

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PELOTAS
Centro de Desenvolvimento Tecnológico
Programa de Pós-Graduação em Computação



Tese

**Análise da solução de equações lineares com coeficientes intervalares em
diferentes aritméticas intervalares**

Alice Fonseca Finger

Pelotas, 2019

Alice Fonseca Finger

**Análise da solução de equações lineares com coeficientes intervalares em
diferentes aritméticas intervalares**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Computação da Universidade Federal de Pelotas, como requisito parcial à obtenção do título de Doutor em Ciência da Computação

Orientadora: Profa. Dra. Aline Brum Loreto

Pelotas, 2019

Universidade Federal de Pelotas / Sistema de Bibliotecas
Catalogação na Publicação

F498a Finger, Alice Fonseca

Análise da solução de equações lineares com coeficientes intervalares em diferentes aritméticas intervalares / Alice Fonseca Finger ; Aline Brum Loreto, orientadora. — Pelotas, 2019.

108 f. : il.

Tese (Doutorado) — Programa de Pós-Graduação em Computação, Centro de Desenvolvimento Tecnológico, Universidade Federal de Pelotas, 2019.

1. Aritmética de moore. 2. Aritmética rdm. 3. Aritmética de markov. 4. Aritmética affine. 5. Aritmética intervalar restrita. I. Loreto, Aline Brum, orient. II. Título.

CDD : 005

Alice Fonseca Finger

Análise da solução de equações lineares com coeficientes intervalares em diferentes aritméticas intervalares

Tese aprovada, como requisito parcial, para obtenção do título de Doutor em Ciência da Computação no Programa de Pós-Graduação em Computação da Universidade Federal de Pelotas.

Data da Defesa: 05 de abril de 2019

Banca Examinadora:

Profa. Dra. Aline Brum Loreto (orientadora, PPGC/UFPel)

Profa. Dra. Renata Hax Sander Reiser (PPGC/UFPel)

Prof. Dr. Carlos Amaral Hölbig (UPF)

Profa. Dra. Maria das Graças dos Santos (Unicap)

AGRADECIMENTOS

Agradeço imensamente à minha família, que nunca mediu esforços para poder me dar todo suporte na realização de mais essa etapa. Obrigada mãe, pai e irmã. Vocês foram fundamentais para que eu chegasse ao fim do doutorado.

Ao meu noivo Julio, que sempre torceu por mim e foi um dos maiores incentivadores para a conclusão deste trabalho, agradeço todo carinho, dedicação e paciência.

À minha orientadora, comadre e amiga Aline, só tenho a agradecer pela confiança, compreensão e dedicação que teve comigo durante esses três anos.

Aos amigos e colegas que sempre torceram por mim, meu muito obrigada, em especial aos colegas docentes da Unipampa, que foram unânimes em apoiar meu afastamento para conclusão do doutorado. Obrigada pela confiança e suporte neste período.

RESUMO

FINGER, Alice Fonseca. **Análise da solução de equações lineares com coeficientes intervalares em diferentes aritméticas intervalares**. 2019. 109 f. Tese (Doutorado em Ciência da Computação) – Programa de Pós-Graduação em Computação, Centro de Desenvolvimento Tecnológico, Universidade Federal de Pelotas, Pelotas, 2019.

Quando se trabalha com números de ponto flutuante o resultado é apenas uma aproximação de um valor real e erros gerados por arredondamentos ou por instabilidade dos algoritmos podem levar a resultados incorretos. Utilizando-se intervalos para representação dos números reais, é possível controlar a propagação desses erros. A aritmética intervalar mais conhecida e utilizada na literatura surgiu em 1966, definida por Moore. Porém, trabalhos recentes mostram diferentes aritméticas intervalares sendo aplicadas no lugar da aritmética de Moore, uma vez que ela apresenta diversas restrições, retornando muitas vezes resultados incompletos, inclusive em equações simples, como no caso das equações lineares. Diante de diversas aritméticas intervalares presentes na literatura, o objetivo principal da tese é analisar as soluções de equações lineares com coeficientes intervalares nas seguintes aritméticas: Moore com Teoria das Aproximações Intervalares, Markov, *Affine*, *Constrained Interval Arithmetic* e *Relative Distance Measure* e investigar qual provê uma solução completa para resolver tais equações. As análises das formas genéricas de solução das equações lineares, juntamente com a aplicação de um exemplo numérico demonstram que, para as equações lineares $A + X = B$, $AX + B = C$, $AX + BX = C$ e $AX + B = CX + D$ somente as aritméticas de Moore com Teoria das Aproximações Intervalares, CIA e RDM retornam solução completa para as quatro equações. Com a finalidade de complementar este resultado, desenvolvemos análise de complexidade de cada solução completa nas aritméticas intervalares de Moore com Teoria das Aproximações Intervalares, CIA e RDM para investigar o esforço computacional de computar cada solução, obtendo como resultado para aritmética de Moore com Teoria das Aproximações Intervalares, ordem constante de complexidade, e ordem linear para as aritméticas CIA e RDM. Além disso, é importante observar que o problema de calcular a solução completa para equações lineares com coeficientes intervalares é dito tratável ou computável. Após as análises das soluções e complexidade verifica-se que a aritmética de Moore, sempre que possível, deve ser utilizada para obter a solução completa. Já nos casos onde Moore não retorna solução completa, CIA e RDM são as aritméticas indicadas para solução.

Palavras-Chave: aritmética de moore; aritmética rdm; aritmética de markov; aritmética affine; aritmética intervalar restrita

ABSTRACT

FINGER, Alice Fonseca. **Analysis of the solution of linear equations with interval coefficients in different interval arithmetics**. 2019. 109 f. Tese (Doutorado em Ciência da Computação) – Programa de Pós-Graduação em Computação, Centro de Desenvolvimento Tecnológico, Universidade Federal de Pelotas, Pelotas, 2019.

When working with floating point numbers the result is only an approximation of a real value and errors generated by rounding or by instability of the algorithms that can lead to incorrect results. Using intervals for the representation of real numbers, it is possible to control this error propagation. The most widely used interval arithmetic in literature came in 1966, defined by Moore. However, recent papers show different interval arithmetic applied in place of the Moore's arithmetic, since it has several faults, often returning incomplete results, including in simple equations, as in the case of linear equations. With several interval arithmetics present in the literature the main objective of the thesis is to analyze the solutions of linear equations with interval coefficients in the following arithmetic: Moore with Interval Approximation Theory, Markov, *Affine*, *Constrained Interval Arithmetic*, and *Relative Distance Measure* and investigate which provides a correct solution to solve these equations. The analyzes of the generic solution forms of the linear equations, together with the application of a numerical example demonstrate that, for the linear equations $AX + B = C$, $AX + BX = C$ and $AX + B = CX + D$, only Moore's arithmetic with Interval Approximation Theory, CIA and RDM returns complete solution for the four equations. In order to complement this result, we developed analysis of the complexity of each correct solution in arithmetic intervals of Moore with Interval Approximation Theory, CIA and RDM to investigate the computational effort to compute each solution, obtaining as a result for Moore's arithmetic, constant order of complexity, and linear order for the CIA and RDM arithmetics. Moreover, it is important to note that the problem of calculating the correct solution for linear equations with interval coefficients is said treatable or computable. After analyzing the solutions and complexity it is verified that Moore's arithmetic, whenever possible, must be used to obtain the complete solution. In cases where Moore does not return a complete solution, CIA and RDM are the arithmetic indicated for solution.

Keywords: moore's arithmetic; rdm arithmetic; markov arithmetic; affine arithmetic; constrained interval arithmetic

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Avaliação intervalar da função $f(x) = x^2$ para o intervalo $[-1,2]$. . .	18
Figura 2	Resultado conjunto solução tridimensional C utilizando aritmética RDM.	47
Figura 3	Solução unidimensional para o conjunto C	47

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	Multiplicação intervalar conforme definido por Kaucher	27
Tabela 2	Representação do intervalo em diferentes aritméticas intervalares	40
Tabela 3	Operações intervalares	41
Tabela 4	Propriedades algébricas das aritméticas intervalares	42
Tabela 5	Possíveis Valores de α para diferentes valores de variáveis RDM	49
Tabela 6	Resultados da aplicação dos intervalos $A = [1, 5]$ e $B = [2, 9]$ na equação $A + X = B$ em diferentes aritméticas	68
Tabela 7	Resultados da aplicação dos intervalos $A = [-4, -3]$, $B = [1, 2]$ e $C = [7, 8]$ na equação $AX + B = C$ em diferentes aritméticas	74
Tabela 8	Resultados da aplicação dos intervalos $A = [4, 9]$, $B = [-2, 1]$ e $C = [-2, 5]$ na equação $AX + BX = C$ em diferentes aritméticas	78
Tabela 9	Resultados da aplicação dos intervalos $A = [3, 5]$, $B = [-2, 1]$, $C = [-6, -4]$ e $D = [2, 8]$ na equação $AX + B = CX + D$ em diferentes aritméticas	83
Tabela 10	Soluções da equação linear $A + X = B$ nas aritméticas de Moore com a Teoria das Aproximações Intervalares e Markov.	84
Tabela 11	Soluções da equação linear $A + X = B$ nas aritméticas <i>Affine</i> , CIA e RDM.	84
Tabela 12	Solução da equação linear $AX + B = C$ na aritmética de Moore com a Teoria das Aproximações Intervalares.	84
Tabela 13	Soluções da equação linear $AX + B = C$ nas aritméticas Markov, <i>Affine</i> , CIA e RDM.	85
Tabela 14	Solução da equação linear $AX + BX = C$ na aritmética de Moore com a Teoria das Aproximações Intervalares.	86
Tabela 15	Soluções da equação linear $AX + BX = C$ nas aritméticas Markov, <i>Affine</i> , CIA e RDM.	86
Tabela 16	Solução da equação linear $AX + B = CX + D$ na aritmética de Moore com a Teoria das Aproximações Intervalares.	87
Tabela 17	Soluções da equação linear $AX + B = CX + D$ nas aritméticas Markov, <i>Affine</i> , CIA e RDM.	87
Tabela 18	Resumo dos resultados da aplicação dos intervalos em diferentes aritméticas	88
Tabela 19	Complexidade computacional das formas e aritméticas das soluções completas para as equações lineares	100

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

AA	<i>Affine Arithmetic</i>
CIA	<i>Constrained Interval Arithmetic</i>
RDM	<i>Relative Distance Measure</i>
SIA	<i>Standard Interval Arithmetic</i>
SLCIA	<i>Single Level Constrained Interval Arithmetic</i>
TAI	Teoria das Aproximações Intervalares

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
1.1	Objetivos	15
1.2	Organização do trabalho	15
2	ARITMÉTICAS INTERVALARES	16
2.1	Soluções intervalares: interpretações	16
2.2	Aritmética de Moore	20
2.3	Aritmética de Kaucher	25
2.4	Aritmética Intervalar de Markov	27
2.5	Aritmética <i>Affine</i>	28
2.6	<i>Constrained Interval Arithmetic</i> (CIA)	31
2.7	<i>Single Level Constrained Interval Arithmetic</i> (SLCIA)	33
2.8	<i>Relative Distance Measure</i> (RDM)	37
2.9	Diferença e divisão de Hukuhara	39
2.10	Trabalhos relacionados	43
2.10.1	<i>A new method for solving interval and fuzzy equations: Linear case</i>	43
2.10.2	<i>Computing with words with the use of inverse RDM models of membership functions</i>	45
2.10.3	<i>A new approach to diabetic control - human glucose metabolism using interval arithmetic</i>	48
2.10.4	<i>RDM interval method for solving quadratic interval equation</i>	49
2.11	Considerações do capítulo	50
3	SOLUÇÃO DE EQUAÇÕES LINEARES COM COEFICIENTES INTERVALARES EM DIFERENTES ARITMÉTICAS	52
3.1	Equações lineares	52
3.2	Equação: $A + X = B$	56
3.2.1	Moore	56
3.2.2	Markov	59
3.2.3	Affine	63
3.2.4	CIA	65
3.2.5	RDM	67
3.3	Equação: $AX + B = C$	68
3.3.1	Moore	69
3.3.2	Markov	70
3.3.3	Affine	70
3.3.4	CIA	71

3.3.5	RDM	72
3.4	Equação: $AX + BX = C$	74
3.4.1	Moore	74
3.4.2	Markov	75
3.4.3	Affine	76
3.4.4	CIA	76
3.4.5	RDM	77
3.5	Equação: $AX + B = CX + D$	79
3.5.1	Moore	79
3.5.2	Markov	80
3.5.3	Affine	80
3.5.4	CIA	81
3.5.5	RDM	82
3.6	Considerações do capítulo	90
4	ANÁLISE DE COMPLEXIDADE DAS FORMAS DE SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES LINEARES EM DIFERENTES ARITMÉTICAS	92
4.1	Equação $A + X = B$	94
4.2	Equação $AX + B = C$	95
4.3	Equação $AX + BX = C$	97
4.4	Equação $AX + B = CX + D$	98
4.5	Considerações do capítulo	101
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	102
5.1	Trabalhos futuros	103
	REFERÊNCIAS	105

1 INTRODUÇÃO

Os sistemas de computador operam com uma aritmética chamada de ponto flutuante. É conhecido que a máquina opera com um tamanho limitado para representação numérica e, por isso, nem sempre é possível representar um valor numérico em sua completa forma. Para que possa ser representado, a máquina acaba normalizando esse valor de uma maneira que seja possível representá-lo (RUGGIERO; LOPES, 1996).

No processo de resolução de problemas podem ser constatadas fontes de erros, tais como: propagação dos erros nos dados iniciais; erros de arredondamento e erros de truncamento. Se considerarmos que esses erros podem ocorrer em sistemas críticos, onde a exatidão numérica é fundamental, observamos a desvantagem em trabalhar com aritmética real.

Neste contexto, percebe-se a importância de técnicas intervalares. Ressalta-se que uma resposta intervalar carrega com ela a garantia de sua incerteza. Um valor pontual não carrega medidas de sua incerteza. Mesmo quando uma análise de sondagem do erro é executada, o número resultante é somente uma estimativa do erro que pode estar presente.

A utilização de intervalos remonta dos primórdios da humanidade, sendo seu conceito utilizado por muitos matemáticos, mesmo antes da era cristã (DENISS D.; KREINOVICH V.; RUMP, 1998). No entanto, os primeiros relatos de desenvolvimento de uma aritmética entre intervalos são referidos a partir do trabalho de Burkill, em 1924, e Young, em 1931, e mais efetivamente a partir dos trabalhos de Sunaga (1958) e de Moore (1966).

A análise intervalar surgiu com o objetivo inicial de controlar a propagação de erros numéricos em procedimentos computacionais. Intervalos automatizam a análise do erro computacional, ou seja, através de sua utilização, tem-se um controle automático de erros com limites confiáveis.

Segundo Ratscheck (1988), é uma das maiores curiosidades da aritmética intervalar que diferentes expressões para uma e mesma função f leva a expressões intervalares as quais também são diferentes como funções.

Exemplo: Se $f_1(x) = x - x^2$ e $f_2(x) = x(1 - x)$ então $f_1(x)$ e $f_2(x)$ são expressões diferentes, mas iguais como funções. Ainda, $f_1(Y)$ e $f_2(Y)$ são diferentes como funções intervalares, isto é, se $Y = [0, 1]$, então $f_1(Y) = Y - Y^2 = [-1, 1]$, $f_2(Y) = Y(1 - Y) = [0, 1]$. Para comparação, $\square f(Y) = [0, 1/4]$.

Portanto, é um problema muito importante e desafiador encontrar expressões para uma determinada função que levem às melhores extensões intervalares possíveis, isto é, $f(Y)$ deve aproximar $\square f(Y)$ tanto quanto possível (RATSCHEK; ROKNE, 1988).

Nas referências bibliográficas a maioria dos trabalhos trazem aplicações e estudos teóricos envolvendo a aritmética convencional de Moore (MOORE, 1966). Porém, estudos mais recentes (a partir do ano de 2013) provam que a abordagem da aritmética convencional possui restrições e não retorna resultados corretos em todos os casos em que é aplicada.

Além disso, essa aritmética causa muitos paradoxos que são descritos na literatura, por exemplo, por Sevastjanov e Dymova (2009). Algumas restrições da aritmética intervalar de Moore são: efeito do excesso de largura do intervalo; problema da dependência de dados; dificuldades para resolver equações intervalares mais simples; problemas com os lados direito das equações intervalares; soluções com intervalo impróprio e solicitações para introduzir entropia negativa no sistema.

Com a finalidade de contornar esses problemas extensões da aritmética de Moore e outras aritméticas intervalares foram definidas, como: aritmética de Kaucher (KAUCHER, 1980); aritmética intervalar de Markov (MARKOV, 1979); aritmética *Affine* (FIGUEIREDO; STOLFI, 2004); aritmética intervalar Restrita (CIA) (LODWICK, 1999); aritmética intervalar Restrita *Single Level* (SLCIA) (CHALCO-CANO; LODWICK; BEDE, 2014) e *Relative Distance Measure* (RDM) (A. PIEGAT, 2012).

Dentre as diversas soluções ou implementações para determinado problema, muitas vezes é preciso escolher a mais eficiente. Para isso, existe a análise de algoritmos, a qual tem como objetivo melhorar, se possível, seu desempenho e escolher, entre os algoritmos disponíveis, o melhor. Existem vários critérios de avaliação de um algoritmo como: quantidade de trabalho requerido, quantidade de espaço requerido, simplicidade, exatidão de resposta e otimalidade (TOSCANI; VELOSO, 2001).

A partir dos problemas apresentados com o uso da aritmética convencional e diante de diferentes aritméticas intervalares existentes na literatura, a presente tese visa investigar qual ou quais aritméticas intervalares retornam solução completa para o problema de computar equações lineares com coeficientes intervalares com um menor esforço computacional.

1.1 Objetivos

O trabalho possui como objetivo principal investigar dentre as diferentes aritméticas intervalares (Moore, Markov, CIA, Affine e RDM) qual provê a solução completa para resolver equações lineares com coeficientes intervalares. Após, verificar a complexidade de cada solução para analisar o custo computacional e mostrar se a aritmética que retorna o melhor resultado para o problema também tem o custo computacional mais baixo.

Para alcançar o objetivo principal da tese, os seguintes objetivos específicos serão desenvolvidos:

- elencar diferentes tipos de equações lineares matemáticas, que posteriormente serão aplicadas nas aritméticas intervalares em estudo;
- apresentar formas de solução para cada equação em estudo, com o intuito de verificar qual ou quais aritméticas retornam solução completa;
- analisar o esforço computacional do problema de calcular o intervalo resultante de cada solução na aritmética intervalar que retorna a solução completa, por meio de pseudocódigos.

1.2 Organização do trabalho

A presente tese está organizada da seguinte forma:

O Capítulo 2 apresenta a fundamentação teórica, onde conceitos importantes para o desenvolvimento da tese são apresentados. Em seguida é apresentada a aritmética intervalar mais conhecida e utilizada na literatura, a chamada aritmética convencional ou aritmética de Moore e da Teoria das Aproximações Intervalares (TAI), uma definição importante para o desenvolvimento da tese. Após, são destacadas e resumidamente definidas as diferentes aritméticas intervalares, bem como extensões da aritmética de Moore. Por fim, o capítulo resume um levantamento de trabalhos mais atuais com o tema das diferentes aritméticas intervalares.

A contribuição da tese é descrita no Capítulo 3, com a demonstração das soluções para as equações lineares em diferentes aritméticas intervalares.

No Capítulo 4 apresenta-se uma análise de complexidade das soluções do capítulo anterior.

A conclusão do trabalho é descrita no Capítulo 5, seguida das principais referências bibliográficas.

2 ARITMÉTICAS INTERVALARES

O presente capítulo tem como objetivo destacar alguns conceitos relevantes sobre aritmética intervalar em geral, bem como definir e apresentar termos que serão utilizados ao longo do texto. Um ponto importante a ser considerado aqui será a interpretação do conceito de intervalo, o qual é apresentado de maneiras diferentes por alguns autores.

Após, são apresentadas as aritméticas intervalares mais utilizadas na literatura, bem como algumas chamadas de extensões da aritmética de Moore.

Toda as definições aqui apresentadas serão importantes para o entendimento do desenvolvimento dos próximos capítulos que tratam da aplicação direta dessas aritméticas.

Por fim, o capítulo aborda os principais trabalhos que nortearam o desenvolvimento da tese, contribuindo principalmente com o entendimento do problema e busca pela solução.

2.1 Soluções intervalares: interpretações

A corretude na aritmética intervalar significa que a avaliação do intervalo de qualquer expressão deve gerar um intervalo contendo todos os valores possíveis em termos de reais (HICKEY; JU; EMDEN, 2001). Já a otimalidade significa dizer que o intervalo de ponto flutuante computado não tem diâmetro maior do que o necessário. Em alguns casos, a diferença que a otimalidade faz é tão pequena que requer que um determinado ponto final de um intervalo seja aberto em vez de fechado.

Embora a otimização seja perdida para expressões com variáveis repetidas, existe uma infinidade de técnicas clássicas para transformar expressões de modo a minimizar a superestimação resultante da avaliação do intervalo. (HICKEY; JU; EMDEN, 2001).

Quando estamos utilizando aritmética intervalar no lugar da real, o que queremos são soluções mais seguras, em termos de resultado correto, mas vai muito além disso, precisamos garantir a corretude e buscamos por uma otimalidade, visto que um inter-

valo pequeno e correto será mais favorável do que um intervalo correto e grande.

Segundo Vaccaro (2001), a interpretação usualmente aceita para um intervalo no contexto da aritmética intervalar é a de envoltória intervalar de um número real. Esta interpretação pode ser definida como segue:

Definição 1. (*Envoltória Intervalar de Reais*) (VACCARO, 2001): Segundo a semântica de envoltória intervalar de reais, um intervalo de reais representa um número real sujeito a incertezas, isto é, $\forall x \in \mathbb{R}, x \in [a; b] \leftrightarrow [a; b]$ representa x .

Assim, por exemplo, o intervalo $[3.1, 3.2]$ é capaz de representar o número real π , considerando-se uma aritmética de ponto flutuante com precisão 2 e número de ponto flutuante normalizado (VACCARO, 2001).

Vaccaro ainda aponta dois pressupostos em relação à compreensão da definição de envoltória intervalar:

- Qualquer real pertencente à envoltória intervalar de reais é um possível representante do valor real exato associado ao intervalo: como o valor exato do número real que se deseja representar não é explicitamente conhecido, então todos os números reais contidos na envoltória intervalar são possíveis representantes deste valor real. Isto é, o valor real exato continua indeterminado, porém restrito ao domínio dos valores reais que compõem a envoltória intervalar;
- Com a utilização de envoltórias intervalares espera-se modelar e determinar o efeito da propagação de erros em procedimentos de cálculo numérico em ponto flutuante.

Compreender o que foi citado acima é importante, pois se reflete diretamente na estruturação das operações definidas sobre o tipo de dado intervalar. Por exemplo, segundo essa interpretação a avaliação de uma função real através do uso de argumentos intervalares tem por objetivo determinar a propagação do erro de arredondamento na presença de incertezas (VACCARO, 2001).

Para exemplificar, abaixo apresenta-se a operação de multiplicação de envoltórias intervalares.

Definição 2. (*Operação aritmética de multiplicação entre intervalos*) (VACCARO, 2001): Para $X \in \mathbb{IR}$ e $Y \in \mathbb{IR}$, $X \times Y = \{a \times b \in \mathbb{R} \mid a \in X \wedge b \in Y\}$.

Porém, segundo Vaccaro (2001), pelo que foi apresentado acima, era esperado que o produto de uma envoltória intervalar por si própria resultasse em $X^2 = \{a^2 \in \mathbb{R} \mid a \in X\}$.

Por exemplo, seja $X = [-1, 2]$, $X \times X = [-1, 2] \times [-1, 2] = \{a \times b \in \mathbb{R} \mid a \in [-1, 2] \wedge b \in [-1, 2]\} = [-2, 4]$.

No entanto, pela interpretação de envoltória intervalar, sabe-se que o resultado da operação $X \times X$ não pode conter elementos negativos, já que cada intervalo X representa uma ocorrência do mesmo número real e não teríamos a multiplicação de um número negativo por outro positivo, isto é, o produto $X \times X$ deve representar o produto de dois números reais idênticos, sujeitos a incerteza, ou seja, um número real não negativo. Assim, espera-se que $X^2 = [-1, 2]^2 = [0, 4]$.

Esse resultado não é coerente com a definição de multiplicação apresentada acima, mas o é com a interpretação de avaliação intervalar de uma função real, na qual o intervalo resultante deve ser o formado pela avaliação mínima e máxima da função real equivalente no intervalo de origem, como se pode observar pela Figura 1 (VACCARO, 2001).

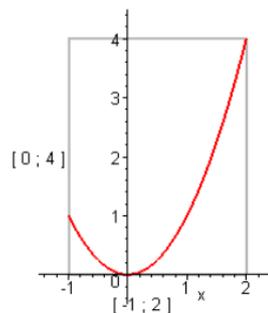


Figura 1 – Avaliação intervalar da função $f(x) = x^2$ para o intervalo $[-1, 2]$

A imposição de que o produto de intervalos iguais possua exatamente as mesmas propriedades de um número real gera uma ruptura com a definição usual da operação de multiplicação, de tal sorte que, algebricamente, fica imposto que $X^2 \neq X \times X$, em geral. De fato, segundo a definição de multiplicação, a igualdade ocorrerá se e somente se $\underline{x} \times \bar{x} \geq 0$, ou seja, se X não contiver simultaneamente elementos positivos e negativos (MOORE, 1966). Para intervalos envolvendo elementos positivos e negativos haverá diferença entre as partes negativas dos intervalos gerados pela multiplicação e pela potência de intervalos.

A segunda interpretação de intervalo que abordaremos será a de número-intervalo, na qual um intervalo é um ente matemático que representa todos os números reais e as inclusões nele contidas. Constitui um tipo de dado diferenciado com relação ao tipo de informação que carrega, ou seja, é um novo tipo de número (MOORE, 1979). Formalmente, a interpretação de número-intervalo pode ser enunciada como segue:

Definição 3. (Número-intervalo): Segundo a semântica de número-intervalo, um intervalo representa todos os intervalos de reais que contém, ou seja, $\forall X \in \mathbb{IR}, X \subseteq [a, b] \Leftrightarrow [a, b]$ representa X .

Assim, pode se dizer que as operações aritméticas entre intervalos podem ser obtidas de forma bastante similar às operações entre vetores.

A interpretação de número-intervalo é mais coerente do ponto de vista da garantia das propriedades algébricas, principalmente ao se considerar o caso particular do produto $X \times X$, que ficaria definido como $X \times X = \{a \times b \in \mathbb{R} \mid a \in X \wedge b \in X\}$, sem a necessidade de imposições adicionais. Segue o exemplo apresentado anteriormente:

$$X = [-1, 2] \Rightarrow X^2 = X \times X = [-1, 2] \times [-1, 2] = [-2, 4]$$

Nesse caso, o produto de um intervalo por si próprio resultou em outro intervalo que contém componentes positivos e componentes negativos. Este é um fato diferente do esperado com números reais. No entanto, nenhuma contradição existe neste fato, uma vez que (VACCARO, 2001):

- Um número-intervalo representa todos os reais e as inclusões nele contidas (e não apenas números reais individualmente selecionados dentro de um domínio de incerteza);
- Não existe equivalente, no conjunto dos números reais, para um intervalo que contenha simultaneamente componentes negativos e componentes positivos: um número real somente pode assumir um dentre os seguintes comportamentos: negativo, nulo (sem sinal) ou positivo. No entanto, o conceito de intervalo excede esta lei, uma vez que permite a existência de intervalos contendo simultaneamente elementos positivos e elementos negativos. Assim, não há comportamento equivalente conhecido nos números reais para o resultado da operação apresentada no exemplo anterior;
- Segundo a Definição 2, a operação de multiplicação entre intervalos determina que o intervalo resultante deve ser aquele limitado pelos valores mínimo e máximo de todos os produtos entre os números reais contidos no primeiro intervalo com os contidos no segundo intervalo; não há menção sobre diferentes procedimentos para o caso específico da operação com intervalos iguais.

Essa interpretação segue a mesma linha de raciocínio proposta inicialmente por Moore (1966), segundo a qual um intervalo é uma fonte de incerteza e deve ser tratada como tal.

Enfim, a interpretação de número-intervalo traz diversas vantagens estruturais por tratar o intervalo como um tipo de dado que estende o conceito de número real do ponto de vista matemático, ou seja, efetivamente opera o intervalo com o conceito de número, em seu sentido mais amplo. Esse tratamento permite identificar a presença das características apresentadas acima, bem como sua coerência estrutural com as operações definidas originalmente para o tipo intervalar, e mostra-se mais abrangente que a semântica de envoltória intervalar de reais por permitir a efetiva operação com domínios compactos (VACCARO, 2001).

O trabalho de Vaccaro (2001) deixa bem claro como ocorre a limitação nas operações da aritmética de Moore e sua relação com a envoltória intervalar. Ele conclui que as operações de subtração, multiplicação e divisão de intervalos estão bem definidas se considerada a interpretação de número-intervalo, mas não se aplicam para a interpretação de envoltória intervalar de reais, uma vez que não comungam das propriedades básicas das operações entre números reais. Ainda afirma que qualquer iniciativa no sentido de impor restrições sobre as operações e que não envolvam a modificação das definições destas operações resultará sem fundamentação algébrica. Se for desejo representar o comportamento de números reais por intermédio de intervalos, esta representação deverá passar pela utilização de números-intervalo ou pela redefinição das operações algébricas entre intervalos, à exceção da adição, única operação aritmética bem definida para a extensão de números reais através da semântica de envoltória intervalar.

Todas essas afirmações se justificam quando percebemos a grande quantidade de definições diferentes para intervalo que surgem na literatura, juntamente com um conjunto de operações e propriedades que se distinguem de outras aritméticas.

Dentro de um contexto matemático, nem sempre uma única aritmética intervalar é totalmente correta para resolver qualquer operação, equação ou função. Assim, é válida a investigação da melhor solução para determinada equação, função ou operação, uma vez que sabendo qual ou quais aritméticas trazem resultados completos, a certeza de um resultado intervalar com correteza é possível.

2.2 Aritmética de Moore

A aritmética intervalar (MOORE, 1966, 1979; MOORE; KEARFOTT; CLOUD, 2009), também chamada de *Standard Interval Arithmetic (SIA)* é baseada no uso de intervalos fechados $[x_1, x_2]$ de números reais como elementos básicos e sua ideia do ponto de vista computacional, é: dada uma função $f(x)$ de variável real x pertencente a um intervalo $X=[x_1, x_2]$ onde $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, a imagem da f é dada por

$$f(X) = \{y \mid y = f(x), x_1 \leq X \leq x_2 \text{ e } x \in X \},$$

onde esta em geral não é representada exatamente, mas é sempre possível determinar um intervalo $Y = [y_1, y_2]$ tal que $f(X) \subseteq Y$, isto é $y_1 \leq f(x) \leq y_2$. Pode-se então definir uma função intervalar F associada a f pela transformação do intervalo $[x_1, x_2]$ em $[y_1, y_2]$, isto é:

$$f(x) \subseteq F(X) = Y.$$

Esta função F , chamada extensão intervalar de f , deve ser aquela que possui o mínimo possível de diferença da imagem $f(X)$. O erro obtido no cálculo de $f(x)$ a partir do intervalo X é calculado através do diâmetro $w(F(X)) = y_2 - y_1$.

O cálculo de expressões na aritmética intervalar consiste em usar extensão das operações aritméticas junto com um conjunto de funções *standard*.

A aritmética intervalar utiliza um arredondamento especial, chamado arredondamento direcionado (KULISCH; MIRANKER, 1981), o que significa que os resultados são arredondados para o menor e para o maior número de máquina que contém o resultado das operações, obtendo-se com isso um intervalo de máquina, com diâmetro mínimo, no qual a solução se situa.

Uma distinção importante na aritmética intervalar é entre imagem intervalar de uma função e extensão intervalar da função.

Definição 4. *A imagem intervalar de uma função f , contínua no intervalo X , é definida como o intervalo limitado pelo mínimo da imagem de $f(x)$ e pelo máximo da imagem de $f(x)$, sendo x um elemento do intervalo X .*

$$\mathbf{Im} = I(f, X) = [\min\{f(x)|x \in X\}, \max\{f(x)|x \in X\}].$$

Segundo Ferson *et al.* (FERSON; GINZBURG; KREINOVICH, 2002), historicamente, o primeiro método para computar o intervalo solução é a extensão intervalar (MOORE, 1979), ou avaliação intervalar (OLIVEIRA; DIVERIO; CLAUDIO, 1997).

A extensão intervalar é definida da seguinte forma:

Definição 5. *A função $F : \mathbf{I}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbf{I}(\mathbb{R})$ é uma extensão intervalar de uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, se para todo $x \in \mathbb{R}$, $F([x, x]) = [f(x), f(x)]$ (SANTIAGO; BEDREGAL; ACIÓLY, 2006).*

Na computação intervalar, pode-se calcular o intervalo solução $Y = [\underline{y}, \bar{y}] = f(X_1, \dots, X_n)$ através de métodos de aproximação, técnicas de otimização, extensão intervalar e, ainda, por métodos considerados mais sofisticados (KREINOVICH *et al.*, 1998).

Na aritmética intervalar desenvolvida por Moore (MOORE, 1966) todas as operações aritméticas básicas estão definidas e com suas propriedades demonstradas para o tipo intervalo, são elas: adição, subtração, multiplicação e divisão.

Pelas definições de Moore os cálculos com intervalos ocorrem sobre conjuntos, ou seja, quando se realiza uma operação de adição entre dois intervalos, por exemplo, o intervalo resultante é um novo conjunto contendo as adições de todos os pares de números das duas séries iniciais. Nessa aritmética, quando o método de extensão intervalar é aplicado, apenas os extremos do intervalo são considerados, isto é, somente os valores que representam os limites do intervalo são utilizados nos cálculos.

Seja \mathbf{I} um conjunto de intervalos reais $[a, b]$, com $a, b \in \mathbb{R}$. As operações no intervalo \mathbf{I} são definidas pela expressão

Definição 6. *$A * B = \{a * b : a \in A, b \in B\}$ para $A, B \in \mathbf{I}$, onde o símbolo $*$ significa $+$, $-$, \cdot e $/$, e onde, A/B é somente definido se $0 \notin B$.*

A definição acima é motivada pelo fato que os intervalos A e B incluem alguns valores exatos, α e β , respectivamente, do cálculo. Os valores α e β são geralmente não conhecidos. A única informação que normalmente está disponível consiste na inclusão dos intervalos A e B , ou seja, $\alpha \in A$, $\beta \in B$. A partir da Definição 6 segue $\alpha * \beta \in A * B$ que é chamado o *princípio da inclusão da aritmética intervalar*. Isso significa que a soma, a diferença, o produto e o quociente de dois reais pertence a soma, diferença, produto e quociente dos intervalos de inclusão.

Enfatiza-se que o real e suas correspondentes operações intervalares são denotadas pelo mesmo símbolo. Os chamados intervalos degenerados, que são os intervalos que consistem em exatamente um ponto, $[a, a]$, são denotados por a . Expressões como aA , $a + A$, A/a , $(-1)A$, etc. para $a \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{IR}$ são portanto definidas. A expressão $(-1)A$ é escrita como $-A$.

