \frac{\int_0^L \mathbf{S}^{[i+1]} dx}{\int_0^L \mathbf{S}^{[i]} dx};$$

5. Critério de parada dado por

$$\frac{|K_{eff}^{[i+1]} - K_{eff}^{[i]}|}{|K_{eff}^{[i+1]}|} < \epsilon_1, \frac{\left| \int_0^L \mathbf{S}^{[i+1]} - \mathbf{S}^{[i]} dx \right|}{\left| \int_0^L \mathbf{S}^{[i+1]} dx \right|} < \epsilon_2,$$

onde ϵ_1 e ϵ_2 são constantes arbitrárias prescritas.

6. Caso satisfaça os critérios de parada finaliza-se o processo, caso contrário retorna-se ao item 3.

Neste método deve-se resolver o sistema de equações dado em (23), caso sejam problemas sem *up-scattering*, resolve-se o sistema de cima para baixo, visto que a matriz \mathbf{M} é triangular inferior. Assim soluciona-se uma Equação Diferencial Ordinária (EDO) de 2^a ordem para cada grupo g, na qual o termo fonte \mathbf{S} é atualizado a cada nova iteração pelo fluxo de nêutrons da iteração anterior.

3.1.1 Método da potência via fronteiras fictícias (unidimensional)

Tradicionalmente, as equações diferenciais presentes no item 3 do método da potência são resolvidas numericamente, entretanto neste trabalho propõem-se que a resolução seja analítica. Desta forma, o termo fonte S é sempre alimentado pelas

expressões dos fluxos de nêutrons da iteração anterior, tornando a metodologia muito custosa tanto para o computador quanto para o programador, sobretudo para problemas multigrupo, multirregião e principalmente para mais de uma dimensão (onde a solução analítica aparece em forma de série). Como problemas multidimensionais são o objetivo final da metodologia, sem perda de generalidade já é considerada sua dificuldade intrínseca, portanto a expressão analítica no termo fonte S é descartada desde o começo para fins de implementação do MPFF. Assim busca-se encontrar um mecanismo que seja capaz de expressar o fluxo, a cada iteração, sempre na mesma forma padrão. Cabe ressaltar que mesmo que seja feita uma manipulação nas expressões dos fluxos contidos no termo fonte S, a resolução das equações diferenciais permanecem sendo de forma analítica.

A alternativa proposta para superar este problema é reconstruir a expressar do fluxo, a cada iteração, sempre na mesma forma padrão. Para isto, deve-se avaliar a expressar do fluxo em pontos igualmente espaçados (Δx) e em seguida deve-se interpolá-los em um polinômio de mesmo ordem m em todas iterações. Contudo, ao resolver problemas com grandes dimensões e várias regiões necessitam-se polinômios de alta ordem para descrever precisamente os pontos. Assim, no processo de interpolação, ($\mathbf{AX} = \mathbf{B}$), as matrizes envolvidas possuem grandes dimensões, tanto devido à ordem do polinômio quanto devido o número de pontos do domínio, conforme exemplo:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^m \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^m \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix} \quad e \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{bmatrix}. \tag{29}$$

A fim de reduzir a ordem do polinômio e as dimensões das matrizes envolvidas, para tornar o processo mais rápido do ponto de vista computacional, divide-se o domínio em \mathbb{R} sub-regiões (Figura 2). Estas sub-regiões não fazem parte do problema proposto, denominam-se regiões fictícias e ao se dividir o domínio deve-se assegurar que todas as fronteiras reais coincidam com as fictícias.

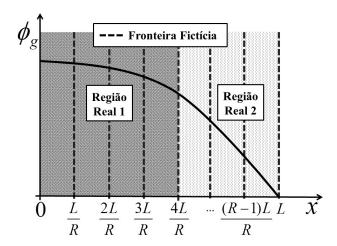


Figura 2: Representação de uma problema com duas regiões reais e *R* regiões fictícias.

O próximo passo é transladar as malhas de pontos igualmente espaçados, anteriormente avaliados, de cada região fictícia até a origem do sistema (Figura 3). No entanto, cada região fictícia permanece com os parâmetros nucleares da sua região de origem.

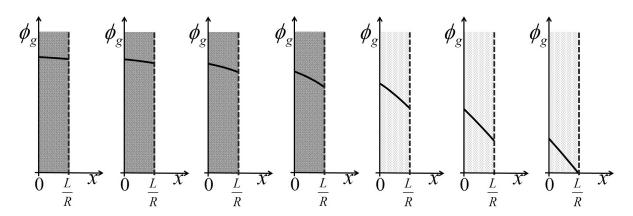


Figura 3: Regiões fictícias transladadas.

Por fim, realiza-se a interpolação dos pontos para cada uma das partes do fluxo e grupos de energia. Cabe ressaltar que a ordem máxima do polinômio depende da quantidade de pontos de cada intervalo. Caso haja n pontos a ordem máxima poderá ser de n-1.

No método de interpolação polinomial utilizou-se a decomposição QR. A escolha deste método é devido ao fato que o número de pontos no interior de cada sub-região altera-se conforme o intervalo Δx escolhido e da decomposição QR, pois no sistema linear $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$, a matriz \mathbf{A} na maioria das vezes, não é quadrada. Outro aspecto favorável é que a matriz \mathbf{R} é uma matriz triangular superior e melhor condicionada que a matriz \mathbf{A} , e \mathbf{Q} é uma matriz ortonormal (BURDEN; FAIRES (2008)). Resolvendo o sistema tem-se:

$$\mathbf{RX} = \mathbf{Q}^T \mathbf{B},\tag{30}$$

onde X é o vetor dos coeficientes do polinômio. Lembrando que este processo é realizado a cada nova iteração para o fluxo de nêutrons de cada grupo de energia, g, e cada região fictícia, R.

Construído um mecanismo para que o fluxo tenha sempre uma forma padrão, retorna-se ao problema original (23), resolvendo-o localmente. Como o problema resolvido é uma EDO de 2^a ordem, para cada sub-região surgem duas incógnitas, produzindo um total de 2R incógnitas para cada grupo de energia. Aplicando as condições de contorno, continuidade de fluxo e de densidade corrente nas interfaces dadas por (27), obtém-se um sistema linear acoplado de 2R incógnitas e 2R equações, para cada grupo de energia. Cabe ressaltar que a dimensão deste sistema linear independe da quantidade de grupos, pois cada um deles é resolvido separadamente. Resolvido o sistema, novamente via decomposição QR, obtém-se a nova expressão do fluxo para cada região fictícia e grupo de energia, dado por:

$$\psi_{Rq}(x) = c_{1R}e^{\sqrt{b}x} + c_{2R}e^{-\sqrt{b}x} + q_1 + q_2x + q_3x^2 + \dots + q_{m-1}x^m,$$
(31)

na qual $b = \frac{\sum_{R_g^{(r)}}^{(r)}}{D_g^{(r)}}$ e ψ_{Rg} é o novo fluxo para a região fictícia R e grupo de energia g, com q constantes arbitrárias conhecidas. Obtido o fluxo de nêutrons de cada região fictícia, deve-se novamente reestruturar a solução em um único fluxo, deslocando cada regiões fictícias para sua posição original.

Para finalizar o processo iterativo do método da potência, calcula-se o novo K_{eff} , na qual as integrais são resolvidas analiticamente. Após satisfazer o critério de parada do fluxo e do K_{eff} , calcula-se a potência gerada, \widehat{P} , pelo reator que é calculada da seguinte forma:

$$\widehat{P} = E \int_0^L \sum_{g=1}^G \Sigma_{fg}(x) \phi_g(x) dx,$$
(32)

onde E é quantidade de energia gerada por fissão.

Pode-se normalizar o fluxo escalar de nêutrons convergido pelo método da potência, multiplicando-o pela razão entre a potência prescrita e a potência gerada pelo reator da seguinte forma:

$$\phi_g^N(x) = \phi_g(x) \frac{P}{\widehat{P}},\tag{33}$$

onde P é a potência prescrita.

No Apêndice B apresenta-se um exemplo na qual a expressão do fluxo de nêutrons é encontrada utilizando a expressão analítica no termo fonte. Entretanto é realizado em um problema simples, composto por uma única região, um grupo de energia e

unidimensional.

3.2 Resultados para o caso unidimensional

Para a implementação computacional da metodologia proposta é utilizado o *software Scilab* em um computador pessoal com 16 GB de memória *Ram*, processador *Core i7* e sistema operacional *Windows*. Realizam-se 4 casos testes, em todos eles são considerados dois grupos de energia: rápido (g=1) e térmico (g=2), sem *upscattering* $(\Sigma_{s21}=0)$ e critérios de parada $\epsilon_1=\epsilon_2=10^{-10}$. Os resultados obtidos são comparados com trabalhos presentes na literatura. Para o Método da Potência via Fronteiras Fictícias (MPFF) utiliza-se interpolação polinomial de quarta ordem.

3.2.1 Caso Teste 1 (CT1)

A referência de SILVA; MARTINEZ; GONÇALVES (2012) é utilizada para comparação do K_{eff} . Para fins de comparação do tempo computacional a referência de CEOLIN et al. (2014) é implementada e executada utilizando-se o mesmo *software*, mesma configuração de máquina e critério de parada.

3.2.1.1 Dois grupos de energia e uma região (CT1-2G1R)

Para este caso teste tem-se: $-50 \le x \le 50$; condições de contorno de Dirichlet $\phi_g(-50) = 0$, $\phi_g(50) = 0$ e parâmetros nucleares conforme Tabela 1.

Tabela 1: Parâmetros nucleares do CT1-2G1R.

g	D_g	Σ_{Rg}	$\nu\Sigma_{fg}$	$\Sigma_{sg'g}$
1	1,4380	0,02935	0,000242	0,00000
2	0,3976	0,10490	0,155618	0,01563

Tabela 2: Autovalores dominantes (K_{eff}) para CT1-2G1R.