A Definição 6 é não usual em cálculos práticos. Moore (1962) provou que a definição é equivalente às seguintes operações:

- Adição: $[a, b] + [c, d] = [a + c, b + d]$,
- Subtração: $[a, b] - [c, d] = [a - d, b - c]$,
- Multiplicação: $[a, b].[c, d] = [\min(ac, ad, bc, bd), \max(ac, ad, bc, bd)]$,
- Divisão: $[a, b]/[c, d] = [a, b].[1/d, 1/c]$ se $0 \notin [c, d]$.

É importante salientar que $-X$ não é um inverso aditivo para X no sistema de intervalos. De fato, tem-se (MOORE; KEARFOTT; CLOUD, 2009):

$$X + (-X) = [\underline{x}, \bar{x}] + [-\bar{x}, -\underline{x}] = [\underline{x} - \bar{x}, \bar{x} - \underline{x}],$$

e isso é igual a $[0,0]$ somente se $\underline{x} = \bar{x}$. Se X não tem diâmetro zero, então

$$X - X = w(X)[-1, 1], \tag{1}$$

onde $w(X) = [\bar{x} - \underline{x}]$ (diâmetro).

Similarmente, $X/X = 1$ somente se $w(X) = 0$.

Assim, na aritmética convencional de Moore não se tem inversos aditivos ou multiplicativos, exceto para intervalos degenerados. Contudo, sempre tem-se as inclusões $0 \in X - X$ e $1 \in X/X$ (MOORE; KEARFOTT; CLOUD, 2009).

Logo, as regras mostram que subtração e divisão em \mathbb{IR} não são operações inversas da adição e multiplicação, respectivamente, como no caso dos \mathbb{R} .

Por exemplo:

$$\begin{aligned} [0, 1] - [0, 1] &= [-1, 1], \\ [1, 2]/[1, 2] &= [1/2, 2]. \end{aligned}$$

Essas propriedades são umas das principais diferenças entre aritmética intervalar e real. Outra diferença principal é pelo fato de a regra da distributividade da aritmética real não ser válida em geral. Somente a chamada *regra da subdistributividade* apresentada na propriedade M_{p1} .

De acordo com essas propriedades, temos que $(\mathbb{IR}, +, -, \cdot, /)$ não forma um corpo, pois não existem os elementos simétricos da adição e da multiplicação (KORZENOWSKI, 1994).

As seguintes propriedades seguem da Definição 6: Seja $A, B, C, D \in \mathbb{IR}$ e $*$ uma operação aritmética intervalar então:

$$M_{p1}: A(B + C) \subseteq AB + AC;$$

$$M_{p2}: a(B + C) = aB + aC \text{ se } a \in \mathbb{R} \text{ e } B, C \in \mathbb{IR};$$

$$M_{p3}: A + B = B + A;$$

$$M_{p4}: A + (B + C) = (A + B) + C;$$

$$M_{p5}: AB = BA;$$

$$M_{p6}: A(BC) = (AB)C;$$

$$M_{p7}: A \subseteq B, C \subseteq D \text{ implica } A * C \subseteq B * D \text{ (se } B * D \text{ é definido);}$$

$$M_{p8}: (\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A.$$

O trabalho de Korzenowski (1994) apresenta uma nova definição em cima da aritmética convencional de Moore. Utilizaremos essa abordagem na presente tese, visto que propriedades importantes poderão ser utilizadas e serão aplicadas no próximo capítulo.

A definição do espaço intervalar $(\mathbb{IR}, +, \cdot, \sqsubseteq, \equiv_x, \perp)$, onde \perp denota conjunto fechado de todos os números reais e será considerado um intervalo, $\perp = [-\infty, +\infty]$, apresenta a relação \sqsubseteq definida como: Para $X, Y \in \mathbb{IR}$, $X \subseteq Y \leftrightarrow Y \sqsubseteq X$ (KORZENOWSKI, 1994; CLAUDIO, 1994). Assim, $X \sqsubseteq Y$ pode ser interpretado intuitivamente como Y informa mais (ou pelo menos o mesmo) que X a respeito de um real contido em X e Y . Definições e exemplos podem ser verificados em Korzenowski (1994).

Seja o corpo $(\mathbb{IR}, \sqsubseteq, \perp)$, diz-se que $A, B \in \mathbb{IR}$ estão x -relacionados para $x \in \mathbb{R}$ e denota-se por $A \equiv_x B$ se: $A \equiv_x B \leftrightarrow A \sqsubseteq x$ e $B \sqsubseteq x$, ou seja, A e B aproximam x . O elemento indexador (x) pode ser visto como um número não exato, aproximado pelos intervalos A e B . Assim, quando nomeamos um elemento A para a relação \equiv_x , na verdade estamos tratando de uma classe de intervalos que tem a propriedade x (KORZENOWSKI, 1994).

Dado um corpo $(\mathcal{D}, \sqsubseteq, \equiv_x, \perp)$, a relação $X \sqsubseteq Y$ para $X, Y \in \mathcal{D}$ é de qualidade, interpretada como “ Y informa no mínimo tanto quanto X a respeito de um real contido em X e Y ”. Por outro lado, a relação $X \equiv_x Y$, para $X, Y \in \mathcal{D}$ é interpretada como uma relação de aproximação, ou seja, X e Y são aproximações para um real x . De

acordo com as propriedades e demonstrações, conclui-se que essa relação \equiv_x é uma relação semelhante à relação de equivalência (KORZENOWSKI, 1994).

Abaixo apresenta-se um importante teorema da Teoria das Aproximações Intervais:

Teorema 1. (KORZENOWSKI, 1994) *Sejam A e $B \in \mathbb{IR}$, então $\forall \lambda \in A, \delta \in B, A \equiv_{\lambda, \delta} B$ se e somente se $A = B$. $A \equiv_{\lambda, \delta} B \leftrightarrow A \equiv_{\lambda} B \wedge A \equiv_{\delta} B$.*

A partir do que foi exposto no teorema, há uma relação entre a relação de aproximação (\equiv_x) e a igualdade de Moore (=) em \mathbb{IR} .

Propriedades, definições e demonstrações podem ser encontradas no trabalho de Korzenowski (1994).

Importante salientar as propriedades algébricas sobre esse novo espaço intervalar.

$$MA_{p1}: A + B \equiv_{\lambda} B + A, \forall \lambda = a + b, a \in A, b \in B \text{ e } A \cdot B \equiv_{\beta} B \times A, \forall \beta = a \cdot b, a \in A, b \in B;$$

$$MA_{p2}: A + (B + C) \equiv_{\lambda} (A + B) + C, \forall \lambda = a + b + c, a \in A, b \in B, c \in C \text{ e } A \cdot (B \cdot C) \equiv_{\beta} (A \cdot B) \cdot C, \forall \beta = a \cdot b \cdot c, a \in A, b \in B, c \in C;$$

$$MA_{p3}: \exists \mathcal{O} := [0, 0], \forall A \in \mathbb{IR}, \forall a \in A \text{ tal que } A + \mathcal{O} \equiv_a A \text{ e } \exists 1 := [1, 1], \forall A \in \mathbb{IR}, \forall a \in A \text{ tal que } A \cdot 1 \equiv_a A;$$

$$MA_{p4}: \forall A \in \mathbb{IR}, \exists A \in \mathbb{IR}, \text{ tal que } A - A \equiv_0 \mathcal{O} \text{ e } \forall A \in \mathbb{IR}, 0 \notin Ax \text{ tal que } A \cdot 1/A \equiv_1 1;$$

$$MA_{p5}: A(B + C) \equiv_{\lambda} AB + AC, \lambda = a(b + c), a \in A, b \in B, c \in C.$$

Algumas observações são feitas a respeito dessas propriedades: embora os elementos neutro e inverso não sejam únicos, eles são equivalentes em relação a \equiv_x ; as propriedades que as operações $+$ e \cdot de $(\mathbb{IR}, +, \cdot, \sqsubseteq, \equiv_x, \perp)$ possuem se assemelham as de um corpo, por esse motivo denota-se tal estrutura de corpo dinâmico (KORZENOWSKI, 1994).

Para resolução de equações no corpo dinâmico, tem-se que inicialmente caracterizar o que será considerado como solução completa.

Segundo Korzenowski (1994), dada uma equação $F(X) \equiv_y Y$ é solução completa X_o (ou simplesmente solução) se o conjunto de todo $x \in X$ que satisfaz a equação $f(x) = y$, para $y \in Y$. Chamaremos de solução externa a qualquer $X_e \in \mathbb{IR}$ tal que $X_e \sqsupseteq X_o$ e de solução interna a qualquer $X_i \in \mathbb{IR}$ tal que $X_i \sqsubseteq X_o$.

Teorema 2. (CLAUDIO, 1994) *Sejam $A, B \in \mathbb{IR}$, então $X = B - A$ é a solução completa para $A + X \equiv_b B$ (I)*

Prova 1. $A + X \equiv_b B \leftrightarrow A + X - A \equiv_{b-a} B - A$.

Desde que $X \equiv_x A + X - A$, temos $X \equiv_x B - A$, de modo que X é o conjunto de soluções de todas as equações da forma $a + x = b, b \in B, a \in A$, e então essa é a solução completa de (I).

Teorema 3. (CLAUDIO, 1994) *Sejam $A, B, C \in \mathbb{R}$, com $0 \notin A$, então $X = (B - C) \cdot \frac{1}{A}$ é solução completa para $AX + B \equiv_c C$.*

O autor apresenta a prova desse teorema e afirma que $\forall a \in A, b \in B$ e $c \in C$, $X = \frac{C-B}{A}$ resolve a equação acima e sua solução é completa.

O mesmo é realizado e provado com a equação $AX + B = CX + D$, podendo ser resolvida como $X = \frac{D-B}{A-C}$

Essa nova abordagem encontrada na literatura (CLAUDIO, 1994; KORZENOWSKI, 1994), tem sua relação de igualdade estrutural usual substituída pela relação de aproximação intervalar. Esta relação dá origem a uma estrutura denominada corpo dinâmico, que, segundo esses autores, possui essencialmente as mesmas propriedades de um corpo no que se refere às propriedades das operações de soma e multiplicação, permitindo a interpretação de \mathbb{R} como um “domínio de erro” de um campo. Como justificativa, são analisadas formas fechadas de solução de equações polinomiais de primeiro e segundo graus através da estrutura nova de espaço intervalar definida.

Cabe ressaltar que a operação de adição é a única que está propriamente definida sob o ponto de vista da extensão intervalar de um número real. Tal vantagem cai por terra, no entanto, pela evidência da não existência de um elemento simétrico definido através desta operação, visto que $[x] + (-[x]) = 0 \leftrightarrow w([x] + (-[x])) = 0 \leftrightarrow w([x]) + w(-[x]) = 0 \leftrightarrow w([x]) = 0 \wedge w(-[x]) = 0$, fato que torna evidente a impossibilidade de definição de uma estrutura algébrica que conserve amplamente as mesmas propriedades das operações entre números reais e seguindo a definição de Moore (VACCARO, 2001).

As próximas seções do capítulo abordam as aritméticas que serão investigadas/analizadas e aplicadas para encontrar a solução completa para equações lineares com coeficientes intervalares.

Serão apresentadas definições, propriedades e operações da aritmética de Kaucher (KAUCHER, 1977), uma extensão de Moore, e segue com as seguintes aritméticas intervalares: Markov (MARKOV, 1979), *Affine* (FIGUEIREDO; STOLFI, 2004), *Constrained Interval* (LODWICK, 1999), *Single Level Constrained Interval* (CHALCO-CANO; LODWICK; BEDE, 2014), *Relative Distance Measure* (A. PIEGAT, 2012, 2013) e, por fim, operações de diferença e divisão intervalares desenvolvidas por Hukuhara (HUKUHARA, 1967).

2.3 Aritmética de Kaucher

A Aritmética de Kaucher surge com a proposta de contornar limitações presentes na aritmética intervalar clássica definida por Moore (MOORE, 1966), a qual é incapaz de representar intervalos $[a, b]$ onde a propriedade $a \leq b$ não seja satisfeita. Desta

maneira Kaucher define a extensão do espaço de representação numérica, em que intervalos do tipo $[b, a]$, em que $b \geq a$ são verificados (KAUCHER, 1977).

A definição de Kaucher para intervalos segue os princípios de Moore, onde os cálculos utilizando intervalos ocorrem sobre conjuntos, ou seja, o intervalo resultante é um novo conjunto contendo as operações realizadas sobre todos os pares de números dos dois conjuntos iniciais. Utilizando o método de extensão intervalar (SUNAGA, 1958), somente os limites do intervalo serão considerados para a realização das operações.

Em Kaucher, o conjunto de todos os intervalos finitos próprios $\mathbb{IR} = \{[\underline{x}, \bar{x}] \mid \underline{x}, \bar{x} \in \mathbb{R}, \underline{x} \leq \bar{x}\}$ é estendido para um conjunto $H = \{[\underline{x}, \bar{x}] \mid \underline{x}, \bar{x} \in \mathbb{R}\} \cong \mathbb{R}^2$ de pares ordenados de números reais finitos, chamados intervalos direcionados (POPOVA, 1994).

Considerando o intervalo $T \in \mathbb{IR}$ tal que $f(T) = \{f(t) \mid t \in T\}$, o tipo de monotonicidade de f , ou seja, se ela é uma função crescente ou decrescente, determina a sua “direção” em que o intervalo $f(T)$ é traçado.

Um intervalo direcionado $X = [\underline{x}, \bar{x}] \in H$ é dito próprio se $\underline{x} \leq \bar{x}$, impróprio se $\underline{x} > \bar{x}$, ou ainda degenerado quando $\underline{x} = \bar{x}$. O sinal σ de X é definido abaixo (POPOVA, 1994).

$$\sigma(X) = \begin{cases} +, & \text{se } 0 \leq \underline{x} \ \& \ 0 \leq \bar{x} \\ -, & \text{if } \underline{x} \leq 0 \ \& \ \bar{x} \leq 0, \end{cases}$$

e sua direção pode ser definida como (POPOVA, 1994):

$$\tau(X) = \begin{cases} +, & \text{se } \underline{x} \leq \bar{x}, \\ -, & \text{cc.} \end{cases}$$

Considerando uma função $f(x) = f_1(x) \circ f_2(x)$, em que $\circ \in \{+, -, \times, /\}$, busca-se a imagem de f utilizando intervalos conhecidos $f_1(X), f_2(X)$. Sendo f_1 e f_2 contínuas em \mathbb{R} , os valores de $f_1(X)$ e $f_2(X)$ são intervalos, então para a imagem de f temos que $f(X) = \{f_1(x) \circ f_2(x) \mid x \in X\} \subseteq f_1(X) \circ f_2(X)$. Porém, essa relação de igualdade só pode ser obtida quando ambas as funções forem monotônicas no intervalo X (POPOVA, 1994).

A Tabela 1 apresenta o espaço intervalar \mathbb{KIR} para a operação de multiplicação, o qual é decomposto em quatro subespaços:

- $\mathcal{P} := \{X \in \mathbb{KIR} \mid (\underline{x} \geq 0), (\bar{x} \geq 0)\}$
- $\mathcal{Z} := \{X \in \mathbb{KIR} \mid (\underline{x} \leq 0 \leq \bar{x})\}$
- $-\mathcal{P} := \{X \in \mathbb{KIR} \mid -X \in \mathcal{P}\}$
- $dual\mathcal{Z} := \{X \in \mathbb{KIR} \mid dual\mathcal{Z} \in \mathcal{Z}\}$

As operações básicas na aritmética de Kaucher são descritas como segue:

Tabela 1 – Multiplicação intervalar conforme definido por Kaucher

	$Y \in \mathcal{P}$	$Y \in \mathcal{Z}$	$Y \in -\mathcal{P}$	$Y \in dual\mathcal{Z}$
$X \in \mathcal{P}$	$[\underline{xy}, \bar{xy}]$	$[\bar{xy}, \underline{xy}]$	$[\bar{xy}, \underline{xy}]$	$[\underline{xy}, \bar{xy}]$
$X \in \mathcal{Z}$	$[\underline{xy}, \bar{xy}]$	$[\min\{\underline{xy}, \bar{xy}\}, \max\{\underline{xy}, \bar{xy}\}]$	$[\bar{xy}, \underline{xy}]$	0
$X \in -\mathcal{P}$	$[\underline{xy}, \bar{xy}]$	$[\underline{xy}, \bar{xy}]$	$[\bar{xy}, \underline{xy}]$	$[\bar{xy}, \underline{xy}]$
$X \in dual\mathcal{Z}$	$[\underline{xy}, \bar{xy}]$	0	$[\bar{xy}, \underline{xy}]$	$[\max\{\underline{xy}, \bar{xy}\}, \min\{\underline{xy}, \bar{xy}\}]$

Fonte: (TRAN; WANG, 2016)

- Adição: $[\underline{x}, \bar{x}] \oplus [\underline{y}, \bar{y}] = [\underline{x} + \underline{y}, \bar{x} + \bar{y}]$,
- Subtração: $[\underline{x}, \bar{x}] \ominus [\underline{y}, \bar{y}] = [\underline{x} - \underline{y}, \bar{x} - \bar{y}]$,
- Multiplicação: $[\underline{x}, \bar{x}] \otimes [\underline{y}, \bar{y}]$ (Tabela 1),
- Divisão: $[\underline{x}, \bar{x}] \oslash [\underline{y}, \bar{y}] = [\underline{x}, \bar{x}] \otimes [1/\bar{y}, 1/\underline{y}]$.

Nessas operações, os operandos são pares de valores reais. Porém, em um sistema computacional, são subconjuntos de valores reais representados em ponto flutuante. Essa aproximação ocorre por meio de arredondamento direcionado, onde o primeiro elemento do intervalo é arredondado em um número de máquina para baixo e o segundo elemento para cima. Demonstrações sobre o arredondamento e demais definições podem ser melhor compreendidas no trabalho de Popova (1994).

Salienta-se que Kaucher possui as mesmas propriedades algébricas da aritmética de Moore.

2.4 Aritmética Intervalar de Markov

Markov (MARKOV, 1979) definiu um padrão diferente de aritmética intervalar. O extremo esquerdo do intervalo é denotado por \check{a} e o direito por \hat{a} , tal que $A = [\check{a}, \hat{a}]$. Se a condição $\check{a} \leq \hat{a}$ não for necessariamente satisfeita, podemos chamar os extremos do intervalo A de α e β , então escrevemos $A = \alpha \vee \beta$. O tamanho de A é denotado por $\mu(A) = \hat{a} - \check{a}$.

Markov apresenta um notação adicional para os pontos extremos de um intervalo A , considerando que os números reais a_u e a_v são os extremos de A tal que $|a_u| < |a_v|$. Por exemplo, considerando o intervalo $A = [-3, 2]$, ele possui duas expressões para os pontos extremos: $\check{a} = -3, \hat{a} = 2$ e $a_u = 2, a_v = -3$ (LEAL, 2015).

No trabalho de Leal (LEAL, 2015), são apresentadas as quatro operações básicas de Markov (M-operação) da seguinte maneira:

- Adição: $A +_M B = [\check{a} + \check{b} \vee \hat{a} + \hat{b}]$,

- Subtração: $A -_M B = [\check{a} - \check{b} \vee \hat{a} - \hat{b}]$,
- Multiplicação: $A \times_M B = [a_u b_u \vee a_v b_v]$,
- Divisão: $A \div_M B = [a_u/b_u \vee a_v/b_v]$.

A M-multiplicação e a M-divisão de dois intervalos não são definidos quando pelo menos um dos intervalos envolvidos é simétrico. A M-adição e a adição usual de intervalos são coincidentes. No caso da M-subtração tem-se que: $A -_M B \subset A - B$ para quaisquer dois intervalos A e B . A M-multiplicação coincide com o produto usual entre dois intervalos, desde que A e B não contenham o zero. Nos outros casos, $A \times_M B \subset A \times B$.

Sejam A, B, C e D intervalos e α, β números reais, então as seguintes propriedades são definidas para a aritmética (MARKOV, 1979):

$$MK_{p1}: A + B = B + A, (A + B) + C = A + (B + C);$$

$$MK_{p2}: \alpha(B + C) = \alpha B + \alpha C, \alpha(B - C) = \alpha B - \alpha C;$$

$$MK_{p3}: (\alpha + \beta)C = \begin{cases} \alpha C + \beta C, & \text{se } \alpha\beta \geq 0, \\ \alpha C - (-\beta C), & \text{se } \alpha\beta < 0; \end{cases}$$

$$MK_{p4}: \alpha(\beta C) = (\alpha\beta)C, 0A = 0, 1A = A;$$

$$MK_{p5}: (-A) - B = (-B) - A.$$

2.5 Aritmética Affine

Comba e Stolfi (1993) desenvolveram um novo método para computação numérica chamado aritmética *Affine* (AA), a qual é um modelo para computação numérica auto-validada que tem como objetivo atacar o problema de dependência em cálculos de intervalos. AA mantém o controle de correlações de primeira ordem entre as quantidades computadas e de entrada; essas correlações são exploradas automaticamente em operações primitivas, com o resultado de que em muitos casos AA é capaz de produzir estimativas de intervalo que são muito melhores do que as obtidas com aritmética de intervalo padrão (FIGUEIREDO; STOLFI, 2004).

Na AA, a quantidade intervalar X é representada através de uma expressão na forma

$$\hat{x} = x_0 + x_1\varepsilon_1 + \dots + x_n\varepsilon_n,$$

a qual é uma expressão *affine*, ou seja, um polinômio de primeiro grau nos símbolos de ruído ε_i com coeficientes x_i de ponto flutuante. Daí o nome de forma afim (*affine form*). Cada símbolo ε_i é uma variável real simbólica cujo valor é desconhecido, exceto que é restrito a $U = [-1, +1]$ e é independente de outros símbolos de ruído. O coeficiente x_0 é chamado de valor central da forma *affine* \hat{x} . Os coeficientes x_1, \dots, x_n são

chamados de desvios parciais associados com os símbolos de ruído $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ em \hat{x} . A quantidade de símbolos de ruído pode variar para cada forma *affine* (FIGUEIREDO; STOLFI, 2004).

Formas *affine* fornecem limites de intervalo para as quantidades correspondentes: Se uma quantidade X é representada com a forma *affine* \hat{x} como acima, então $x \in [x_0 - r_x, x_0 + r_x]$, onde $r_x = |x_1| + \dots + |x_n|$ é chamado de desvio total de \hat{x} . Por outro lado, se $x \in [a, b]$, então X pode ser representado com a forma *affine*

$$\hat{x} = x_0 + x_i \varepsilon_i,$$

onde $x_0 = (\bar{x} + \underline{x})/2$ e $x_1 = (\bar{x} - \underline{x})/2$. Em outras palavras, os algoritmos de AA podem ter intervalos de entrada e saída e, portanto, AA pode ser usada como uma substituta para aritmética intervalar convencional (FIGUEIREDO; STOLFI, 2004).

A principal característica da AA é que duas ou mais formas *affine* podem compartilhar símbolos de ruído. Um símbolo de ruído é compartilhado quando aparece com um coeficiente diferente de zero em todas as formas *affine* em questão. Quando isso acontece, as quantidades representadas por cada forma *affine* não são completamente independentes, elas tem uma dependência parcial para cada símbolo de ruído compartilhado.

Para avaliar uma forma *affine*, devemos substituir cada uma de suas operações elementares $z \leftarrow f(x, y)$ em números reais por uma etapa equivalente $\hat{z} \leftarrow f(\hat{x}, \hat{y})$ em forma *affine*, onde f é um procedimento que calcula uma forma *affine* para $z = f(x, y)$ que é consistente com \hat{x} e \hat{y} (COMBA; STOLFI, 1993). Por definição, conforme Equação 2 e Equação 3,

$$x = x_0 + x_1 \varepsilon_1 + \dots + x_n \varepsilon_n \quad (2)$$

$$y = y_0 + y_1 \varepsilon_1 + \dots + y_n \varepsilon_n \quad (3)$$

para alguns valores (desconhecidos) de $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \mathbb{U}^n$. Portanto, conforme a Equação 4, a quantidade z é uma função de ε_i , ou seja,

$$\begin{aligned} z &= f(x, y) \\ &= f(x_0 + x_1 \varepsilon_1 + \dots + x_n \varepsilon_n, y_0 + y_1 \varepsilon_1 + \dots + y_n \varepsilon_n) \\ &= f^*(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \end{aligned} \quad (4)$$

Agora, basta substituir $f^*(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ por uma forma *affine*

$$z = z_0 + z_1 \varepsilon_1 + \dots + z_n \varepsilon_n$$

que preserva o máximo de informação possível sobre as restrições entre x, y e z que

estão implícitas por (2 - 4), mas sem implicar quaisquer outras restrições que não possam ser deduzidas dos dados fornecidos (COMBA; STOLFI, 1993).

Se f é um função *affine* de seus argumentos x, y , então a função $f^*(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ pode ser expandida em uma combinação *affine* de símbolos de ruído ε_i . Nesse caso, ao executar a expansão e coletar termos semelhantes, obtemos uma forma *affine* válida para $z = f(x, y)$. Em particular, o que mostra a Equação 5,

$$\begin{aligned} x \pm y &= (x_0 \pm y_0) + (x_1 \pm y_1)\varepsilon_1 + \dots + (x_n \pm y_n)\varepsilon_n \\ \alpha x &= (\alpha x_0) + (\alpha x_1)\varepsilon_1 + \dots + (\alpha x_n)\varepsilon_n \\ x \pm \alpha &= (x_0 \pm \alpha) + x_1\varepsilon_1 + \dots + x_n\varepsilon_n \end{aligned} \tag{5}$$

é válido para quaisquer formas *affine* x, y e qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$ (COMBA; STOLFI, 1993).

De acordo com essas fórmulas, a diferença entre uma forma *affine* e ela mesma é zero. Neste caso, o fato de os dois operandos compartilharem os mesmos símbolos de ruído com o mesmos coeficientes revela que eles são realmente a mesma quantidade, e não apenas duas quantidades que acontecem tem o mesmo intervalo de valores possíveis.

Algumas operações com números *affine*, como, por exemplo, multiplicação, divisão, exponenciação e cálculos de funções trigonométricas podem não resultar em uma forma *affine*. Chamamos essas operações de operações não-*affine* e elas não podem ser descritas como uma combinação linear de ruídos ε_i de seus argumentos (COMBA; STOLFI, 1993).

Nesse caso, a função $f^*(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = f(\hat{x}, \hat{y})$, da Equação 4 precisa ser aproximada por uma função *affine*. Isso pode ser feito através da função f^a conforme Equação 6 abaixo:

$$f^a(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = z_0 + z_1\varepsilon_1 + \dots + z_n\varepsilon_n \tag{6}$$

Assim, o resultado de uma operação não-*affine* será descrito pela forma *affine* da Equação 7.

$$\hat{z} = f^a(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) + z_k\varepsilon_k = z_0 + z_1\varepsilon_1 + \dots + z_n\varepsilon_n + z_k\varepsilon_k \tag{7}$$

$z_k\varepsilon_k$ representa o erro residual causado por essa aproximação. O ruído ε_k deve ser diferente de qualquer outro símbolo de ruído já existente na computação e z_k deve ser o limite superior da diferença entre f^a e f^* (FIGUEIREDO; STOLFI, 2004).

Mais detalhes de como se chegou a uma possível aproximação para a multiplicação podem ser lidos no trabalho de Comba e Stolfi (1993).

Se escrevermos $X/Y = X \times (1/Y)$, então podemos analisar apenas a multiplicação.

Sejam duas formas *affine* $\hat{x} = x_0 + x_1\varepsilon_1 + \dots + x_n\varepsilon_n$ e $\hat{y} = y_0 + y_1\varepsilon_1 + \dots + y_n\varepsilon_n$, seu produto é

$$\begin{aligned}\hat{x} \cdot \hat{y} &= (x_0 + \sum_{i=1}^n x_i \varepsilon_i) \cdot (y_0 + \sum_{i=1}^n y_i \varepsilon_i) \\ &= x_0 y_0 + \sum_{i=1}^n (x_0 y_i + y_0 x_i) \varepsilon_i + \sum_{i=1}^n x_i \varepsilon_i \cdot \sum_{i=1}^n y_i \varepsilon_i.\end{aligned}$$

Então, podemos escrever a seguinte forma *affine* para o produto:

$$\hat{x} \cdot \hat{y} = x_0 y_0 + \sum_{i=1}^n (x_0 y_i + y_0 x_i) \varepsilon_i + z_k \varepsilon_k,$$

onde $|z_k| \geq |\sum_{i=1}^n x_i \varepsilon_i \cdot \sum_{i=1}^n y_i \varepsilon_i|$, $\varepsilon_i \in \mathbb{U}$, é um limite superior para o erro de aproximação. O limite mais simples é dado por

$$|z_k| = \sum_{i=1}^n |x_i| \cdot \sum_{i=1}^n |y_i|,$$

que é no máximo quatro vezes o erro da melhor aproximação *affine*. Porém, segundo o autor, a melhor aproximação ao produto é computada em tempo $\Theta(m \log m)$, onde m é o número de termos de ruído diferentes de zero em \hat{x} e \hat{y} (FIGUEIREDO; STOLFI, 2004).

As propriedades algébricas da aritmética *Affine* não são descritas na literatura.

2.6 Constrained Interval Arithmetic (CIA)

Sabe-se que para tentar solucionar a superestimação de um intervalo basta subdividir o intervalo, porém particionar cada um dos lados da caixa n -dimensional ao meio tem complexidade de $O(2^n)$ para cada divisão, o que torna a CIA e a aritmética convencional comparável quando são necessários resultados exatos.

É conhecido que aplicando aritmética intervalar na união de intervalos para diminuir o tamanho produz limites mais próximos como resultado. Porém, Lodwick (1999) propôs redefinir os números intervalares de tal forma que as dependências sejam mantidas.

A aritmética chamada “*Constrained Interval Arithmetic (CIA)*” é uma extensão da aritmética intervalar no sentido que quando não houver dependências são mantidas as regras usuais para intervalos e quando existirem dependências, o resultado correto é obtido (LODWICK, 1999).

Na CIA, o valor intervalo é uma função de três parâmetros, como mostra a definição a seguir:

Definição 7. (Lodwick, 1999) Um intervalo $[\underline{x}, \bar{x}]$ é um número da forma, conforme Equação 8:

$$X^I(\lambda_x) = \{\lambda_x \underline{x} + (1 - \lambda_x) \bar{x}, 0 \leq \lambda_x \leq 1\}. \quad (8)$$

Três parâmetros são necessários para lidar com a dependência, \underline{x} e \bar{x} que são parâmetros conhecidos, enquanto λ_x é uma variável restrita entre 0 e 1. Na Equação 8 x é uma função de λ_x com \underline{x} e \bar{x} como parâmetros desta função.

O foco dessa aritmética são intervalos com diâmetro diferente de zero. Os extremos do intervalo $A = [\underline{a}, \bar{a}]$ são obtidos através do cálculo de mínimo e máximo da função.

A álgebra da CIA não é a mesma da aritmética intervalar usual e da aritmética intervalar de Markov. A CIA é uma aritmética de funções lineares, definidas sobre um domínio compacto, enquanto que a aritmética usual é uma aritmética de duas componentes de vetor $A = (\underline{a}, \bar{a})$ (LEAL, 2015).

As operações algébricas são definidas conforme Equação 9 (LODWICK; UNTIEDT, 2008):

$$Z = [\underline{z}, \bar{z}] = X \circ Y \quad (9)$$

$$\begin{aligned} &= \{z \mid z = x \circ y, \forall x \in X^I(\lambda_x), y \in Y(\lambda_y), 0 \leq \lambda_x, \lambda_y \leq 1\} \\ &= \{z \mid z = (\lambda_x \underline{x} + (1 - \lambda_x) \bar{x}) \circ (\lambda_y \underline{y} + (1 - \lambda_y) \bar{y}), 0 \leq \lambda_x, \lambda_y \leq 1\}, \end{aligned}$$

onde $\underline{z} = \min_{\lambda_x, \lambda_y} \{z\}$, $\bar{z} = \max_{\lambda_x, \lambda_y} \{z\}$, e $\circ \in \{+, -, \times, \div\}$.

Quando se opera com os mesmos intervalos, tem-se as seguintes operações:

- **Adição:** $X + X = \{z \mid z = (\lambda_x \underline{x} + (1 - \lambda_x) \bar{x}) + (\lambda_x \underline{x} + (1 - \lambda_x) \bar{x}), 0 \leq \lambda_x \leq 1\}$
 $= \{z \mid z = 2(\lambda_x \underline{x} + (1 - \lambda_x) \bar{x}), 0 \leq \lambda_x \leq 1\} = [2\underline{x}, 2\bar{x}],$
- **Subtração:** $X - X = \{z \mid z = (\lambda_x \underline{x} + (1 - \lambda_x) \bar{x}) - (\lambda_x \underline{x} + (1 - \lambda_x) \bar{x}), 0 \leq \lambda_x \leq 1\} = [0, 0],$
- **Divisão ($0 \notin X$):** $X \div X = \{z \mid z = (\lambda_x \underline{x} + (1 - \lambda_x) \bar{x}) \div (\lambda_x \underline{x} + (1 - \lambda_x) \bar{x}), 0 \leq \lambda_x \leq 1\} = [1, 1],$
- **Multiplicação ($\underline{x} < \bar{x}$):** $X \times X = \{z \mid z = (\lambda_x \underline{x} + (1 - \lambda_x) \bar{x}) \times (\lambda_x \underline{x} + (1 - \lambda_x) \bar{x}), 0 \leq \lambda_x \leq 1\}$
 $= \{z \mid z = (\lambda_x^2 \underline{x}^2 + 2(1 - \lambda_x) \underline{x} \lambda_x \bar{x} + (1 - \lambda_x)^2 \bar{x}^2), 0 \leq \lambda_x \leq 1\}$
 $= \begin{cases} [0, \max\{\underline{x}^2, \bar{x}^2\}] & \text{se } 0 \in [\underline{x}, \bar{x}], \\ [\min\{\underline{x}^2, \bar{x}^2\}, \max\{\underline{x}^2, \bar{x}^2\}] & \text{c.c.} \end{cases}$

Considera-se a CIA como uma extensão da aritmética intervalar de Moore, possuindo as mesmas propriedades que a aritmética intervalar usual. A grande diferença é que a aritmética restrita possui um inverso aditivo, multiplicativo e detém as leis de distribuição. Logo, a estrutura algébrica da aritmética intervalar restrita é similar à estrutura algébrica da aritmética real (LEAL, 2015).

2.7 Single Level Constrained Interval Arithmetic (SLCIA)

A partir da aritmética intervalar restrita descrita na seção anterior, Chalco-Cano, Lodwick e Bede (2014) desenvolveram uma nova aritmética intervalar chamada “*Single Level Constrained Interval Arithmetic (SLCIA)*”. Essa nova aritmética apresenta as mesmas propriedades da CIA, porém sempre considera o mesmo parâmetro (level) λ para cada intervalo envolvido na operação. SLCIA é utilizada quando a variação dos valores nos extremos dos intervalos ocorrem em conjunto. Ou seja, se o valor de um intervalo é instanciado a 1/3 de distância do extremo inferior, todos os intervalos devem ser instanciados a 1/3 do extremo inferior (CHALCO-CANO; LODWICK; BEDE, 2014).

Definição 8. (CHALCO-CANO; LODWICK; BEDE, 2014) *Seja $A = [\underline{a}, \bar{a}] \in \mathbb{IR}$ qualquer intervalo. Então:*

- (i) Uma função contínua $A : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\min_{0 \leq \lambda \leq 1} A(\lambda) = \underline{a}$, $\max_{0 \leq \lambda \leq 1} A(\lambda) = \bar{a}$ será chamada função restrita associada a A .
- (ii) Associada ao intervalo A , define-se a função restrição convexa decrescente $A : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ como: $A(\lambda) = \lambda \underline{a} + (1 - \lambda) \bar{a}$, $0 \leq \lambda \leq 1$, ou equivalentemente $A(\lambda) = (\underline{a} - \bar{a})\lambda + \bar{a}$, $0 \leq \lambda \leq 1$.
- (iii) Associada ao intervalo A , define-se a função restrição convexa crescente $A' : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ como: $A'(\lambda) = (1 - \lambda) \underline{a} + \lambda \bar{a}$, $0 \leq \lambda \leq 1$. ou equivalentemente $A'(\lambda) = \underline{a} + \lambda(\bar{a} - \underline{a})$, $0 \leq \lambda \leq 1$.

A função restrição convexa decrescente tem a propriedade $A(0) = \bar{a}$ e $A(1) = \underline{a}$, enquanto que a crescente A' tem a propriedade $A'(0) = \underline{a}$ e $A'(1) = \bar{a}$. As operações descritas nesta seção serão baseadas na função restrição convexa decrescente.

Definição 9. (CHALCO-CANO; LODWICK; BEDE, 2014) *Sejam A um intervalo e \sim uma operação unária nos \mathbb{R} , ou um subconjunto de \mathbb{R} . Então,*

- (i) Define-se a função restrita associada com o intervalo $\sim A$ por $(\sim A)(\lambda) = \sim (A(\lambda))$, onde $A(\lambda)$ é a função restrição convexa decrescente associada com A .
- (ii) A operação aritmética restrita *single level* (C-operação) $\sim A$ em \mathbb{IR} é dada pelo intervalo $\sim A = \left[\min_{0 \leq \lambda \leq 1} (\sim A(\lambda)), \max_{0 \leq \lambda \leq 1} (\sim A(\lambda)) \right]$, dado que o mínimo e o máximo existem.

Observa-se que se \sim é uma função contínua, então os valores mínimo e máximo existem e são reais (CHALCO-CANO; LODWICK; BEDE, 2014).

As potências com base de intervalo A tendo $A(\lambda) > 0$ podem ser interpretadas como operadores unários:

$$A^n = \left[\min_{0 \leq \lambda \leq 1} (A(\lambda)^n), \max_{0 \leq \lambda \leq 1} (A(\lambda)^n) \right], n \in \mathbb{R}.$$

O autor salienta que se considerarmos um intervalo simétrico A , temos $A = -A$ e a função restrição convexa decrescente associada ao intervalo A coincide com o oposto da função restrição convexa crescente do intervalo A . Por outro lado, se considerarmos um intervalo simétrico A , por exemplo $A = [-1, 1]$, via SIA temos $A^n = A$ para todo $n \in \mathbb{N}$ enquanto via SLCIA e CIA temos $A^n = [-1, 1] = A$ se n é ímpar e $A = [0, 1]$ se n é par.

Definição 10. (CHALCO-CANO; LODWICK; BEDE, 2014) *Sejam A e B dois intervalos e $*$ uma operação aritmética binária em \mathbb{R} . Então,*

- (i) Define-se a função restrita associada ao intervalo $A \otimes B$ por $(A * B)(\lambda) = A(\lambda) * B(\lambda)$, onde $A(\lambda)$ e $B(\lambda)$ são as funções restritas convexas associadas a A e B , respectivamente.
- (ii) A operação aritmética restrita *single level* (C-operação), $A \otimes B$ em \mathbb{IR} é dada por:

$$A \otimes B = \left[\min_{0 \leq \lambda \leq 1} (A(\lambda) * B(\lambda)), \max_{0 \leq \lambda \leq 1} (A(\lambda) * B(\lambda)) \right], n \in \mathbb{R},$$

dado que o mínimo e o máximo existem.

A ideia dessa aritmética é operar nível a nível. Se considerarmos dois intervalos A e B , tem-se o nível $\lambda \in [0, 1]$ para cada intervalo, ou seja, tem-se $A(\lambda)$ e $B(\lambda)$ operando no mesmo λ . Opera-se em todos os níveis e depois pega-se o mínimo e o máximo das operações em relação a λ para obter os extremos do novo intervalo. Esta operação é diferente da CIA, onde para cada intervalo envolvido na operação, λ é considerado diferente, isto é, as operações são consideradas em todos os diferentes níveis simultaneamente (CHALCO-CANO; LODWICK; BEDE, 2014).

Nota-se que se as operações envolvem somente um intervalo A , então os resultados obtidos através da SLCIA e CIA coincidem.

Chalco-Cano, Lodwick e Bede (2014) definiram operações e propriedades para operar com dois intervalos.

- C-soma A soma na aritmética SLCIA é definida conforme Equação 10.

$$\begin{aligned} A \oplus A &= \left[\min_{0 \leq \lambda \leq 1} (A(\lambda) + B(\lambda)), \max_{0 \leq \lambda \leq 1} (A(\lambda) + B(\lambda)) \right] & (10) \\ &= [\underline{a} + \underline{b}, \bar{a} + \bar{b}]. \end{aligned}$$

A C-soma de intervalos é coincidente com a soma usual.

- C-multiplicação

A multiplicação de um intervalo por um valor escalar é dada pela Equação 11:

$$\begin{aligned}\alpha \odot A &= \left[\min_{0 \leq \lambda \leq 1} \alpha \cdot A(\lambda), \max_{0 \leq \lambda \leq 1} \alpha \cdot A(\lambda) \right] \\ &= [\min\{\alpha \cdot \underline{a}, \alpha \cdot \bar{a}\}, \max\{\alpha \cdot \underline{a}, \alpha \cdot \bar{a}\}].\end{aligned}\quad (11)$$

A C-multiplicação de um intervalo por um número escalar coincide com a multiplicação usual.

- C-subtração

A subtração em SLCIA é definida conforme Equação 12.

$$\begin{aligned}A \ominus B &= \left[\min_{0 \leq \lambda \leq 1} \{ A(\lambda) - B(\lambda) \}, \max_{0 \leq \lambda \leq 1} \{ A(\lambda) - B(\lambda) \} \right] \\ &= [\min\{\underline{a} - \underline{b}, \bar{a} - \bar{b}\}, \max\{\underline{a} - \underline{b}, \bar{a} - \bar{b}\}].\end{aligned}\quad (12)$$

Exemplo: Sejam os intervalos $A=[-2,1]$ e $B=[1,3]$. As funções de restrição convexas associadas a A e B são $A(\lambda) = -3\lambda + 1$ e $B(\lambda) = -2\lambda + 3$. Então, de acordo com a Equação 12

$$\begin{aligned}A \ominus B &= \left[\min_{0 \leq \lambda \leq 1} (-\lambda - 2), \max_{0 \leq \lambda \leq 1} (-\lambda - 2) \right] \\ &= [-3, -2].\end{aligned}$$

Salienta-se que para SIA e CIA, $[-2,1] - [1,3] = [-5,0]$.

Abaixo encontram-se algumas propriedades definidas para a C-soma e C-diferença. A prova pode ser encontrada em (CHALCO-CANO; LODWICK; BEDE, 2014).

Sejam A, B e C elementos de \mathbb{IR} e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Então,

$$SLCIA_{p1}: A \oplus (-B) = A \ominus B;$$

$$SLCIA_{p2}: A \ominus (-B) = A \oplus B;$$

$$SLCIA_{p3}: \oplus \text{ é associativa: } (A \oplus B) \oplus C = C \oplus (B \oplus C);$$

$$SLCIA_{p4}: \oplus \text{ é comutativa: } A \oplus B = B \oplus A;$$

$$SLCIA_{p5}: [0] = [0,0] \text{ é o único elemento neutro para } \oplus: A \oplus [0] = A;$$

$$SLCIA_{p6}: \alpha \odot (A \oplus B) = \alpha \odot A \oplus \alpha \odot B;$$

$$SLCIA_{p7}: (\alpha + \beta) \odot A = \alpha \odot A \oplus \beta \odot A.$$

Sejam A e $B \in \mathbb{IR}$. Então seguem as propriedades adicionais:

$$(i) A \ominus A = \{0\};$$

$$(ii) (A \oplus B) \ominus B = A;$$

$$(iii) (A \ominus B) \ominus A = (-1) \odot A;$$

- (iv) $\{0\} \ominus (A \ominus B) = B \ominus A$;
- (v) $A \ominus B = (-1) \odot (B \ominus A)$;
- (vi) $A \ominus B = (-1) \odot B \ominus (-1) \odot A$; e
- (vii) $A \ominus B = B \ominus A$ se e somente se $A \ominus B$ é simétrico.

Usando a C-diferença, define-se a métrica d_C no espaço dos \mathbb{IR} . Sejam dois intervalos A e B , define-se a distância entre A e B por $d_C(A, B) = \|A \ominus B\|_C = \max_{\lambda \in [0,1]} |A(\lambda) - B(\lambda)|$.

- C-produto

$$A \otimes B = \left[\min_{\lambda \in [0,1]} A(\lambda) \times B(\lambda), \max_{\lambda \in [0,1]} A(\lambda) \times B(\lambda) \right].$$

O produto em SLCIA coincide com a aritmética SIA e com o produto da aritmética de Markov quando ambos, A e B , são positivos ou quando ambos são negativos. Em outros casos, C-produto e o produto em SIA são diferentes.

Exemplo: Considere os intervalos $A = [-1, 2]$ e $B = [-3, -1]$, então tem-se:

$$\begin{aligned} A \otimes B &= \left[\min_{\lambda \in [0,1]} (-3\lambda + 2) \times (-2\lambda - 1), \max_{\lambda \in [0,1]} (-3\lambda + 2) \times (-2\lambda - 1) \right] \\ &= \left[\min_{\lambda \in [0,1]} 6\lambda^2 - \lambda - 2, \max_{\lambda \in [0,1]} 6\lambda^2 - \lambda - 2 \right] \\ &= \left[\frac{-49}{24}, 3 \right]. \end{aligned}$$

Através da CIA obtém-se $A \times B = [-6, 3]$ e usando a aritmética de Markov $A \times_M B = [-6, 1]$. Assim, tem-se que $A \otimes B \subset A \times B$, enquanto $A \otimes B \not\subset A \times_M B$ e $A \times_M B \not\subset A \otimes B$.

Sejam A , B e C elementos de \mathbb{IR} . Então

- (i) $A \otimes (B \oplus C) = A \otimes B \oplus A \otimes C$;
- (ii) $(B \oplus C) \otimes A = B \otimes A \oplus C \otimes A$;
- (iii) $A \otimes (B \ominus C) = A \otimes B \ominus A \otimes C$;
- (iv) $(B \ominus C) \otimes A = B \otimes A \ominus C \otimes A$.

- C-divisão

$$A \oslash B = \left[\min_{\lambda \in [0,1]} A(\lambda) \div B(\lambda), \max_{\lambda \in [0,1]} A(\lambda) \div B(\lambda) \right],$$

onde $0 \notin B$.

Para dois intervalos A e B , a função quociente $F(\lambda)$ correspondente a $A \oslash B$ é definida pela Equação 13.

$$F(\lambda) := \frac{A(\lambda)}{B(\lambda)} = \frac{(\underline{a} - \bar{a})\lambda + \bar{a}}{(\underline{b} - \bar{b})\lambda + \bar{b}}, \quad \underline{a}, \bar{a}, \underline{b}, \bar{b} \in \mathbb{R}. \quad (13)$$

A C-divisão está relacionada com a divisão clássica definida por Moore.

Sejam A, B e C elementos de \mathbb{IR} , onde $0 \notin A$ Então,

- (i) $A \oslash A = 1$;
- (ii) $A \otimes (1 \oslash A) = 1$;
- (iii) $B \otimes (1 \oslash A) = B \oslash A$;
- (iv) $(A \otimes B) \oslash A = B$;
- (v) $B \oslash A \oplus C \oslash A = (B \oplus C) \oslash A$.

O autor chama a atenção para a propriedade (iii) que, em geral, não é válida quando considera-se qualquer outra aritmética.

2.8 Relative Distance Measure (RDM)

Na aritmética definida por Moore existem algumas limitações com cálculos de intervalos, como intervalos com diâmetro muito grande, por exemplo. A fim de contornar essa e outras limitações, Piegat e Landowski (2012; 2013) desenvolveram uma nova aritmética intervalar, chamada aritmética intervalar multidimensional RDM.

A abreviatura RDM (do inglês, *Relative Distance Measure*) significa Medida da Distância Relativa, sendo caracterizada como multidimensional por cada novo parâmetro de incerteza aumentar a sua dimensionalidade. Assim, quando um dado um valor x pertence a um intervalo X , este é descrito conforme Equação 14:

$$X = \{x : x = \underline{x} + \alpha_x(\bar{x} - \underline{x})\}, \quad (14)$$

onde $\alpha_x \in [0,1]$ é uma variável RDM.

A seguir são apresentadas as operações básicas da aritmética RDM (A. PIEGAT, 2012, 2013). Sejam X e Y intervalos,

- Adição: $X + Y = \{x + y : x + y = \underline{x} + \alpha_x(\bar{x} - \underline{x}) + \underline{y} + \alpha_y(\bar{y} - \underline{y})\}, \alpha_x, \alpha_y \in [0,1]$,
- Subtração: $X - Y = \{x - y : x - y = \underline{x} + \alpha_x(\bar{x} - \underline{x}) - \underline{y} + \alpha_y(\bar{y} - \underline{y})\}, \alpha_x, \alpha_y \in [0,1]$,
- Multiplicação: $X.Y = \{xy : xy = [\underline{x} + \alpha_x(\bar{x} - \underline{x})].[\underline{y} + \alpha_y(\bar{y} - \underline{y})]\}, \alpha_x, \alpha_y \in [0,1]$,

- **Divisão:** $X/Y = \{x/y : x/y = [\underline{x} + \alpha_x(\bar{x} - \underline{x})]/[\underline{y} + \alpha_y(\bar{y} - \underline{y})]\}, \alpha_x, \alpha_y \in [0,1], \text{ se } 0 \notin Y.$

Para exemplificar a multidimensionalidade da solução utilizando aritmética RDM e a unidimensionalidade utilizando a aritmética de Moore, considera-se operações de adição, subtração, multiplicação e divisão de dois intervalos $X = [1, 2]$ e $Y = [3, 4]$. Abaixo a solução de cada operação com Moore:

$$X + Y = [1, 2] + [3, 4] = [4, 6]$$

$$X - Y = [1, 2] - [3, 4] = [-3, -1]$$

$$X \cdot Y = [1, 2] \cdot [3, 4] = [3, 8]$$

$$X/Y = [1, 2]/[3, 4] = [1, 2] \cdot [1/4, 1/3] = [1/4, 2/3]$$

Para os resultados com aritmética RDM, deve-se escrever os intervalos na notação RDM, ou seja, utilizando as variáveis α_x e α_y

$$X = [1, 2] = \{x : x = 1 + \alpha_x, \alpha_x \in [0, 1]\}$$

$$Y = [3, 4] = \{y : y = 3 + \alpha_y, \alpha_y \in [0, 1]\}$$

Assim, obtém-se as seguintes soluções:

$$X + Y = \{x + y : x + y = 4 + \alpha_x + \alpha_y, \alpha_x, \alpha_y \in [0, 1]\}$$

$$X - Y = \{x - y : x - y = -2 + \alpha_x - \alpha_y, \alpha_x, \alpha_y \in [0, 1]\}$$

$$X \cdot Y = \{xy : xy = 3 + 3\alpha_x + \alpha_y + \alpha_x\alpha_y, \alpha_x, \alpha_y \in [0, 1]\}$$

$$X/Y = \{x/y : x/y = (1 + \alpha_x)/(3 + \alpha_y), \alpha_x, \alpha_y \in [0, 1]\}$$

Para a obtenção dos intervalos solução, as operações são dispostas a seguir:

$$X + Y = \left[\min_{\alpha_x, \alpha_y \in [0,1]}(4 + \alpha_x + \alpha_y), \max_{\alpha_x, \alpha_y \in [0,1]}(4 + \alpha_x + \alpha_y) \right] = [4, 6]$$

$$X - Y = \left[\min_{\alpha_x, \alpha_y \in [0,1]}(-2 + \alpha_x - \alpha_y), \max_{\alpha_x, \alpha_y \in [0,1]}(-2 + \alpha_x - \alpha_y) \right] = [-3, -1]$$

$$X \cdot Y = \left[\min_{\alpha_x, \alpha_y \in [0,1]}(3 + 3 \cdot \alpha_x + \alpha_y + \alpha_x \cdot \alpha_y), \max_{\alpha_x, \alpha_y \in [0,1]}(3 + 3 \cdot \alpha_x + \alpha_y + \alpha_x \cdot \alpha_y) \right] = [3, 8]$$

$$X/Y = \left[\min_{\alpha_x, \alpha_y \in [0,1]}[(1 + \alpha_x)/(3 + \alpha_y)], \max_{\alpha_x, \alpha_y \in [0,1]}[(1 + \alpha_x)/(3 + \alpha_y)] \right] = \left[\frac{1}{4}, \frac{2}{3} \right]$$

A partir das definições e operações da aritmética RDM, é possível verificar que a inclusão de variáveis faz com que a aritmética trabalhe de maneira multidimensional.

Não se pode afirmar que a aritmética intervalar de Moore é geralmente incorreta, porque ela realiza adequadamente as operações aritméticas básicas como adição, subtração, divisão e multiplicação, embora de forma simplificada unidimensional e sem

levar em consideração dependências entre variáveis e entre intervalos especiais que podem existir em problemas reais.

No entanto, essa aritmética causa muitos paradoxos que são descritos na literatura, por exemplo, por Sevastjanov e Dymova (2009).

A aritmética RDM tem quase as mesmas propriedades matemáticas que a convencional (LANDOWSKI, 2014). Sejam X, Y e Z intervalos. Abaixo são apresentadas as propriedades mais importantes da aritmética RDM:

RDM_{p1} : $X + Y = Y + X, XY = YX$: comutatividade da adição e multiplicação;

RDM_{p2} : $X + (Y + Z) = (X + Y) + Z, X(YZ) = (XY)Z$: associatividade da adição e multiplicação;

RDM_{p3} : Para cada $X \in \mathbb{R}$ existe $X^{-1} \in \mathbb{R}$, tal que $X + (X^{-1}) = (X^{-1}) + X = 0$. X^{-1} é o inverso aditivo de X ;

RDM_{p4} : $X(Y + Z) = (XY) + (XZ)$: distributividade a esquerda, $(Y + Z)X = (YX) + (ZX)$: distributividade a direita;

RDM_{p5} : Para cada $X \in \mathbb{R}$, $0 \notin X$, existe $X^{-1} = 1/X \in \mathbb{R}$, tal que $XX^{-1} = X(1/X) = 1$. X^{-1} é o inverso multiplicativo de X ;

RDM_{p6} : $X + Z = Y + Z \rightarrow X = Y$: cancelamento da adição;

RDM_{p7} : $ZX = ZY \rightarrow X = Y$: cancelamento da multiplicação.

Convém salientar que a aritmética de Moore não possui as propriedades 3, 4, 5 e 7. Consequentemente, transformações de fórmulas não podem ser feitas. Por exemplo, na equação $A + X = C$ colocar o A no lado direito, $X = C - A$, não é permitido, pois a propriedade 3 não existe. Como algumas transformações não são permitidas, problemas algébricos e matemáticos mais complexos não podem ser resolvidos (ANDRZEJ PIEGAT, 2015).

2.9 Diferença e divisão de Hukuhara

Já foi visto que algumas propriedades básicas da aritmética real não são existentes na aritmética intervalar de Moore. Por exemplo, a negação do intervalo A não é o inverso aditivo dele, ou seja, $A + (-1)A \neq [0, 0]$.

A diferença de Hukuhara surgiu como uma alternativa de subtração (HUKUHARA, 1967). A chamada H-diferença é definida da seguinte forma, entre dois conjuntos:

$$A -_H B = C \Leftrightarrow A = B + C.$$

Dois importantes propriedades dessa operação são:

- 1) $A -_H A = [0, 0]$,
- 2) $(A + B) -_H B = A$.

Uma condição para que H-diferença exista entre dois intervalos A e B é que a largura do intervalo A seja maior ou igual a largura do intervalo B . Dessa forma, tal diferença ainda possui algumas restrições, e buscando superá-las, Stefanini e Bede (2009) apresentaram uma generalização da diferença de Hukuhara (gH-diferença), que possui várias propriedades, dentre elas, destacam-se o elemento oposto, a associativa e o elemento neutro (LEAL, 2015).

A gH-diferença de dois conjuntos $A, B \in \mathbb{IR}$ é definida pela Equação 15:

$$A -_{gH} B = C \Leftrightarrow \begin{cases} (a) & A = B + C \text{ ou} \\ (b) & B = A + (-1)C. \end{cases} \quad (15)$$

É possível que $A = B + C$ e $B = A + (-1)C$ sejam satisfeitas simultaneamente, neste caso, A e B são trasladados um ao outro e C é determinístico. Além disso, se a gH-diferença é dada pelo caso (a), então a gH-diferença coincide com a H-diferença (LEAL, 2015).

Para intervalos compactos unidimensionais a gH-diferença sempre existe (STEFANINI, 2010). Sejam $A = [\underline{a}, \bar{a}]$ e $B = [\underline{b}, \bar{b}]$ dois intervalos, então gH-diferença é dada por:

$$[\underline{a}, \bar{a}] -_{gH} [\underline{b}, \bar{b}] = [\min\{\underline{a} - \underline{b}, \bar{a} - \bar{b}\}, \max\{\underline{a} - \underline{b}, \bar{a} - \bar{b}\}].$$

A partir de todo o apanhado de informações sobre as diferentes aritméticas intervalares, as informações seguintes vêm no intuito de resumir o que o capítulo apresentou até agora. Serão elencadas de forma sucinta e de uma maneira mais ilustrativa, com o intuito de comparar as aritméticas, as representações de intervalo e as operações aritméticas das diferentes aritméticas intervalares abordadas neste trabalho.

Primeiramente apresenta-se a Tabela 2 resumindo a maneira de representar o intervalo em cada aritmética, seguida da Tabela 3 com o resumo das operações básicas definidas para as diferentes aritméticas.

Tabela 2 – Representação do intervalo em diferentes aritméticas intervalares

Aritmética	Representação do intervalo
Moore	$X = [\underline{x}, \bar{x}], \underline{x} \leq x \leq \bar{x}$
Kaucher	$X = [\underline{x}, \bar{x}], \underline{x} \leq \bar{x}$ (intervalo próprio), $\bar{x} \leq \underline{x}$ (intervalo impróprio)
Markov	$A = [\hat{a}, \hat{a}]$ ou $A = [\hat{a} \vee \hat{a}]$
Affine	$\hat{x} = x_0 + x_1\varepsilon_1 + \dots + x_n\varepsilon_n$
CIA	$X^I(\lambda_x) = \{\lambda_x \underline{x} + (1 - \lambda_x)\bar{x}, 0 \leq \lambda_x \leq 1\}, \lambda_x \in [0, 1]$
SLCIA	Igual a CIA, mas sempre considera a mesma variável λ para cada intervalo
RDM	$X = \{x : x = \underline{x} + \alpha_x(\bar{x} - \underline{x})\}, \text{ onde } \alpha_x \in [0, 1] \text{ é uma variável RDM}$

Através da Tabela 2 é possível perceber que cada aritmética apresenta uma maneira diferente de escrever o intervalo, bem como seus limites inferiores e superiores.

Kaucher, por ser considerada como uma extensão da aritmética de Moore, apresenta a mesma notação para intervalos que a aritmética convencional, diferenciando-se apenas por considerar a ocorrência de intervalos impróprios.

As aritméticas *Affine*, CIA, SLCIA e RDM trazem uma representação um pouco diferenciada, com o uso de variáveis adicionais ($\lambda, \alpha, \varepsilon$) que são de extrema importância para a busca de soluções mais completas.

Pela Tabela 3 é possível notar diferenças entre as operações aritméticas básicas de cada definição intervalar. Aqui cabe salientar que *Affine* apresenta as operações de multiplicação e divisão como operações não-*affine*, onde símbolos de ruído devem ser inseridos. Na literatura encontramos apenas uma aproximação para a operação de multiplicação.

Tabela 3 – Operações intervalares

Moore	
Adição	$[a, b] + [c, d] = [a + c, b + d]$
Subtração	$[a, b] - [c, d] = [a - d, b - c]$
Multiplicação	$[a, b] \times [c, d] = [\min(ac, ad, bc, bd), \max(ac, ad, bc, bd)]$
Divisão	$[a, b] \div [c, d] = [a, b] \cdot [1/d, 1/c]$ se $0 \notin [c, d]$
Kaucher	
Adição	$[\underline{x}, \bar{x}] \oplus [\underline{y}, \bar{y}] = [\underline{x} + \underline{y}, \bar{x} + \bar{y}]$.
Subtração	$[\underline{x}, \bar{x}] \ominus [\underline{y}, \bar{y}] = [\underline{x} - \bar{y}, \bar{x} - \underline{y}]$.
Multiplicação	$[\underline{x}, \bar{x}] \otimes [\underline{y}, \bar{y}]$ (Tabela 1).
Divisão	$[\underline{x}, \bar{x}] \oslash [\underline{y}, \bar{y}] = [\underline{x}, \bar{x}] \otimes [1/\bar{y}, 1/\underline{y}]$
Markov	
Adição	$A +_M B = [\underline{a} + \underline{b} \vee \bar{a} + \bar{b}]$
Subtração	$A -_M B = [\underline{a} - \bar{b} \vee \bar{a} - \underline{b}]$
Multiplicação	$A \times_M B = [a_u b_u \vee a_v b_v]$
Divisão	$A \div_M B = [a_u/b_u \vee a_v/b_v]$
Affine	
Adição	$\hat{x} + \hat{y} = (x_0 + y_0) + (x_1 + y_1)\varepsilon_1 + \dots + (x_n + y_n)\varepsilon_n$
Subtração	$\hat{x} - \hat{y} = (x_0 - y_0) + (x_1 - y_1)\varepsilon_1 + \dots + (x_n - y_n)\varepsilon_n$
Multiplicação	$\hat{x} \times \hat{y} = x_0 y_0 + \sum_{i=1}^n (x_0 y_i + x_i y_0)\varepsilon_i + \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i \varepsilon_k$
Divisão	não encontrada na literatura
CIA	
Adição	$X + Y = \{z \mid z = (\lambda_x \underline{x} + (1 - \lambda_x) \bar{x}) + (\lambda_y \underline{y} + (1 - \lambda_y) \bar{y}), 0 \leq \lambda_x, \lambda_y \leq 1\}$
Subtração	$X - Y = \{z \mid z = (\lambda_x \underline{x} + (1 - \lambda_x) \bar{x}) - (\lambda_y \underline{y} + (1 - \lambda_y) \bar{y}), 0 \leq \lambda_x, \lambda_y \leq 1\}$
Multiplicação	$X \times Y = \{z \mid z = (\lambda_x \underline{x} + (1 - \lambda_x) \bar{x}) \times (\lambda_y \underline{y} + (1 - \lambda_y) \bar{y}), 0 \leq \lambda_x, \lambda_y \leq 1\}$
Divisão	$(0 \notin Y): X \div Y = \{z \mid z = (\lambda_x \underline{x} + (1 - \lambda_x) \bar{x}) \div (\lambda_y \underline{y} + (1 - \lambda_y) \bar{y}), 0 \leq \lambda_x, \lambda_y \leq 1\}$
SLCIA	
Adição	$A \oplus B = [\underline{a} + \underline{b}, \bar{a} + \bar{b}]$
Subtração	$A \ominus B = [\min\{\underline{a} - \bar{b}, \bar{a} - \underline{b}\}, \max\{\underline{a} - \underline{b}, \bar{a} - \bar{b}\}]$
Multiplicação	$A \otimes B = \left[\min_{\lambda \in [0,1]} A(\lambda) \times B(\lambda), \max_{\lambda \in [0,1]} A(\lambda) \times B(\lambda) \right]$
Divisão	$A \oslash B = \left[\min_{\lambda \in [0,1]} A(\lambda) \div B(\lambda), \max_{\lambda \in [0,1]} A(\lambda) \div B(\lambda) \right]$, onde $0 \notin B$
RDM	
Adição	$X + Y = \{x + y : x + y = \underline{x} + \alpha_x(\bar{x} - \underline{x}) + \underline{y} + \alpha_y(\bar{y} - \underline{y}), \alpha_x, \alpha_y \in [0,1]\}$
Subtração	$X - Y = \{x - y : x - y = \underline{x} + \alpha_x(\bar{x} - \underline{x}) - \underline{y} + \alpha_y(\bar{y} - \underline{y}), \alpha_x, \alpha_y \in [0,1]\}$
Multiplicação	$X \times Y = \{xy : xy = [\underline{x} + \alpha_x(\bar{x} - \underline{x})] \cdot [\underline{y} + \alpha_y(\bar{y} - \underline{y})], \alpha_x, \alpha_y \in [0,1]\}$
Divisão	$X \div Y = \{x/y : x/y = [\underline{x} + \alpha_x(\bar{x} - \underline{x})] / [\underline{y} + \alpha_y(\bar{y} - \underline{y})], \alpha_x, \alpha_y \in [0,1], \text{ se } 0 \notin Y\}$

A tabela a seguir resume as propriedades algébricas que cada aritmética possui.

Tabela 4 – Propriedades algébricas das aritméticas intervalares

Aritmética	Propriedades
Moore	$M_{p1}: A(B + C) \subseteq AB + AC;$ $M_{p2}: a(B + C) = aB + aC$ se $a \in \mathbb{R}$ e $B, C \in \mathbb{IR};$ $M_{p3}: A + B = B + A;$ $M_{p4}: A + (B + C) = (A + B) + C;$ $M_{p5}: AB = BA;$ $M_{p6}: A(BC) = (AB)C;$ $M_{p7}: A \subseteq B, C \subseteq D$ implica $A * C \subseteq B * D$ (se $B * D$ é definido); $M_{p8}: (\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A.$
Kaucher	Igual a Moore
Markov	$MK_{p1}: A + B = B + A, (A + B) + C = A + (B + C);$ $MK_{p2}: \alpha(B + C) = \alpha B + \alpha C, \alpha(B - C) = \alpha B - \alpha C;$ $MK_{p3}: (\alpha + \beta)C = \begin{cases} \alpha C + \beta C, & \text{se } \alpha\beta \geq 0, \\ \alpha C - (-\beta C), & \text{se } \alpha\beta > 0; \end{cases}$ $MK_{p4}: \alpha(\beta C) = (\alpha\beta)C, 0A = 0, 1A = A;$ $MK_{p5}: (-A) - B = (-B) - A.$
Affine	Não existente na literatura.
CIA	Possui as mesmas propriedades de Moore. A grande diferença é que essa aritmética possui um inverso aditivo, multiplicativo e detém as leis de distribuição.
SLCIA	$SLCIA_{p1}: A \oplus (-B) = A \ominus B;$ $SLCIA_{p2}: A \ominus (-B) = A \oplus B;$ $SLCIA_{p3}: \oplus$ é associativa: $(A \oplus B) \oplus C = C \oplus (B \oplus C);$ $SLCIA_{p4}: \oplus$ é comutativa: $A \oplus B = B \oplus A;$ $SLCIA_{p5}: [0] = [0,0]$ é o único elemento neutro para \oplus : $A \oplus [0] = A;$ $SLCIA_{p6}: \alpha \odot (A \oplus B) = \alpha \odot A \oplus \alpha \odot B;$ $SLCIA_{p7}: (\alpha + \beta) \odot A = \alpha \odot A \oplus \beta \odot A.$
RDM	$RDM_{p1}: X + Y = Y + X, XY = YX$: comutatividade da adição e multiplicação; $RDM_{p2}: X + (Y + Z) = (X + Y) + Z, X(YZ) = (XY)Z$: associatividade da adição e multiplicação; $RDM_{p3}: \forall X \in \mathbb{R} \exists X^{-1} \in \mathbb{R}$, tal que $X + (X^{-1}) = (X^{-1}) + X = 0$. X^{-1} é o inverso aditivo de X ; $RDM_{p4}: X(Y + Z) = (XY) + (XZ)$: distributividade a esquerda, $(Y + Z)X = (YX) + (ZX)$: distributividade a direita; $RDM_{p5}: \forall X \in \mathbb{R}, 0 \notin X, \exists X^{-1} = 1/X \in \mathbb{R}$, tal que $XX^{-1} = X(1/X) = 1$. X^{-1} é o inverso multiplicativo de X ; $RDM_{p6}: X + Z = Y + Z \rightarrow X = Y$: cancelamento da adição; $RDM_{p7}: ZX = ZY \rightarrow X = Y$: cancelamento da multiplicação.

A duas seções anteriores apresentaram as aritméticas intervalares estudadas e analisadas na fundamentação do trabalho. Para a o desenvolvimento dos objetivos da tese, no próximo capítulo vamos adotar as seguintes aritméticas: Moore, Markov, *Affine*, CIA e RDM. Optamos por não utilizar aritmética de Kaucher, por ser apenas uma extensão de Moore, chegando a resultados similares, e SLCIA por ser uma variação da CIA, a qual possui as mesmas operações e propriedades diferenciando apenas por considerar sempre a mesma variável λ para todos os intervalos.

2.10 Trabalhos relacionados

A presente seção explora trabalhos científicos que apresentam, principalmente, problemas caudados pelas restrições da aritmética de Moore. O objetivo é focar nos problemas que a aritmética de Moore apresenta que serviram como base para o desenvolvimento da tese. É a partir deles que são escolhidas as aritméticas e o tipo de equação foco do trabalho.

Cada subseção a seguir tem como título o próprio título do trabalho a ser apresentado.

2.10.1 *A new method for solving interval and fuzzy equations: Linear case*

O problema de soluções de equações fuzzy ou intervalares não é trivial para equações lineares como:

$$AX = B \quad (16)$$

onde A e B são intervalos ou valores fuzzy. Para certos valores de A e B , a Equação 16 não tem solução para X (SEVASTJANOV; DYMOVA, 2009). Em outras palavras, a solução clássica muitas vezes não existe.

Portanto, nas abordagens modernas para solução de fórmulas fuzzy e intervalares da Equação 16, bem como sistemas lineares fuzzy e intervalares, a igualdade estrita do lado direito e esquerdo da Equação 16 não é obrigatoriamente requerida.

Atualmente, as principais formas de solução para equações de sistemas lineares intervalares e fuzzy são baseadas considerando a equação em questão como um conjunto de equações de valores reais, das quais os parâmetros envolvidos correspondem a valores A e B intervalares ou fuzzy intervalares.

A partir dessas interpretações, surgem questões: Como interpretar uma solução de equação linear fuzzy ou intervalar se ela não é uma solução clássica? Como tratar problemas com intervalos de soluções finais que tem diâmetro (ou largura) em excesso? A fim de responder e tratar essas questões, Sevastjanov e Dymova (2009) propuseram uma abordagem que resolve tais problemas.

Os autores dizem que a raiz do problema são as equações $F(X) - B = 0$ e $F(X) = B$, onde B é um intervalo ou um valor fuzzy e $F(X)$ é uma função intervalar ou fuzzy, as quais não são equivalentes. Além disso, o principal problema é que o intervalo convencional ou a extensão fuzzy da equação usual, que leva ao intervalo ou equação fuzzy como $F(X) - B = 0$, não é um procedimento correto. Do lado esquerdo da equação tem um intervalo, enquanto que no lado direito tem um valor real zero. Como um intervalo não pode ser igual a um valor real, os autores chamam essa observação como “problema do lado direito de equações intervalares”. Ainda nesse tipo de equação, problemas menores como raízes de intervalos invertidos, ou seja,

$\bar{x} < x$, podem ocorrer.