	SILVA; MARTINEZ; GONÇALVES (2012)	CEOLIN et al. (2014)	MPFF
K_{eff}	0,7586362	0,758630	0,7586314

Para fim de comparação do K_{eff} utiliza-se $\Delta \mathbf{x} = \mathbf{0}, \mathbf{5cm}$ para o MPFF. Pode-se observar uma precisão de 5 casas com a referência adotada, o que sugere uma excelente concordância para cálculos globais em física de reatores. Para obter a mesma precisão de 5 casas, o método implementado de CEOLIN et al. (2014) utiliza um $\Delta x = 1cm$. Os tempos computacionais para o Caso Teste 1 são: **MPFF** =

2,1s e CEOLIN et al. (2014) = 66,3s. Pode-se notar um ganho computacional de aproximadamente 31 vezes com relação a referência adotada para fins de comparação computacional.

O valor do fluxo de nêutrons (rápido, e térmico) obtidos são comparados pelo método utilizado por CEOLIN et al. (2014), na qual na Tabela 3 é representado pelo índice superior "ref" e é calculado o Desvio Relativo, $\frac{\mid \phi_g(x) - \phi_g^{ref}(x) \mid}{\mid \phi_g(x) \mid}.$

x	$\phi_1(x)$	$\phi_1^{ref}(x)$	Des. Relativo	$\phi_2(x)$	$\phi_2^{ref}(x)$	Des. Relativo
-50	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
-40	2,45878	2,45867	$4,47 \times 10^{-5}$	0,36499	0,36497	5,48 x 10^{-5}
-30	4,67688	4,67668	4,28 x 10 ⁻⁵	0,69425	0,69422	4,32 x 10 ⁻⁵
-20	6,43717	6,43690	4,19 x 10 ⁻⁵	0,95556	0,95552	4,19 x 10 ⁻⁵
-10	7,56735	7,56703	4,23 x 10 ⁻⁵	1,12332	1,12328	3,56 x 10^{-5}
0	7,95678	7,95644	4,27 x 10 ⁻⁵	1,18113	1,18108	4,23 x 10 ⁻⁵
10	7,56735	7,56703	4,23 x 10^{-5}	1,12332	1,12328	3,56 x 10^{-5}
20	6,43717	6,43690	4,19 x 10 ⁻⁵	0,95556	0,95552	4,19 x 10 ⁻⁵
30	4,67688	4,67668	4,28 x 10 ⁻⁵	0,69425	0,69422	4,32 x 10 ⁻⁵
40	2,45878	2,45867	$4,47 \times 10^{-5}$	0,36499	0,36497	5,48 x 10 ⁻⁵
50	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000

Tabela 3: Fluxo escalar de nêutrons para CT1-2G1R.

Como ilustração o fluxo escalar de nêutrons (rápido e térmico) podem ser observados na Figura 4. Percebe-se a satisfação das condições de contorno e um fluxo máximo no centro do domínio.

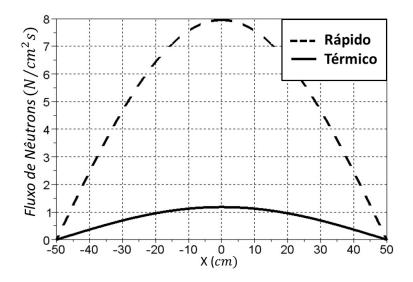


Figura 4: Gráfico do CT1-2G1R.

3.2.1.2 Dois grupos de energia e duas regiões (CT1-2G2R)

Para este caso teste tem-se: $0 \le x \le 50cm$, condições de contorno mista $\frac{d}{dx}\phi_g(0) = 0$ e $\phi_g(50) = 0$, interface real em x = 30cm, na qual a região 1 ($0 \le x \le 30cm$) corresponde à região combustível e a região 2 ($30cm \le x \le 50cm$) corresponde à região refletora, e parâmetros nucleares conforme Tabela 4.

Tabela 4: Parâmetros nucleares do CT1-2G2R.

Região	D_1	D_2	Σ_{R1}	Σ_{R2}	$\nu\Sigma_{f1}$	$\nu\Sigma_{f2}$	Σ_{s12}
1	1,43800	0,397600	0,029350	0,104900	0,000242	0,155618	0,01563
2	1,87142	0,283409	0,035411	0,031579	0,000000	0,000000	0,03434

Tabela 5: Autovalores dominantes (K_{eff}) para CT1-2G2R.

	SILVA; MARTINEZ; GONÇALVES (2012)	CEOLIN et al. (2014)	MPFF
K_{eff}	0,7346988	0,734476	0,734919

Aplicando os parâmetros e as condições indicadas, observa-se que a precisão neste caso teste é de 3 casas em comparação com a referência adotada. Cabe ressaltar que para o MPFF obter o resultado ótimo (tempo vs precisão) utiliza-se $\Delta x = 1 cm$. Para se obter os resultados deste teste, o método de CEOLIN et al. (2014) utiliza $\Delta x = 2 cm$. Os tempos computacionais são **MPFF = 1,8s** e CEOLIN et al. (2014) = 7,8s. Observa-se um ganho computacional de aproximadamente 4 vezes com relação a referência. Aqui, cabe ressaltar que os tempos computacionais são relativamente pequenos, em relação ao CT1-2G1R, devido ao tamanho do Δx . Este caso teste admite maiores valores de Δx , pois mesmo se for reduzido, permanece com a concordância de 3 casas com a referencia adotada. Assim, opta-se em permanecer com os resultados com melhor tempo computacional.

O valor do fluxo de nêutrons (rápido e térmico) obtidos são comparados com os obtidos pelo método utilizado por CEOLIN et al. (2014) na qual na Tabela 6 é representado pelo índice superior "ref" e é calculado o desvio relativo.

\overline{x}	$\phi_1(x)$	$\phi_1^{ref}(x)$	Des. Relativo	$\phi_2(x)$	$\phi_2^{ref}(x)$	Des. Relativo
0	6,14135	6,16161	3,30 x 10 ⁻³	0,90945	0,91241	3,25 x 10 ⁻³
10	5,64914	5,66422	2,67 x 10 ⁻³	0,83657	0,83876	2,62 x 10 ⁻³
20	4,25034	4,25144	2,59 x 10 ⁻⁴	0,63151	0,63136	2,36 x 10 ⁻⁴
30	1,94779	1,92850	9,90 x 10^{-3}	0,72640	0,72522	1,62 x 10^{-3}
40	0,46266	0,45718	1,18 x 10 ⁻²	0,54130	0,53706	7,83 x 10 ⁻³
50	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000

Tabela 6: Fluxo escalar de nêutrons para CT1-2G2R.

Como ilustração o fluxo escalar de nêutrons é apresentado na Figura 5. Percebese a satisfação das condições de contorno e um fluxo máximo na origem do domínio.

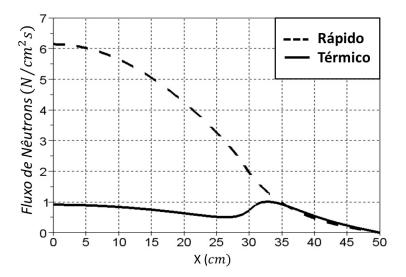


Figura 5: Gráfico do CT1-2G2R.

Na Figura 5 observa-se a satisfação das condições de contorno e um aumento do fluxo térmico no inicio da região refletora que é devido a contribuição dos nêutrons rápidos, que surgem na região combustível, e ao chocarem com átomos da região refletora espalham e se tornam térmicos.

3.2.2 Caso Teste 2 (CT2)

Para o segundo caso teste utiliza-se como referência LEMOS (2005), que apresenta resultados para um problema com dois grupos de energia e duas regiões (2G2R) com domínio $0 \le x \le 30cm$ e interface em x=10cm, na qual a região 1 ($0 \le x \le 10cm$) corresponde a região combustível e a região 2 ($10cm \le x \le 30cm$) corresponde a região refletora, e condição de contorno mista $\frac{d}{dx}\phi_g(0)=0$ e $\phi_g(30)=0$. Os parâmetros nucleares utilizados encontram-se na Tabela 7. A potência prescrita é de $P=10^{-6}W$ e a quantidade de energia gerada por fissão adotada é de $E=200MeV/{\rm fissão}$.

Tabela	7.	Parâmetros	nucleares	dο	CT2-2G2R
IUDCIU		i aramonos	Hudicalco	uu	012 20211.

Região	D_1	D_2	Σ_{R1}	Σ_{R2}	$\nu\Sigma_{f1}$	$\nu\Sigma_{f2}$	Σ_{s12}
1	1,6797	0,4754	0,02309	0,07886	0,005008	0,09713	0,01423
2	0,6702	0,1509	0,09013	0,03277	0,000000	0,00000	0,09084

Cabe salientar que LEMOS (2005) utilizou como critério de parada 10^{-2} , assim simulou-se um caso com mesmo critério e outro com um critério de parada mais fino, 10^{-10} , para possíveis comparações futuras.

Tabela 8: Autovalores dominantes (K_{eff}) para CT2-2G2R.

	LEMOS (2005)	$MPFF(10^{-2})$	$MPFF(10^{-10})$
K_{eff}	0,70139961	0,70166267	0,70069544

O valor do fluxo de nêutrons (rápido e térmico) normalizados pela potência obtidos com critério de parada 10^{-2} são comparados com os obtidos pelo método utilizado por LEMOS (2005) que são apresentados na Tabela 9 e representado pelo índice superior "ref".

Tabela 9: Fluxo escalar de nêutrons para CT2-2G2R.

\overline{x}	$\phi_1(x)$	$\phi_1^{ref}(x)$	Des. Relativo	$\phi_2(x)$	$\phi_2^{ref}(x)$	Des. Relativo
0	122402	121995	3,33 x 10^{-3}	22309,96	22265	2,02 x 10 ⁻³
5	113041	113055	1,21 x 10 ⁻³	23615,43	23618,6	1,34 x 10 ⁻⁴
10	78503,7	78614,9	1,42 x 10 ⁻³	45224,24	45292,5	1,51 x 10^{-3}
20	2004,33	2007,17	1,42 x 10 ⁻³	9611,38	9625,04	1,42 x 10 ⁻³
30	0	-7,45 x 10 ⁻⁹	-	0	1,19 x 10^{-7}	-

Como ilustração o fluxo escalar de nêutrons normalizado pela potência é apresentado na Figura 6 e percebe-se a satisfação das condições de contorno e um aumento do fluxo térmico no entorno da interface devido a contribuição do espalhamento.

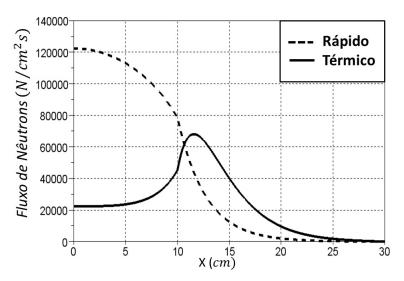


Figura 6: Gráfico do CT2-2G2R.

3.2.3 Caso Teste 3 (CT3)

O terceiro caso teste utiliza dois grupos de energia e três regiões (CT3-2G3R). Este teste é muito usado para a validação dos modelos, visto que na literatura são encontrados resultados *benchmark*. A geometria do problema consiste em um domínio com $0cm \le x \le 240cm$, interfaces reais em x = 40cm e x = 200cm, na qual a região 1 ($0 \le x \le 40cm$) e região 3 ($200cm \le x \le 240cm$) correspondem as regiões combustíveis e a região 2 ($40cm \le x \le 200cm$) corresponde à região refletora, o problema possui condições de contorno de Dirichlet $\phi_g(0) = 0$ e $\phi_g(240) = 0$ e parâmetros nucleares conforme Tabela 10.

Tabela 10: Parâmetros nucleares do CT3-2G3R.

Região	D_1	D_2	Σ_{R1}	Σ_{R2}	$\nu\Sigma_{f1}$	$\nu\Sigma_{f2}$	Σ_{s12}
1 e 3	1,5	0,5	0,026	0,18	0,010	0,200	0,015
2	1,0	0,5	0,020	0,08	0,005	0,099	0,010

A comparação dos resultados do K_{eff} e da potência por regiões é feita com o benchmark dado por POLLARD (1977) e com CEOLIN et al. (2014), como pode ser observado na Tabela 11.

	K_{eff}	1ª Região	2ª Região	3ª Região
POLLARD (1977)	0,90156	0,2790	0,4421	0,2790
CEOLIN et al. (2014)	0,90160	0,2789	0,4422	0,2789

0,2788

0,4423

0,2788

0,90159

MPFF

Tabela 11: Resultados do K_{eff} e da potência por regiões para CT3-2G3R.

Para o MPFF utiliza-se $\Delta x = 0,25 cm$ e para CEOLIN et al. (2014) $\Delta x = 1 cm$. Pode-se observar uma precisão de 4 casas com a referência adotada para fins de comparação, o que sugere uma ótima concordância para cálculos globais em física de reatores. Os tempos computacionais para o Caso Teste 3 são: **MPFF = 41,37s** e CEOLIN et al. (2014) = 1064,36s (17min e 44s). Pode-se notar um ganho computacional de aproximadamente 25,7 vezes com relação a referência adotada para fins de comparação computacional.

O valor do fluxo de nêutrons (rápido e térmico) obtidos são comparados com CE-OLIN et al. (2014) na qual na Tabela 12 é representado pelo índice superior "ref".

 $\phi_1^{ref}(x)$ $\phi_2^{ref}(x)$ Des. Relativo Des. Relativo $\phi_1(x)$ $\phi_2(x)$ x0,00000 0,00000 0 0,00000 0,00000 0,00000 0,00000 9,21552 $4,71 \times 10^{-4}$ 0,76307 $4,72 \times 10^{-4}$ 20 9,21986 0,76343 40 10,5015 10,5061 4.38×10^{-4} 1,02871 1,03011 $1,36 \times 10^{-3}$ 60 6,32363 6,32361 $3,20 \times 10^{-6}$ 0,79371 0,79371 0,00000 9.82×10^{-4} $9,80 \times 10^{-4}$ 80 4,06365 4,05966 0,51009 0,50959 2.25×10^{-3} $2,24 \times 10^{-3}$ 100 2,91647 2,90991 0,36609 0,36527 2.90×10^{-3} $2,89 \times 10^{-3}$ 0,32212 120 2,56623 2,55879 0,32119 $2,25 \times 10^{-3}$ $2,24 \times 10^{-3}$ 140 2,91647 2,90991 0,36609 0,36527 9.82×10^{-4} 0,51009 $9,80 \times 10^{-4}$ 160 4,06365 4,05966 0,50959 $3,20 \times 10^{-6}$ 180 6,32363 6,32361 0,79371 0,79371 0,00000 200 $4,38 \times 10^{-4}$ 10,5015 10,5061 1,02871 1,03011 1,36 x 10^{-3} 220 9,21552 9,21986 $4,71 \times 10^{-4}$ 0,76307 0,76343 $4,72 \times 10^{-4}$ 240 0,00000 0,00000 0,00000 0,00000 0,00000 0,00000

Tabela 12: Fluxo escalar de nêutrons para CT3-2G3R.

Como ilustração o fluxo escalar de nêutrons é apresentado na Figura 7, percebese a satisfação das condições de contorno e um aumento do fluxo térmico no entorno das interfaces devido a contribuição do espalhamento.

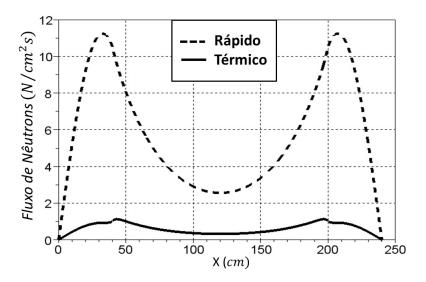


Figura 7: Gráfico do CT3-2G3R.

3.3 Análise perturbativa para o caso unidimensional

Nesta seção, analisa-se o comportamento da solução da EDNMM estacionária via MPFF introduzindo uma perturbação nos parâmetros nucleares. O objetivo desta análise é averiguar o grau de interferência de cada parâmetro na convergência e do comportamento da solução. Deste modo, um único parâmetro é perturbado a cada teste e esta analise é realizada no *software Scilab*.

Para os testes de sensibilidade utilizam-se os parâmetros e geometria do problema apresentado no CT3-2G3R. Como é um problema com 3 regiões, sendo a 1ª e a 3ª com parâmetros nucleares iguais, respeita-se esta característica ao aplicar o mesmo valor perturbativo.

Os primeiros testes realizados têm o intuito de encontrar os valores máximos que cada parâmetro pode ser perturbado e, mesmo assim, os autovalores dominantes permanecem com 4 casas de precisão. Este critério é usado em virtude que o MPFF converge com 4 casas em relação à referência adotada. Nestes testes a perturbação é inserida no início do algoritmo, na qual são introduzidos os parâmetros nucleares do problema. Como o mesmo parâmetro possui valores diferentes para cada região, a perturbação inserida deve possuir um percentual igual para cada região. Por exemplo, ao perturbar os paramentos em 10% tem-se:

$$D_1^{(1)} = D_1^{(1)} + D_1^{(1)} \cdot 0, 10;$$

$$D_1^{(2)} = D_1^{(2)} + D_1^{(2)} \cdot 0, 10;$$

$$D_1^{(3)} = D_1^{(3)} + D_1^{(3)} \cdot 0, 10.$$

Os percentuais máximos que cada parâmetro nuclear admite para que os autovalores ainda concordem com a precisão descrita, estão dispostos na Tabela 13:

Tabela 13: Percentuais máximos da perturbação.

Parâmetro	Porcentual
D_1	0,0150%
$\overline{D_2}$	0,4100%
Σ_{R1}	0,0011%
Σ_{R2}	0,0015%
$\overline{\nu\Sigma_{f1}}$	0,0028%
$\nu \Sigma_{f2}$	0,0015%
Σ_{s12}	0,0015%

Novos testes são realizados ao somar ao parâmetro desejado uma função randômica, que a cada iteração do método da potência assume um novo valor proporcional ao tamanho do parâmetro. O *Scilab* possui uma ferramenta chamada *rand*, que toda vez que é chamada assume um novo valor entre 0 e 1. Para que o parâmetro perturbado oscile dentro de uma faixa de valores, maiores e menores que o parâmetro real, subtrai-se 0,5 da função *rand* e multiplica-se por 2, deste modo a variação produzida será de -1 a 1. Construído o fator perturbativo, deve-se multiplica-lo pelo parâmetro desejado e por um fator percentual. Assim, a perturbação inserida é da forma:

$$\alpha = \Psi \cdot \gamma \cdot (rand - 0, 5) \cdot 2,\tag{34}$$

onde Ψ é o parâmetro que se deseja perturbar e a constante γ é a porcentagem de variação desejada.

Da mesma forma que os testes anteriores, como os parâmetros nucleares da 1ª e da 3ª regiões são iguais, respeita-se esta característica ao aplicar o mesmo valor randômico para estas regiões. Por exemplo, para o caso do coeficiente de difusão do grupo 1 ($D_1^{(r)}$):

$$\alpha = D_1^{(1)} \cdot \gamma \cdot (rand - 0, 5) \cdot 2,$$

$$\beta = D_1^{(2)} \cdot \gamma \cdot (rand - 0, 5) \cdot 2,$$

para regiões 1 e 3:

$$D_1^{(1)} = 1, 5 + \alpha,$$

$$D_1^{(3)} = 1, 5 + \alpha,$$

para região 2:

$$D_1^{(2)} = 1, 0 + \beta.$$

A grandeza da perturbação deve respeitar uma certa faixa de valores, para que mesmo com a perturbação a solução do problema possa convergir. Foi usado um critério máximo de 800 iterações. Para isto é feito uma serie de tentativas buscando encontrar o limite de convergência. Na Tabela 14 são apresentados os resultados encontrados para a porcentagem máxima de variação que cada parâmetro admite. Os parâmetros estão dispostos da ordem decrescente em relação a porcentagem de variação.

Tabela 14: Perturbação dos parâmetros nucleares.

Parâmetro	γ
D_2	7,00%
D_1	0,90%
Σ_{s12}	0,04%
$\nu\Sigma_{f1}$	0,02%
$\nu\Sigma_{f2}$	0,01%
Σ_{R1}	0,01%
Σ_{R2}	0,01%

Além de encontrar os intervalos de convergência dos parâmetros perturbados, com a amplitude máxima, são simulados 30 vezes para cada parâmetro, com o objetivo de encontrar a faixa de variação do K_{eff} e o comportamento dos fluxos (rápido e térmico). A Tabela 15 apresenta os valores máximos, mínimos e média dos K_{eff} para as 30 vezes em que são simulados com os parâmetros perturbados.