A chave para a abordagem proposta por Sevastjanov e Dymova (2009) é a observação de que o valor zero na análise de intervalo não significa “nada”, o mais natural é o tratamento do intervalo zero como um intervalo centrado em torno de zero. Isso permite evitar formalmente o chamado de “problema do lado direito de equações intervalares” e usar a abordagem clássica para a solução de equações lineares intervalares.

A técnica é baseada no princípio de extensão fuzzy. Os valores de parâmetros incertos em uma equação são substituídos por intervalos correspondentes ou valores fuzzy e todas as operações aritméticas são substituídas pelas operações intervalares/fuzzy relevantes.

Um dos maiores inconvenientes da aritmética intervalar é o rápido crescimento da largura dos intervalos resultantes dos cálculos intervalares. Para reduzir esse efeito são propostas diferentes modificações na aritmética intervalar e todas apresentam bons resultados apenas em condições específicas (SEVASTJANOV; DYMOVA, 2009).

Sejam $[x] = [\underline{x}, \bar{x}]$ e $[y] = [\underline{y}, \bar{y}]$ intervalos (notação utilizada pelo autor ao invés da usual X) e $@ \in \{+, -, *, /\}$, então conforme Equação 17

$$[x]@[y] = \{x@y \mid \forall x \in [x], \forall y \in [y]\}. \quad (17)$$

Como resultado direto da equação acima, a adição (Equação 18), subtração (Equação 19), multiplicação (Equação 20) e a divisão (Equação 21) são obtidas:

$$[x] + [y] = [\underline{x} + \underline{y}, \bar{x} + \bar{y}], \quad (18)$$

$$[x] - [y] = [\underline{x} - \bar{y}, \bar{x} - \underline{y}], \quad (19)$$

$$[x] * [y] = [\min(\underline{x}\underline{y}, \bar{x}\bar{y}, \underline{x}\bar{y}, \bar{x}\underline{y}), \max(\underline{x}\underline{y}, \bar{x}\bar{y}, \underline{x}\bar{y}, \bar{x}\underline{y})], \quad (20)$$

$$[x]/[y] = [\underline{x}, \bar{x}] * [1/\bar{y}, 1/\underline{y}] \quad (0 \notin [y]). \quad (21)$$

Um importante problema que não é amplamente discutido na literatura é o chamado “problema do lado direito de equações intervalares”. Suponha uma equação básica não intervalar $f(x) = 0$. Sua extensão intervalar pode ser obtida substituindo as variáveis por intervalos e as operações aritméticas pelas operações intervalares correspondentes. Como resultado teremos uma equação intervalar $[f]([x]) = 0$. Observe que esta equação apresenta em sua parte esquerda um valor intervalar, enquanto a parte direita não é um intervalo degenerado zero. Obviamente, se $[f](x) = [\underline{f}, \bar{f}]$,

então a equação $[f]([x]) = 0$ é verdadeira somente quando $\underline{f} = \bar{f} = 0$. Em geral, a equação $[f]([x]) = 0$ somente pode ser verificada para o intervalo $[x]$ invertido, ou seja, quando $\bar{x} < \underline{x}$. Intervalos invertidos são analisados na aritmética intervalar modal (SEVASTJANOV; DYMOVA, 2009), mas é difícil e muitas vezes até impossível encontrar uma situação real onde $\bar{x} < \underline{x}$ é significativo. Sabe-se que se uma expressão pode ser apresentada em diferentes, mas algebricamente equivalentes, formas, seus resultados podem ser diferentes quando é feita a extensão intervalar. O mesmo é verdadeiro para equações.

A ideia principal do artigo é apresentar uma proposta de tratamento da intervalo zero como um intervalo centrado em torno de zero. Alguns problemas metodológicos relacionados com esta definição do intervalo zero são discutidos. Os autores mostram que o método proposto pode ser usado como uma ferramenta prática confiável para a resolução de equações lineares intervalares e fuzzy, bem como os sistemas. Uma vantagem importante para a prática do novo método desenvolvido é que ele fornece soluções com diâmetros substancialmente menores do que os métodos convencionais.

2.10.2 *Computing with words with the use of inverse RDM models of membership functions*

Algumas restrições da aritmética intervalar de Moore são descritas na literatura, por exemplo, por Sevastjanov e Dymova (2009):

- efeito do excesso de largura do intervalo,
- o problema da dependência,
- dificuldades para resolver equações intervalares mais simples,
- problemas com os lados direito das equações intervalares,
- soluções absurdas e solicitações para introduzir entropia negativa no sistema.

No trabalho de Piegat e Plucinski (2015), são apresentados exemplos que comprovam algumas incoerências na utilização de operações básicas da aritmética de Moore. Por exemplo, considerando a seguinte equação intervalar:

$$[\underline{a}, \bar{a}] + [\underline{x}, \bar{x}] = [\underline{c}, \bar{c}], [1, 3] + [\underline{x}, \bar{x}] = [3, 4]. \quad (22)$$

Tem-se uma solução da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} 1 + \underline{x} &= 3, & \underline{x} &= 2, \\ 3 + \bar{x} &= 4, & \bar{x} &= 1. \end{aligned}$$

A solução obtida é absurda, pois $\bar{x} < \underline{x}$. A Equação 22 pode ser resolvida de outra maneira:

$$[\underline{x}, \bar{x}] = [3, 4] - [1, 3] = [0, 3].$$

Entretanto, a solução não satisfaz a Equação 22, uma vez que substituída na fórmula inicial tem-se

$$[1, 3] + [0, 3] \neq [3, 4].$$

O objetivo de introduzir as variáveis RDM não é fazer parametrização desnecessária de intervalos, mas introduzir o sistema de coordenadas cartesianas em aritmética de intervalo, da mesma forma que na aritmética convencional, onde tem sido usada há séculos (ANDRZEJ PIEGAT, 2015). Os autores observam que a aritmética de Moore usa apenas extremidades de intervalos nos cálculos. Os seus interiores não participam dos cálculos. Isso significa uma espécie de “vácuo” aritmético. Considerando a subtração de $A - C = X$, no caso $[3, 4] - [1, 3] = [0, 3]$, realizada com a aritmética de Moore. Se fizermos a adição de $X + C = [0, 3] + [1, 3]$ teremos como resultados $[1, 6]$ e não $A = [3, 4]$. Eles dizem que isso ocorre porque o resultado não é completo. O mínimo e máximo das funções matemáticas nem sempre se encontram nas bordas dos domínios da função, pelo contrário, frequentemente se encontram dentro desses domínios. Nesse caso, os pontos de mínimo e máximo não podem ser detectados pela aritmética de Moore.

A utilização das variáveis RDM faz com que introduza um sistema de coordenadas cartesianas local no domínio do problema, fazendo com que os interiores do intervalo possam participar dos cálculos. Graças a isso, até os mais complicados problemas, se os extremos estiverem dentro de seus domínios, podem ser detectados pelo exame de função usual, de forma semelhante ao da matemática convencional. A aritmética de Moore detecta os extremos apenas se eles se encontram no limite do espaço de solução como no caso de todas as operações monotônicas, como adição, subtração, multiplicação e divisão.

O trabalho mostra que a aritmética de Moore não possui as regras de inverso aditivo, distributividade, inverso multiplicativo e cancelamento da multiplicação. Consequentemente, transformações de fórmulas não podem ser feitas. Por exemplo, na equação $A + X = C$ colocar o A no lado direito, $X = C - A$, não é permitido, pois a regra de inverso aditivo não existe. Como algumas transformações não são permitidas, problemas algébricos e matemáticos mais complexos não podem ser resolvidos (ANDRZEJ PIEGAT, 2015).

Em contrapartida às falhas da aritmética de Moore, abaixo são apresentados os benefícios da aritmética RDM:

- problemas complicados podem ser resolvidos em razão da possibilidade de transformar equações,

- quase todas as regras da aritmética convencional são mantidas na aritmética RDM,
- aritmética RDM fornece soluções de problemas multidimensionais das quais várias representações simplificadas podem ser derivadas.

O último benefício pode ser explicado usando um exemplo de uma adição intervalar $A + B = C$, onde $A = [1, 2]$ e $B = [2, 4]$. Pela aritmética intervalar RDM, os intervalos são modelados utilizando variáveis RDM:

$$A : a = 1 + \alpha_a, B : b = 2 + 2\alpha_b, c = a + b = 3 + \alpha_a + 2\alpha_b, \alpha_a, \alpha_b \in [0, 1].$$

A solução do conjunto C não é um intervalo com uma dimensão, e sim uma informação 3D. A Figura abaixo apresenta a solução.

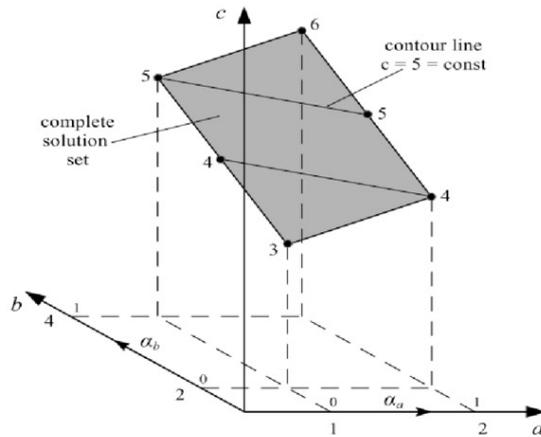


Figura 2 – Resultado conjunto solução tridimensional C utilizando aritmética RDM.
Fonte:(ANDRZEJ PIEGAT, 2015)

Na Figura 2, as linhas de contorno do resultado da adição constante ($c = a + b = \text{const}$) podem ser vistas.

A solução completa é apresentada na Figura 3, a qual pode ser calculada como o intervalo entre $[\min(c), \max(c)] = [\underline{c}, \bar{c}] = [3, 6]$.

$$(1 + 2\alpha_a) + x = 3 + \alpha_c$$

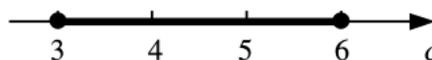


Figura 3 – Solução unidimensional para o conjunto C .
Fonte:(ANDRZEJ PIEGAT, 2015)

É possível observar que o valor $\min(c) = 3$ ocorre quando $\alpha_a = \alpha_b = 0$ e $\max(c) = 6$ quando $\alpha_a = \alpha_b = 1$.

2.10.3 *A new approach to diabetic control - human glucose metabolism using interval arithmetic*

No trabalho de Tomaszewsk (2015), foi aplicada a aritmética intervalar RDM ao problema da diabetes. A justificativa se deu pelo fato de que este problema não é trivial, uma vez que os modelos são geralmente muito complexos, não-lineares e caracterizados por muitos parâmetros que devem ser identificados para cada paciente. Tais parâmetros são bastante imprecisos e variáveis (TOMASZEWSKA, 2015), pois dependem do físico de cada paciente e do tempo que a pessoa convive com esta doença. Além disso, os modelos matemáticos que regem o funcionamento do metabolismo da glicose, possuem valores iniciais como o conteúdo nutricional dos alimentos ingeridos, que só podem ser quantificados com um alto grau de incerteza.

A autora explica ainda que o modelo completo para o influxo de glicose exógena no sangue consiste em dois submodelos: um para a concentração de carboidratos no estômago e um para a concentração de carboidratos no intestino, e que seu trabalho concentra-se apenas no modelo para a concentração de carboidratos no estômago, que são governadas pelas equações modelo de concentração c_c^S (Equação 23) e de volume $V(t)$ (Equação 24).

$$\frac{d}{dt} [c_c^S(t) \cdot V(t)] = -\alpha \cdot V \cdot c_c^S, \quad (23)$$

$$\frac{dV(t)}{dt} = -\alpha \cdot V + q^* = -q(t) + q^*. \quad (24)$$

Para analisar o modelo de concentração c_c^S de carboidratos no estômago e do volume $V(t)$, a autora fez algumas considerações com relação a dois parâmetros incertos neste modelo, o fator f de gastroparesia e a quantidade de carboidratos m_0^c . Ambos tem um grau de incerteza bastante elevado, o primeiro porque depende do físico individual dos pacientes e o segundo porque é bastante difícil determinar com precisão a quantidade de carboidratos nos alimentos ingeridos. Tais parâmetros foram modelados na aritmética RDM, conforme Equação 25 e Equação 26.

$$f_g = 0.6 + 0.1 \cdot \alpha_f, \alpha_f \in [0, 1], \quad (25)$$

$$m_0^c = 68 + 32 \cdot \alpha_c, \alpha_c \in [0, 1]. \quad (26)$$

Ambos têm influência direta sobre a taxa de evacuação α do estômago. A autora

então propôs, como mostra a Tabela 5, valores mínimos, médios e máximos para as variáveis RDM.

Tabela 5 – Possíveis Valores de α para diferente valores de variáveis RDM

α_f	0	0	0	0.5	0.5	0.5	1	1	1
α_c	0	0.5	1	0	0.5	1	0	0.5	1
α	0.04818	0.04812	0.04806	0.05220	0.05213	0.05206	0.05621	0.05614	0.05607

Fonte: (TOMASZEWSKA, 2015)

Foi identificado que valores diferentes do parâmetro α_f têm um impacto maior no valor da taxa de evacuação do estômago do que valores diferentes de α_c , além do α ter uma forte influência na concentração $c_c^S(t)$ de carboidratos no estômago que implica diretamente na diabetes.

A autora conclui que a aritmética intervalar RDM facilita os cálculos de equações complexas com variáveis incertas mostradas neste problema e fornece resultados satisfatórios. Além disso, acredita que este trabalho e a aritmética RDM dão base para realizar mais pesquisas sobre o metabolismo humano da glicose, melhorando terapias e ajudando no desenvolvimento de uma medicação ideal para diabetes.

2.10.4 RDM interval method for solving quadratic interval equation

O trabalho desenvolvido por Landowski (2017) apresenta uma maneira de resolver equações intervalares quadráticas através do uso da aritmética RDM.

Uma equação quadrática intervalar é dada conforme Equação 27:

$$[\underline{a}, \bar{a}]x^2 + [\underline{b}, \bar{b}]x = [\underline{c}, \bar{c}], \quad (27)$$

onde $A = [\underline{a}, \bar{a}]$, $B = [\underline{b}, \bar{b}]$ e $C = [\underline{c}, \bar{c}]$ são intervalos.

Para $a \in A, b \in B$ e $c \in C$ (Equação 27) temos a seguinte forma na notação na aritmética RDM:

$$[\underline{a} + \alpha_a(\bar{a} - \underline{a})]x^2 + [\underline{b} + \alpha_b(\bar{b} - \underline{b})]x = \underline{c} + \alpha_c(\bar{c} - \underline{c}), \quad (28)$$

onde $\alpha_a \in [0, 1]$, $\alpha_b \in [0, 1]$, $\alpha_c \in [0, 1]$, $0 \notin A$.

Para encontrar a solução da Equação 28, primeiro deve-se encontrar o valor de $\Delta = B^2 - 4AC$. Na notação RDM, teremos a Equação 29:

$$\Delta = [\underline{b} + \alpha_b(\bar{b} - \underline{b})]^2 - 4[\underline{a} + \alpha_a(\bar{a} - \underline{a})][\underline{c} + \alpha_c(\bar{c} - \underline{c})]. \quad (29)$$

A partir dessas definições, as raízes x_1 e x_2 seguem o mesmo padrão das raízes com entradas reais, apenas colocando a notação em RDM.

O autor apresenta uma tabela completa com os possíveis valores das bordas para

as variáveis RDM α_a , α_b e α_c .

Após apresentar as equações na notação RDM, o autor demonstra resultados a partir de um exemplo aplicado com equação quadrática resolvida através da aritmética de Moore e resolvida a mesma equação aplicando aritmética RDM.

Os resultados mostram que, primeiramente, a solução de x_2 obtida com aritmética de Moore tem valores negativos, e no problema em questão é impossível resultados com $x < 0$. Já com RDM os resultados são maiores que 0. Também percebe-se que os resultados intervalares de x_1 e x_2 retornados por Moore são maiores (mais largos) que os de RDM.

A aritmética de Moore resolve equações com coeficientes dependentes e equações em que os coeficientes a e b não são dependentes. A dependência entre os coeficientes a e b não é mantida em cada passo no cálculo com a aritmética de Moore. Além disso, se os coeficientes são expressos como intervalos, ao resolver a equação quadrática, valores diferentes podem ser tomados para calcular Δ e na fórmula para a solução x.

O autor conclui, através dos exemplos apresentados, que o resultado intervalar retornado pelo uso da aritmética de Moore nesse tipo de equação não é correto. A aritmética de Moore algumas vezes retorna resultados diferentes para os mesmos coeficientes. Já no mesmo exemplo aplicando a aritmética RDM é possível encontrar a solução completa.

2.11 Considerações do capítulo

O presente capítulo abordou os fundamentos teóricos essenciais para o entendimento do trabalho. Primeiramente foram apresentadas as definições de intervalo e algumas características importantes, como corretude e otimalidade. A partir daí vem a primeira e mais utilizada aritmética intervalar, apresentando as definições, operações e propriedades de Moore. Adicionalmente, foi descrita a definição da teoria das aproximações intervalares, a qual apresenta um espaço intervalar novo, como uma extensão da aritmética de Moore, possibilitando utilizar algumas propriedades inexistente na aritmética convencional.

Devido às restrições apresentadas na aritmética SIA, surgem novas aritméticas intervalares e o capítulo segue com a descrição daquelas estudadas no desenvolvimento da tese. Aqui ficam como principais tópicos as diferenças essenciais das aritméticas, quanto à estrutura das propriedades algébricas, as representações do intervalo e suas operações aritmética básicas, diferenças essas que dão todo o sentido para a investigação e busca de soluções melhores nos cálculos do tipo intervalo.

Por fim, são elencados alguns dos trabalhos que nortearam todo o desenvolvimento da tese.

O próximo capítulo aborda o desenvolvimento da tese. A partir das aritméticas apresentadas, serão desenvolvidas as soluções das equações lineares com coeficientes intervalares em diferentes aritméticas, a fim de buscar a solução completa para cada equação.

3 SOLUÇÃO DE EQUAÇÕES LINEARES COM COEFICIENTES INTERVALARES EM DIFERENTES ARITMÉTICAS

Diante do que foi visto nos capítulos anteriores, é possível verificar que diferentes aritméticas intervalares podem retornar resultados distintos para as mesmas equações. Então surgem as questões: qual a solução completa? Qual a melhor aritmética intervalar para ser utilizada nesse tipo de problema?

O objetivo deste capítulo é demonstrar como pode ser obtida a solução completa (aquela que apresenta um intervalo solução com todos os valores reais possíveis contidos no intervalo) de diferentes equações lineares com coeficientes intervalares, tais como: $A + X = B$; $AX + B = C$; $AX + BX = C$; $AX + B = CX + D$. Para isso serão apresentadas as equações analisadas juntamente com suas soluções para cada aritmética intervalar adotada no presente trabalho: Moore, Markov, *Affine*, CIA e RDM

3.1 Equações lineares

É conhecido que a aritmética convencional (Moore) superestima o tamanho do resultado intervalar quando há dependência de variáveis. Um exemplo clássico desse problema é descrito por Neumaier (NEUMAIER, 1991).

Considere $y = f(x) = x(1 - x)$, $x \in [0, 1]$. A aplicação da aritmética intervalar produz: $y = [0, 1] \times (1 - [0, 1]) = [0, 1] \times [0, 1] = [0, 1]$. O valor correto é $f(x) \in [0, \frac{1}{4}]$.

Se utilizarmos a aritmética intervalar clássica para resolução de equações intervalares, obteremos uma resposta que na maioria dos casos não é satisfatória (KORZENOWSKI, 1994).

Korzenowski (1994) cita como o exemplo a equação $A + X = B$, onde $A \in [1, 5]$, $B \in [2, 9]$. Para obter a solução considera-se $[1, 5] + [\underline{x}, \bar{x}] = [2, 9]$. Através das operações definidas na aritmética de Moore, temos $\underline{x} = 1$ e $\bar{x} = 4$, ou seja, o intervalo solução $[1, 4]$. Este intervalo não oferece uma boa solução, já que não contém todas as possíveis soluções reais envolvidas na equação intervalar. Basta considerar que a equação $1 + X = 9$, cuja solução, $x = 8$, não pertence ao intervalo solução (KORZENOWSKI, 1994).

Em alguns outros casos, o intervalo solução de uma equação linear pode ser um intervalo não suportado por Moore, o chamado intervalo impróprio. Todos esses problemas nos levam a concluir que Moore não seja a melhor aritmética para resolver esses tipos de equações.

Considera-se a extensão intervalar da equação linear mais simples, como mostra a Equação 30 (SEVASTJANOV; DYMOVA, 2009)

$$AX = B \quad (30)$$

e suas formas algébricas equivalentes apresentadas na Equação 31 e Equação 32.

$$X = \frac{B}{A}, \quad (31)$$

$$AX - B = 0 \quad (32)$$

para A, B intervalos ($0 \notin A$).

Sejam $A = [\underline{a}, \bar{a}]$ e $B = [\underline{b}, \bar{b}]$ intervalos. Por simplicidade, primeiro considera-se o caso onde $A > 0, B > 0$, ou seja, $\underline{a}, \bar{a} > 0$ e $\underline{b}, \bar{b} > 0$. A extensão intervalar para a Equação 30 é $[\underline{a}, \bar{a}][\underline{x}, \bar{x}] = [\underline{b}, \bar{b}]$. Utilizando a regra apresentada na Equação 20 (Subseção 2.10.1), obtém-se $[\underline{ax}, \bar{ax}] = [\underline{b}, \bar{b}]$. A igualdade do lado direito com o esquerdo só é possível se $\underline{ax} = \underline{b}$ e $\bar{ax} = \bar{b}$ e finalmente tem-se que:

$$\underline{x} = \frac{\underline{b}}{\underline{a}}, \bar{x} = \frac{\bar{b}}{\bar{a}}. \quad (33)$$

Aplicando a regra da Equação 21 (Subseção 2.10.1), a extensão intervalar para a Equação 31 resulta nas expressões

$$\underline{x} = \frac{\underline{b}}{\underline{a}}, \bar{x} = \frac{\bar{b}}{\bar{a}}. \quad (34)$$

Agora considere alguns exemplos:

Exemplo 1: Sejam $A = [3, 4]$ e $B = [1, 2]$. Pela Equação 33 $\underline{x} = 0.333, \bar{x} = 0.5$ e pela Equação 34 $\underline{x} = 0.25, \bar{x} = 0.666$.

Exemplo 2: Sejam $A = [1, 2]$ e $B = [3, 4]$. Pela Equação 33 $\underline{x} = 3, \bar{x} = 2$ e pela Equação 34 $\underline{x} = 1.5, \bar{x} = 4$.

Exemplo 3: Sejam $A = [0.1, 0.3]$ e $B = [1, 1]$ (ou seja, b é um número real). Pela Equação 33 $\underline{x} = 10, \bar{x} = 3.333$ e pela Equação 34 $\underline{x} = 3.333, \bar{x} = 10$.

Pode-se perceber que a extensão intervalar da Equação 30 pode resultar em intervalos impróprios (invertidos), ou seja, $\underline{x} > \bar{x}$ como pode ser visto nos exemplos 2 e 3,

enquanto que a Equação 31 retorna intervalos corretos, ou seja, $\underline{x} < \bar{x}$. Vale ressaltar que a extensão intervalar da Equação 31 fornecerá sempre os intervalos resultantes corretos porque a Equação 34 é inferida diretamente da definição básica apresentada na Equação 21.

Nota-se que no Exemplo 3, a extensão intervalar formal da Equação 30 leva a uma equação intervalar contraditória, uma vez que no lado direito tem-se um intervalo degenerado b (valor real), enquanto que o lado esquerdo é um intervalo.

Colocar os intervalos degenerados no lado direito da Equação 30 deveria ser equivalente ao requisito de reduzir uma incerteza do lado esquerdo até zero. Isso é possível somente no caso de intervalo inverso X que, por sua vez, pode ser interpretado como um pedido para introduzir entropia negativa no sistema.

A extensão intervalar padrão para a Equação 32 é $[\underline{ax}, \bar{ax}] - [\underline{b}, \bar{b}] = 0$. Utilizando as regras das Equações 18 e 19 obtém-se $[\underline{ax} - \bar{b}, \bar{ax} - \underline{b}] = 0$ e

$$\underline{x} = \frac{\bar{b}}{\underline{a}}, \bar{x} = \frac{\underline{b}}{\bar{a}}.$$

É fácil notar que em alguns casos o resultado será um intervalo invertido.

Em resumo, pode-se dizer que somente a Equação 31 pode ser considerada como base razoável para a extensão intervalar. Por outro lado, a partir dessa base obtém-se a Equação 34, a qual muitas vezes resulta em uma diferença grande do intervalo de entrada comparado ao intervalo de saída, como pode ser visto no Exemplo 3.

Pela aritmética convencional qualquer extensão intervalar da Equação 32 não é um operação correta desde que obtém-se uma expressão intervalar matemática no lado esquerdo da equação, enquanto que no lado direito o zero usual não é modificado. Para os autores, a raiz do problema é que a metodologia convencional para a extensão intervalar não envolve uma operação chamada “extensão intervalar do zero”. Formalmente, quando estende-se a Equação 32, não se obtém somente intervalo no lado esquerdo, mas também o intervalo zero no lado direito. Nesse trabalho, os autores propõem uma operação chamada “extensão intervalar do zero” para obter o zero intervalar no lado direito da extensão da Equação 32. Na aritmética convencional, assume-se que qualquer intervalo que contém zero pode ser considerado como zero intervalar. Essa definição é satisfatória para suprimir a divisão por zero na aritmética convencional. Para a proposta dos autores, é preciso uma definição mais restritiva.

Pode-se definir zero degenerado como o resultado da operação $a - a$, onde a é um número real ou variável. De maneira similar, pode-se definir o zero intervalar como o resultado da operação $A - A$, onde A é um intervalo. Pelas definições das Equações 17 e 19 tem-se $[\underline{a}, \bar{a}] - [\underline{a}, \bar{a}] = [\underline{a} - \bar{a}, \bar{a} - \underline{a}] = [-(\bar{a} - \underline{a}), \bar{a} - \underline{a}]$. Em qualquer caso, o resultado da subtração $A - A$ é um intervalo simétrico em relação a zero (SEVASTJANOV; DYMOVA, 2009).

Então, se quisermos tratar a subtração de dois intervalos idênticos como um zero intervalar, a definição mais geral é “o zero intervalar é um intervalo centrado em torno do zero” com tamanho indefinido. Como resultado da extensão intervalar da Equação 32 tem-se

$$[a, \bar{a}][x, \bar{x}] - [b, \bar{b}] = [-y, y] \quad (35)$$

Considerando valores positivos para A e B , pela Equação 35 tem-se:

$$\begin{cases} ax - \bar{b} = -y, \\ \bar{a}\bar{x} - \underline{b} = y. \end{cases} \quad (36)$$

Somando as equações, obtém-se uma equação linear como mostra a Equação 37:

$$ax + \bar{a}\bar{x} - \underline{b} - \bar{b} = 0. \quad (37)$$

É impossível obter uma única solução de valor real da Equação 37, pois é uma equação indeterminada. Por outro lado, se existem algumas restrições sobre os valores das variáveis desconhecidas, então a equação com essas restrições pode ser considerada como o chamado problema da satisfação de restrição (do inglês *constraint satisfaction problem* (CSP)) e sua solução intervalar pode ser obtida. CSP serve como uma poderosa ferramenta matemática para resolver problemas de incerteza complicados (SEVASTJANOV; DYMOVA, 2009).

Considera-se que uma solução completa para uma equação linear intervalar aquela que contém todos os possíveis valores reais para a equação.

Abaixo apresentam-se as equações lineares a serem utilizadas no desenvolvimento do trabalho em busca da aritmética intervalar que retorna a solução completa. Todas as provas, exemplos e representação gráfica das equações podem ser melhor entendidas em (KORZENOWSKI, 1994).

- $A + X = B$,
- $AX + B = C$,
- $AX + BX = C$,
- $AX + B = CX + D$.

Salienta-se que, conforme foi apresentado na Seção 2.10, trabalhos atuais apresentam problemas ao resolver equações lineares simples utilizando aritmética convencional de Moore.

A seguir serão apresentadas seções com o desenvolvimento da solução de cada equação linear citada acima, aplicada nas aritméticas de Moore, Markov, *Affine*, CIA e RDM.

3.2 Equação: $A + X = B$

A partir da matemática convencional sabemos que existem duas formas de solução da equação para encontrar o intervalo X . A primeira pela escrita original da equação, $A + X = B$ e a segunda forma isolando o X , obtendo a equação $X = B - A$.

Serão desenvolvidas essas duas formas para cada aritmética intervalar, com o objetivo de procurar a solução completa e demonstrar como são as resoluções para cada tipo de solução.

Ao final de cada subseção apresentaremos a aplicação de cada forma genérica de solução em um exemplo numérico, a fim de ilustrar os resultados obtidos. Importante deixar claro que para todas as soluções genéricas nas diferentes aritméticas o valor real exato continua indeterminado, porém restrito ao domínio dos valores reais que compõem a envoltória intervalar.

Como nosso objetivo não é uma análise numérica, apenas utilizaremos exemplos retirados da literatura e apontados como a solução completa para cada equação linear.

A solução completa para este tipo de função é formada por um intervalo $X \in \mathbb{IR}$ que satisfaz a condição $f(X) = 0$. Como a função possui coeficientes intervalares, a condição $f(X) = [0, 0]$ nem sempre será satisfeita, pois em algumas aritméticas $0 \in X - X$ e em outras $0 = X - X$. Assim, a solução completa deve ter corretude, ou seja, conter todos os possíveis valores para x .

3.2.1 Moore

Como já foi visto anteriormente, a aritmética de Moore não possui algumas propriedades matemáticas importantes, como inverso aditivo, inverso multiplicativo e leis de distributividade.

Para chegar na solução completa, mostraremos a solução da equação em diferentes formas de resolução.

Abaixo é apresentada a solução para a equação $A + X = B$ na aritmética convencional de Moore.

Considere os intervalos $A = [\underline{a}, \bar{a}]$, $B = [\underline{b}, \bar{b}]$ e $X = [\underline{x}, \bar{x}]$

$$[\underline{a}, \bar{a}] + [\underline{x}, \bar{x}] = [\underline{b}, \bar{b}] \quad \text{adição de intervalos}$$

$$[\underline{a} + \underline{x}, \bar{a} + \bar{x}] = [\underline{b}, \bar{b}] \quad \text{igualdade de intervalos}$$

$$\underline{a} + \underline{x} = \underline{b}, \quad \underline{x} = \underline{b} - \underline{a}$$

$$\bar{a} + \bar{x} = \bar{b}, \quad \bar{x} = \bar{b} - \bar{a}$$

Como já foi apresentado ao longo do texto, na aritmética de Moore não temos as propriedades de inversos, logo, $\underline{x} = \underline{b} - \underline{a}$ e $\bar{x} = \bar{b} - \bar{a}$ não são operações válidas nessa aritmética. Assim, a solução da equação nesta forma de escrita não pode ser encontrada.

Na literatura é possível encontrar diversos trabalhos relatando problemas com a aritmética de Moore, especialmente em casos simples, onde equações lineares nem sempre retornam um intervalo solução completo. Um exemplo já foi citado na Seção 3.1.

Como o espaço intervalar $(\mathbb{IR}, +, \times, \sqsubseteq, \equiv_x, \perp)$ possui uma estrutura semelhante a de um corpo, é possível isolar a variável da equação intervalar, uma vez que existem os elementos neutro e inverso (KORZENOWSKI, 1994).

A solução de uma equação linear obtida diretamente é considerada ótima, ou seja, ela contém somente toda a família de equações reais envolvida na equação intervalar (KORZENOWSKI, 1994).

Como o intervalo solução X é determinado pelo mínimo e máximo da solução de cada equação real envolvida na equação intervalar, tem-se que a solução será encontrada conforme o que foi explicitado na Seção 2.2.

A segunda forma genérica de solução para a equação é dada por $X \equiv B - A$, a qual é possível devido ao uso do espaço intervalar de corpo dinâmico baseado na teoria das aproximações, apresentada na Seção 2.2., onde $X \equiv_{b-a} B - A$. A demonstração dos possíveis valores para o intervalo solução são apresentados abaixo.

caso 1) $A > 0$ e $B > 0$

$$\begin{aligned} [\underline{x}, \bar{x}] &\equiv [\underline{b}, \bar{b}] - [\underline{a}, \bar{a}] && \text{inverso aditivo} \\ [\underline{x}, \bar{x}] &\equiv [\underline{b}, \bar{b}] + [-\bar{a}, -\underline{a}] && \text{adição de intervalos} \\ [\underline{x}, \bar{x}] &\equiv [\underline{b} - \bar{a}, \bar{b} - \underline{a}] && \text{igualdade de intervalos} \\ \underline{x} &\equiv \underline{b} - \bar{a}, & \bar{x} &\equiv \bar{b} - \underline{a} \end{aligned}$$

Seguem os próximos casos descritos e suas demonstrações são análogas ao anterior.

caso 2) $A > 0$ e $B < 0$

$$\begin{aligned} [\underline{x}, \bar{x}] &\equiv [\underline{b}, \bar{b}] - [+a, +\bar{a}] && \text{inverso aditivo} \\ [\underline{x}, \bar{x}] &\equiv [\underline{b}, \bar{b}] + [-\bar{a}, -a] \\ [\underline{x}, \bar{x}] &\equiv [\underline{b} - \bar{a}, \bar{b} - a] \\ \underline{x} &\equiv \underline{b} - \bar{a}, & \bar{x} &\equiv \bar{b} - a \end{aligned}$$

caso 3) $A > 0$ e $B = [-b, +\bar{b}]$

$$[\underline{x}, \bar{x}] \equiv [\underline{b}, \bar{b}] - [\underline{a}, \bar{a}] \quad \text{inverso aditivo}$$

$$[\underline{x}, \bar{x}] \equiv [\underline{b}, \bar{b}] + [-\bar{a}, -\underline{a}]$$

$$[\underline{x}, \bar{x}] \equiv [\underline{b} - \bar{a}, \bar{b} - \underline{a}]$$

$$\underline{x} \equiv \underline{b} - \bar{a}, \quad \bar{x} \equiv \bar{b} - \underline{a}$$

caso 4) $A < 0$ e $B > 0$

$$[\underline{x}, \bar{x}] \equiv [\underline{b}, +\bar{b}] - [\underline{a}, \bar{a}] \quad \text{inverso aditivo}$$

$$[\underline{x}, \bar{x}] \equiv [\underline{b}, +\bar{b}] + [+ \bar{a}, +\underline{a}]$$

$$[\underline{x}, \bar{x}] \equiv [\underline{b} + \bar{a}, \bar{b} + \underline{a}]$$

$$\underline{x} \equiv \underline{b} + \bar{a}, \quad \bar{x} \equiv \bar{b} + \underline{a}$$

caso 5) $A < 0$ e $B < 0$

$$[\underline{x}, \bar{x}] \equiv [\underline{b}, \bar{b}] - [-\underline{a}, -\bar{a}] \quad \text{inverso aditivo}$$

$$[\underline{x}, \bar{x}] \equiv [\underline{b}, \bar{b}] + [+ \bar{a}, +\underline{a}]$$

$$[\underline{x}, \bar{x}] \equiv [\underline{b} + \bar{a}, \bar{b} + \underline{a}]$$

$$\underline{x} \equiv \underline{b} + \bar{a}, \quad \bar{x} \equiv \bar{b} + \underline{a}$$

caso 6) $A < 0$ e $B = [-\underline{b}, +\bar{b}]$

$$[\underline{x}, \bar{x}] \equiv [-\underline{b}, +\bar{b}] - [-\underline{a}, -\bar{a}] \quad \text{inverso aditivo}$$

$$[\underline{x}, \bar{x}] \equiv [-\underline{b}, +\bar{b}] + [+ \bar{a}, +\underline{a}]$$

$$[\underline{x}, \bar{x}] \equiv [-\underline{b} + \bar{a}, +\bar{b} + \underline{a}]$$

$$\underline{x} \equiv \underline{b} + \bar{a}, \quad \bar{x} \equiv \bar{b} + \underline{a}$$

caso 7) $A = [-\underline{a}, +\bar{a}]$ e $B > 0$

$$[\underline{x}, \bar{x}] \equiv [+ \underline{b}, +\bar{b}] - [-\underline{a}, +\bar{a}] \quad \text{inverso aditivo}$$

$$[\underline{x}, \bar{x}] \equiv [+ \underline{b}, +\bar{b}] + [-\bar{a}, +\underline{a}]$$

$$[\underline{x}, \bar{x}] \equiv [+ \underline{b} - \bar{a}, +\bar{b} + \underline{a}]$$

$$\underline{x} \equiv \underline{b} - \bar{a}, \quad \bar{x} \equiv \bar{b} + \underline{a}$$

caso 8) $A = [-\underline{a}, +\bar{a}]$ e $B < 0$

$$[\underline{x}, \bar{x}] \equiv [-\underline{b}, -\bar{b}] - [-\underline{a}, +\bar{a}] \quad \text{inverso aditivo}$$

$$[\underline{x}, \bar{x}] \equiv [-\underline{b}, -\bar{b}] + [-\bar{a}, +\underline{a}]$$

$$[\underline{x}, \bar{x}] \equiv [-\underline{b} - \bar{a}, -\bar{b} + \underline{a}]$$

$$\underline{x} \equiv \underline{b} - \bar{a}, \quad \bar{x} \equiv \bar{b} + \underline{a}$$

caso 9) $A = [-\underline{a}, +\bar{a}]$ e $B = [-\underline{b}, +\bar{b}]$

$$[\underline{x}, \bar{x}] \equiv [-\underline{b}, +\bar{b}] - [-\underline{a}, +\bar{a}] \quad \text{inverso aditivo}$$

$$[\underline{x}, \bar{x}] \equiv [-\underline{b}, +\bar{b}] + [-\bar{a}, +\underline{a}]$$

$$[\underline{x}, \bar{x}] \equiv [-\underline{b} - \bar{a}, +\bar{b} + \underline{a}]$$

$$\underline{x} \equiv \underline{b} - \bar{a}, \quad \bar{x} \equiv \bar{b} + \underline{a}$$

Notamos que somente é possível resolver a equação através do uso da TAI na aritmética de Moore.