	Tabela 15:	Valores dos	K_{eff} para	cada parâmetro	perturbado.
--	------------	-------------	----------------	----------------	-------------

Parâmetro	Máximo	Mínimo	Média
D_1	0,9017088	0,8997128	0,901354
D_2	0,9017527	0,9006341	0,901531
Σ_{R1}	0,9017380	0,9006053	0,901440
Σ_{R2}	0,9016165	0,9002317	0,901346
$\nu \Sigma_{f1}$	0,9016333	0,9001131	0,901395
$ \overline{\nu}\Sigma_{f2} $	0,9016403	0,8998142	0,901467
Σ_{s12}	0,9017428	0,8992533	0,901363

Sabendo que o valor do K_{eff} sem a perturbação é de 0,901596, deste modo, ao compará-lo com os valores médios percebe-se uma boa concordância. Uma pequena diferença entre eles já era esperada visto as pequenas alterações nos valores dos parâmetros.

Devido a pequena escala do fluxo térmico em comparação ao rápido, apresentase os gráficos com os fluxos de nêutrons separados entre os rápidos e os térmicos. Deste modo, o comportamento de ambos pode ser observados mais claramente.

A Figura 8 e Figura 9 apresentam os fluxos de nêutrons rápido e térmico, na qual em cada uma das subfiguras ilustra o comportamento do fluxo encontrado no CT3-2G3R e o fluxo com a incidência da perturbação de um único parâmetro. Deste modo, cada uma das subfiguras contém uma curva sem perturbação dos fluxo de nêutrons e uma curva com a perturbada deste mesmo fluxo. Sendo que a curva perturbada plotada é a que apresentou maior variação, ou seja, as demais curvas perturbadas estão entre esta e a não perturbada.

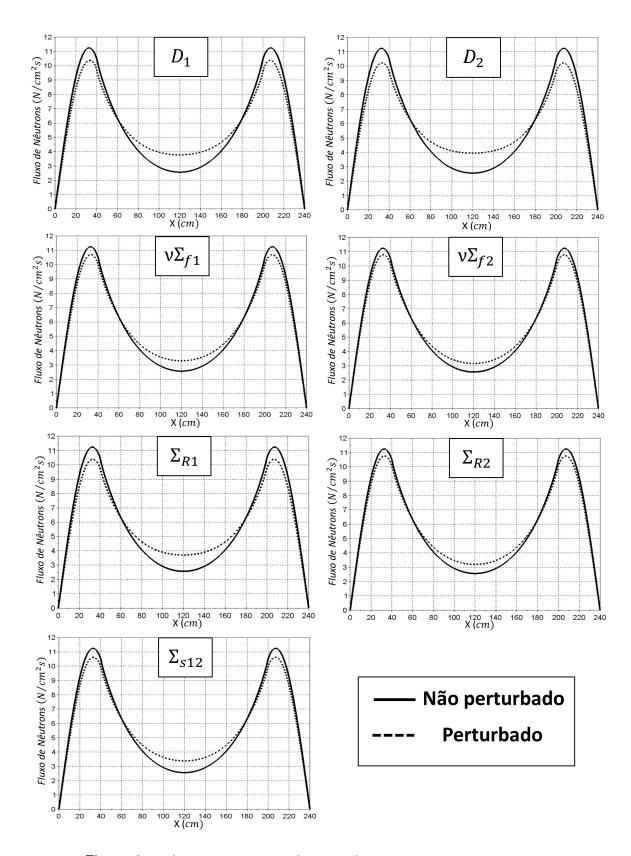


Figura 8: Gráficos do fluxo de nêutrons rápido: com e sem perturbação.

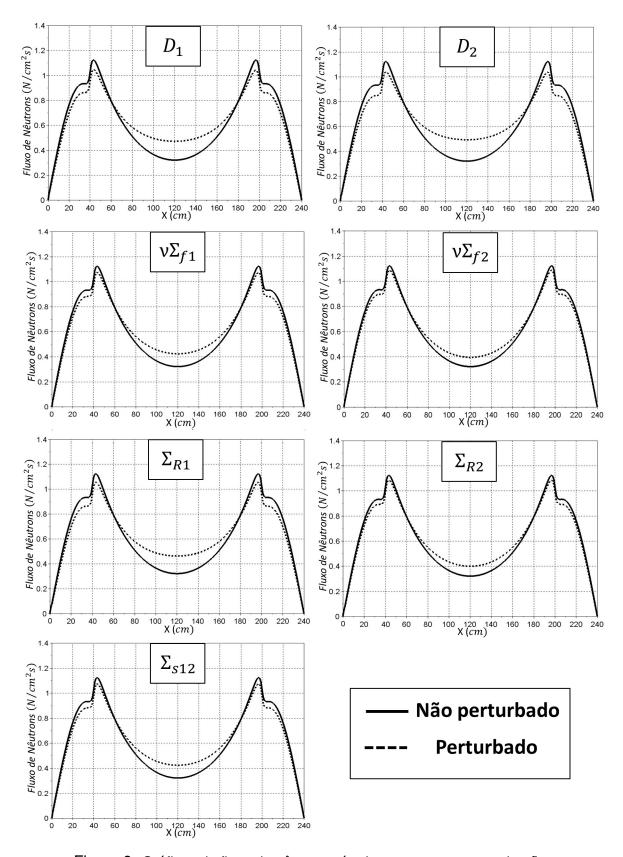


Figura 9: Gráficos do fluxo de nêutrons térmico: com e sem perturbação.

Ao observar a Figura 8 e a Figura 9 percebe-se um comportamento semelhante nos gráficos que contém os parâmetros perturbados, na qual as linhas que representam

o fluxo de nêutrons perturbado estão abaixo nas regiões combustíveis e acima na região refletora em relação as não perturbadas. Esta análise pode auxiliar na tentativa de homogeneizar o fluxo de nêutrons e a geração de potência. Possibilitando saber quais devem ser os parâmetros nucleares que tornem o fluxo fique o mais homogêneo possível, e assim compor um assembly com um arranjo que os forneça.

4 SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE DIFUSÃO DE NÊUTRONS MULTIGRUPO MULTIRREGIÃO ESTACIONÁRIA BIDIMENSI-ONAL EM GEOMETRIA CARTESIANA

Neste capítulo é apresentada a metodologia de solução da EDNMM estacionária bidimensional em geometria cartesiana. Novamente propõem-se resolver a equação utilizando o Método da Potência em que, a cada iteração, o fluxo escalar de nêutrons deve ser interpolado em uma forma padrão. Em seguida são realizados casos testes, a fim de comparar os resultados numéricos com outros trabalhos presentes na literatura e uma análise perturbativa, na qual deseja-se perceber a interferência de cada parâmetro nuclear no comportamento da solução do problema.

4.1 Metodologia para o caso bidimensional

A EDNMM estacionária bidimensional em geometria cartesiana sem fonte externa é descrita da seguinte forma:

$$-D_g^{(r)} \left(\frac{\partial^2 \phi_g^{(r)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_g^{(r)}}{\partial y^2} \right) + \Sigma_{Rg}^{(r)} \phi_g^{(r)} = \frac{1}{K_{eff}} \chi_g \sum_{g'=1}^G \nu_{g'} \Sigma_{fg'}^{(r)} \phi_{g'}^{(r)} + \sum_{\substack{g'=1 \ g' \neq g}}^G \Sigma_{sg'g}^{(r)} \phi_{g'}^{(r)}, \quad (35)$$

onde $\phi_g = \phi_g(x,y)$; $0 \le x \le L_1$ e $0 \le y \le L_2$, L_1 e L_2 são as dimensões de uma placa plana retangular; g são os grupos de energia, na qual g=1:G e r são as regiões, conforme Figura 10.

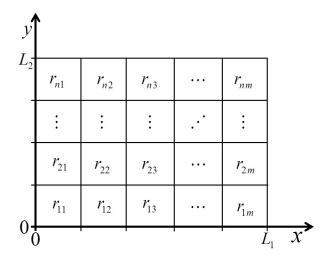


Figura 10: Esboço de uma placa plana com suas r regiões.

O sistema de equações (35) obedece as seguintes condições de contorno, na qual $\partial \Gamma_{xy}$ é definido como o contorno:

$$\alpha_{1g}\phi_{g}\big|_{\partial\Gamma_{x,0}} + \beta_{1g}\frac{\partial\phi_{g}}{\partial x}\Big|_{\partial\Gamma_{x,0}} = 0;$$

$$\alpha_{2g}\phi_{g}\big|_{\partial\Gamma_{0,y}} + \beta_{2g}\frac{\partial\phi_{g}}{\partial y}\Big|_{\partial\Gamma_{0,y}} = 0;$$

$$\alpha_{3g}\phi_{g}\big|_{\partial\Gamma_{x,L_{2}}} + \beta_{3g}\frac{\partial\phi_{g}}{\partial x}\Big|_{\partial\Gamma_{x,L_{2}}} = 0;$$

$$\alpha_{4g}\phi_{g}\big|_{\partial\Gamma_{L_{1},y}} + \beta_{4g}\frac{\partial\phi_{g}}{\partial y}\Big|_{\partial\Gamma_{L_{1},y}} = 0.$$
(36)

onde α e β são constantes e $|\alpha| + |\beta| > 0$. Uma escolha adequada destas constantes abarcam as diversas condições de contorno, como por exemplo: Dirichlet, Neumann ou Cauchy.

Na resolução de problemas multirregião utilizam-se nas interfaces continuidade de fluxo e densidade de corrente, dadas respectivamente por:

$$\phi_g^{(r)}(x,y) = \phi_g^{(r+1)}(x,y), -D_g^{(r)} \frac{\partial \phi_g^{(r)}(x,y)}{\partial x} = -D_g^{(r+1)} \frac{\partial \phi_g^{(r+1)}(x,y)}{\partial x}, \quad -D_g^{(r)} \frac{\partial \phi_g^{(r)}(x,y)}{\partial y} = -D_g^{(r+1)} \frac{\partial \phi_g^{(r+1)}(x,y)}{\partial y}.$$
 (37)

Análogo ao caso unidimensional, resolve-se o sistema de equações (35) com as condições de contorno (36) utilizando o método da potência.

4.1.1 Método da potência via fronteiras fictícias (bidimensional)

Na solução de problemas bidimensionais, o acréscimo de uma nova dimensão traz consigo novas dificuldades além das encontradas no caso unidimensional. Por isto, propõem-se a continuidade da metodologia empregada no caso unidimensional

somada a uma transformada integral que possa reduzir as equações diferenciais parciais em EDO's. Aplicando esta metodologia encontra-se o autovalor dominante e sua respectiva autofunção.

A transformada integral utilizada é a Transformada Finita de Fourier Seno (TFFS), visto que o possui condições de contorno de fluxo nulo¹, domínio finito e pela facilidade de obter a sua inversa através do somatório da solução do problema transformado (DEBNATH; BHATTA (2015)).

Definição 1 (Transformada Finita de Fourier Seno). Se $\phi(x)$ é uma função contínua ou contínua em um intervalo finito 0 < x < L, a transformada finita de Fourier seno de $\phi(x)$ é definida por

$$\mathcal{F}_s \left\{ \phi(x) \right\} = \widehat{\phi}(n) = \int_0^L \phi(x) \, sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \tag{38}$$

onde n é um inteiro.

Na solução de problemas que envolvem equações diferenciais utilizam-se também as transformadas das derivadas, dadas por

$$\mathcal{F}_s \left\{ \frac{d\phi(x)}{dy} \right\} = -\frac{n\pi}{L} \mathcal{F}_c \left\{ \phi(x) \right\}, \tag{39}$$

$$\mathcal{F}_s \left\{ \frac{d^2 \phi(x)}{dy^2} \right\} = -\frac{n^2 \pi^2}{L^2} \mathcal{F}_s \left\{ \phi(x) \right\} + \frac{n\pi}{L} \left(\phi(0) - \phi(L) cos(n\pi) \right), \tag{40}$$

na qual $\mathcal{F}_c \{ \phi(x) \}$ é a transformada finita de Fourier cosseno.

Ao aplicar a transformada finita de Fourier seno na variável y do problema proposto recai-se em um sistema de equações diferenciais ordinárias (EDO's) na variável x. Sem perda de generalidade, a aplicação da TFFS em (35) para problemas homogêneos com dois grupos de energia, sem up-scattering e com fluxo nulos no contorno resulta em:

$$\frac{d^2\widehat{\phi}_1(x,n)}{dx^2} - \frac{n^2\pi^2\widehat{\phi}_1(x,n)}{L_2^2} - \frac{\Sigma_{R1}\widehat{\phi}_1(x,n)}{D_1} = -\frac{1}{K_{eff}} \left(\frac{\nu_1\Sigma_{f1}\widehat{\phi}_1(x,n)}{D_1} + \frac{\nu_2\Sigma_{f2}\widehat{\phi}_2(x,n)}{D_1} \right) , \quad (41)$$

$$\frac{d^2\widehat{\phi}_2(x,n)}{dx^2} - \frac{n^2\pi^2\widehat{\phi}_2(x,n)}{L_2^2} - \frac{\Sigma_{R2}\widehat{\phi}_2(x,n)}{D_2} = -\frac{\Sigma_{s12}\widehat{\phi}_1(x,n)}{D_2}$$

onde $\widehat{\phi}(x,n)$ é o fluxo de nêutrons transformado. Após resolver este sistema EDO's deve-se aplicar a Transformada Inversa de Fourier Seno, reconstruindo a expressão do fluxo de nêutrons nas variáveis x e y. Esta expressão é escrita na forma de um somatório infinito da seguinte forma:

¹No caso de possuir condições de contorno de corrente nula em x=0 e y=0, pode-se expandir o domínio para os outros quadrantes e tornar o problema com todas condições de contorno de fluxo nulo.

$$\phi_g(x,y) = \frac{2}{L_2} \sum_{n=1}^{\infty} \widehat{\phi}_g(x,n) sen\left(\frac{n \pi y}{L_2}\right). \tag{42}$$

Esse somatório deve ser truncando em um determinado n, quando escolhido adequadamente acarreta em pequenas perda de informações. Para isto, propõem-se como critério de parada do somatório o modulo do elemento que está sendo somado, dada por:

$$\left|\widehat{\phi}_g(x_i, n)\right| < \epsilon_3 \tag{43}$$

onde x_i é o ponto em que esta sendo calculado o somatório da inversão e ϵ_3 é uma constante arbitrária muito pequena. Por inspeção, observa-se que com o aumento de n as contribuições decrescem, tornando a solução convergente em cada ponto do domínio.

De forma análoga ao caso unidimensional, a cada iteração do método da potência necessita-se que a expressão do fluxo de nêutrons assuma uma forma padrão. Para isto propõe-se que a malha de pontos provinda do somatório da transformada inversa seja interpolada em uma função interpoladora que combine funções polinomiais em x e y, dada da seguinte forma:

$$\phi(x,y) = \left(\sum_{n=0}^{N} c_n x^n\right) \cdot \left(\sum_{m=0}^{M} d_m y^m\right),\tag{44}$$

onde c_n e d_m são constantes e N e M representam a ordem dos polinômios em x e y respectivamente. A escolha deste tipo de função interpoladora é devido a facilidade de se trabalhar com elas, por possuir poucas restrições e pelos bons resultados obtidos no caso unidimensional. No final de cada iteração do método da potência, uma vez obtido a expressão do fluxo de nêutrons para todos os grupos g, calcula-se o novo K_{eff} :

$$K_{eff}^{[i+1]} = K_{eff}^{[i]} \frac{\int_0^{L_1} \int_0^{L_2} \mathbf{S}^{[i+1]} \, dy dx}{\int_0^{L_1} \int_0^{L_2} \mathbf{S}^{[i]} \, dy dx}.$$

4.2 Resultados para o caso bidimensional

A implementação computacional é realizada em mesmo *software* e mesma máquina dos casos apresentados no capítulo anterior. Realizam-se 2 casos testes, um homogêneo e outro heterogêneo, em ambos são considerados: dois grupos de energia: rápido e térmico, e sem *up-scattering* ($\Sigma_{s21}=0$). Os resultados numéricos são comparados com trabalhos presentes na literatura.

4.2.1 Problema homogêneo

Neste problema é utilizada a referência de HEINEN (2009) para comparação do K_{eff} e dos fluxos de nêutron (rápido e térmico). Ele é composto por uma única região quadrada de $6cm\times6cm$, com condições de contorno mista: $\frac{\partial\phi_g}{\partial x}\Big|_{\partial\Gamma_{x,0}}=0$, $\frac{\partial\phi_g}{\partial y}\Big|_{\partial\Gamma_{0,y}}=0$, $\phi_g\Big|_{\partial\Gamma_{x,6}}=0$, $\phi_g\Big|_{\partial\Gamma_{6,y}}=0$ e parâmetros nucleares conforme dispostos na Tabela 16.

Tabela 16: Parâmetros nucleares do problema homogêneo.

g	D_g	Σ_{Rg}	$\nu \Sigma_{fg}$	$\Sigma_{sg'g}$
1	1,6497	0,02309	0,005008	0,00000
2	0,4754	0,07886	0,097130	0,01423

Como o presente trabalho propõe utilizar a TFFS, as condições de contorno devem ser do tipo de fluxo nulo e domínio não negativo. Assim para utilizar a metodologia proposta, deve-se espelhar o domínio para os outros quadrantes e, em seguida, transladar para a direita e para cima, conforme Figura 11. Desta forma, os contornos tornam-se nulos e domínio $0 \le x \le 12$ e $0 \le y \le 12$.

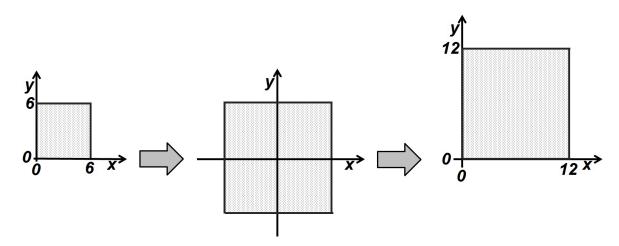


Figura 11: Adaptando o domínio para a solução do problema.

Na interpolação dos pontos o MPFF utilizou uma função interpoladora dada por

$$\phi_g = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 x^3)(c_5 + c_6 y + c_7 y^2 + c_8 y^3 + c_9 y^4). \tag{45}$$

Neste caso teste o critério de parada adotado para o fluxo de nêutrons e o K_{eff} é de 10^{-10} , este mesmo valor é utilizado no critério de parada que define a quantidade de termos do somatório na inversão da TFFS. Esta quantidade pode alterar-se de ponto a ponto, mas em um geral poucos termos são necessário para satisfazer o critério de parada, como pode ser observado na Tabela 17. Esta tabela apresenta os valores

de cada termo do somatório no ponto (6,6) da última iteração do método da potência quando adotado n=7.

\overline{n}	$\phi_1(6,6)$	$\phi_2(6,6)$
1	6,06712	0,599438
2	$-3,225 \times 10^{-22}$	$-1,890 \times 10^{-23}$
3	$1,339 \times 10^{-11}$	$4,339 \times 10^{-13}$
4	$1,561 \times 10^{-23}$	$1,155 \times 10^{-24}$
5	$-9,610 \times 10^{-13}$	$-3,474 \times 10^{-14}$
6	$-2,983 \times 10^{-24}$	$-2,351 \times 10^{-25}$
7	$1,755 \times 10^{-13}$	$6,562 \times 10^{-15}$

Tabela 17: Valores de cada termo do somatório.

O autovalor, K_{eff} , encontrado por HEINEN (2009) é 0,0585989, enquanto que o valor obtido por **MPFF** é **0,0585997**, na qual utiliza-se um $\Delta x = 0,25 cm$. Pode-se observar uma precisão de 5 casas com a referência adotada, o que sugere uma excelente concordância para cálculos globais em física de reatores. O MPFF necessitou de **3,34s** para obter os resultados numéricos.