Abaixo apresentamos um exemplo numérico que serve para ilustrar a aplicação da forma de solução com a teoria das aproximações. Escolhemos como exemplo para essa equação linear justamente aquele citado na Seção 3.1.

Exemplo: Considere os intervalos $A = [1, 5]$ e $B = [2, 9]$.

$$X \equiv [2, 9] - [1, 5]$$

$$X \equiv [2, 9] + [-5, -1]$$

$$X \equiv [-3, 8]$$

Abaixo serão descritas as soluções com as demais aritméticas e ao final da seção será feita uma análise da solução completa para a equação.

3.2.2 Markov

A aritmética de Markov possui todas as propriedades da aritmética real. Assim, temos duas maneiras de solução para a equação. Primeiramente a equação resolvida na sua forma original, $A + X = B$ e depois na forma $X = B - A$. Logo seguem os exemplos que comprovam essa solução.

Considerando os intervalos $A = [\check{a}, \hat{a}]$ e $B = [\check{b}, \hat{b}]$, abaixo são descritas as formas de solução em todos os possíveis valores de A e B .

$$A +_M X = B$$

caso 1) $A > 0$ e $B > 0$

$$[\check{a}, \hat{a}] +_M [\check{x}, \hat{x}] = [\check{b}, \hat{b}]$$

adição de intervalos

$$[\check{a} + \check{x} \vee \hat{a} + \hat{x}] = [\check{b}, \hat{b}]$$

igualdade de intervalos

$$\check{x} = \check{b} - \check{a}, \quad \hat{x} = \hat{b} - \hat{a}$$

(1)

A demonstração dos demais casos é análoga ao caso 1 e por isso não será descrita aqui.

caso 2) $A > 0$ e $B < 0$

$$[\check{a}, \hat{a}] +_M [\check{x}, \hat{x}] = [\check{b}, \hat{b}]$$

$$[\check{a} + \check{x} \vee \hat{a} + \hat{x}] = [\check{b}, \hat{b}]$$

$$\check{x} = \check{b} - \check{a} \quad \hat{x} = \hat{b} - \hat{a}$$

caso 3) $A > 0$ e $B = [-\check{b}, +\hat{b}]$

$$[\check{a}, \hat{a}] +_M [\check{x}, \hat{x}] = [\check{b}, \hat{b}]$$

$$[\check{a} + \check{x} \vee \hat{a} + \hat{x}] = [\check{b}, \hat{b}]$$

$$\check{x} = \check{b} - \check{a} \quad \hat{x} = \hat{b} - \hat{a}$$

caso 4) $A < 0$ e $B > 0$

$$[\check{a}, \hat{a}] +_M [\check{x}, \hat{x}] = [\check{b}, \hat{b}]$$

$$[\check{a} + \check{x} \vee \hat{a} + \hat{x}] = [\check{b}, \hat{b}]$$

$$\check{x} = \check{b} + \check{a} \quad \hat{x} = \hat{b} + \hat{a}$$

caso 5) $A < 0$ e $B < 0$

$$[\check{a}, \hat{a}] +_M [\check{x}, \hat{x}] = [\check{b}, \hat{b}]$$

$$[\check{a} + \check{x} \vee \hat{a} + \hat{x}] = [\check{b}, \hat{b}]$$

$$\check{x} = \check{b} + \check{a} \quad \hat{x} = \hat{b} + \hat{a}$$

caso 6) $A < 0$ e $B = [-\check{b}, +\hat{b}]$

$$[\check{a}, \hat{a}] +_M [\check{x}, \hat{x}] = [\check{b}, \hat{b}]$$

$$[\check{a} + \check{x} \vee \hat{a} + \hat{x}] = [\check{b}, \hat{b}]$$

$$\check{x} = \check{b} + \check{a} \quad \hat{x} = \hat{b} + \hat{a}$$

caso 7) $A = [-\check{a}, +\hat{a}]$ e $B > 0$

$$[\check{a}, \hat{a}] +_M [\check{x}, \hat{x}] = [\check{b}, \hat{b}]$$

$$[\check{a} + \check{x} \vee \hat{a} + \hat{x}] = [\check{b}, \hat{b}]$$

$$\check{x} = \check{b} + \check{a} \quad \hat{x} = \hat{b} - \hat{a}$$

caso 8) $A = [-\underline{a}, +\bar{a}]$ e $B < 0$

$$[\check{a}, \hat{a}] +_M [\check{x}, \hat{x}] = [\check{b}, \hat{b}]$$

$$[\check{a} + \check{x} \vee \hat{a} + \hat{x}] = [\check{b}, \hat{b}]$$

$$\check{x} = \check{b} + \check{a} \quad \hat{x} = \hat{b} - \hat{a}$$

caso 9) $A = [-\underline{a}, +\bar{a}]$ e $B = [-\underline{b}, +\bar{b}]$

$$[\check{a}, +\hat{a}] +_M [\check{x}, \hat{x}] = [\check{b}, \hat{b}]$$

$$[\check{a} + \check{x} \vee \hat{a} + \hat{x}] = [\check{b}, \hat{b}]$$

$$\check{x} = \check{b} + \check{a} \quad \hat{x} = \hat{b} - \hat{a}$$

A segunda forma de encontrar a solução para a equação na aritmética de Markov é:

$$X = B -_M A$$

caso 1) $A > 0$ e $B > 0$

$$[\check{x}, \hat{x}] = [\check{b}, \hat{b}] -_M [\check{a}, \hat{a}]$$

subtração de intervalos

$$[\check{x}, \hat{x}] = [\check{b} - \check{a} \vee \hat{b} - \hat{a}]$$

igualdade de intervalos

$$\check{x} = \check{b} - \check{a} \quad \hat{x} = \hat{b} - \hat{a}$$

(2)

caso 2) $A > 0$ e $B < 0$

$$[\check{x}, \hat{x}] = [\check{b}, \hat{b}] -_M [\check{a}, \hat{a}]$$

$$[\check{x}, \hat{x}] = [\check{b} - \check{a} \vee \hat{b} - \hat{a}]$$

$$\check{x} = \check{b} - \check{a} \quad \hat{x} = \hat{b} - \hat{a}$$

caso 3) $A > 0$ e $B = [-\check{b}, +\hat{b}]$

$$[\check{x}, \hat{x}] = [\check{b}, \hat{b}] -_M [\check{a}, \hat{a}]$$

$$[\check{x}, \hat{x}] = [\check{b} - \check{a} \vee \hat{b} - \hat{a}]$$

$$\check{x} = \check{b} - \check{a} \quad \hat{x} = \hat{b} - \hat{a}$$

caso 4) $A < 0$ e $B > 0$

$$[\check{x}, \hat{x}] = [\check{b}, \hat{b}] -_M [\check{a}, \hat{a}]$$

$$[\check{x}, \hat{x}] = [\check{b} + \check{a} \vee \hat{b} + \hat{a}]$$

$$\check{x} = \check{b} + \check{a} \quad \hat{x} = \hat{b} + \hat{a}$$

caso 5) $A < 0$ e $B < 0$

$$[\check{x}, \hat{x}] = [\check{b}, \hat{b}] -_M [\check{a}, \hat{a}]$$

$$[\check{x}, \hat{x}] = [\check{b} + \check{a} \vee \hat{b} + \hat{a}]$$

$$\check{x} = \check{b} + \check{a} \quad \hat{x} = \hat{b} + \hat{a}$$

caso 6) $A < 0$ e $B = [-\check{b}, +\hat{b}]$

$$[\check{x}, \hat{x}] = [\check{b}, \hat{b}] -_M [\check{a}, \hat{a}]$$

$$[\check{x}, \hat{x}] = [\check{b} + \check{a} \vee \hat{b} + \hat{a}]$$

$$\check{x} = \check{b} + \check{a} \quad \hat{x} = \hat{b} + \hat{a}$$

caso 7) $A = [-\check{a}, +\hat{a}]$ e $B > 0$

$$[\check{x}, \hat{x}] = [\check{b}, \hat{b}] -_M [\check{a}, \hat{a}]$$

$$[\check{x}, \hat{x}] = [\check{b} + \check{a} \vee \hat{b} - \hat{a}]$$

$$\check{x} = \check{b} + \check{a} \quad \hat{x} = \hat{b} - \hat{a}$$

caso 8) $A = [-\underline{a}, +\bar{a}]$ e $B < 0$

$$[\check{x}, \hat{x}] = [\check{b}, \hat{b}] -_M [\check{a}, \hat{a}]$$

$$[\check{x}, \hat{x}] = [\check{b} + \check{a} \vee \hat{b} - \hat{a}]$$

$$\check{x} = \check{b} + \check{a} \quad \hat{x} = \hat{b} - \hat{a}$$

caso 9) $A = [-\underline{a}, +\bar{a}]$ e $B = [-\underline{b}, +\bar{b}]$

$$[\check{x}, \hat{x}] = [\check{b}, \hat{b}] -_M [\check{a}, \hat{a}]$$

$$[\check{x}, \hat{x}] = [\check{b} + \check{a} \vee \hat{b} - \hat{a}]$$

$$\check{x} = \check{b} + \check{a} \quad \hat{x} = \hat{b} - \hat{a}$$

A partir das formas (1) e (2) é possível notar que, independente da escrita da equação, o resultado final será o mesmo. Isso se mantém também para os demais casos apresentados.

Segue o mesmo exemplo numérico da subseção anterior para servir de comparação de resultados nas diferentes aritméticas.

Exemplo: Considere os intervalos $A = [1,5]$ e $B = [2,9]$

a) $A +_M X = B$

$$[1, 5] +_M [x, \bar{x}] = [2, 9]$$

$$[1 + x \vee 5 + \bar{x}] = [2, 9]$$

$$1 + x = 2, x = 1$$

$$5 + \bar{x} = 9, \bar{x} = 4$$

Logo, $X = [1 \vee 4]$.

b) $X = B -_M A$

$$X = [2, 9] -_M [1, 5]$$

$$X = [2 - 1 \vee 9 - 5]$$

$$X = [1 \vee 4]$$

3.2.3 Affine

Para a aritmética Affine, serão apresentadas duas formas de solução para a equação, também considerando os intervalos $\hat{a} = a_0 + a_1\varepsilon_1 + \dots + a_n\varepsilon_n$ e $\hat{b} = b_0 + b_1\varepsilon_1 + \dots + b_n\varepsilon_n$. Cabe observar a escrita do intervalo, o qual é definido mas não se conhece todos os valores de ε .

Chamamos atenção para a não divisão em casos, como foi feita nas aritméticas anteriores. Aqui, e nas aritméticas seguintes, vamos olhar apenas para os extremos dos intervalos solução, podendo concluir se as duas formas levam a mesma solução ou não, sendo necessário apenas modificar o sinal dos limites superiores e inferiores conforme necessário.

$$A + X = B$$

$$\hat{a} + \hat{x} = \hat{b}$$

$$a_0 + a_1\varepsilon_1 + \dots + a_n\varepsilon_n + x_0 + x_1\varepsilon_1 + \dots + x_n\varepsilon_n = b_0 + b_1\varepsilon_1 + \dots + b_n\varepsilon_n \quad \text{def. de intervalo}$$

$$(a_0 + x_0) + (a_1 + x_1)\varepsilon_1 + \dots + (a_n + x_n)\varepsilon_n = b_0 + b_1\varepsilon_1 + \dots + b_n\varepsilon_n \quad \text{adição intervalar}$$

$$(a_0 + x_0) = b_0 \quad \rightarrow \quad x_0 = b_0 - a_0 \quad \text{valor de } x_0$$

$$(a_1 + x_1)\varepsilon_1 = b_1\varepsilon_1 \quad \rightarrow \quad x_1\varepsilon_1 = b_1\varepsilon_1 - a_1\varepsilon_1 \quad \text{valor de } x_1\varepsilon_1$$

$$(a_n + x_n)\varepsilon_n = b_n\varepsilon_n \quad \rightarrow \quad x_n\varepsilon_n = b_n\varepsilon_n - a_n\varepsilon_n \quad \text{valor de } x_n\varepsilon_n$$

(1)

Para a equação na forma $X = B - A$, temos:

$$\hat{x} = \hat{b} - \hat{a}$$

$$x_0 + x_1\varepsilon_1 + \dots + x_n\varepsilon_n = (b_0 + b_1\varepsilon_1 + \dots + b_n\varepsilon_n) - (a_0 + a_1\varepsilon_1 + \dots + a_n\varepsilon_n) \text{ def. de intervalo}$$

$$x_0 + x_1\varepsilon_1 + \dots + x_n\varepsilon_n = (b_0 - a_0) + (b_1\varepsilon_1 - a_1\varepsilon_1) + (b_n\varepsilon_n - a_n\varepsilon_n) \text{ subtração intervalar}$$

$$x_0 = b_0 - a_0 \quad \text{valor de } x_0$$

$$x_1\varepsilon_1 = b_1\varepsilon_1 - a_1\varepsilon_1 \quad \text{valor de } x_1\varepsilon_1$$

$$x_n\varepsilon_n = b_n\varepsilon_n - a_n\varepsilon_n \quad \text{valor de } x_n\varepsilon_n$$

(2)

Ilustramos o que foi demonstrado acima através de um exemplo numérico.

Exemplo: Considere os intervalos $A = [1,5]$ e $B = [2,9]$

a) $A + X = B$

$$\hat{a} + \hat{x} = \hat{b}$$

$$\hat{a} = a_0 + a_k\varepsilon_k$$

$$a_0 = \frac{\bar{a}+a}{2} = \frac{5+1}{2} = 3$$

$$a_k = \frac{\bar{a}-a}{2} = \frac{5-1}{2} = 2$$

$$\hat{a} = 3 + 2\varepsilon_k$$

$$\hat{b} = b_0 + b_k\varepsilon_k$$

$$b_0 = \frac{\bar{b}+b}{2} = \frac{9+2}{2} = 5.5$$

$$b_k = \frac{\bar{b}-b}{2} = \frac{9-2}{2} = 3.5$$

$$\hat{b} = 5.5 + 3.5\varepsilon_k$$

$$(3 + 2\varepsilon_k) + (x_0 + x_k\varepsilon_k) = 5.5 + 3.5\varepsilon_k$$

$$3 + x_0 = 5.5$$

$$2\varepsilon_k + x_k\varepsilon_k = 3.5\varepsilon_k$$

$$x_0 = 2.5$$

$$x_k = 1.5$$

$$\hat{x} = 2.5 + 1.5\varepsilon_k$$

Convertendo o intervalo de Affine para Moore:

$$\text{Considere } rad(\hat{x}) = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

$$X = [x_0 - rad(\hat{x}), x_0 + rad(\hat{x})] = [2.5 - 1.5, 2.5 + 1.5]$$

$$X = [1, 4]$$

b) $X = B - A$

$$\hat{x} = \hat{b} - \hat{a}$$

$$\hat{x} = (5.5 + 3.5\varepsilon_k) - (3 + 2\varepsilon_k)$$

$$\hat{x} = 2.5 + 1.5\varepsilon_k$$

$$X = [1, 4]$$

3.2.4 CIA

A CIA é uma extensão da aritmética de Moore, possuindo as mesmas propriedades, além do inverso aditivo, multiplicativo e as leis de distribuição.

Abaixo apresentam-se as formas de solução para a equação. Salienta-se que aqui também não serão discriminados os casos com os possíveis valores dos intervalos. Para as duas formas serão considerados os intervalos $A = \lambda_A \underline{a} + (1 - \lambda_A) \bar{a}$ e $B = \lambda_B \underline{b} + (1 - \lambda_B) \bar{b}$.

$$A + X = B$$

$$\begin{aligned} (\lambda_A \underline{a} + (1 - \lambda_A) \bar{a}) + X &= (\lambda_B \underline{b} + (1 - \lambda_B) \bar{b}), 0 \leq \lambda_A, \lambda_B \leq 1 && \text{def. de intervalo} \\ X &= (\lambda_B \underline{b} + (1 - \lambda_B) \bar{b}) - (\lambda_A \underline{a} + (1 - \lambda_A) \bar{a}), 0 \leq \lambda_A, \lambda_B \leq 1 && \text{inverso aditivo} \\ \underline{x} &= \min\{((\lambda_B \underline{b} + (\bar{b} - \lambda_B \bar{b})) - (\lambda_A \underline{a} + (\bar{a} - \lambda_A \bar{a})))\}, 0 \leq \lambda_A, \lambda_B \leq 1 && \text{limite inferior de } X \\ \bar{x} &= \max\{((\lambda_B \underline{b} + (\bar{b} - \lambda_B \bar{b})) - (\lambda_A \underline{a} + (\bar{a} - \lambda_A \bar{a})))\}, 0 \leq \lambda_A, \lambda_B \leq 1 && \text{limite superior de } X \end{aligned}$$

(1)

Agora, considerando a segunda forma de escrita da equação:

$$X = B - A$$

$$\begin{aligned} X &= (\lambda_B \underline{b} + (1 - \lambda_B) \bar{b}) - (\lambda_A \underline{a} + (1 - \lambda_A) \bar{a}), 0 \leq \lambda_A, \lambda_B \leq 1 && \text{def. de intervalo} \\ \underline{x} &= \min\{((\lambda_B \underline{b} + (\bar{b} - \lambda_B \bar{b})) - (\lambda_A \underline{a} + (\bar{a} - \lambda_A \bar{a})))\}, 0 \leq \lambda_A, \lambda_B \leq 1 && \text{limite inferior de } X \\ \bar{x} &= \max\{((\lambda_B \underline{b} + (\bar{b} - \lambda_B \bar{b})) - (\lambda_A \underline{a} + (\bar{a} - \lambda_A \bar{a})))\}, 0 \leq \lambda_A, \lambda_B \leq 1 && \text{limite superior de } X \end{aligned}$$

(2)

A partir de (1) e (2) é possível perceber que, independente da forma de escrita, o resultado é o mesmo para a equação.

Abaixo é destacado o exemplo aplicado nas duas formas de solução dessa aritmética.

Exemplo: Considere os intervalos $A = [1,5]$ e $B = [2,9]$

a) $A + X = B$

$$(\lambda_A \underline{a} + (1 - \lambda_A) \bar{a}) + (\lambda_X \underline{x} + (1 - \lambda_X) \bar{x}) = (\lambda_B \underline{b} + (1 - \lambda_B) \bar{b}), 0 \leq \lambda_A, \lambda_B, \lambda_X \leq 1$$

$$(\lambda_A 1 + (1 - \lambda_A) 5) + (\lambda_X \underline{x} + (1 - \lambda_X) \bar{x}) = (\lambda_B 2 + (1 - \lambda_B) 9), 0 \leq \lambda_A, \lambda_B, \lambda_X \leq 1$$

$$(-4\lambda_A + 5) + (\lambda_X \underline{x} + \bar{x} - \lambda_X \bar{x}) = (-7\lambda_B + 9), 0 \leq \lambda_A, \lambda_B, \lambda_X \leq 1$$

$$\lambda_A, \lambda_B, \lambda_X = 0:$$

$$\bar{x} + 5 = 9 \rightarrow \bar{x} = 9 - 5 = 4$$

$$\lambda_A, \lambda_B = 0, \lambda_X = 1:$$

$$\underline{x} - \bar{x} + \bar{x} + 5 = 9 \rightarrow \underline{x} = 9 - 5 = 4$$

$$\lambda_A = 1, \lambda_B = 0, \lambda_X = 1:$$

$$\underline{x} - \bar{x} + \bar{x} - 4 + 5 = 9 \rightarrow \underline{x} = 9 - 1 = 8$$

$$\lambda_A, \lambda_B, \lambda_X = 1:$$

$$\underline{x} - \bar{x} + \bar{x} + 1 = 2 \rightarrow \underline{x} = 2 - 1 = 1$$

$$\lambda_A = 0, \lambda_B, \lambda_X = 1:$$

$$\underline{x} - \bar{x} + \bar{x} + 5 = 2 \rightarrow \underline{x} = 2 - 5 = -3$$

$$\lambda_A = 0, \lambda_B = 1, \lambda_X = 0:$$

$$\bar{x} + 5 = 2 \rightarrow \bar{x} = 2 - 5 = -3$$

$$\lambda_A, \lambda_B = 1, \lambda_X = 0:$$

$$\bar{x} - 4 + 5 = 2 \rightarrow \bar{x} = 2 - 1 = 1$$

$$\lambda_A = 1, \lambda_B, \lambda_X = 0:$$

$$\bar{x} - 4 + 5 = 9 \rightarrow \bar{x} = 9 - 1 = 8$$

Após calcular todas as possibilidades, selecionamos aqueles valores onde \underline{x} possui o menor valor e \bar{x} o maior. Logo, $X = [-3, 8]$.

b) $X = B - A$

$$X = (\lambda_B \underline{b} + (1 - \lambda_B) \bar{b}) - (\lambda_A \underline{a} + (1 - \lambda_A) \bar{a}), 0 \leq \lambda_A, \lambda_B \leq 1$$

$$X = (\lambda_B 2 + (1 - \lambda_B) 9) - (\lambda_A 1 + (1 - \lambda_A) 5), 0 \leq \lambda_A, \lambda_B \leq 1$$

$$\lambda_A, \lambda_B = 0:$$

$$X = 9 - 5 = 4$$

$$\lambda_A = 0, \lambda_B = 1:$$

$$X = 2 - 5 = -3$$

$$\lambda_A = 1, \lambda_B = 0:$$

$$X = 9 - 1 = 8$$

$$\lambda_A = 1, \lambda_B = 1:$$

$$X = 2 - 1 = 1$$

$$\min = -3, \max = 8$$

$$X = [-3, 8]$$

3.2.5 RDM

Na aritmética RDM são encontradas todas as propriedades matemáticas da aritmética real, devido a isso qualquer escrita diferente de uma mesma equação resulta no mesmo intervalo.

Serão descritas duas formas genéricas de solução para a equação. Para ambas serão considerados os intervalos $A = [\underline{a}, \bar{a}]$ e $B = [\underline{b}, \bar{b}]$.

$$A + X = B$$

$$\underline{a} + \alpha_a(\bar{a} - \underline{a}) + X = \underline{b} + \alpha_b(\bar{b} - \underline{b}), \alpha_a, \alpha_b \in [0, 1] \quad \text{def. de intervalo}$$

$$X = (\underline{b} + \alpha_b(\bar{b} - \underline{b})) - (\underline{a} + \alpha_a(\bar{a} - \underline{a})), \alpha_a, \alpha_b \in [0, 1]$$

(1)

$$X = B - A$$

$$X = (\underline{b} + \alpha_b(\bar{b} - \underline{b})) - (\underline{a} + \alpha_a(\bar{a} - \underline{a})), \alpha_a, \alpha_b \in [0, 1] \quad \text{def. de intervalo}$$

(2)

A partir das soluções genéricas encontradas em (1) e (2) é possível perceber que tanto para a primeira forma de equação quanto para a segunda o intervalo solução será o mesmo.

O exemplo numérico é aplicado nas duas escritas da equação, como pode ser visto abaixo.

Exemplo: Considere os intervalos $A = [1,5]$ e $B = [2,9]$

a) $A + X = B$

$$\{\underline{a} + \alpha_a(\bar{a} - \underline{a}) + \underline{x} + \alpha_x(\bar{x} - \underline{x})\} = \underline{b} + \alpha_b(\bar{b} - \underline{b})$$

$$\lambda_A, \lambda_B, \lambda_X = 0, \quad 1 + \underline{x} = 2 \quad \rightarrow \quad \underline{x} = 1$$

$$\lambda_A, \lambda_B = 0, \lambda_X = 1, \quad 1 + (\underline{x} + 1(\bar{x} - \underline{x})) = 2 \quad \rightarrow \quad \bar{x} = 1$$

$$\lambda_A = 0, \lambda_B = 1, \lambda_X = 0, \quad 1 + \underline{x} = 2 + 1(9 - 2) \quad \rightarrow \quad \underline{x} = 8$$

$$\lambda_A = 0, \lambda_B, \lambda_X = 1 \quad 1 + (\underline{x} + 1(\bar{x} - \underline{x})) = 2 + 1(9 - 2) \quad \rightarrow \quad \bar{x} = 8$$

$$\lambda_A = 1, \lambda_B, \lambda_X = 0 \quad 1 + 1(5 - 1) + (\underline{x}) = 2 \quad \rightarrow \quad \underline{x} = -3$$

$$\lambda_A = 1, \lambda_B = 0, \lambda_X = 1 \quad 1 + 1(5 - 1) + (\underline{x} + 1(\bar{x} - \underline{x})) = 2 \quad \rightarrow \quad \bar{x} = -3$$

$$\lambda_A = 1, \lambda_B = 1, \lambda_X = 0 \quad 1 + 1(5 - 1) + \underline{x} = 2 + 1(9 - 2) \quad \rightarrow \quad \underline{x} = 5$$

$$\lambda_A, \lambda_B, \lambda_X = 1 \quad 1 + 1(5 - 1) + (\underline{x} + 1(\bar{x} - \underline{x})) = 2 + 1(9 - 2) \quad \rightarrow \quad \bar{x} = 5$$

$$\min = -3, \max = 8, X = [-3, 8]$$

$$b) X = B - A$$

$$X = \{\underline{b} + \alpha_b(\bar{b} - \underline{b}) - \underline{a} + \alpha_a(\bar{a} - \underline{a})\}, \alpha_a, \alpha_b \in [0, 1]$$

$$\alpha_a, \alpha_b = 0:$$

$$X = 2 - 1 = 1$$

$$\alpha_a = 1, \alpha_b = 0:$$

$$X = 2 - (1 + 4) = 5$$

$$\alpha_a = 0, \alpha_b = 1:$$

$$X = 2 + (9 - 2) - 1 = 8$$

$$\alpha_a, \alpha_b = 1:$$

$$X = 2 + (9 - 2) - (1 + 4) = 4$$

$$\min = -3, \max = 8, X = [-3, 8]$$

A tabela abaixo resume de uma maneira mais ilustrativa quais os resultados numéricos do exemplo aplicado em todas as aritméticas intervalares em estudo, nas suas duas formas de solução.

Tabela 6 – Resultados da aplicação dos intervalos $A = [1, 5]$ e $B = [2, 9]$ na equação $A + X = B$ em diferentes aritméticas

Aritmética	$A + X = B$	$X = B - A$
Moore/TAI	-	$[-3, 8]$
Markov	$[1 \vee 4]$	$[1 \vee 4]$
Affine	$[1, 4]$	$[1, 4]$
CIA	$[-3, 8]$	$[-3, 8]$
RDM	$[-3, 8]$	$[-3, 8]$

A partir da Tabela 6 ratificamos o problema inicial apresentado e discutido nessa tese: qual a solução completa para resolver equações lineares com coeficientes intervalares? Já foram comparadas e demonstradas acima as diferenças entre as duas formas de solução em algumas aritméticas intervalares e nosso objetivo é determinar qual é a solução completa para resolver a equação linear $A + X = B$. Aqui, a partir do que foi exposto teórica e numericamente, verifica-se que a aritmética convencional de Moore com TAI, bem como as aritméticas CIA e RDM, ambas nas duas formas de solução, são as soluções completas para a equação linear $A + X = B$ com coeficientes intervalares.

3.3 Equação: $AX + B = C$

A equação possui uma operação de multiplicação, a qual, na aritmética intervalar, é calculada através de combinações de todas as multiplicações entre extremos supe-

riores e inferiores dos intervalos e por fim seleciona-se o menor e o maior valor para compor o intervalo resultante. Abaixo serão apresentadas as formas de solução nas diferentes aritméticas em estudo.

3.3.1 Moore

Considerando a escrita original da equação, $AX + B = C$, sabemos que, assim como a solução da equação anterior mais simples, resolvida pela escrita original na aritmética de Moore é inválida, esta equação, que também precisa de inversos para solução não poderá ser resolvida por Moore.

Portanto, podemos escrever a equação utilizando a definição da teoria da aproximação intervalar, juntamente com os teoremas apresentados no final da Seção 2.2, resultando em $X \equiv \frac{(C-B)}{A}$.

Sejam $A = [\underline{a}, \bar{a}]$, $B = [\underline{b}, \bar{b}]$ e $C = [\underline{c}, \bar{c}]$, podemos escrever:

$$\begin{aligned} X &\equiv \frac{(C-B)}{A} \\ X &\equiv \frac{([\underline{c}, \bar{c}] - [\underline{b}, \bar{b}])}{[\underline{a}, \bar{a}]} && \text{inverso multiplicativo} \\ X &\equiv \left[\min \left(\frac{\underline{c}-\bar{b}}{\underline{a}}, \frac{\underline{c}-\bar{b}}{\underline{a}}, \frac{\bar{c}-\underline{b}}{\bar{a}}, \frac{\bar{c}-\underline{b}}{\bar{a}} \right), \max \left(\frac{\underline{c}-\bar{b}}{\underline{a}}, \frac{\underline{c}-\bar{b}}{\underline{a}}, \frac{\bar{c}-\underline{b}}{\bar{a}}, \frac{\bar{c}-\underline{b}}{\bar{a}} \right) \right] && \text{multiplicação intervalar} \end{aligned}$$

A partir dessa forma genérica de solução da equação, podemos considerar os casos onde $A > 0$ e $A < 0$, uma vez que na divisão não podemos ter 0.

caso 1) $A > 0$ e $0 \in C - B$

$$X \equiv \left[\frac{\underline{c}-\bar{b}}{\underline{a}}, \frac{\bar{c}-\underline{b}}{\underline{a}} \right]$$

caso 2) $A > 0$ e $C - B < 0$

$$X \equiv \left[\frac{\underline{c}-\bar{b}}{\underline{a}}, \frac{\bar{c}-\underline{b}}{\bar{a}} \right]$$

caso 3) $A > 0$ e $C - B > 0$

$$X \equiv \left[\frac{\underline{c}-\bar{b}}{\bar{a}}, \frac{\bar{c}-\underline{b}}{\underline{a}} \right]$$

caso 4) $A < 0$ e $0 \in C - B$

$$X \equiv \left[\frac{\bar{c}-\underline{b}}{\bar{a}}, \frac{\underline{c}-\bar{b}}{\underline{a}} \right]$$

caso 5) $A < 0$ e $C - B < 0$

$$X \equiv \left[\frac{\bar{c}-\underline{b}}{\underline{a}}, \frac{\underline{c}-\bar{b}}{\bar{a}} \right]$$

caso 6) $A < 0$ e $C - B > 0$

$$X \equiv \left[\frac{\bar{c}-\underline{b}}{\underline{a}}, \frac{\underline{c}-\bar{b}}{\bar{a}} \right]$$

Ao final da seção será desenvolvida a aplicação do exemplo na forma de solução.

3.3.2 Markov

Sejam os intervalos $A = [\check{a}, \hat{a}]$, $B = [\check{b}, \hat{b}]$ e $C = [\check{c}, \hat{c}]$, abaixo são descritas as formas de solução em todos os possíveis valores.

$$AX +_M B = C$$

$[\check{a}, \hat{a}]X + [\check{b}, \hat{b}] = [\check{c}, \hat{c}]$	def. de intervalo
$[\check{a}, \hat{a}]X = [\check{c}, \hat{c}] -_M [\check{b}, \hat{b}]$	inverso aditivo
$[\check{a}, \hat{a}]X = [\check{c} - \check{b} \vee \hat{c} - \hat{b}]$	subtração intervalar
$X = ([\check{c} - \check{b} \vee \hat{c} - \hat{b}]) \div [\check{a}, \hat{a}]$	inverso multiplicativo
$X = \left[\frac{\check{c} - \check{b}}{a_u} \vee \frac{\hat{c} - \hat{b}}{a_v} \right]$	divisão intervalar

(1)

Importante lembrar que na operação de divisão da aritmética de Markov, leva-se em conta a notação de a_u e a_v , onde $|a_u| < |a_v|$.

Agora, com a segunda forma de escrita da equação:

$$X = \frac{(C -_M B)}{A}$$

$X = \frac{([\check{c}, \hat{c}] -_M [\check{b}, \hat{b}])}{[\check{a}, \hat{a}]}$	def. de intervalo
$X = \frac{([\check{c} - \check{b} \vee \hat{c} - \hat{b}])}{[\check{a}, \hat{a}]}$	subtração intervalar
$X = \left[\frac{\check{c} - \check{b}}{a_u} \vee \frac{\hat{c} - \hat{b}}{a_v} \right]$	divisão intervalar

(2)

Pela aritmética de Markov as duas formas de escrita da equação retornam a mesma forma genérica de solução para o intervalo X . Verifica-se que, em todos os casos de valores para os intervalos existentes da equação, o resultado será o mesmo se comparadas as duas formas de escrita. Assim, aqui serão omitidos os detalhamentos de todos os casos.