Lembre-se que para aplicar a metodologia proposta o domínio foi expandido e deslocado, assim, depois de obtida a solução desloca-se novamente o domínio para sua posição de origem.

Nas Tabelas 18 e 19 são apresentados os resultados numéricos do fluxo de nêutrons rápido e térmico, na qual são normalizados pela seu maior valor, respectivamente. Estes são comparados com os obtidos por HEINEN (2009), onde estão representados pelo índice superior "ref".

\overline{y}	$\phi_1(0,y)$	$\phi_1^{ref}(0,y)$	Des. Relativo	$\phi_1(3,y)$	$\phi_1^{ref}(3,y)$	Des. Relativo
0,0	1,000000	1,00000	0,00000	0,707107	0,70710	$9,6 \times 10^{-6}$
1,5	0,923880	0,92388	$5,4\times 10^{-7}$	0,653282	0,65328	$2,3\times 10^{-6}$
3,0	0,707107	0,70711	$4,5\times 10^{-6}$	0,500000	0,49999	$2,0\times 10^{-5}$
4, 5	0,382683	0,38268	$8,8\times10^{-6}$	0,270598	0,27059	$2,9\times 10^{-5}$
6,0	0,000000	$6,1 \times 10^{-17}$	- -	0,0	$4,3 \times 10^{-17}$	-

Tabela 18: Fluxo escalar de nêutrons rápidos do problema homogêneo.

y	$\phi_2(0,y)$	$\phi_2^{ref}(0,y)$	Des. Relativo	$\phi_2(3,y)$	$\phi_2^{ref}(3,y)$	Des. Relativo
0,0	1,000000	1,00000	0, 0	0,707107	0,70710	$9,6\times10^{-6}$
1, 5	0,923880	0,92388	$5,4\times10^{-7}$	0,653281	0,65327	$1,5\times 10^{-5}$
3,0	0,707107	0,70711	$4,5 \times 10^{-6}$	0,500000	0,49999	$2,0 \times 10^{-5}$
4, 5	0,382683	0,38268	$8,8 \times 10^{-6}$	0,270598	0,27388	$1,2 \times 10^{-2}$
-6,0	0,000000	$6,1 \times 10^{-17}$	-	0,000000	$4,3 \times 10^{-17}$	-

Tabela 19: Fluxo escalar de nêutrons térmicos do problema homogêneo.

Os gráficos do fluxo escalar de nêutrons rápido e térmico são ilustrados nas Figuras 12 e 13, nestes gráficos percebe-se a satisfação das condições de contorno e o comportamento da solução para o problema homogêneo.

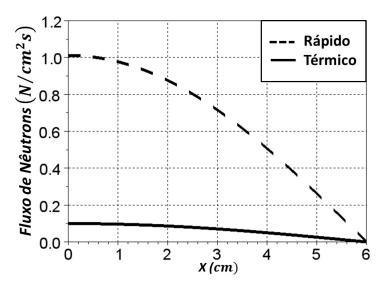


Figura 12: Fluxo escalar de nêutrons rápido e térmico do problema homogêneo quando y = 0.

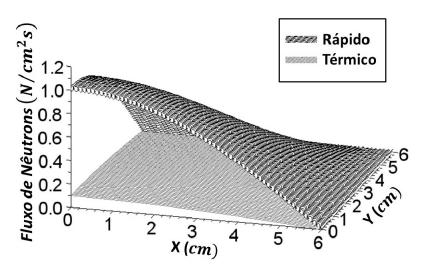


Figura 13: Fluxo escalar de nêutrons rápido e térmico do problema homogêneo.

4.2.2 Problema heterogêneo

O segundo caso teste para problemas bidimensionais é composto por 3 regiões quadradas de $12cm \times 12cm$, na qual a primeira e a terceira são materiais refletores e a região central de material combustível, conforme pode ser visto na Figura 14.

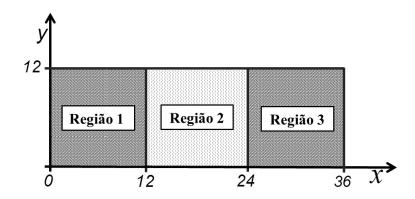


Figura 14: Ilustração da configuração do problema heterogêneo.

Este problema possui condições de contorno de fluxo nulo: $\phi_g\big|_{\partial\Gamma_{x,0}}=\phi_g\big|_{\partial\Gamma_{x,12}}=\phi_g\big|_{\partial\Gamma_{0,y}}=\phi_g\big|_{\partial\Gamma_{36,y}}=0$ e parâmetros nucleares conforme dispostos na Tabela 20.

Região	D_1	D_2	Σ_{R1}	Σ_{R2}	$\nu\Sigma_{f1}$	$\nu\Sigma_{f2}$	Σ_{s12}
1	0,6702	0,1509	0,09013	0,03277	0,000000	0,00000	0,09084
2	1,6497	0,4754	0,02309	0,07886	0,005008	0,09713	0,01423
3	0,6702	0,1509	0,09013	0,03277	0,000000	0,00000	0,09084

Tabela 20: Parâmetros nucleares do problema heterogêneo.

Neste problema heterogêneo o critério de parada adotado para o fluxo de nêutrons e o K_{eff} é de 10^{-6} . Já no somatório da inversão da TFFS utilizou-se novamente 10^{-10} e a função interpoladora:

$$\phi_g = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 x^3)(c_5 + c_6 y + c_7 y^2 + c_8 y^3 + c_9 y^4). \tag{46}$$

Com a finalidade de comparação de resultados foi implementado em mesmo *software* e máquina um algoritmo empregando o método dos volumes finitos. Para o problema proposto este método obteve um autovalor, K_{eff} , de 0,138432, utilizando $\Delta x = \Delta y = 4/3cm$ enquanto que o valor obtido por **MPFF** foi **0,138076**, na qual utilizou $\Delta x = \Delta y = 1cm$. Em relação ao tempo computacional o método dos volumes finitos levou 6,5s, enquanto o MPFF necessitou de **2,2s** para obter os resultados numéricos, no que percebe-se um ganho computacional aproximadamente 3 vezes.

Nas Tabelas 21 e 22 são apresentados os resultados numéricos do fluxo de nêutrons rápido e térmico, na qual são normalizados pela maior valor do fluxo de nêutrons rápido. Estes são comparados com os obtidos pelo método dos volumes finitos onde estão representados pelo índice superior "ref".

Tabela 21: Fluxo escalar de nêutrons rápidos do caso heterogêneo.

\overline{x}	$\phi_1(x,2)$	$\phi_1^{ref}(x,2)$	Des. Relativo	$\phi_1(x,6)$	$\phi_1^{ref}(x,6)$	Des. Relativo
2	0,003646	0,003910	0,072367	0,007291	0,007819	0,144728
6	0,026353	0,027601	0,047358	0,052707	0,055203	0,094712
10	0,160498	0,163355	0,017802	0,320996	0,326710	0,035602
14	0,476816	0,474895	0,004028	0,953631	0,949789	0,008057
18	0,500000	0,500000	0,000000	1,000000	1,000000	0,000000

Tabela 22: Fluxo escalar de nêutrons térmicos do caso heterogêneo.

\overline{x}	$\phi_1(x,2)$	$\phi_1^{ref}(x,2)$	Des. Relativo	$\phi_1(x,6)$	$\phi_1^{ref}(x,6)$	Des. Relativo
2	0,015117	0,015732	0,040696	0,030234	0,031465	0,081387
6	0,082138	0,083435	0,015785	0,164277	0,166870	0,031565
10	0,235869	0,234794	0,004554	0,471737	0,469588	0,009110
14	0,099928	0,100103	0,001745	0,199856	0,200205	0,003488
18	0,073850	0,074391	0,007327	0,147700	0,148782	0,014654

Os gráficos do fluxo escalar de nêutrons rápido e térmico são ilustrados nas Figuras 15 e 16, na qual são cortes verticais em y=2cm e y=6cm. Já as Figuras 17 e 18 apresentam de forma completa o gráfico do fluxo rápido e térmico respectivamente.

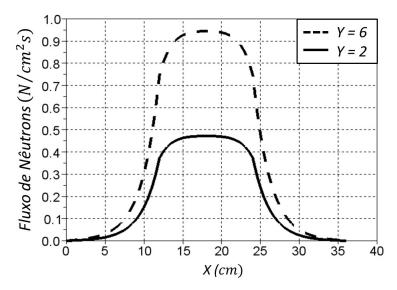


Figura 15: Gráfico do fluxo escalar de nêutrons rápido nos cortes transversais em y=2 e y=6.

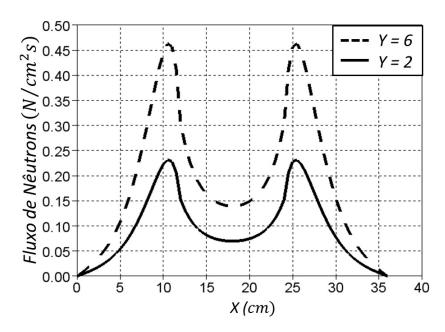


Figura 16: Gráfico do fluxo escalar de nêutrons térmico nos cortes transversais em y=2 e y=6.

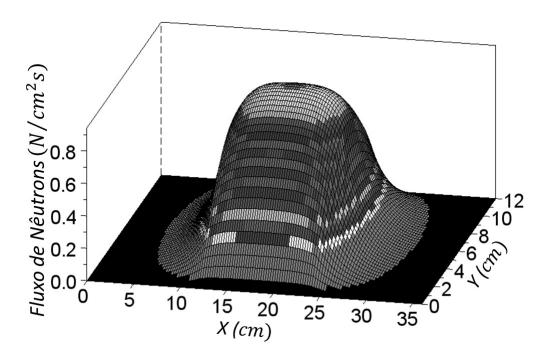


Figura 17: Ilustração do gráfico do fluxo escalar de nêutrons rápido.

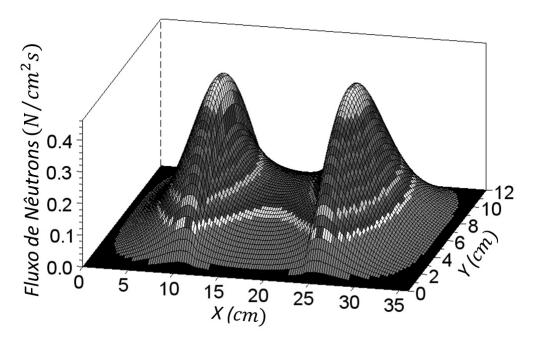


Figura 18: Ilustração do gráfico do fluxo escalar de nêutrons térmico.

4.3 Análise perturbativa para o caso bidimensional

Análogo ao caso unidimensional, realiza-se uma analise de sensibilidade do comportamento da solução da equação de difusão de nêutrons bidimensional introduzindo uma perturbação nos parâmetros nucleares. Busca-se encontrar o grau de sensibilidade de cada parâmetro na convergência e do comportamento da solução, para isto em cada teste um único parâmetro é perturbado.

Os testes de sensibilidade são feitos no problema heterogêneo apresentado na seção anterior, na qual possui 3 regiões, sendo a 1ª e a 3ª com parâmetros nucleares iguais, por isto aplicou-se o mesmo valor perturbativo. A perturbação é realizada da mesma forma que o caso unidimensional, na qual está apresentada na equação (34). Esta equação contém uma função *rand* que a cada iteração do método da potência assume um novo valor proporcional ao tamanho do parâmetro perturbado.

A perturbação deve possuir uma grandeza de valores que mesmo com a perturbação a solução do problema possa convergir até no máximo 100 iterações. Na Tabela 23 são apresentados os resultados encontrados para a porcentagem máxima de variação que cada parâmetro admite.

	Tabela 23: Pertu	urbação dos p	parâmetros nuclea	ares do caso	bidimensional.
--	------------------	---------------	-------------------	--------------	----------------

Parâmetro	γ
D_1	0,30%
D_2	1,00%
$\nu\Sigma_{f1}$	0,30%
$\nu \Sigma_{f2}$	0,05%
Σ_{R1}	0,10%
Σ_{R2}	0,30%
Σ_{s12}	0,20%

Além de encontrar a porcentagem de perturbação de cada parâmetro, os testes são simulados 30 vezes para cada parâmetro, com o objetivo de encontrar a faixa de variação do K_{eff} . A Tabela 24 apresenta os valores máximos, mínimos e média dos K_{eff} para as 30 vezes em que são simulados com os parâmetros perturbados.

Tabela 24: Valores dos K_{eff} para cada parâmetro perturbado.

Parâmetro	Máximo	Mínimo	Média
D_1	0,1380839	0,1380684	0,138076
D_2	0,1380996	0,1380546	0,138072
Σ_{R1}	0,1380933	0,1380493	0,138075
Σ_{R2}	0,1380829	0,1380702	0,138076
$\nu \Sigma_{f1}$	0,1380792	0,1380704	0,138073
$\nu \Sigma_{f2}$	0,1380843	0,1380668	0,138075
Σ_{s12}	0,1380963	0,1380561	0,138076

Ao aplicar o teste da perturbação para todos os parâmetros percebeu-se similaridade no comportamento dos gráficos, por este motivo apresenta-se apenas o gráfico com o caso do parâmetro $\nu\Sigma_{f2}$. Na Figura 19 observa-se o fluxo de nêutron rápido, na qual os gráficos perturbados estão tão próximos do não perturbado, que se faz necessário uma ampliação da imagem para analisar seu comportamento.

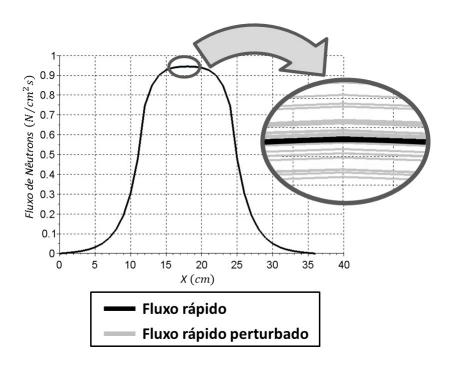


Figura 19: Ilustração do fluxo escalar de nêutrons rápido perturbado no corte transversal em y=6.

Ao contrário do caso unidimensional, a perturbação gera como resultados gráficos acima e abaixo do gráfico não perturbado para todo o domínio. Na Figura 19 não está apresentado o fluxo térmico, mas este se comporta da mesma forma que o fluxo rápido.

5 CONCLUSÃO

O controle da população de nêutrons em um reator nuclear é fundamental para a eficiência energética e segurança nas operações, por isto a importância deste estudo. O Método da Potência via Fronteiras Fictícias mostra-se eficiente na solução do problema por apresentar fácil implementação, baixo custo computacional e por possuir resolução analítica em cada região fictícia. A principal ideia desta metodologia é acoplar um método iterativo de fonte com a resolução de um problema de autovalor por métodos clássicos, reconstruindo o fluxo de nêutrons através de uma interpolação polinomial.

Um dos pontos fortes desta metodologia é o baixo tempo computacional, que é devido à utilização das regiões fictícias. Como o problema é resolvido localmente nestas pequenas regiões, possibilita utilizar polinômios interpoladores de baixa ordem, assim trabalhando com matrizes de pequenas dimensões. Para reduzir ainda mais o tempo computacional, propõem-se futuramente implementar o algoritmo em linguagem de mais baixo nível como, por exemplo, a linguagem C.

Outro ponto a destacar é a obtenção da solução da equação de difusão de nêutrons de forma analítica em cada uma das regiões fictícias. Na qual, as EDO's são resolvidas utilizando a metodologia de coeficientes a determinar e no caso bidimensional, aplicase a transformada finita de Fourier seno nas equações diferenciais parciais para recair em EDO's resolvidas de forma analítica.

A precisão dos resultados está vinculada com a dimensão das regiões fictícias, a distância dos pontos em que a função esta sendo avaliada (Δx) e a ordem dos polinômios interpoladores. Entretanto, o aumento da ordem dos polinômios e a redução das dimensões das regiões e do Δx implicam em uma aumento do tempo computacional.

Na implementação da metodologia proposta pode estar sendo cometido pequenos erros nos resultados, proveniente da reconstrução do fluxo escalar de nêutrons através da interpolação dos pontos em uma função polinomial. Além disto, no caso bidimensional tem-se o truncamento do somatório da transformada inversa de Fourier seno. Ao analisar os resultados das duas análises perturbativas, bi e unidimensional, percebe-se a importância da precisão dos parâmetros nucleares, visto que pequenas alterações nos valores dos parâmetros podem gerar grandes mudanças nos resultados. Outro aspecto relevante a ser observado nestas análises é o comportamento dos gráficos da solução, no caso unidimensional, apresentou um comportamento inesperado por sempre estar superestimado nas regiões refletoras e subestimado nas regiões combustíveis. Já no caso bidimensional, os gráficos comportaram-se de maneira esperada, algumas vezes acima e outros abaixo do gráfico não perturbado. Acredita-se que quanto mais próximo da realidade forem os problemas (casos multidimensionais), mais fiel será o comportamento da solução.

Nota-se que a metodologia proposta apresenta boa concordância com os resultados da literatura, o que sugere que esta técnica seja promissora para solucionar problemas mais complexos em física de reatores como, por exemplo, em problemas multidimensionais transientes, efeitos de temperatura, efeito dos venenos absorvedores de nêutrons, etc.

REFERÊNCIAS

BODMANN, B. E. J.; VILHENA, M. T.; FERREIRA, L. S.; BARDAJI, J. B. An Analytical Solver for the Multi-Group Two-Dimensional Neutron-Diffusion Equation by Integral Transform Techniques. **II Nuovo Cimento**, v.33, p.63–70, 2010.

BRASIL. Senado Federal. Subsecretaria de Edições Técnicas. **Protocolo de Quioto e legislação correlata**, v.3, Brasília: Subsecretaria de Edições Técnicas do Senado Federal, 2004.

BRASIL NUCLEAR. Por uma política de estado para a energia nuclear. **Revista Brasil Nuclear**, ano 20, n. 44, 2015.

BURDEN, R. L.; FAIRES, J. D. **Análise Numérica**. São Paulo: Cengage Learning, 2008.

CASE, K. M.; ZWEIFEL, P. F. **Linear Transport Theory**. Massachusetts: Addison-Wesley, 1967.

CAVDAR, S.; OZGENER, H. A. A finite element/boundary element hybrid method for 2-D neutron diffusion calculations. **Annals of Nuclear Energy**, v.31, p.1555–1582, 2004.

CEOLIN, C. A Equação Unidimensional de Difusão de Nêutrons com Modelo Multigrupo de Energia e Meio Heterogêneo: avaliação do Fluxo para Problemas Estacionários e de Cinética. 2014. Tese de Doutorado — UFRGS, Porto Alegre/RS.

CEOLIN, C.; SCHRAMM, M.; BODMANN, B. E. J.; VILHENA, M. T.; LEITE, S. Q. B. On an Analytical Evaluation of the Flux and Dominant Eigenvalue Problem for the Steady State Multi-group Multi-layer Neutron Diffusion Equation. **Kerntechnik**, v.79, p.430–435, 2014.

DEBNATH, L.; BHATTA, D. Integral Transforms and their Applications. 3.ed. New York: CRC Press, 2015.

DUDERSTADT, J.; HAMILTON, L. **Nuclear Reactor Analysis**. New York: John Wiley & Sons, 1976.

EDWARDS, C. H.; PENNEY, D. E. Calculus. 6.ed. Athens: Pearson, 2002.

FILHO, J. F. P. Abordagens espectronodais para modelos multidimensionais em transporte de partículas. 2012. Tese de Doutorado — UFRGS, Porto Alegre/RS.

GONÇALVES, G. A. Solução Analítica da Equação do Transporte de Partículas Neutra em Geometria Cartesiana e Cilíndrica. 2003. Tese de Doutorado — UFRGS, Porto Alegre/RS.

HAN, S.; DULLA, S.; RAVETTO, P. Computational Methods for Multidimensional Neutron Diffusion Problems. **Science and Technology of Nuclear Installations**, v.2009, p.11, ID 973605, 2009.