3.3.3 Affine

Abaixo serão apresentadas as duas formas de solução para a equação, considerando os intervalos $\hat{a} = a_0 + a_1\varepsilon_1 + \dots + a_n\varepsilon_n$, $\hat{b} = b_0 + b_1\varepsilon_1 + \dots + b_n\varepsilon_n$ e $\hat{c} = c_0 + c_1\varepsilon_1 + \dots + c_n\varepsilon_n$.

$$AX + B = C$$

$\hat{a}X + \hat{b} = \hat{c}$	
$(a_0 + a_1\varepsilon_1 + \dots + a_n\varepsilon_n)X + (b_0 + b_1\varepsilon_1 + \dots + b_n\varepsilon_n) = c_0 + c_1\varepsilon_1 + \dots + c_n\varepsilon_n$	def. de intervalo
$(a_0 + a_1\varepsilon_1 + \dots + a_n\varepsilon_n)X = (c_0 + c_1\varepsilon_1 + \dots + c_n\varepsilon_n) - (b_0 + b_1\varepsilon_1 + \dots + b_n\varepsilon_n)$	inverso aditivo
$(a_0 + a_1\varepsilon_1 + \dots + a_n\varepsilon_n)X = (c_0 - b_0) + (c_1\varepsilon_1 - b_1\varepsilon_1) + \dots + (c_n\varepsilon_n - b_n\varepsilon_n)$	sub. intervalar

$$X = \frac{(c_0 - b_0) + (c_1 \varepsilon_1 - b_1 \varepsilon_1) + \dots + (c_n \varepsilon_n - b_n \varepsilon_n)}{(a_0 + a_1 \varepsilon_1 + \dots + a_n \varepsilon_n)} \quad \text{inverso multiplicativo}$$

$$X = (c_0 - b_0) + (c_1 \varepsilon_1 - b_1 \varepsilon_1) + \dots + (c_n \varepsilon_n - b_n \varepsilon_n) \times \frac{1}{(a_0 + a_1 \varepsilon_1 + \dots + a_n \varepsilon_n)} \quad \text{divisão intervalar}$$

(1)

$$X = \frac{(C-B)}{A}$$

$$X = \frac{\hat{c} - \hat{b}}{\hat{a}}$$

$$X = \frac{(c_0 + c_1 \varepsilon_1 + \dots + c_n \varepsilon_n) - (b_0 + b_1 \varepsilon_1 + \dots + b_n \varepsilon_n)}{(a_0 + a_1 \varepsilon_1 + \dots + a_n \varepsilon_n)} \quad \text{def. de intervalo}$$

$$X = \frac{(c_0 - b_0) + (c_1 \varepsilon_1 - b_1 \varepsilon_1) + \dots + (c_n \varepsilon_n - b_n \varepsilon_n)}{(a_0 + a_1 \varepsilon_1 + \dots + a_n \varepsilon_n)} \quad \text{subtração intervalar}$$

$$X = (c_0 - b_0) + (c_1 \varepsilon_1 - b_1 \varepsilon_1) + \dots + (c_n \varepsilon_n - b_n \varepsilon_n) \times \frac{1}{(a_0 + a_1 \varepsilon_1 + \dots + a_n \varepsilon_n)} \quad \text{divisão intervalar}$$

(2)

A partir das duas formas de solução apresentadas acima, fica claro que o resultado solução de X é o mesmo.

Cabe salientar que as operações de multiplicação e divisão são chamadas *não-affine*, como é descrito na Seção 2.5. Em vista disso, não vamos apresentar os resultados numéricos obtidos pela aplicação da aritmética *Affine* nas soluções a partir dessa equação linear e nem para as demais a seguir. Não foi possível encontrar na literatura uma aproximação para a divisão intervalar em *Affine* e, como não é o foco deste trabalho, não definiremos aqui. Pelos resultados que a aritmética apresenta na equação linear anterior, é possível que essa solução completa se repita nessa e nas demais equações lineares, porém não poderemos afirmar por falta da definição da operação intervalar de divisão.

3.3.4 CIA

Para as duas formas de solução da equação em questão serão considerados os intervalos $A = \lambda_A \underline{a} + (1 - \lambda_A) \bar{a}$, $B = \lambda_B \underline{b} + (1 - \lambda_B) \bar{b}$ e $C = \lambda_C \underline{c} + (1 - \lambda_C) \bar{c}$.

$$AX + B = C$$

$(\lambda_A \underline{a} + (1 - \lambda_A) \bar{a})X + (\lambda_B \underline{b} + (1 - \lambda_B) \bar{b}) = \lambda_C \underline{c} + (1 - \lambda_C) \bar{c}$, $0 \leq \lambda_A, \lambda_B, \lambda_C \leq 1$ def. de intervalo

$$(\lambda_A \underline{a} + (1 - \lambda_A) \bar{a})X = \lambda_C \underline{c} + (1 - \lambda_C) \bar{c} - (\lambda_B \underline{b} + (1 - \lambda_B) \bar{b}) \quad \text{subtração intervalar}$$

$$X = \frac{(\lambda_C \underline{c} + (1 - \lambda_C) \bar{c}) - (\lambda_B \underline{b} + (1 - \lambda_B) \bar{b})}{(\lambda_A \underline{a} + (1 - \lambda_A) \bar{a})}, 0 \leq \lambda_A, \lambda_B, \lambda_C \leq 1 \quad \text{divisão intervalar}$$

$$\underline{x} = \min \left\{ \frac{((\lambda_C \underline{c} + (\bar{c} - \lambda_C \bar{c})) - (\lambda_B \underline{b} + (\bar{b} - \lambda_B \bar{b})))}{(\lambda_A \underline{a} + (1 - \lambda_A) \bar{a})} \right\}, 0 \leq \lambda_A, \lambda_B, \lambda_C \leq 1 \quad \text{limite inferior de } X$$

$$\bar{x} = \max \left\{ \frac{((\lambda_C \underline{c} + (\bar{c} - \lambda_C \bar{c})) - (\lambda_B \underline{b} + (\bar{b} - \lambda_B \bar{b})))}{(\lambda_A \underline{a} + (1 - \lambda_A) \bar{a})} \right\}, 0 \leq \lambda_A, \lambda_B, \lambda_C \leq 1 \quad \text{limite superior de } X$$

(1)

$$X = \frac{(C-B)}{A}$$

$$\begin{aligned}
X &= \frac{(\lambda_C c + (1-\lambda_C)\bar{c}) - (\lambda_B b + (1-\lambda_B)\bar{b})}{(\lambda_A a + (1-\lambda_A)\bar{a})}, 0 \leq \lambda_A, \lambda_B, \lambda_C \leq 1 && \text{def. de intervalo} \\
\underline{x} &= \min \left\{ \frac{((\lambda_C c + (\bar{c} - \lambda_C \bar{c})) - (\lambda_B b + (\bar{b} - \lambda_B \bar{b})))}{(\lambda_A a + (1-\lambda_A)\bar{a})} \right\}, 0 \leq \lambda_A, \lambda_B, \lambda_C \leq 1 && \text{limite inferior de } X \\
\bar{x} &= \max \left\{ \frac{((\lambda_C c + (\bar{c} - \lambda_C \bar{c})) - (\lambda_B b + (\bar{b} - \lambda_B \bar{b})))}{(\lambda_A a + (1-\lambda_A)\bar{a})} \right\}, 0 \leq \lambda_A, \lambda_B, \lambda_C \leq 1 && \text{limite superior de } X \\
(2) &&&
\end{aligned}$$

Através das soluções encontradas para as duas formas de escrita é possível perceber que o resultado será o mesmo para os limites do intervalo X .

3.3.5 RDM

Como a aritmética possui todas as propriedades matemáticas e leis de distribuição, podemos escrever da seguinte maneira:

$$X = \frac{(C-B)}{A}$$

Essa é a forma mais resumida da equação e será a única apresentada aqui, pois já ficou comprovado que o valor do intervalo solução será o mesmo para qualquer escrita.

O resultado para X será um valor mínimo e um máximo de todos os possíveis valores da divisão. Assim, devido as diferentes possibilidades de valores em cada intervalo, teremos os seguintes casos:

caso 1) $A > 0$

1.1) Se $0 \in C - B$, então a solução é dada por:

$$\frac{C-B}{A} = \left[\min \left(\frac{(\underline{c} + \alpha_c(\bar{c} - \underline{c})) - (\underline{b} + \alpha_b(\bar{b} - \underline{b}))}{\underline{a} + \alpha_a(\bar{a} - \underline{a})} \right), \max \left(\frac{(\underline{c} + \alpha_c(\bar{c} - \underline{c})) - (\underline{b} + \alpha_b(\bar{b} - \underline{b}))}{\underline{a} + \alpha_a(\bar{a} - \underline{a})} \right) \right] \alpha_a \alpha_b, \alpha_c \in [0,1]$$

onde $\frac{C-B}{A}$ pode resultar em: $[\delta, 0]$, com $\delta < 0$ ou $[0, \delta]$, com $\delta > 0$.

1.2) Se $C - B < 0$, a solução é determinada por:

$$\frac{C-B}{A} = \left[\min \left(\frac{(\underline{c} + \alpha_c(\bar{c} - \underline{c})) - (\underline{b} + \alpha_b(\bar{b} - \underline{b}))}{\underline{a} + \alpha_a(\bar{a} - \underline{a})} \right), \max \left(\frac{(\underline{c} + \alpha_c(\bar{c} - \underline{c})) - (\underline{b} + \alpha_b(\bar{b} - \underline{b}))}{\underline{a} + \alpha_a(\bar{a} - \underline{a})} \right) \right] \alpha_a \alpha_b, \alpha_c \in [0,1]$$

onde $\min \left(\frac{(\underline{c} + \alpha_c(\bar{c} - \underline{c})) - (\underline{b} + \alpha_b(\bar{b} - \underline{b}))}{\underline{a} + \alpha_a(\bar{a} - \underline{a})} \right) < 0$ e $\max \left(\frac{(\underline{c} + \alpha_c(\bar{c} - \underline{c})) - (\underline{b} + \alpha_b(\bar{b} - \underline{b}))}{\underline{a} + \alpha_a(\bar{a} - \underline{a})} \right) < 0$

1.3) Se $C - B > 0$, a solução é determinada por:

$$\frac{C-B}{A} = \left[\min \left(\frac{(c+\alpha_c(\bar{c}-c))-(b+\alpha_b(\bar{b}-b))}{a+\alpha_a(\bar{a}-a)} \right), \max \left(\frac{(c+\alpha_c(\bar{c}-c))-(b+\alpha_b(\bar{b}-b))}{a+\alpha_a(\bar{a}-a)} \right) \right] \alpha_a \alpha_b, \alpha_c \in [0,1]$$

onde $\min \left(\frac{(c+\alpha_c(\bar{c}-c))-(b+\alpha_b(\bar{b}-b))}{a+\alpha_a(\bar{a}-a)} \right) > 0$ e $\max \left(\frac{(c+\alpha_c(\bar{c}-c))-(b+\alpha_b(\bar{b}-b))}{a+\alpha_a(\bar{a}-a)} \right) > 0$

caso 2) $A < 0$

2.1) Se $0 \in C - B$, então a solução é dada por:

$$\frac{C-B}{A} = \left[\min \left(\frac{(c+\alpha_c(\bar{c}-c))-(b+\alpha_b(\bar{b}-b))}{a+\alpha_a(\bar{a}-a)} \right), \max \left(\frac{(c+\alpha_c(\bar{c}-c))-(b+\alpha_b(\bar{b}-b))}{a+\alpha_a(\bar{a}-a)} \right) \right] \alpha_a \alpha_b, \alpha_c \in [0,1]$$

onde $\min \left(\frac{(c+\alpha_c(\bar{c}-c))-(b+\alpha_b(\bar{b}-b))}{a+\alpha_a(\bar{a}-a)} \right) < 0$ e $\max \left(\frac{(c+\alpha_c(\bar{c}-c))-(b+\alpha_b(\bar{b}-b))}{a+\alpha_a(\bar{a}-a)} \right) > 0$

2.2) Se $C - B < 0$, a solução é determinada por:

$$\frac{C-B}{A} = \left[\min \left(\frac{(c+\alpha_c(\bar{c}-c))-(b+\alpha_b(\bar{b}-b))}{a+\alpha_a(\bar{a}-a)} \right), \max \left(\frac{(c+\alpha_c(\bar{c}-c))-(b+\alpha_b(\bar{b}-b))}{a+\alpha_a(\bar{a}-a)} \right) \right] \alpha_a \alpha_b, \alpha_c \in [0,1]$$

onde $\min \left(\frac{(c+\alpha_c(\bar{c}-c))-(b+\alpha_b(\bar{b}-b))}{a+\alpha_a(\bar{a}-a)} \right) > 0$ e $\max \left(\frac{(c+\alpha_c(\bar{c}-c))-(b+\alpha_b(\bar{b}-b))}{a+\alpha_a(\bar{a}-a)} \right) > 0$

2.3) Se $C - B > 0$, a solução é determinada por:

$$\frac{C-B}{A} = \left[\min \left(\frac{(c+\alpha_c(\bar{c}-c))-(b+\alpha_b(\bar{b}-b))}{a+\alpha_a(\bar{a}-a)} \right), \max \left(\frac{(c+\alpha_c(\bar{c}-c))-(b+\alpha_b(\bar{b}-b))}{a+\alpha_a(\bar{a}-a)} \right) \right] \alpha_a \alpha_b, \alpha_c \in [0,1]$$

onde $\min \left(\frac{(c+\alpha_c(\bar{c}-c))-(b+\alpha_b(\bar{b}-b))}{a+\alpha_a(\bar{a}-a)} \right) < 0$ e $\max \left(\frac{(c+\alpha_c(\bar{c}-c))-(b+\alpha_b(\bar{b}-b))}{a+\alpha_a(\bar{a}-a)} \right) < 0$

Para ilustrar as soluções apresentadas nesta seção, será desenvolvido o exemplo abaixo, aplicando-o nas diferentes aritméticas. Optamos por apresentar na forma de tabela os demais resultados para sermos mais sucintos e pelos cálculos serem simples de replicar.

Destacamos que os exemplos numéricos desta equação linear e das demais que virão a seguir foram retirados do trabalho de Korzenowski (1994), a fim de obter um parâmetro de comparação, já que a autora apresenta os resultados de uma solução ótima (em termos de teoria das aproximações) para equações lineares.

Exemplo: Considere os intervalos $A = [-4,-3]$, $B = [1,2]$ e $C = [7,8]$ aplicados na equação $AX + B = C$.

Tabela 7 – Resultados da aplicação dos intervalos $A = [-4, -3]$, $B = [1, 2]$ e $C = [7, 8]$ na equação $AX + B = C$ em diferentes aritméticas

Aritmética	Resultado
TAI	$[-2.33, -1.5]$
Markov	$[-2 \vee -1.5]$
Affine	-
CIA	$[-2.33, -1.5]$
RDM	$[-2.33, -1.5]$

A partir da Tabela 7, notamos a diferença dos valores resultantes da aplicação das diferentes soluções desenvolvidas na seção. Podemos dizer que Moore com TAI, CIA e RDM conseguem retornar uma solução completa para equação linear.

3.4 Equação: $AX + BX = C$

A terceira equação linear em estudo apresenta duas multiplicações e também será descrita em casos quando necessário.

3.4.1 Moore

A solução desta equação na sua forma original de escrita não pode ser solucionada por Moore, uma vez que precisamos das propriedades de inversos aditivo e multiplicativo, as quais não pertencem a aritmética.

A segunda forma de solução para a equação pode ser obtida utilizando a teoria das aproximações (CLÁUDIO; MARINS, 1989), e escrevemos a equação na forma $X \equiv \frac{C}{(A+B)}$. Considerando os intervalos $A = [\underline{a}, \bar{a}]$, $B = [\underline{b}, \bar{b}]$ e $C = [\underline{c}, \bar{c}]$, apresenta-se abaixo a solução para essa forma de escrita da equação.

$$X \equiv \frac{C}{(A+B)}$$

$$X \equiv \frac{[\underline{c}, \bar{c}]}{([\underline{a}, \bar{a}] + [\underline{b}, \bar{b}])} \quad \text{inverso multiplicativo}$$

$$X \equiv \left[\min \left(\frac{\underline{c}}{\underline{a} + \underline{b}}, \frac{\underline{c}}{\underline{a} + \bar{b}}, \frac{\bar{c}}{\bar{a} + \underline{b}}, \frac{\bar{c}}{\bar{a} + \bar{b}} \right), \max \left(\frac{\underline{c}}{\bar{a} + \underline{b}}, \frac{\underline{c}}{\bar{a} + \bar{b}}, \frac{\bar{c}}{\underline{a} + \underline{b}}, \frac{\bar{c}}{\underline{a} + \bar{b}} \right) \right] \quad \text{multiplicação intervalar}$$

A partir da forma genérica, podemos obter seis casos de solução, de acordo com os valores dos intervalos da equação. Abaixo são descritos todos os casos.

caso 1) $A + B > 0$ e $C > 0$

$$X \equiv \left[\frac{\underline{c}}{\underline{a} + \underline{b}}, \frac{\bar{c}}{\bar{a} + \bar{b}} \right]$$

caso 2) $A + B > 0$ e $C < 0$

$$X \equiv \left[\frac{\underline{c}}{\bar{a} + \underline{b}}, \frac{\bar{c}}{\underline{a} + \bar{b}} \right]$$

caso 3) $A + B > 0$ e $0 \in C$

$$X \equiv \left[\frac{c}{a+b}, \frac{\bar{c}}{a+b} \right]$$

caso 4) $A + B < 0$ e $C < 0$

$$X \equiv \left[\frac{\bar{c}}{a+b}, \frac{c}{a+b} \right]$$

caso 5) $A + B < 0$ e $C > 0$

$$X \equiv \left[\frac{\bar{c}}{a+b}, \frac{c}{a+b} \right]$$

caso 6) $A + B < 0$ e $0 \in C$

$$X \equiv \left[\frac{\bar{c}}{a+b}, \frac{c}{a+b} \right]$$

Ao final da seção será apresentada a aplicação do exemplo numérico na solução genérica de Moore.

3.4.2 Markov

Sejam os intervalos $A = [\check{a}, \hat{a}]$, $B = [\check{b}, \hat{b}]$ e $C = [\check{c}, \hat{c}]$, abaixo são descritas as formas de solução em todos os possíveis valores.

$$AX +_M BX = C$$

$$[\check{a}, \hat{a}]X + [\check{b}, \hat{b}]X = [\check{c}, \hat{c}]$$

def. de intervalo

$$X([\check{a}, \hat{a}] + [\check{b}, \hat{b}]) = [\check{c}, \hat{c}]$$

distributividade da multiplicação

$$X([\check{a} + \check{b} \vee \hat{a} + \hat{b}]) = [\check{c}, \hat{c}]$$

adição intervalar

$$X = [\check{c}, \hat{c}] \times \frac{1}{([\check{a} + \check{b} \vee \hat{a} + \hat{b}])}$$

inverso multiplicativo

$$X = \frac{[\check{c}, \hat{c}]}{([\check{a} + \check{b} \vee \hat{a} + \hat{b}])}$$

multiplicação intervalar

$$X = \left[\frac{\check{c}}{\check{a} + \check{b}} \vee \frac{\hat{c}}{\hat{a} + \hat{b}} \right]$$

divisão intervalar

(1)

Agora, com a segunda forma de escrita da equação:

$$X = \frac{C}{(A+_M B)}$$

$$X = \frac{[\check{c}, \hat{c}]}{[\check{a}, \hat{a}] + [\check{b}, \hat{b}]}$$

def. de intervalo

$$X = \frac{[\check{c}, \hat{c}]}{[\check{a} + \check{b} \vee \hat{a} + \hat{b}]}$$

adição intervalar

$$X = \left[\frac{\check{c}}{\check{a} + \check{b}} \vee \frac{\hat{c}}{\hat{a} + \hat{b}} \right]$$

divisão intervalar

(2)

Assim como nas equações anteriores, na aritmética de Markov as duas formas de escrita da equação retornam a mesma solução para o intervalo X .

3.4.3 Affine

Seguem abaixo as duas formas de solução para a equação, considerando os intervalos $\hat{a} = a_0 + a_1\varepsilon_1 + \dots + a_n\varepsilon_n$, $\hat{b} = b_0 + b_1\varepsilon_1 + \dots + b_n\varepsilon_n$ e $\hat{c} = c_0 + c_1\varepsilon_1 + \dots + c_n\varepsilon_n$.

$$AX + BX = C$$

$$\hat{a}X + \hat{b}X = \hat{c}$$

$$(a_0 + a_1\varepsilon_1 + \dots + a_n\varepsilon_n)X + (b_0 + b_1\varepsilon_1 + \dots + b_n\varepsilon_n)X = c_0 + c_1\varepsilon_1 + \dots + c_n\varepsilon_n \text{ def. de intervalo}$$

$X((a_0 + a_1\varepsilon_1 + \dots + a_n\varepsilon_n) + (b_0 + b_1\varepsilon_1 + \dots + b_n\varepsilon_n)) = (c_0 + c_1\varepsilon_1 + \dots + c_n\varepsilon_n)$ distributividade da multiplicação

$$X((a_0 + b_0) + (a_1\varepsilon_1 + b_1\varepsilon_1) + \dots + (a_n\varepsilon_n + b_n\varepsilon_n)) = (c_0 + c_1\varepsilon_1 + \dots + c_n\varepsilon_n) \text{ adição intervalar}$$

$$X = \frac{(c_0 + c_1\varepsilon_1 + \dots + c_n\varepsilon_n)}{(a_0 + b_0) + (a_1\varepsilon_1 + b_1\varepsilon_1) + \dots + (a_n\varepsilon_n + b_n\varepsilon_n)} \text{ inverso multiplicativo}$$

$$X = (c_0 + c_1\varepsilon_1 + \dots + c_n\varepsilon_n) \times \frac{1}{(a_0 + b_0) + (a_1\varepsilon_1 + b_1\varepsilon_1) + \dots + (a_n\varepsilon_n + b_n\varepsilon_n)} \text{ divisão intervalar}$$

(1)

$$X = \frac{C}{(A+B)}$$

$$X = \frac{\hat{c}}{(\hat{a} + \hat{b})}$$

$$X = \frac{(c_0 + c_1\varepsilon_1 + \dots + c_n\varepsilon_n)}{(a_0 + a_1\varepsilon_1 + \dots + a_n\varepsilon_n) + (b_0 + b_1\varepsilon_1 + \dots + b_n\varepsilon_n)} \text{ def. de intervalo}$$

$$X = \frac{(c_0 + c_1\varepsilon_1 + \dots + c_n\varepsilon_n)}{(a_0 + b_0) + (a_1\varepsilon_1 + b_1\varepsilon_1) + \dots + (a_n\varepsilon_n + b_n\varepsilon_n)} \text{ adição intervalar}$$

$$X = (c_0 + c_1\varepsilon_1 + \dots + c_n\varepsilon_n) \times \frac{1}{(a_0 + b_0) + (a_1\varepsilon_1 + b_1\varepsilon_1) + \dots + (a_n\varepsilon_n + b_n\varepsilon_n)} \text{ divisão intervalar}$$

(2)

Através das formas apresentadas acima, fica claro que o resultado solução de X é o mesmo, independente da escrita da equação.

3.4.4 CIA

Para as duas formas de solução da equação em questão serão considerados os intervalos $A = \lambda_A \underline{a} + (1 - \lambda_A) \bar{a}$, $B = \lambda_B \underline{b} + (1 - \lambda_B) \bar{b}$ e $C = \lambda_C \underline{c} + (1 - \lambda_C) \bar{c}$.

$$AX + BX = C$$

$(\lambda_A \underline{a} + (1 - \lambda_A) \bar{a})X + (\lambda_B \underline{b} + (1 - \lambda_B) \bar{b})X = \lambda_C \underline{c} + (1 - \lambda_C) \bar{c}$, $0 \leq \lambda_A, \lambda_B, \lambda_C \leq 1$
def. de intervalo

$$X((\lambda_A \underline{a} + (1 - \lambda_A) \bar{a}) + (\lambda_B \underline{b} + (1 - \lambda_B) \bar{b})) = \lambda_C \underline{c} + (1 - \lambda_C) \bar{c} \text{ subtração intervalar}$$

$X = (\lambda_C \underline{c} + (1 - \lambda_C) \bar{c}) \times \frac{1}{((\lambda_A \underline{a} + (1 - \lambda_A) \bar{a}) + (\lambda_B \underline{b} + (1 - \lambda_B) \bar{b}))}$, $0 \leq \lambda_A, \lambda_B, \lambda_C \leq 1$ inverso multiplicativo

$$X = \frac{(\lambda_C \underline{c} + (1 - \lambda_C) \bar{c})}{((\lambda_A \underline{a} + (1 - \lambda_A) \bar{a}) + (\lambda_B \underline{b} + (1 - \lambda_B) \bar{b}))}, 0 \leq \lambda_A, \lambda_B, \lambda_C \leq 1 \text{ multiplicação intervalar}$$

$$\underline{x} = \min \left\{ \frac{((\lambda_C \underline{c} + (1 - \lambda_C) \bar{c}) - (\lambda_B \underline{b} + (1 - \lambda_B) \bar{b}))}{(\lambda_A \underline{a} + (1 - \lambda_A) \bar{a})} \right\}, 0 \leq \lambda_A, \lambda_B, \lambda_C \leq 1 \text{ limite inferior de } X$$

$$\bar{x} = \max \left\{ \frac{((\lambda_C \underline{c} + (1 - \lambda_C) \bar{c}) - (\lambda_B \underline{b} + (1 - \lambda_B) \bar{b}))}{(\lambda_A \underline{a} + (1 - \lambda_A) \bar{a})} \right\}, 0 \leq \lambda_A, \lambda_B, \lambda_C \leq 1 \text{ limite superior de } X$$

(1)

$$X = \frac{C}{(A+B)}$$

$$\begin{aligned} X &= \frac{(\lambda_C \underline{c} + (1-\lambda_C)\bar{c})}{((\lambda_A \underline{a} + (1-\lambda_A)\bar{a}) + (\lambda_B \underline{b} + (1-\lambda_B)\bar{b}))}, 0 \leq \lambda_A, \lambda_B, \lambda_C \leq 1 && \text{def. de intervalo} \\ \underline{x} &= \min \left\{ \frac{((\lambda_C \underline{c} + (\bar{c} - \lambda_C \bar{c}) - (\lambda_B \underline{b} + (\bar{b} - \lambda_B \bar{b})))}{(\lambda_A \underline{a} + (1-\lambda_A)\bar{a})} \right\}, 0 \leq \lambda_A, \lambda_B, \lambda_C \leq 1 && \text{limite inferior de } X \\ \bar{x} &= \max \left\{ \frac{((\lambda_C \underline{c} + (\bar{c} - \lambda_C \bar{c}) - (\lambda_B \underline{b} + (\bar{b} - \lambda_B \bar{b})))}{(\lambda_A \underline{a} + (1-\lambda_A)\bar{a})} \right\}, 0 \leq \lambda_A, \lambda_B, \lambda_C \leq 1 && \text{limite superior de } X \end{aligned} \quad (2)$$

A partir de (1) e (2), percebemos que o resultado do intervalo solução será o mesmo para as duas formas de escrita.

3.4.5 RDM

Assim como na equação anterior, podemos reescrever a equação, uma vez que a aritmética possui todas as propriedades matemáticas. Logo, a solução completa pode ser obtida com a seguinte equação:

$$X = \frac{C}{(A+B)} \quad (38)$$

Abaixo serão destacados os possíveis casos de acordo com o sinal (+ ou -) dos intervalos que estão sendo operados. O resultado para X será um valor mínimo e um máximo de todos os possíveis valores da divisão.

caso 1) $A + B > 0$ e $C > 0$

$$\frac{C}{A+B} = \left[\min \left(\frac{\underline{c} + \alpha_c(\bar{c} - \underline{c})}{(\underline{a} + \alpha_a(\bar{a} - \underline{a}) + (\underline{b} + \alpha_b(\bar{b} - \underline{b})))} \right), \max \left(\frac{\underline{c} + \alpha_c(\bar{c} - \underline{c})}{(\underline{a} + \alpha_a(\bar{a} - \underline{a}) + (\underline{b} + \alpha_b(\bar{b} - \underline{b})))} \right) \right] \alpha_a, \alpha_b, \alpha_c \in [0,1]$$

onde $\min \left(\frac{\underline{c} + \alpha_c(\bar{c} - \underline{c})}{(\underline{a} + \alpha_a(\bar{a} - \underline{a}) + (\underline{b} + \alpha_b(\bar{b} - \underline{b})))} \right) > 0$ e $\max \left(\frac{\underline{c} + \alpha_c(\bar{c} - \underline{c})}{(\underline{a} + \alpha_a(\bar{a} - \underline{a}) + (\underline{b} + \alpha_b(\bar{b} - \underline{b})))} \right) > 0$

caso 2) $A + B > 0$ e $C < 0$

$$\frac{C}{A+B} = \left[\min \left(\frac{\underline{c} + \alpha_c(\bar{c} - \underline{c})}{(\underline{a} + \alpha_a(\bar{a} - \underline{a}) + (\underline{b} + \alpha_b(\bar{b} - \underline{b})))} \right), \max \left(\frac{\underline{c} + \alpha_c(\bar{c} - \underline{c})}{(\underline{a} + \alpha_a(\bar{a} - \underline{a}) + (\underline{b} + \alpha_b(\bar{b} - \underline{b})))} \right) \right] \alpha_a, \alpha_b, \alpha_c \in [0,1]$$

onde $\min \left(\frac{\underline{c} + \alpha_c(\bar{c} - \underline{c})}{(\underline{a} + \alpha_a(\bar{a} - \underline{a}) + (\underline{b} + \alpha_b(\bar{b} - \underline{b})))} \right) < 0$ e $\max \left(\frac{\underline{c} + \alpha_c(\bar{c} - \underline{c})}{(\underline{a} + \alpha_a(\bar{a} - \underline{a}) + (\underline{b} + \alpha_b(\bar{b} - \underline{b})))} \right) < 0$

caso 3) $A + B > 0$ e $0 \in C$

$$\frac{C}{A+B} = \left[\min \left(\frac{\underline{c} + \alpha_c(\bar{c} - \underline{c})}{(\underline{a} + \alpha_a(\bar{a} - \underline{a}) + (\underline{b} + \alpha_b(\bar{b} - \underline{b})))} \right), \max \left(\frac{\underline{c} + \alpha_c(\bar{c} - \underline{c})}{(\underline{a} + \alpha_a(\bar{a} - \underline{a}) + (\underline{b} + \alpha_b(\bar{b} - \underline{b})))} \right) \right] \alpha_a, \alpha_b, \alpha_c \in [0,1]$$

onde $\frac{C}{A+B}$ pode resultar em: $[\delta, 0]$, com $\delta < 0$ ou $[0, \beta]$, com $\beta > 0$.

caso 4) $A + B < 0$ e $C < 0$

$$\frac{C}{A+B} = \left[\min \left(\frac{c+\alpha_a(\bar{a}-\underline{a})}{(\underline{a}+\alpha_a(\bar{a}-\underline{a}))+(b+\alpha_b(\bar{b}-\underline{b}))} \right), \max \left(\frac{c+\alpha_c(\bar{c}-\underline{c})}{(\underline{a}+\alpha_a(\bar{a}-\underline{a}))+(b+\alpha_b(\bar{b}-\underline{b}))} \right) \right] \alpha_a \alpha_b, \alpha_c \in [0,1]$$

onde $\min \left(\frac{c+\alpha_a(\bar{a}-\underline{a})}{(\underline{a}+\alpha_a(\bar{a}-\underline{a}))+(b+\alpha_b(\bar{b}-\underline{b}))} \right) > 0$ e $\max \left(\frac{c+\alpha_c(\bar{c}-\underline{c})}{(\underline{a}+\alpha_a(\bar{a}-\underline{a}))+(b+\alpha_b(\bar{b}-\underline{b}))} \right) > 0$

caso 5) $A + B < 0$ e $C > 0$

$$\frac{C}{A+B} = \left[\min \left(\frac{c+\alpha_a(\bar{a}-\underline{a})}{(\underline{a}+\alpha_a(\bar{a}-\underline{a}))+(b+\alpha_b(\bar{b}-\underline{b}))} \right), \max \left(\frac{c+\alpha_c(\bar{c}-\underline{c})}{(\underline{a}+\alpha_a(\bar{a}-\underline{a}))+(b+\alpha_b(\bar{b}-\underline{b}))} \right) \right] \alpha_a \alpha_b, \alpha_c \in [0,1]$$

onde $\min \left(\frac{c+\alpha_a(\bar{a}-\underline{a})}{(\underline{a}+\alpha_a(\bar{a}-\underline{a}))+(b+\alpha_b(\bar{b}-\underline{b}))} \right) < 0$ e $\max \left(\frac{c+\alpha_c(\bar{c}-\underline{c})}{(\underline{a}+\alpha_a(\bar{a}-\underline{a}))+(b+\alpha_b(\bar{b}-\underline{b}))} \right) < 0$

caso 6) $A + B < 0$ e $0 \in C$

$$\frac{C}{A+B} = \left[\min \left(\frac{c+\alpha_a(\bar{a}-\underline{a})}{(\underline{a}+\alpha_a(\bar{a}-\underline{a}))+(b+\alpha_b(\bar{b}-\underline{b}))} \right), \max \left(\frac{c+\alpha_c(\bar{c}-\underline{c})}{(\underline{a}+\alpha_a(\bar{a}-\underline{a}))+(b+\alpha_b(\bar{b}-\underline{b}))} \right) \right] \alpha_a \alpha_b, \alpha_c \in [0,1]$$

onde $\min \left(\frac{c+\alpha_a(\bar{a}-\underline{a})}{(\underline{a}+\alpha_a(\bar{a}-\underline{a}))+(b+\alpha_b(\bar{b}-\underline{b}))} \right) < 0$ e $\max \left(\frac{c+\alpha_c(\bar{c}-\underline{c})}{(\underline{a}+\alpha_a(\bar{a}-\underline{a}))+(b+\alpha_b(\bar{b}-\underline{b}))} \right) < 0$

A partir das formas de solução apresentadas para a equação em questão, abaixo é desenvolvido o exemplo numérico que servirá para ilustrar as soluções apresentadas em cada aritmética intervalar.

Exemplo: Considere os intervalos $A = [4,9]$, $B = [-2,1]$ e $C = [-2,5]$. Será apresentado o exemplo aplicado na solução da equação $AX + BX = C$.

Tabela 8 – Resultados da aplicação dos intervalos $A = [4, 9]$, $B = [-2, 1]$ e $C = [-2, 5]$ na equação $AX + BX = C$ em diferentes aritméticas

Aritmética	Resultado
TAI	$[-1, 2.5]$
Markov	$[-1 \vee 0.5]$
Affine	-
CIA	$[-1, 2.5]$
RDM	$[-1, 2.5]$

Pelos resultados apresentados na Tabela 8, notamos novamente que as soluções completas, que compreendem todos os valores possíveis para o X , são obtidas com as aritméticas de Moore com TAI, CIA e RDM.

3.5 Equação: $AX + B = CX + D$

A última equação linear a ser analisada com diferentes aritméticas intervalares é composta por multiplicação nos dois lados da igualdade e será demonstrada nas subseções que seguem.

3.5.1 Moore

A forma genérica de solução para a equação linear $AX + B = CX + D$ não pode ser obtida em Moore, devido à falta dos inversos multiplicativo e aditivo.

A forma de escrita possível da equação é apresentada e demonstrada abaixo, considerando propriedades e definições do espaço intervalar baseado na teoria das aproximações:

$$X \equiv \frac{(D-B)}{(A-C)}$$

$$X \equiv \frac{[\underline{d}-\bar{b}, \bar{d}-\underline{b}]}{[\underline{a}-\bar{c}, \bar{a}-\underline{c}]} \quad \text{inverso multiplicativo}$$

$$X \equiv \left[\min \left(\frac{\underline{d}-\bar{b}}{\underline{a}-\bar{c}}, \frac{\underline{d}-\bar{b}}{\bar{a}-\underline{c}}, \frac{\bar{d}-\underline{b}}{\underline{a}-\bar{c}}, \frac{\bar{d}-\underline{b}}{\bar{a}-\underline{c}} \right), \max \left(\frac{\underline{d}-\bar{b}}{\underline{a}-\bar{c}}, \frac{\underline{d}-\bar{b}}{\bar{a}-\underline{c}}, \frac{\bar{d}-\underline{b}}{\underline{a}-\bar{c}}, \frac{\bar{d}-\underline{b}}{\bar{a}-\underline{c}} \right) \right] \quad \text{multiplicação intervalar}$$

A partir da demonstração acima, podemos encontrar a solução para a equação de acordo com os casos abaixo descritos:

caso 1) $A - C > 0$ e $0 \in D - B$

$$X \equiv \left[\frac{\underline{d}-\bar{b}}{\underline{a}-\bar{c}}, \frac{\bar{d}-\underline{b}}{\bar{a}-\underline{c}} \right]$$

caso 2) $A - C > 0$ e $D - B < 0$

$$X \equiv \left[\frac{\underline{d}-\bar{b}}{\underline{a}-\bar{c}}, \frac{\bar{d}-\underline{b}}{\bar{a}-\underline{c}} \right]$$

caso 3) $A - C > 0$ e $D - B > 0$

$$X \equiv \left[\frac{\underline{d}-\bar{b}}{\underline{a}-\bar{c}}, \frac{\bar{d}-\underline{b}}{\bar{a}-\underline{c}} \right]$$

caso 4) $A - C < 0$ e $0 \in D - B$

$$X \equiv \left[\frac{\bar{d}-\underline{b}}{\bar{a}-\underline{c}}, \frac{\underline{d}-\bar{b}}{\underline{a}-\bar{c}} \right]$$

caso 5) $A - C < 0$ e $D - B < 0$

$$X \equiv \left[\frac{\bar{d}-\underline{b}}{\bar{a}-\underline{c}}, \frac{\underline{d}-\bar{b}}{\underline{a}-\bar{c}} \right]$$

caso 6) $A - C < 0$ e $D - B > 0$

$$X \equiv \left[\frac{\bar{d}-\underline{b}}{\bar{a}-\underline{c}}, \frac{\underline{d}-\bar{b}}{\underline{a}-\bar{c}} \right]$$

3.5.2 Markov

Sejam os intervalos $A = [\check{a}, \hat{a}]$, $B = [\check{b}, \hat{b}]$, $C = [\check{c}, \hat{c}]$ e $D = [\check{d}, \hat{d}]$, abaixo são descritas as formas de solução para a equação.

$$AX +_M B = C +_M D$$

$[\check{a}, \hat{a}]X + [\check{b}, \hat{b}] = [\check{c}, \hat{c}]X + [\check{d}, \hat{d}]$	def. de intervalo
$[\check{a}, \hat{a}]X - [\check{c}, \hat{c}]X = [\check{d}, \hat{d}] - [\check{b}, \hat{b}]$	inverso aditivo
$X([\check{a}, \hat{a}] - [\check{c}, \hat{c}]) = [\check{d}, \hat{d}] - [\check{b}, \hat{b}]$	distributividade da multiplicação
$X([\check{a} - \check{c} \vee \hat{a} - \hat{c}]) = [\check{d} - \check{b} \vee \hat{d} - \hat{b}]$	subtração intervalar
$X = \left[\frac{\check{d} - \check{b} \vee \hat{d} - \hat{b}}{\check{a} - \check{c} \vee \hat{a} - \hat{c}} \right]$	inverso multiplicativo
$X = \left[\frac{\check{d} - \check{b}}{\check{a} - \check{c}} \vee \frac{\hat{d} - \hat{b}}{\hat{a} - \hat{c}} \right]$	divisão intervalar

(1)

Agora, com a segunda forma de escrita da equação:

$$X = \frac{(D -_M B)}{(A -_M C)}$$

$X = \frac{[\check{d}, \hat{d}] - [\check{b}, \hat{b}]}{[\check{a}, \hat{a}] - [\check{c}, \hat{c}]}$	def. de intervalo
$X = \left[\frac{\check{d} - \check{b} \vee \hat{d} - \hat{b}}{\check{a} - \check{c} \vee \hat{a} - \hat{c}} \right]$	subtração intervalar
$X = \left[\frac{\check{d} - \check{b}}{\check{a} - \check{c}} \vee \frac{\hat{d} - \hat{b}}{\hat{a} - \hat{c}} \right]$	divisão intervalar

(2)

As duas formas de escrita da equação retornam a mesma solução para o intervalo X .

3.5.3 Affine

Para demonstrar as formas de solução para a equação, considere os intervalos $\hat{a} = a_0 + a_1\varepsilon_1 + \dots + a_n\varepsilon_n$, $\hat{b} = b_0 + b_1\varepsilon_1 + \dots + b_n\varepsilon_n$, $\hat{c} = c_0 + c_1\varepsilon_1 + \dots + c_n\varepsilon_n$ e $\hat{d} = d_0 + d_1\varepsilon_1 + \dots + d_n\varepsilon_n$.

$$AX + B = CX + D$$

$$\hat{a}X + \hat{b} = \hat{c}X + \hat{d}$$

$$(a_0 + a_1\varepsilon_1 + \dots + a_n\varepsilon_n)X + (b_0 + b_1\varepsilon_1 + \dots + b_n\varepsilon_n) = (c_0 + c_1\varepsilon_1 + \dots + c_n\varepsilon_n)X + d_0 + d_1\varepsilon_1 + \dots + d_n\varepsilon_n$$

def. de intervalo

$$X((a_0 + a_1\varepsilon_1 + \dots + a_n\varepsilon_n) - (c_0 + c_1\varepsilon_1 + \dots + c_n\varepsilon_n)) = ((d_0 + d_1\varepsilon_1 + \dots + d_n\varepsilon_n) - (b_0 + b_1\varepsilon_1 + \dots + b_n\varepsilon_n))$$

distributividade da multiplicação

$$X((a_0 - c_0) + (a_1\varepsilon_1 - c_1\varepsilon_1) + \dots + (a_n\varepsilon_n - c_n\varepsilon_n)) = ((d_0 - b_0) + (d_1\varepsilon_1 - b_1\varepsilon_1) + \dots + (d_n\varepsilon_n - b_n\varepsilon_n))$$

subtração intervalar

$$X = \frac{((d_0-b_0)+(d_1\varepsilon_1-b_1\varepsilon_1)+\dots+(d_n\varepsilon_n-b_n\varepsilon_n))}{((a_0-c_0)+(a_1\varepsilon_1-c_1\varepsilon_1)+\dots+(a_n\varepsilon_n-c_n\varepsilon_n))}$$

inverso multiplicativo

$$X = ((d_0 - b_0) + (d_1\varepsilon_1 - b_1\varepsilon_1) + \dots + (d_n\varepsilon_n - b_n\varepsilon_n)) \times \frac{1}{((a_0-c_0)+(a_1\varepsilon_1-c_1\varepsilon_1)+\dots+(a_n\varepsilon_n-c_n\varepsilon_n))}$$

divisão intervalar

(1)

$$X = \frac{(D-B)}{(A-C)}$$

$$X = \frac{(\hat{d}-\hat{b})}{(\hat{a}-\hat{c})}$$

$$X = \frac{((d_0+d_1\varepsilon_1+\dots+d_n\varepsilon_n)-(b_0+b_1\varepsilon_1+\dots+b_n\varepsilon_n))}{((a_0+a_1\varepsilon_1+\dots+a_n\varepsilon_n)-(c_0+c_1\varepsilon_1+\dots+c_n\varepsilon_n))}$$

def. de intervalo

$$X = \frac{((d_0-b_0)+(d_1\varepsilon_1-b_1\varepsilon_1)+\dots+(d_n\varepsilon_n-b_n\varepsilon_n))}{((a_0-c_0)+(a_1\varepsilon_1-c_1\varepsilon_1)+\dots+(a_n\varepsilon_n-c_n\varepsilon_n))}$$

subtração intervalar

$$X = ((d_0 - b_0) + (d_1\varepsilon_1 - b_1\varepsilon_1) + \dots + (d_n\varepsilon_n - b_n\varepsilon_n)) \times \frac{1}{((a_0-c_0)+(a_1\varepsilon_1-c_1\varepsilon_1)+\dots+(a_n\varepsilon_n-c_n\varepsilon_n))}$$

divisão intervalar

(2)

Através das formas apresentadas acima, fica claro que o resultado solução de X é o mesmo, independente da escrita da equação.

3.5.4 CIA

Considere os seguintes intervalos para as equações $A = \lambda_A \underline{a} + (1 - \lambda_A) \bar{a}$, $B = \lambda_B \underline{b} + (1 - \lambda_B) \bar{b}$, $C = \lambda_C \underline{c} + (1 - \lambda_C) \bar{c}$ e $D = \lambda_D \underline{d} + (1 - \lambda_D) \bar{d}$.

$$AX + B = CX + D$$

$$(\lambda_A \underline{a} + (1 - \lambda_A) \bar{a})X + (\lambda_B \underline{b} + (1 - \lambda_B) \bar{b}) = (\lambda_C \underline{c} + (1 - \lambda_C) \bar{c})X + \lambda_D \underline{d} + (1 - \lambda_D) \bar{d}, 0 \leq \lambda_A, \lambda_B, \lambda_C, \lambda_D \leq 1$$

def. de intervalo

$$(\lambda_A \underline{a} + (1 - \lambda_A) \bar{a})X - (\lambda_C \underline{c} + (1 - \lambda_C) \bar{c})X = (\lambda_D \underline{d} + (1 - \lambda_D) \bar{d}) - (\lambda_B \underline{b} + (1 - \lambda_B) \bar{b}), 0 \leq \lambda_A, \lambda_B, \lambda_C, \lambda_D \leq 1$$

inverso aditivo

$$((\lambda_A \underline{a} + (1 - \lambda_A) \bar{a}) - (\lambda_C \underline{c} + (1 - \lambda_C) \bar{c}))X = (\lambda_D \underline{d} + (1 - \lambda_D) \bar{d}) - (\lambda_B \underline{b} + (1 - \lambda_B) \bar{b}), 0 \leq \lambda_A, \lambda_B, \lambda_C, \lambda_D \leq 1$$

distributividade

$$X = (\lambda_D \underline{d} + (1 - \lambda_D) \bar{d}) - (\lambda_B \underline{b} + (1 - \lambda_B) \bar{b}) \times \frac{1}{(\lambda_A \underline{a} + (1 - \lambda_A) \bar{a}) - (\lambda_C \underline{c} + (1 - \lambda_C) \bar{c})}, 0 \leq \lambda_A, \lambda_B, \lambda_C, \lambda_D \leq 1$$

1 inverso multiplicativo

$$X = \frac{(\lambda_D \underline{d} + (1 - \lambda_D) \bar{d}) - (\lambda_B \underline{b} + (1 - \lambda_B) \bar{b})}{(\lambda_A \underline{a} + (1 - \lambda_A) \bar{a}) - (\lambda_C \underline{c} + (1 - \lambda_C) \bar{c})}, 0 \leq \lambda_A, \lambda_B, \lambda_C, \lambda_D \leq 1$$

divisão intervalar

$$\underline{x} = \min \left\{ \frac{(\lambda_D \underline{d} + (1 - \lambda_D) \bar{d}) - (\lambda_B \underline{b} + (1 - \lambda_B) \bar{b})}{(\lambda_A \underline{a} + (1 - \lambda_A) \bar{a}) - (\lambda_C \underline{c} + (1 - \lambda_C) \bar{c})} \right\}, 0 \leq \lambda_A, \lambda_B, \lambda_C, \lambda_D \leq 1$$

limite inferior de X

$$\bar{x} = \max \left\{ \frac{(\lambda_D \underline{d} + (1 - \lambda_D) \bar{d}) - (\lambda_B \underline{b} + (1 - \lambda_B) \bar{b})}{(\lambda_A \underline{a} + (1 - \lambda_A) \bar{a}) - (\lambda_C \underline{c} + (1 - \lambda_C) \bar{c})} \right\}, 0 \leq \lambda_A, \lambda_B, \lambda_C, \lambda_D \leq 1$$

limite superior de X

(1)

$$X = \frac{(D-B)}{(A-C)}$$

$$X = \frac{(\lambda_D \underline{d} + (1 - \lambda_D) \bar{d}) - (\lambda_B \underline{b} + (1 - \lambda_B) \bar{b})}{(\lambda_A \underline{a} + (1 - \lambda_A) \bar{a}) - (\lambda_C \underline{c} + (1 - \lambda_C) \bar{c})}, 0 \leq \lambda_A, \lambda_B, \lambda_C, \lambda_D \leq 1$$

def. de intervalo

$$\underline{x} = \min \left\{ \frac{(\lambda_D \underline{d} + (1 - \lambda_D) \bar{d}) - (\lambda_B \underline{b} + (1 - \lambda_B) \bar{b})}{(\lambda_A \underline{a} + (1 - \lambda_A) \bar{a}) - (\lambda_C \underline{c} + (1 - \lambda_C) \bar{c})} \right\}, 0 \leq \lambda_A, \lambda_B, \lambda_C, \lambda_D \leq 1$$

limite inferior de X

$$\bar{x} = \max \left\{ \frac{(\lambda_D \underline{d} + (1 - \lambda_D) \bar{d}) - (\lambda_B \underline{b} + (1 - \lambda_B) \bar{b})}{(\lambda_A \underline{a} + (1 - \lambda_A) \bar{a}) - (\lambda_C \underline{c} + (1 - \lambda_C) \bar{c})} \right\}, 0 \leq \lambda_A, \lambda_B, \lambda_C, \lambda_D \leq 1$$

limite superior de X

(2)

A partir das formas apresentadas acima, percebemos que o resultado do intervalo solução será o mesmo para as duas formas de escrita.

3.5.5 RDM

Seguindo o mesmo procedimento das equações anteriores, para a aritmética RDM temos todas as propriedades matemáticas presentes, logo a solução pode ser obtida através da seguinte equação:

$$X = \frac{(D - B)}{(A - C)} \quad (39)$$

caso 1) $A - C > 0$

1.1) Se $0 \in D - B$, então a solução é dada por:

$$\frac{D-B}{A-C} = \left[\min \left(\frac{(d+\alpha_d(\bar{d}-d)-b+\alpha_b(\bar{b}-b))}{(a+\alpha_a(\bar{a}-a)-c+\alpha_c(\bar{c}-c))} \right), \max \left(\frac{(d+\alpha_d(\bar{d}-d)-b+\alpha_b(\bar{b}-b))}{(a+\alpha_a(\bar{a}-a)-c+\alpha_c(\bar{c}-c))} \right) \right] \alpha_a, \alpha_b, \alpha_c, \alpha_d \in [0,1]$$

onde $\frac{D-B}{A-C}$ pode resultar em: $[\delta, 0]$, com $\delta < 0$ ou $[0, \delta]$, com $\delta > 0$.

1.2) Se $D - B < 0$, então a solução é dada por:

$$\frac{D-B}{A-C} = \left[\min \left(\frac{(d+\alpha_d(\bar{d}-d)-b+\alpha_b(\bar{b}-b))}{(a+\alpha_a(\bar{a}-a)-c+\alpha_c(\bar{c}-c))} \right), \max \left(\frac{(d+\alpha_d(\bar{d}-d)-b+\alpha_b(\bar{b}-b))}{(a+\alpha_a(\bar{a}-a)-c+\alpha_c(\bar{c}-c))} \right) \right] \alpha_a, \alpha_b, \alpha_c, \alpha_d \in [0,1]$$

onde $\min \left(\frac{(d+\alpha_d(\bar{d}-d)-b+\alpha_b(\bar{b}-b))}{(a+\alpha_a(\bar{a}-a)-c+\alpha_c(\bar{c}-c))} \right) < 0$ e $\max \left(\frac{(d+\alpha_d(\bar{d}-d)-b+\alpha_b(\bar{b}-b))}{(a+\alpha_a(\bar{a}-a)-c+\alpha_c(\bar{c}-c))} \right) < 0$

1.3) Se $D - B > 0$, então a solução é dada por:

$$\frac{D-B}{A-C} = \left[\min \left(\frac{(d+\alpha_d(\bar{d}-d)-b+\alpha_b(\bar{b}-b))}{(a+\alpha_a(\bar{a}-a)-c+\alpha_c(\bar{c}-c))} \right), \max \left(\frac{(d+\alpha_d(\bar{d}-d)-b+\alpha_b(\bar{b}-b))}{(a+\alpha_a(\bar{a}-a)-c+\alpha_c(\bar{c}-c))} \right) \right] \alpha_a, \alpha_b, \alpha_c, \alpha_d \in [0,1]$$

onde $\min \left(\frac{(d+\alpha_d(\bar{d}-d)-b+\alpha_b(\bar{b}-b))}{(a+\alpha_a(\bar{a}-a)-c+\alpha_c(\bar{c}-c))} \right) > 0$ e $\max \left(\frac{(d+\alpha_d(\bar{d}-d)-b+\alpha_b(\bar{b}-b))}{(a+\alpha_a(\bar{a}-a)-c+\alpha_c(\bar{c}-c))} \right) > 0$

caso 2) $A - C < 0$

2.1) Se $0 \in D - B$, então a solução é dada por:

$$\frac{D-B}{A-C} = \left[\min \left(\frac{(d+\alpha_d(\bar{d}-d)-b+\alpha_b(\bar{b}-b))}{(\underline{a}+\alpha_a(\bar{a}-\underline{a})-(\underline{c}+\alpha_c(\bar{c}-\underline{c}))} \right), \max \left(\frac{(d+\alpha_d(\bar{d}-d)-b+\alpha_b(\bar{b}-b))}{(\underline{a}+\alpha_a(\bar{a}-\underline{a})-(\underline{c}+\alpha_c(\bar{c}-\underline{c}))} \right) \right] \alpha_a \alpha_b, \alpha_c, \alpha_d \in [0,1]$$

onde $\frac{D-B}{A-C}$ pode resultar em: $[\delta, 0]$, com $\delta < 0$ ou $[0, \delta]$, com $\delta > 0$.

2.2) Se $D - B < 0$, então a solução é dada por:

$$\frac{D-B}{A-C} = \left[\min \left(\frac{(d+\alpha_d(\bar{d}-d)-b+\alpha_b(\bar{b}-b))}{(\underline{a}+\alpha_a(\bar{a}-\underline{a})-(\underline{c}+\alpha_c(\bar{c}-\underline{c}))} \right), \max \left(\frac{(d+\alpha_d(\bar{d}-d)-b+\alpha_b(\bar{b}-b))}{(\underline{a}+\alpha_a(\bar{a}-\underline{a})-(\underline{c}+\alpha_c(\bar{c}-\underline{c}))} \right) \right] \alpha_a \alpha_b, \alpha_c, \alpha_d \in [0,1]$$

onde $\min \left(\frac{(d+\alpha_d(\bar{d}-d)-b+\alpha_b(\bar{b}-b))}{(\underline{a}+\alpha_a(\bar{a}-\underline{a})-(\underline{c}+\alpha_c(\bar{c}-\underline{c}))} \right) > 0$ e $\max \left(\frac{(d+\alpha_d(\bar{d}-d)-b+\alpha_b(\bar{b}-b))}{(\underline{a}+\alpha_a(\bar{a}-\underline{a})-(\underline{c}+\alpha_c(\bar{c}-\underline{c}))} \right) > 0$

2.3) Se $D - B > 0$, então a solução é dada por:

$$\frac{D-B}{A-C} = \left[\min \left(\frac{(d+\alpha_d(\bar{d}-d)-b+\alpha_b(\bar{b}-b))}{(\underline{a}+\alpha_a(\bar{a}-\underline{a})-(\underline{c}+\alpha_c(\bar{c}-\underline{c}))} \right), \max \left(\frac{(d+\alpha_d(\bar{d}-d)-b+\alpha_b(\bar{b}-b))}{(\underline{a}+\alpha_a(\bar{a}-\underline{a})-(\underline{c}+\alpha_c(\bar{c}-\underline{c}))} \right) \right] \alpha_a \alpha_b, \alpha_c, \alpha_d \in [0,1]$$

onde $\min \left(\frac{(d+\alpha_d(\bar{d}-d)-b+\alpha_b(\bar{b}-b))}{(\underline{a}+\alpha_a(\bar{a}-\underline{a})-(\underline{c}+\alpha_c(\bar{c}-\underline{c}))} \right) < 0$ e $\max \left(\frac{(d+\alpha_d(\bar{d}-d)-b+\alpha_b(\bar{b}-b))}{(\underline{a}+\alpha_a(\bar{a}-\underline{a})-(\underline{c}+\alpha_c(\bar{c}-\underline{c}))} \right) < 0$

Abaixo ilustramos o exemplo aplicado na equação para as diferentes aritméticas.

Exemplo: Considere os intervalos $A = [3,5]$, $B = [-2,-1]$, $C = [-6,-4]$ e $D = [2,8]$. Será apresentado o exemplo aplicado na solução da equação.

Tabela 9 – Resultados da aplicação dos intervalos $A = [3, 5]$, $B = [-2, 1]$, $C = [-6, -4]$ e $D = [2, 8]$ na equação $AX + B = CX + D$ em diferentes aritméticas

Aritmética	Resultado
TAI	[0.272, 1.428]
Markov	[0.444 ∨ 1]
Affine	-
CIA	[0.272, 1.428]
RDM	[0.272, 1.428]

A Tabela 9 resume os resultados numéricos obtidos com a aplicação do exemplos em todas as soluções desenvolvidas nas diferentes aritméticas. É possível perceber que novamente Moore com TAI, CIA e RDM englobam as soluções completas para a equação em questão.

A seguir apresentam-se tabelas que demonstram de uma forma sucinta as soluções das equações lineares desenvolvidas neste capítulo.

As Tabelas 10 e 11 resumem as soluções para a equação linear $A + X = B$ descritas no capítulo.

Tabela 10 – Soluções da equação linear $A + X = B$ nas aritméticas de Moore com a Teoria das Aproximações Intervalares e Markov.

Casos	Aritmética		
	TAI	Markov	
	$X \equiv B - A$	$A + X = B$	$X = B - A$
1) $A > 0$ e $B > 0$	$[\underline{b} - \bar{a}, \bar{b} - \underline{a}]$	$[\check{b} - \check{a}, \hat{b} - \hat{a}]$	$[\check{b} - \check{a}, \hat{b} - \hat{a}]$
2) $A > 0$ e $B < 0$	$[\underline{b} - \bar{a}, \bar{b} - \underline{a}]$	$[\check{b} - \check{a}, \hat{b} - \hat{a}]$	$[\check{b} - \check{a}, \hat{b} - \hat{a}]$
3) $A > 0$ e $B = [-\underline{b}, +\bar{b}]$	$[\underline{b} - \bar{a}, \bar{b} - \underline{a}]$	$[\check{b} - \check{a}, \hat{b} - \hat{a}]$	$[\check{b} - \check{a}, \hat{b} - \hat{a}]$
4) $A < 0$ e $B > 0$	$[\underline{b} + \bar{a}, \bar{b} + \underline{a}]$	$[\check{b} + \check{a}, \hat{b} + \hat{a}]$	$[\check{b} + \check{a}, \hat{b} + \hat{a}]$
5) $A > 0$ e $B < 0$	$[\underline{b} + \bar{a}, \bar{b} + \underline{a}]$	$[\check{b} + \check{a}, \hat{b} + \hat{a}]$	$[\check{b} + \check{a}, \hat{b} + \hat{a}]$
6) $A < 0$ e $B = [-\underline{b}, +\bar{b}]$	$[\underline{b} + \bar{a}, \bar{b} + \underline{a}]$	$[\check{b} + \check{a}, \hat{b} + \hat{a}]$	$[\check{b} + \check{a}, \hat{b} + \hat{a}]$
7) $A = [-\underline{a}, +\bar{a}]$ e $B > 0$	$[\underline{b} - \bar{a}, \bar{b} + \underline{a}]$	$[\check{b} + \check{a}, \hat{b} - \hat{a}]$	$[\check{b} + \check{a}, \hat{b} - \hat{a}]$
8) $A = [-\underline{a}, +\bar{a}]$ e $B < 0$	$[\underline{b} - \bar{a}, \bar{b} + \underline{a}]$	$[\check{b} + \check{a}, \hat{b} - \hat{a}]$	$[\check{b} + \check{a}, \hat{b} - \hat{a}]$
9) $A = [-\underline{a}, +\bar{a}]$ e $B = [-\underline{b}, +\bar{b}]$	$[\underline{b} - \bar{a}, \bar{b} + \underline{a}]$	$[\check{b} + \check{a}, \hat{b} - \hat{a}]$	$[\check{b} + \check{a}, \hat{b} - \hat{a}]$

Tabela 11 – Soluções da equação linear $A + X = B$ nas aritméticas *Affine*, CIA e RDM.

Aritmética	$A + X = B$	$X = B - A$
<i>Affine</i>	$x_0 = b_0 - a_0$ $x_1 \varepsilon_1 = b_1 \varepsilon_1 - a_1 \varepsilon_1$ $x_n \varepsilon_n = b_n \varepsilon_n - a_n \varepsilon_n$	$x_0 = b_0 - a_0$ $x_1 \varepsilon_1 = b_1 \varepsilon_1 - a_1 \varepsilon_1$ $x_n \varepsilon_n = b_n \varepsilon_n - a_n \varepsilon_n$
CIA	$\min, \max\{((\lambda_B \underline{b} + (\bar{b} - \lambda_B \bar{b}) - (\lambda_A \underline{a} + (\bar{a} - \lambda_A \bar{a}))),$ $0 \leq \lambda_A, \lambda_B \leq 1$	$\min, \max\{((\lambda_B \underline{b} + (\bar{b} - \lambda_B \bar{b}) - (\lambda_A \underline{a} + (\bar{a} - \lambda_A \bar{a}))),$ $0 \leq \lambda_A, \lambda_B \leq 1$
RDM	$X = (\underline{b} + \alpha_b(\bar{b}) - \underline{b}) - (\underline{a} + \alpha_a(\bar{a} - \underline{a})),$ $\alpha_a, \alpha_b \in [0, 1]$	$X = (\underline{b} + \alpha_b(\bar{b}) - \underline{b}) - (\underline{a} + \alpha_a(\bar{a} - \underline{a})),$ $\alpha_a, \alpha_b \in [0, 1]$

Para a equação linear $AX + B = C$, as Tabelas 12 e 13 resumam o que foi exposto no presente capítulo.

Tabela 12 – Solução da equação linear $AX + B = C$ na aritmética de Moore com a Teoria das Aproximações Intervalares.

Casos	Equação: $X \equiv \frac{(C-B)}{A}$
1) $A > 0$ e $0 \in C - B$	$X \equiv \left[\frac{\underline{c} - \bar{b}}{a}, \frac{\bar{c} - \underline{b}}{a} \right]$
2) $A > 0$ e $C - B < 0$	$X \equiv \left[\frac{\underline{c} - \bar{b}}{a}, \frac{\bar{c} - \underline{b}}{a} \right]$
3) $A > 0$ e $C - B > 0$	$X \equiv \left[\frac{\underline{c} - \bar{b}}{a}, \frac{\bar{c} - \underline{b}}{a} \right]$
4) $A < 0$ e $0 \in C - B$	$X \equiv \left[\frac{\bar{c} - \underline{b}}{a}, \frac{\underline{c} - \bar{b}}{a} \right]$
5) $A < 0$ e $C - B < 0$	$X \equiv \left[\frac{\bar{c} - \underline{b}}{a}, \frac{\underline{c} - \bar{b}}{a} \right]$
6) $A < 0$ e $C - B > 0$	$X \equiv \left[\frac{\bar{c} - \underline{b}}{a}, \frac{\underline{c} - \bar{b}}{a} \right]$

Tabela 13 – Soluções da equação linear $AX + B = C$ nas aritméticas Markov, *Affine*, CIA e RDM.

Aritmética	Equação: $AX + B = C$
Markov	$X = \left[\frac{\underline{c}-\underline{b}}{a_u} \vee \frac{\underline{c}-\underline{b}}{a_v} \right]$
Affine	$X = (c_0 - b_0) + (c_1\varepsilon_1 - b_1\varepsilon_1) + \dots + (c_n\varepsilon_n - b_n\varepsilon_n) \times \frac{1}{(a_0+a_1\varepsilon_1+\dots+a_n\varepsilon_n)}$
CIA	$\min, \max \left\{ \frac{((\lambda_C \underline{c} + (\bar{c} - \lambda_C \bar{c})) - (\lambda_B \underline{b} + (\bar{b} - \lambda_B \bar{b})))}{(\lambda_A \underline{a} + (1 - \lambda_A) \bar{a})} \right\},$ $0 \leq \lambda_A, \lambda_B, \lambda_C \leq 1$
RDM	$X = \left[\min \left(\frac{(\underline{c} + \alpha_c (\bar{c} - \underline{c})) - (\underline{b} + \alpha_b (\bar{b} - \underline{b}))}{\underline{a} + \alpha_a (\bar{a} - \underline{a})} \right), \max \left(\frac{(\underline{c} + \alpha_c (\bar{c} - \underline{c})) - (\underline{b} + \alpha_b (\bar{b} - \underline{b}))}{\underline{a} + \alpha_a (\bar{a} - \underline{a})} \right) \right],$ $\alpha_a, \alpha_b, \alpha_c \in [0, 1]$
Aritmética	Equação: $X = \frac{C-B}{A}$
Markov	$X = \left[\frac{\underline{c}-\underline{b}}{a_u} \vee \frac{\underline{c}-\underline{b}}{a_v} \right]$
Affine	$X = (c_0 - b_0) + (c_1\varepsilon_1 - b_1\varepsilon_1) + \dots + (c_n\varepsilon_n - b_n\varepsilon_n) \times \frac{1}{(a_0+a_1\varepsilon_1+\dots+a_n\varepsilon_n)}$
CIA	$\min, \max \left\{ \frac{((\lambda_C \underline{c} + (\bar{c} - \lambda_C \bar{c})) - (\lambda_B \underline{b} + (\bar{b} - \lambda_B \bar{b})))}{(\lambda_A \underline{a} + (1 - \lambda_A) \bar{a})} \right\},$ $0 \leq \lambda_A, \lambda_B, \lambda_C \leq 1$
RDM	$X = \left[\min \left(\frac{(\underline{c} + \alpha_c (\bar{c} - \underline{c})) - (\underline{b} + \alpha_b (\bar{b} - \underline{b}))}{\underline{a} + \alpha_a (\bar{a} - \underline{a})} \right), \max \left(\frac{(\underline{c} + \alpha_c (\bar{c} - \underline{c})) - (\underline{b} + \alpha_b (\bar{b} - \underline{b}))}{\underline{a} + \alpha_a (\bar{a} - \underline{a})} \right) \right],$ $\alpha_a, \alpha_b, \alpha_c \in [0, 1]$

A Tabela 14 ilustra as soluções para a equação linear $AX + BX = C$ desenvolvida na aritmética de Moore com TAI. Já Tabela 15 apresenta as demais aritméticas intervalares para a mesma equação linear.

Tabela 14 – Solução da equação linear $AX + BX = C$ na aritmética de Moore com a Teoria das Aproximações Intervalares.

Casos	Equação: $X \equiv \frac{C}{(A+B)}$
1) $A + B > 0$ e $C > 0$	$X \equiv \left[\frac{\underline{c}}{\underline{a} + \underline{b}}, \frac{\bar{c}}{\underline{a} + \underline{b}} \right]$
2) $A + B > 0$ e $C < 0$	$X \equiv \left[\frac{\underline{c}}{\underline{a} + \underline{b}}, \frac{\bar{c}}{\bar{a} + \bar{b}} \right]$
3) $A + B > 0$ e $0 \in C$	$X \equiv \left[\frac{\underline{c}}{\underline{a} + \underline{b}}, \frac{\bar{c}}{\underline{a} + \underline{b}} \right]$
4) $A + B < 0$ e $C < 0$	$X \equiv \left[\frac{\bar{c}}{\underline{a} + \underline{b}}, \frac{\underline{c}}{\bar{a} + \bar{b}} \right]$
5) $A + B < 0$ e $C > 0$	$X \equiv \left[\frac{\bar{c}}{\bar{a} + \bar{b}}, \frac{\underline{c}}{\underline{a} + \underline{b}} \right]$
6) $A + B < 0$ e $0 \in C$	$X \equiv \left[\frac{\bar{c}}{\bar{a} + \bar{b}}, \frac{\underline{c}}{\bar{a} + \bar{b}} \right]$

Tabela 15 – Soluções da equação linear $AX + BX = C$ nas aritméticas Markov, *Affine*, CIA e RDM.

Aritmética	Equação: $AX + BX = C$
Markov	$X = \left[\frac{\underline{d}-\underline{b}}{\underline{a}-\underline{c}} \vee \frac{\underline{d}-\bar{b}}{\underline{a}-\bar{c}} \right]$
<i>Affine</i>	$X = (c_0 + c_1\varepsilon_1 + \dots + c_n\varepsilon_n) \times \frac{1}{(a_0+b_0)+(a_1\varepsilon_1+b_1\varepsilon_1)+\dots+(a_n\varepsilon_n+b_n\varepsilon_n)}$
CIA	$\min, \max \left\{ \frac{((\lambda_C \underline{c} + (\bar{c} - \lambda_C \bar{c}) - (\lambda_B \underline{b} + (\bar{b} - \lambda_B \bar{b})))}{(\lambda_A \underline{a} + (1 - \lambda_A) \bar{a})} \right\},$ $0 \leq \lambda_A, \lambda_B, \lambda_C \leq 1$
RDM	$X = \left[\min \left(\frac{\underline{c} + \alpha_c(\bar{c} - \underline{c})}{(\underline{a} + \alpha_a(\bar{a} - \underline{a}) + (\underline{b} + \alpha_b(\bar{b} - \underline{b})))} \right), \max \left(\frac{\underline{c} + \alpha_c(\bar{c} - \underline{c})}{(\underline{a} + \alpha_a(\bar{a} - \underline{a}) + (\underline{b} + \alpha_b(\bar{b} - \underline{b})))} \right) \right],$ $\alpha_a, \alpha_b, \alpha_c \in [0, 1]$
Aritmética	Equação: $X = \frac{C}{(A+B)}$
Markov	$X = \left[\frac{\underline{d}-\underline{b}}{\underline{a}-\underline{c}} \vee \frac{\underline{d}-\bar{b}}{\underline{a}-\bar{c}} \right]$
<i>Affine</i>	$X = (c_0 + c_1\varepsilon_1 + \dots + c_n\varepsilon_n) \times \frac{1}{(a_0+b_0)+(a_1\varepsilon_1+b_1\varepsilon_1)+\dots+(a_n\varepsilon_n+b_n\varepsilon_n)}$
CIA	$\min, \max \left\{ \frac{((\lambda_C \underline{c} + (\bar{c} - \lambda_C \bar{c}) - (\lambda_B \underline{b} + (\bar{b} - \lambda_B \bar{b})))}{(\lambda_A \underline{a} + (1 - \lambda_A) \bar{a})} \right\},$ $0 \leq \lambda_A, \lambda_B, \lambda_C \leq 1$
RDM	$X = \left[\min \left(\frac{\underline{c} + \alpha_c(\bar{c} - \underline{c})}{(\underline{a} + \alpha_a(\bar{a} - \underline{a}) + (\underline{b} + \alpha_b(\bar{b} - \underline{b})))} \right), \max \left(\frac{\underline{c} + \alpha_c(\bar{c} - \underline{c})}{(\underline{a} + \alpha_a(\bar{a} - \underline{a}) + (\underline{b} + \alpha_b(\bar{b} - \underline{b})))} \right) \right],$ $\alpha_a, \alpha_b, \alpha_c \in [0, 1]$

Por fim, apresentamos as Tabelas 16 e 17 com as soluções da equação linear $AX + B = CX + D$ desenvolvidas nas aritméticas de Moore com TAI, Markov, *Affine*, CIA e RDM.