HEINEN, I. R. Soluções Analíticas da Equação de Difusão de Nêutrons Perturbativa Geral pelas Técnicas das Transformadas Integrais. 2009. Tese de Doutorado — UFRGS, Porto Alegre/RS.

HOSSEINI, S. A.; VOSOUGHI, N. A Boundary Element-Response Matrix Method for the Multigroup Neutron Diffusion Equations. **Annals of Nuclear Energy**, v.51, p.213–226, 2013.

LAMARSH, J. R. Introduction to Nuclear Reactor Theory. New York: Wesley publishing company, 1966.

LAZZARI, L. Solução da Equação de Transporte de Nêutrons para um Cilindro de Comprimento Infinito com Espalhamento Anisotrópico. 2016. Dissertação de Mestrado — UFPel, Pelotas/RS.

LEMOS, R. S. M. Solução Analítica das Equações Difusivas da Teoria Geral de Perturbação pelo Método da Transformada de Laplace. 2005. Tese de Doutorado — UFRGS, Porto Alegre/RS.

LEWIS, E. E. **Fundamentals of Nuclear Reactor Physics**. Oxford: Elsevier's Science and Technology, 2008.

MAIANI, M.; MONTAGNINI, B. A Boundary Element-Response Matrix Method for the Multigroup Neutron Diffusion Equations. **Annals of Nuclear Energy**, v.26, p.1341–1369, 1999.

OLIVEIRA, C. R. E. de. **Solução das Equações Multigrupo-Difusão pelo Método de Matrizes Resposta**. 1980. Tese de Doutorado — COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro/RJ.

PEDRON, I. T.; MENDES, R. S. Difusão anômala e equações generalizadas de difusão. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v.27, p.251–258, 2005.

PETERSEN, C. Z.; CEOLIN, C.; SCHRAMM, M.; VILHENA, M. T.; BODMANN, B. E. J. Solução da Equação de Difusão de Nêutrons em Geometria Retangular pela Técnica da Diagonalização de Matrizes. **Congresso Ibero-Latino-Americana de Métodos Computacionais em Engenharia (XXXI CILAMCE)**, Buenos Aires, v.29, p.2475—2482, 2010.

POLLARD, J. P. AUS Diffusion Module POW Checkout - 1- and 2- Dimensional Kinetics Calculations. **Australian Atomic Energy Commission E387**, p.56, 1977.

REZENDE, V. **O Método de Galerkin**. 2005. Dissertação de Mestrado — UEM, Maringa/PR.

ROKROK, B.; MINUCHEHR, H.; ZOLFAGHARI, A. Element-free Galerkin modeling of Neutron Diffusion Equation in X-Y Geometry. **Annals of Nuclear Energy**, v.43, p.39–48, 2012.

ROSA, L. P. Geração hidrelétrica, termelétrica e nuclear. **Estudos Avançados**, São Paulo, v.21, p.39–58, 2007.

SCHRAMM, M. An algorithm to Multi-Group Two-Dimensional Neutron Diffusion Kinetics in Nuclear Reactor Cores. 2016. Tese de Doutorado — UFRGS, Porto Alegre/RS.

SCHRAMM, M.; PETERSEN, C. Z.; VILHENA, M. T.; BODMANN, B. E. J.; ALVIM, A. C. M. **On the Fractional Neutron Point Kinetics Equations**. Springer/Birkhauser, New York: Integral Methods in Science and Engineering: Techniques and Applications, Organized by: C. Constanda; B. E. J. Bodmann; H. F. C. Velho, 2013. p.229–243.

SILVA, A. C. da; MARTINEZ, A. S.; GONÇALVES, A. C. Reconstruction of the Neutron Flux in a Slab Reactor. **World Journal of Nuclear Science and Technology**, v.2, p.181–186, 2012.

STACEY, W. M. Nuclear Reactor Physics. New York: John Wiley & Sons, 2001.

TOMASCHEWSKI, F. K. Método Analítico de Solução das Equações da Cinética na Formulação SN de Transporte de Nêutrons em Geometria Unidimensional e Multigrupo de Energia. 2016. Tese de Doutorado — UFRGS, Porto Alegre/RS.

UNITED NATIONS. **Paris Agreement**. 2015. Disponível em: http://unfccc.int/files/essential_background/convention/application/pdf/english_paris_agreement.pdf, Acesso em: 23 jul. 2016.

VOSOUGHI, N.; SALEHI, A. A.; SHAHRIARI, M. Discrete Formulation for Two-dimensional Multigroup Neutron Diffusion Equations. **Annals of Nuclear Energy**, v.31, p.231–253, 2004.

APÊNDICE A TIPOS DE REATOR

Segundo relatório da Agência Internacional de Energia Atômica (2015), até inicio de 2015 haviam 438 reatores geradores de energia elétrica em operação no mundo, sendo estes classificados em 6 tipos:

- PWR Pressure Water Reactor (Reator de água pressurizada) com 277 reatores;
- BWR Boiling Water Reactor (Reator de água em ebulição) com 80 reatores;
- HTGR High Temperature Gás-cooled Reactor (Reator de alta temperatura refrigerado a gás) com 15 reatores;
- PHWR Pressurized Heavy Water Reactor (Reator de água pesada pressurizada) com 49 reatores;
- LWGR Light Water Graphite Reactor (Reator a água leve e grafite) com 15 reatores;
- FBR Fast Breeder Reactor (Reator reprodutor rápido) com 2 reatores.

Pode-se observar que grande maioria dos reatores são do tipo PWR, dentre estes estão os dois brasileiro: Angra I e II. Em um futuro próximo, o Brasil terá outro, Angra III, que está em construção. Este tipo de reator utiliza o urânio enriquecido¹ como combustível e água comum como refrigerante e moderador. O núcleo do reator, local onde ocorre a reação de fissão em cadeia responsável por todo processo de produção de energia, é formado por diversas regiões homogêneas, como pode ser observado na Figura 20.

¹Nos reatores PWR, que não possuem fonte externa, a fissão ocorre pelo processo da reação em cadeia, para isto é necessário um maior porcentual de U-235 do que aquele encontrado na natureza. O produto do processo de aumento deste percentual é chamado urânio enriquecido.

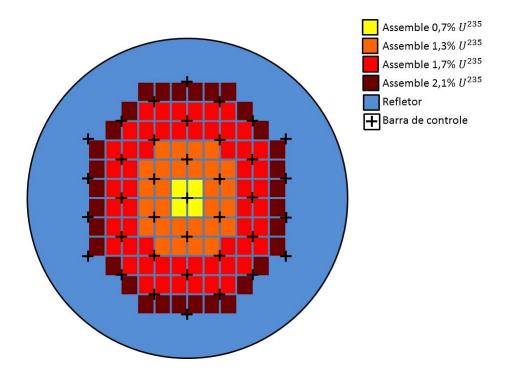


Figura 20: Vista superior do nucleo de um reator hipotético.

Cada uma destas regiões quadradas são chamadas células combustíveis (*assembles*), Figura 21, que para facilitar os cálculos são consideradas como um único prisma de material homogêneo. Porém, na realidade, estas células são formadas por um conjunto de varetas de zircaloy que em seu interior armazenam as pastilhas combustíveis. O conjunto dessas varetas são firmemente fixadas em uma estrutura metálica mantendo-as separadas e entre elas circula o fluido moderador.



Figura 21: Célula combustivel. Fonte:www.world-nuclear-news.org/

APÊNDICE B COMPARAÇÃO DO FLUXO DE NÊUTRONS COM E SEM INTERPOLAÇÃO

Este apêndice apresenta-se a expressão do fluxo de nêutrons para o caso mais simples que é um problema unidimensional com uma região e um grupo de energia, visto que se torna muito trabalhoso para casos mais complexos. Este problema possui um domínio $0 \le x \le 30cm$, condições de contorno $\frac{d}{dx}\phi(0) = 0$ e $\phi(30) = 0$ e parâmetros nucleares dados na Tabela 25.

Tabela 25: Parâmetros nucleares.

$$egin{array}{cccc} D & \Sigma_R &
u \Sigma_f \ 1 & 0.18 & 0.2 \ \end{array}$$

Ao utilizar os critérios de parada, $\epsilon_1=\epsilon_2=10^{-3}$, a expressão do fluxo de nêutrons é dada da seguinte forma:

$$\begin{split} \phi(x) &= 1, 5 - 0, 014 \cosh(\sqrt{0,18}x) + 0, 002x \operatorname{senh}(\sqrt{0,18}x) - 1, 8 \times 10^{-4}x^2 \cosh(\sqrt{0,18}x) + \\ &+ 8, 1 \times 10^{-6}x^3 \operatorname{senh}(\sqrt{0,18}x) - 2, 2 \times 10^{-7}x^4 \cosh(\sqrt{0,18}x) + 4, 1 \times 10^{-9}x^5 \operatorname{senh}(\sqrt{0,18}x) + \\ &- 4, 6 \times 10^{-11}x^6 \cosh(\sqrt{0,18}x) + 3, 1 \times 10^{-13}x^7 \operatorname{senh}(\sqrt{0,18}x) - 8, 9 \times 10^{-16}x^8 \cosh(\sqrt{0,18}x), \end{split}$$

onde as constantes que antecedem cada termo são valores arredondados.

Com a finalidade de comparação, implementa-se este mesmo problema utilizando o MPFF. Para este método aplica-se $\Delta x=1cm$ e interpolação polinomial de quarta ordem para cada região fictícia. Na Tabela 26 observa-se a comparação dos valores do fluxo de nêutrons e o valores do K_{eff} .

Tabela 26: Valores do fluxo de nêutrons e autovalores dominantes (K_{eff}) .

x	Sem interpolar	Com MPFF	Diferença absoluta
0	1,46141312	1,46141398	8,6 x 10 ⁻⁷
5	1,45000179	1,45000259	8,0 x 10 ⁻⁷
10	1,40354357	1,40354395	3,8 x 10 ⁻⁷
15	1,28293109	1,28293055	5,4 x 10 ⁻⁷
20	1,02604602	1,02604518	8,4 x 10 ⁻⁷
25	0,58538264	0,58538295	3,1 x 10 ⁻⁷
30	0,00000000	0,00000000	0,0000000
K_{eff}	1,0883484198	1,08834848194	6,2 x 10 ⁻⁸