Tabela 16 – Solução da equação linear $AX + B = CX + D$ na aritmética de Moore com a Teoria das Aproximações Intervalares.

Casos	Equação: $X \equiv \frac{(D-B)}{(A-C)}$
1) $A - C > 0$ e $0 \in D - B$	$X \equiv \left[\frac{\underline{d}-\underline{b}}{\underline{a}-\underline{c}}, \frac{\bar{d}-\bar{b}}{\bar{a}-\bar{c}} \right]$
2) $A - C > 0$ e $D - B < 0$	$X \equiv \left[\frac{\underline{d}-\underline{b}}{\underline{a}-\underline{c}}, \frac{\bar{d}-\bar{b}}{\bar{a}-\bar{c}} \right]$
3) $A - C > 0$ e $D - B > 0$	$X \equiv \left[\frac{\underline{d}-\underline{b}}{\underline{a}-\underline{c}}, \frac{\bar{d}-\bar{b}}{\bar{a}-\bar{c}} \right]$
4) $A - C < 0$ e $0 \in D - B$	$X \equiv \left[\frac{\underline{d}-\underline{b}}{\underline{a}-\underline{c}}, \frac{\bar{d}-\bar{b}}{\bar{a}-\bar{c}} \right]$
5) $A - C < 0$ e $D - B < 0$	$X \equiv \left[\frac{\underline{d}-\underline{b}}{\underline{a}-\underline{c}}, \frac{\bar{d}-\bar{b}}{\bar{a}-\bar{c}} \right]$
6) $A - C < 0$ e $D - B > 0$	$X \equiv \left[\frac{\underline{d}-\underline{b}}{\underline{a}-\underline{c}}, \frac{\bar{d}-\bar{b}}{\bar{a}-\bar{c}} \right]$

Tabela 17 – Soluções da equação linear $AX + B = CX + D$ nas aritméticas Markov, Affine, CIA e RDM.

Aritmética	Equação: $AX + B = CX + D$
Markov	$X = \left[\frac{\underline{d}-\underline{b}}{\underline{a}-\underline{c}} \vee \frac{\bar{d}-\bar{b}}{\bar{a}-\bar{c}} \right]$
Affine	$X = ((d_0 - b_0) + (d_1\varepsilon_1 - b_1\varepsilon_1) + \dots + (d_n\varepsilon_n - b_n\varepsilon_n)) \times \frac{1}{((a_0 - c_0) + (a_1\varepsilon_1 - c_1\varepsilon_1) + \dots + (a_n\varepsilon_n - c_n\varepsilon_n))}$
CIA	$\min, \max \left\{ \frac{(\lambda_D \underline{d} + (1 - \lambda_D) \bar{d}) - (\lambda_B \underline{b} + (1 - \lambda_B) \bar{b})}{(\lambda_A \underline{a} + (1 - \lambda_A) \bar{a}) - (\lambda_C \underline{c} + (1 - \lambda_C) \bar{c})} \right\},$ $0 \leq \lambda_A, \lambda_B, \lambda_C, \lambda_D \leq 1$
RDM	$X = \left[\min \left(\frac{(\underline{d} + \alpha_d(\bar{d} - \underline{d}) - \underline{b} + \alpha_b(\bar{b} - \underline{b}))}{(\underline{a} + \alpha_a(\bar{a} - \underline{a}) - (\underline{c} + \alpha_c(\bar{c} - \underline{c}))} \right), \max \left(\frac{(\underline{d} + \alpha_d(\bar{d} - \underline{d}) - \underline{b} + \alpha_b(\bar{b} - \underline{b}))}{(\underline{a} + \alpha_a(\bar{a} - \underline{a}) - (\underline{c} + \alpha_c(\bar{c} - \underline{c}))} \right) \right],$ $\alpha_a, \alpha_b, \alpha_c, \alpha_d \in [0, 1]$
Aritmética	Equação: $X = \frac{(D-B)}{(A-C)}$
Markov	$X = \left[\frac{\underline{d}-\underline{b}}{\underline{a}-\underline{c}} \vee \frac{\bar{d}-\bar{b}}{\bar{a}-\bar{c}} \right]$
Affine	$X = ((d_0 - b_0) + (d_1\varepsilon_1 - b_1\varepsilon_1) + \dots + (d_n\varepsilon_n - b_n\varepsilon_n)) \times \frac{1}{((a_0 - c_0) + (a_1\varepsilon_1 - c_1\varepsilon_1) + \dots + (a_n\varepsilon_n - c_n\varepsilon_n))}$
CIA	$\min, \max \left\{ \frac{(\lambda_D \underline{d} + (1 - \lambda_D) \bar{d}) - (\lambda_B \underline{b} + (1 - \lambda_B) \bar{b})}{(\lambda_A \underline{a} + (1 - \lambda_A) \bar{a}) - (\lambda_C \underline{c} + (1 - \lambda_C) \bar{c})} \right\},$ $0 \leq \lambda_A, \lambda_B, \lambda_C, \lambda_D \leq 1$
RDM	$X = \left[\min \left(\frac{(\underline{d} + \alpha_d(\bar{d} - \underline{d}) - \underline{b} + \alpha_b(\bar{b} - \underline{b}))}{(\underline{a} + \alpha_a(\bar{a} - \underline{a}) - (\underline{c} + \alpha_c(\bar{c} - \underline{c}))} \right), \max \left(\frac{(\underline{d} + \alpha_d(\bar{d} - \underline{d}) - \underline{b} + \alpha_b(\bar{b} - \underline{b}))}{(\underline{a} + \alpha_a(\bar{a} - \underline{a}) - (\underline{c} + \alpha_c(\bar{c} - \underline{c}))} \right) \right],$ $\alpha_a, \alpha_b, \alpha_c, \alpha_d \in [0, 1]$

Para melhor representar os resultados numéricos, a Tabela 18 apresenta uma visão geral dos resultados de cada aritmética nas equações lineares.

Tabela 18 – Resumo dos resultados da aplicação dos intervalos em diferentes aritméticas

Aritmética	Equações							
	$A + X = B$		$AX + B = C$		$AX + BX = C$		$AX + B = CX + D$	
	Forma 1	Forma 2	Forma 1	Forma 2	Forma 1	Forma 2	Forma 1	Forma 2
Moore/TAI	-	[-3,8]	-	[-2.33,-1.5]	-	[-1, 2.5]	-	[0.272, 1.428]
Markov	[1 ∨ 4]	[1 ∨ 4]	[-2 ∨ -1.5]	[-2 ∨ -1.5]	[-1 ∨ 0.5]	[-1 ∨ 0.5]	[0.444 ∨ 1]	[0.444 ∨ 1]
Affine	[1,4]	[1,4]	-	-	-	-	-	-
CIA	[-3,8]	[-3,8]	[-2.33,-1.5]	[-2.33,-1.5]	[-1, 2.5]	[-1, 2.5]	[0.272, 1.428]	[0.272, 1.428]
RDM	[-3,8]	[-3,8]	[-2.33,-1.5]	[-2.33,-1.5]	[-1, 2.5]	[-1, 2.5]	[0.272, 1.428]	[0.272, 1.428]

O objetivo de reunir as soluções genéricas das equações lineares com coeficientes intervalares, adotadas no presente trabalho, é de ratificar que nem sempre a aritmética tradicional de Moore retorna a solução completa em diferentes formas de resolução. Salienta-se que obter a solução completa através de diferentes formas de resolução é o ideal para qualquer equação linear.

RDM e CIA se comportam de uma maneira mais coerente quanto a aplicação de operações aritméticas básicas. Isso se deve basicamente ao acréscimo de variáveis, as quais fazem com que se trabalhe com o intervalo como um todo, diferente de Moore, por exemplo, que opera com os extremos do intervalo. Em contrapartida, sabemos que aumentar essa possibilidade de valores também aumenta a quantidade de cálculos e influencia diretamente no tempo de processamento (levando em conta uma implementação).

Outro ponto a se destacar é o uso dessas variáveis adicionais. Em RDM tem-se as variáveis α e em CIA λ , ambas podendo variar de 0 a 1, ou seja, compreendidas no intervalo [0,1]. A questão é: que valores atribuir para essas variáveis? Sempre os extremos vão retornar os menores e maiores valores? Para a segunda pergunta a resposta é não, e isso sabemos devido ao comportamento das funções que estão sendo calculadas, pois nem sempre os maiores e menores valores estão nas bordas das funções. Já para a primeira questão não temos uma resposta. E é aqui que encontramos dificuldades em operar com essas aritméticas. Nos exemplos apresentados nesta tese conseguimos os resultados corretos operando apenas com os valores 0 e 1 para as variáveis, porém nem sempre serão apenas esses. Trabalhos na literatura já demonstram resultados com valores de $\alpha = 0.5$, por exemplo. Neste ponto percebemos que a implementação de uma aritmética RDM ou CIA é de extrema importância para facilitar e agilizar os cálculos no uso dessas duas aritméticas.

O foco deste trabalho permaneceu em solucionar de maneira genérica as equações lineares, sem investigar implementações de bibliotecas que solucionem as aritméticas intervalares. Porém, com o andamento das aplicações de exemplos numéricos percebemos a importância de ter a disponibilidade de ambientes de desenvolvi-

mento intervalares. Realizando uma busca rápida na literatura, podemos dizer que a aritmética de Moore possui algumas implementações em diferentes ambientes e linguagens. Podemos citar: C-XSC (onde XSC significa *eXtend Scientific Computing*) (KLATTE et al., 1993), uma biblioteca desenvolvida em C++; JAVA-XSC (FERREIRA et al., 2005), biblioteca desenvolvida na linguagem Java; IntPy (INTPY, 2014), pacote intervalar desenvolvido na linguagem *Python*; INTLAB (INTLAB - INTERVAL LABORATORY, 1998), pacote desenvolvido para o Matlab com suporte para intervalos. Para as demais aritméticas intervalares não foram encontradas muitas opções. Podemos citar YalAA - *Yet Another Library for Affine Arithmetic* (YALAA - YET ANOTHER LIBRARY FOR AFFINE ARITHMETIC, 2012), uma biblioteca em C++ para aritmética *Affine*; para Kaucher encontramos relatos de uma implementação em Pascal, mas foi descontinuada. Por fim, para a aritmética RDM não foi encontrada implementação em nenhuma linguagem, mas está em desenvolvimento um pacote na linguagem *Python* com suporte as operações do tipo intervalo nessa linguagem.

3.6 Considerações do capítulo

Diante das diferentes aritméticas intervalares que surgiram na literatura no intuito de suprir as falhas da aritmética convencional, e das comprovações de que Moore nem sempre retorna resultados corretos mesmo para operações simples, o presente capítulo propôs analisar quatro tipos de equações lineares solucionando-as nas aritméticas de Moore com a Teoria das Aproximações Intervalares, Markov, *Affine*, CIA e RDM, com o objetivo de investigar qual aritmética intervalar retorna a solução ou as soluções completas para cada uma das equações em análise.

A primeira constatação importante é de que a SIA realmente apresenta limitações para cálculos simples, como pode ser visto na solução das quatro equações lineares, onde ficou demonstrado que na primeira forma de escrita a aritmética apresenta limitações e não pode ser utilizada para solucionar as equações. Na sequência, o próximo passo foi investigar como se comportam as demais aritméticas em relação a solução para as duas formas de escrita da equação. Nesse ponto ficou provado que, independente da forma de escrita de qualquer uma das quatro equações lineares, todas as demais aritméticas intervalares apresentam a mesma solução para as duas formas.

A próxima etapa consistiu em testar com exemplo numérico o resultado de cada uma das aritméticas para a equação linear em questão. Entretanto, surgiram novas questões, pois nem sempre uma aritmética com solução igual para as duas formas de escrita da equação é a que retorna a solução completa. E isso fica claro nos exemplos numéricos aplicados em todas as aritméticas, onde Markov, por exemplo, nunca retorna a solução completa para as quatro equações lineares analisadas.

Com tudo que foi apresentado e discutido neste capítulo, concluímos que:

- Moore com suas propriedades básicas não pode ser aplicada como solução para qualquer escrita das equações;
- nas equações lineares $A + X = B$, $AX + B = C$, $AX + BX = C$ e $AX + B = CX + D$, todas as aritméticas retornam a mesma solução para as duas formas de escrita da equação, salientando que Moore só pode ser resolvido com a forma de escrita isolando o X e utilizando a teoria das aproximações;
- somente Moore com a Teoria das Aproximações Intervalares, CIA e RDM retornaram solução completa para as equações lineares $A + X = B$, $AX + B = C$, $AX + BX = C$ e $AX + B = CX + D$.

De uma maneira geral, para encontrar um intervalo completo no cálculo de equações lineares com coeficientes intervalares, Moore com TAI, CIA e RDM retornam tais soluções.

Importante salientar que o foco dos testes numéricos não foi analisar diferentes casos, e sim casos em que os valores dos intervalos das equações eram conhecidos

e seus intervalos solução completos.

Dentre essas soluções, qual escolher? O próximo capítulo vai desenvolver a análise do esforço computacional para computar a solução completa em cada uma das aritméticas intervalares distintas. O objetivo será complementar o resultado do desenvolvimento da solução genérica do presente capítulo, com o intuito de adicionar uma informação importante na hora da escolha entre qual das aritméticas intervalares (Moore com TAI, CIA e RDM) utilizar.

4 ANÁLISE DE COMPLEXIDADE DAS FORMAS DE SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES LINEARES EM DIFERENTES ARITMÉTICAS

O presente capítulo tem como objetivo apresentar uma análise da complexidade computacional do problema de calcular equações lineares com coeficientes intervalares considerando como método de solução as formas e as aritméticas intervalares que retornam a solução completa. O intuito é verificar, quando há soluções completas em diferentes aritméticas, qual retorna um resultado com menor custo computacional.

A complexidade de um algoritmo, ou quantidade de trabalho requerida por ele não pode ser descrita simplesmente por um número, uma vez que o número de operações básicas efetuadas em geral não é o mesmo para qualquer entrada (depende do tamanho da entrada). Mesmo para entradas do mesmo tamanho, o número de operações efetuadas pelo algoritmo pode variar (TOSCANI; VELOSO, 2001).

Questões relativas à complexidade de um algoritmo em termos do tempo de computação e espaço de memória são determinantes para o julgamento da eficiência do mesmo (TOSCANI; VELOSO, 2001). Um algoritmo, para ser razoável ou não, vai depender de quantos passos computacionais ele necessita para chegar a solução de um problema. Um algoritmo é considerado razoável quando obtém a solução de um problema em tempo polinomial (KREINOVICH et al., 1998).

Um problema é dito computável se existir um procedimento efetivo que o resolva em um número finito de passos, ou seja, se existe um algoritmo que leve à sua solução. Observa-se, contudo, que um problema considerado “em princípio” computável pode não ser tratável na prática, devido às limitações dos recursos computacionais para executar o algoritmo implementado (TOSCANI; VELOSO, 2001).

Com relação aos problemas intervalares, Kreinovich *et al.* (1998) analisaram classes de problemas para as quais computações intervalares são tratáveis e quando são intratáveis. Realizaram a análise da complexidade do PBCI (problema básico da computação intervalar), com a finalidade de responder a questão: “É possível ter um algoritmo que sempre calcula a imagem exata (isto é, os extremos inferior e superior

do intervalo) em tempo razoável?”

Definição 11. (Problema básico da computação intervalar: PBCI) O problema básico da computação intervalar é definido por:

Dados: n intervalos racionais X_i (intervalos com extremos racionais), e uma função contínua e computável f que transforma n números reais x_1, \dots, x_n em um número real $y = f(x_1, \dots, x_n)$.

Calcular: o intervalo dos possíveis valores de y :

$$Y = [\underline{y}, \bar{y}] = f(X_1, \dots, X_n) = \{y \mid y = f(x_1, \dots, x_n), x_1 \in X_1, \dots, x_n \in X_n\}.$$

Kreinovich *et al.* (1998) verificaram que o problema pertence a classe de problemas NP-Difícil.

Importante observar que a NP-dificuldade do PBCI está relacionada com o processamento dos dados de entrada do problema. No PBCI, os dados de entrada de uma função contínua f são valores intervalares, e a forma de calcular o intervalo imagem do PBCI é através da imagem intervalar (OLIVEIRA; DIVERIO; CLAUDIO, 1997). O PBCI ainda foi analisado com diversas restrições de quantidade de variáveis, tipos de funções, sendo elas funções algébricas, função polinomial, splines, função g -polinomial, função g -racional, função racional-complexa. Na maioria dos casos considerados sobre o PBCI, verificou-se que o mesmo pertence à classe de problemas NP-Difícil. Assim, concluiu-se que não se pode esperar um algoritmo que resolva todos os problemas da computação intervalar em tempo razoável.

Quanto a resultados de análise de complexidade com problemas resolvidos pelas demais aritméticas intervalares utilizadas nesta tese, não foram encontrados trabalhos na literatura abordando esse aspecto. Porém, um ponto importante a ser destacado é que as aritméticas que retornam solução completa, CIA e RDM, utilizam as variáveis λ e α variando no intervalo $[0,1]$. Quando colocamos essas variáveis em uma implementação, devemos levar em conta a restrição de possibilidades, uma vez que, se usarmos os infinitos valores do intervalo $[0,1]$, o algoritmo se torna NP-Difícil, caindo no problema já provado por Kreinovich.

Neste trabalho, considera-se como domínio do problema de computar equações lineares com coeficientes intervalares, um conjunto de valores intervalares, ou seja, $Dom(f) = \mathbb{IR}^n$ (n é o número de argumentos da função).

As seções foram dispostas da mesma maneira que o capítulo anterior, separadas por equações lineares, onde aqui cada seção apresenta os pseudocódigos dos métodos que calculam (para cada aritmética) a solução completa para as equações lineares.

4.1 Equação $A + X = B$

Para a primeira equação, apresentaremos a análise da solução da equação na forma $X \equiv B - A$ utilizando TAI, uma vez que retorna a solução completa para a equação linear $A + X = B$.

Algoritmo 1: $X \equiv B - A$ (Moore/TAI)

Entrada: $A = [\underline{a}, \bar{a}], B = [\underline{b}, \bar{b}]$
Saída: $X \equiv [\underline{x}, \bar{x}]$

```

1 início
2   caso  $A > 0$  e  $B > 0$  faça
3      $\underline{x} \equiv \underline{b} - \underline{a}$ ;
4      $\bar{x} \equiv \bar{b} - \underline{a}$ ;
5     retorna  $X \equiv [\underline{x}, \bar{x}]$ ;
6   fim
7   caso  $A > 0$  e  $B < 0$  faça
8      $\underline{x} \equiv \underline{b} - \underline{a}$ ;
9      $\bar{x} \equiv \bar{b} - \underline{a}$ ;
10    retorna  $X \equiv [\underline{x}, \bar{x}]$ ;
11  fim
12  caso  $A > 0$  e  $B = [-\underline{b}, +\bar{b}]$  faça
13     $\underline{x} \equiv \underline{b} - \underline{a}$ ;
14     $\bar{x} \equiv \bar{b} - \underline{a}$ ;
15    retorna  $X \equiv [\underline{x}, \bar{x}]$ ;
16  fim
17  caso  $A < 0$  e  $B > 0$  faça
18     $\underline{x} \equiv \underline{b} + \underline{a}$ ;
19     $\bar{x} \equiv \bar{b} + \underline{a}$ ;
20    retorna  $X \equiv [\underline{x}, \bar{x}]$ ;
21  fim
22  caso  $A < 0$  e  $B < 0$  faça
23     $\underline{x} \equiv \underline{b} + \underline{a}$ ;
24     $\bar{x} \equiv \bar{b} + \underline{a}$ ;
25    retorna  $X \equiv [\underline{x}, \bar{x}]$ ;
26  fim
27  caso  $A < 0$  e  $B = [-\underline{b}, +\bar{b}]$  faça
28     $\underline{x} \equiv \underline{b} + \underline{a}$ ;
29     $\bar{x} \equiv \bar{b} + \underline{a}$ ;
30    retorna  $X \equiv [\underline{x}, \bar{x}]$ ;
31  fim
32  caso  $A = [-\underline{a}, +\bar{a}]$  e  $B > 0$  faça
33     $\underline{x} \equiv \underline{b} + \underline{a}$ ;
34     $\bar{x} \equiv \bar{b} - \underline{a}$ ;
35    retorna  $X \equiv [\underline{x}, \bar{x}]$ ;
36  fim
37  caso  $A = [-\underline{a}, +\bar{a}]$  e  $B < 0$  faça
38     $\underline{x} \equiv \underline{b} + \underline{a}$ ;
39     $\bar{x} \equiv \bar{b} - \underline{a}$ ;
40    retorna  $X \equiv [\underline{x}, \bar{x}]$ ;
41  fim
42  caso  $A = [-\underline{a}, +\bar{a}]$  e  $B = [-\underline{b}, +\bar{b}]$  faça
43     $\underline{x} \equiv \underline{b} + \underline{a}$ ;
44     $\bar{x} \equiv \bar{b} - \underline{a}$ ;
45    retorna  $X \equiv [\underline{x}, \bar{x}]$ ;
46  fim
47 fim

```

O algoritmo apresenta um pseudocódigo da solução para a equação linear apresentada na Subseção 3.2.1. As entradas do algoritmo são os intervalos A e B e ele retorna como saída o intervalo X . O algoritmo opera dependendo da comparação dos valores dos intervalos de entrada, executando apenas um dos nove casos possíveis. Assim, além de operações básicas, são executadas duas comparações simples, onde

é testado se o valor do intervalo (passado como entrada) é maior ou menor que zero ou se contém zero. Logo, podemos afirmar que a complexidade do algoritmo é $O(1)$.

As duas formas de solução para equação linear $A + X = B$ pela aritmética CIA são completas. Aqui apresentaremos apenas o algoritmo e a análise da segunda forma, visto que a primeira será análoga.

Algoritmo 2: $X = B - A$ (CIA)

Entrada: $\lambda_A, \lambda_B, A = (\lambda_A \underline{a} + (1 - \lambda_A) \bar{a}), B = (\lambda_B \underline{b} + (1 - \lambda_B) \bar{b})$
Saída: $X = [\underline{x}, \bar{x}]$

```

1 início
2    $\lambda_A, \lambda_B = 0;$ 
3    $min = \infty$  e  $max = \infty;$ 
4   enquanto  $0 \leq \lambda_A, \lambda_B \leq 1$  faça
5      $X = (\lambda_B \underline{b} + (\bar{b} - \lambda_B \bar{b}) - (\lambda_A \underline{a} + (\bar{a} - \lambda_A \bar{a})));$ 
6     se  $X < min$  ou  $X > max$  então
7        $min = X$  ou  $max = X$ 
8     fim
9     incrementa  $\lambda_A, \lambda_B;$ 
10  fim
11  retorna  $X = [min, max]$ 
12 fim
```

A seguir desenvolve-se o pseudocódigo para a solução completa utilizando a aritmética RDM. Aqui também será omitida a primeira forma de solução, visto que retorna o mesmo resultado.

Algoritmo 3: $X = B - A$ (RDM)

Entrada: $\alpha_a, \alpha_b, A = \underline{a} + \alpha_a(\bar{a} - \underline{a}), B = \underline{b} + \alpha_b(\bar{b} - \underline{b})$
Saída: $X = [\underline{x}, \bar{x}]$

```

1 início
2    $\alpha_a, \alpha_b = 0;$ 
3    $min = \infty$  e  $max = \infty;$ 
4   enquanto  $0 \leq \alpha_a, \alpha_b \leq 1$  faça
5      $X = (\underline{b} + \alpha_b(\bar{b} - \underline{b})) - (\underline{a} + \alpha_a(\bar{a} - \underline{a}));$ 
6     se  $X < min$  ou  $X > max$  então
7        $min = X$  ou  $max = X$ 
8     fim
9     incrementa  $\alpha_a, \alpha_b;$ 
10  fim
11  retorna  $X = [min, max]$ 
12 fim
```

Para as soluções utilizando aritméticas CIA e RDM é necessária uma estrutura de controle para executar um laço de repetição com os possíveis valores das variáveis λ (CIA) e α (RDM). Importante salientar que ambas podem variar de 0 até 1, porém o passo de variação não é determinado. Assim, podemos dizer que os dois algoritmos dependem de n passos de variação entre o intervalo $[0,1]$ e podem ser classificados com ordem de complexidade $O(n)$.

4.2 Equação $AX + B = C$

Abaixo apresenta-se o desenvolvimento dos algoritmos que solucionam a equação linear.

Algoritmo 4: $X \equiv \frac{(C-B)}{A}$ (Moore/TAI)

Entrada: $A = [a, \bar{a}], B = [b, \bar{b}], C = [c, \bar{c}]$
Saída: $X \equiv [x, \bar{x}]$

```

1 início
2   se  $A > 0$  e  $0 \in C - B$  então
3     retorna  $X \equiv \left[ \frac{c-b}{a}, \frac{\bar{c}-\bar{b}}{a} \right]$ ;
4   fim
5   se  $A > 0$  e  $C - B < 0$  então
6     retorna  $X \equiv \left[ \frac{c-b}{a}, \frac{\bar{c}-\bar{b}}{a} \right]$ ;
7   fim
8   se  $A > 0$  e  $C - B > 0$  então
9     retorna  $X \equiv \left[ \frac{c-b}{a}, \frac{\bar{c}-\bar{b}}{a} \right]$ ;
10  fim
11  se  $A < 0$  e  $0 \in C - B$  então
12    retorna  $X \equiv \left[ \frac{\bar{c}-\bar{b}}{a}, \frac{c-b}{a} \right]$ ;
13  fim
14  se  $A < 0$  e  $C - B < 0$  então
15    retorna  $X \equiv \left[ \frac{\bar{c}-\bar{b}}{a}, \frac{c-b}{a} \right]$ ;
16  fim
17  se  $A < 0$  e  $C - B > 0$  então
18    retorna  $X \equiv \left[ \frac{\bar{c}-\bar{b}}{a}, \frac{c-b}{a} \right]$ ;
19  fim
20 fim
```

Para desenvolver a solução da presente equação, o algoritmo para TAI recebe os intervalos A, B e C como entrada e calcula o resultado intervalar X de acordo com duas comparações, primeiro verificando se o intervalo A é maior ou menor que zero e em seguida apurando se a subtração intervalar $C - B$ é maior ou menor que zero ou ainda se contém zero. Sabemos que essa comparação é realizada de forma constante, logo a complexidade desse método de solução é de ordem $O(1)$.

Algoritmo 5: $X = \frac{(C-B)}{A}$ (CIA)

Entrada: $\lambda_A, \lambda_B, \lambda_C, A = (\lambda_A a + (1 - \lambda_A) \bar{a}), B = (\lambda_B b + (1 - \lambda_B) \bar{b}), C = (\lambda_C c + (1 - \lambda_C) \bar{c})$
Saída: $X = [x, \bar{x}]$

```

1 início
2    $\lambda_A, \lambda_B, \lambda_C = 0$ ;
3    $min = \infty$  e  $max = \infty$ ;
4   enquanto  $0 \leq \lambda_A, \lambda_B, \lambda_C \leq 1$  faça
5      $X = \frac{(\lambda_C c + (1 - \lambda_C) \bar{c}) - (\lambda_B b + (1 - \lambda_B) \bar{b})}{(\lambda_A a + (1 - \lambda_A) \bar{a})}$ ;
6     se  $X < min$  ou  $X > max$  então
7        $min = X$  ou  $max = X$ 
8     fim
9     incrementa  $\lambda_A, \lambda_B, \lambda_C$ ;
10  fim
11  retorna  $X = [min, max]$ 
12 fim
```

Algoritmo 6: $X = \frac{(C-B)}{A}$ (RDM)

Entrada: $\alpha_a, \alpha_b, \alpha_c, A = \underline{a} + \alpha_a(\bar{a} - \underline{a}), B = \underline{b} + \alpha_b(\bar{b} - \underline{b}), C = \underline{c} + \alpha_c(\bar{c} - \underline{c})$
Saída: $X = [\underline{x}, \bar{x}]$

```

1 início
2    $\alpha_a, \alpha_b, \alpha_c = 0;$ 
3    $min = \infty$  e  $max = \infty;$ 
4   enquanto  $0 \leq \alpha_a, \alpha_b, \alpha_c \leq 1$  faça
5      $X = \left( \frac{(\underline{c} + \alpha_c(\bar{c} - \underline{c})) - (\underline{b} + \alpha_b(\bar{b} - \underline{b}))}{\underline{a} + \alpha_a(\bar{a} - \underline{a})} \right);$ 
6     se  $X < min$  ou  $X > max$  então
7        $min = X$  ou  $max = X$ 
8     fim
9     incrementa  $\alpha_a, \alpha_b, \alpha_c;$ 
10  fim
11  retorna  $X = [min, max]$ 
12 fim
```

Os algoritmos que desenvolvem as soluções completas em CIA e RDM utilizam um laço de repetição o qual é executado n vezes, de acordo com a precisão utilizada para as variáveis λ e α . Assim, concluímos que a complexidade dos dois métodos é $O(n)$.

4.3 Equação $AX + BX = C$

Abaixo são desenvolvidos os algoritmos para as soluções completas da equação linear.

Algoritmo 7: $X \equiv \frac{C}{A+B}$ (Moore/TAI)

Entrada: $A = [\underline{a}, \bar{a}], B = [\underline{b}, \bar{b}], C = [\underline{c}, \bar{c}]$
Saída: $X \equiv [\underline{x}, \bar{x}]$

```

1 início
2   se  $A + B > 0$  e  $C > 0$  então
3      $X \equiv \left[ \frac{\underline{c}}{\underline{a} + \underline{b}}, \frac{\bar{c}}{\bar{a} + \bar{b}} \right];$ 
4   fim
5   se  $A + B > 0$  e  $C < 0$  então
6      $X \equiv \left[ \frac{\underline{c}}{\underline{a} + \underline{b}}, \frac{\bar{c}}{\bar{a} + \bar{b}} \right];$ 
7   fim
8   se  $A + B > 0$  e  $0 \in C$  então
9      $X \equiv \left[ \frac{\underline{c}}{\underline{a} + \underline{b}}, \frac{\bar{c}}{\bar{a} + \bar{b}} \right];$ 
10  fim
11  se  $A + B < 0$  e  $C < 0$  então
12     $X \equiv \left[ \frac{\bar{c}}{\bar{a} + \bar{b}}, \frac{\underline{c}}{\underline{a} + \underline{b}} \right];$ 
13  fim
14  se  $A + B < 0$  e  $C > 0$  então
15     $X \equiv \left[ \frac{\bar{c}}{\bar{a} + \bar{b}}, \frac{\underline{c}}{\underline{a} + \underline{b}} \right];$ 
16  fim
17  se  $A + B < 0$  e  $0 \in C$  então
18     $X \equiv \left[ \frac{\bar{c}}{\bar{a} + \bar{b}}, \frac{\underline{c}}{\underline{a} + \underline{b}} \right];$ 
19  fim
20 fim
```

O algoritmo acima recebe três intervalos como entrada e utiliza uma operação de adição ($A + B$) e realiza duas comparações em cada passo. Logo, afirmamos que a complexidade do algoritmo é de ordem $O(1)$.

Algoritmo 8: $X = \frac{C}{A+B}$ (CIA)

Entrada: $\lambda_A, \lambda_B, \lambda_C, A = (\lambda_A \underline{a} + (1 - \lambda_A) \bar{a}), B = (\lambda_B \underline{b} + (1 - \lambda_B) \bar{b}), C = (\lambda_C \underline{c} + (1 - \lambda_C) \bar{c})$
Saída: $X = [\underline{x}, \bar{x}]$

```

1 início
2    $\lambda_A, \lambda_B, \lambda_C = 0;$ 
3    $min = \infty$  e  $max = \infty;$ 
4   enquanto  $0 \leq \lambda_A, \lambda_B, \lambda_C \leq 1$  faça
5      $X = \frac{(\lambda_C \underline{c} + (1 - \lambda_C) \bar{c})}{((\lambda_A \underline{a} + (1 - \lambda_A) \bar{a}) + (\lambda_B \underline{b} + (1 - \lambda_B) \bar{b}))};$ 
6     se  $X < min$  ou  $X > max$  então
7        $min = X$  ou  $max = X$ 
8     fim
9     incrementa  $\lambda_A, \lambda_B, \lambda_C;$ 
10  fim
11  retorna  $X = [min, max]$ 
12 fim
```

Algoritmo 9: $X = \frac{C}{A+B}$ (RDM)

Entrada: $\alpha_a, \alpha_b, \alpha_c, A = \underline{a} + \alpha_a(\bar{a} - \underline{a}), B = \underline{b} + \alpha_b(\bar{b} - \underline{b}), C = \underline{c} + \alpha_c(\bar{c} - \underline{c})$
Saída: $X = [\underline{x}, \bar{x}]$

```

1 início
2    $\alpha_a, \alpha_b, \alpha_c = 0;$ 
3    $min = \infty$  e  $max = \infty;$ 
4   enquanto  $0 \leq \alpha_a, \alpha_b, \alpha_c \leq 1$  faça
5      $X = \left( \frac{\underline{c} + \alpha_c(\bar{c} - \underline{c})}{(\underline{a} + \alpha_a(\bar{a} - \underline{a}) + (\underline{b} + \alpha_b(\bar{b} - \underline{b})))} \right);$ 
6     se  $X < min$  ou  $X > max$  então
7        $min = X$  ou  $max = X$ 
8     fim
9     incrementa  $\alpha_a, \alpha_b, \alpha_c;$ 
10  fim
11  retorna  $X = [min, max]$ 
12 fim
```

Os dois algoritmos, 8 e 9, que apresentam a solução completa da equação nas aritméticas CIA e RDM contêm uma estrutura de repetição que depende das variáveis λ e α , as quais podem variar de 0 até 1, dependendo de como será definida essa precisão, a qual pode ser executada n vezes. Dentro dessa estrutura o algoritmo faz uma comparação dos valores encontrados com os atribuídos a min e max e os substitui quando for o caso. Portanto, a ordem de complexidade dos dois algoritmos é $O(n)$.

4.4 Equação $AX + B = CX + D$

Abaixo são desenvolvidos os algoritmos em pseudocódigo que apresentam solução completa para a equação linear em questão, nas aritméticas de Moore com TAI, CIA e RDM.

Algoritmo 10: $X \equiv \frac{(D-B)}{(A-C)}$ (Moore/TAI)

Entrada: $A = [\underline{a}, \bar{a}], B = [\underline{b}, \bar{b}], C = [\underline{c}, \bar{c}], D = [\underline{d}, \bar{d}]$
Saída: $X \equiv [\underline{x}, \bar{x}]$

```

1 início
2   se  $A - C > 0$  e  $0 \in D - B$  então
3     |  $X \equiv \left[ \frac{\underline{d}-\underline{b}}{\underline{a}-\underline{c}}, \frac{\bar{d}-\bar{b}}{\bar{a}-\bar{c}} \right];$ 
4   fim
5   se  $A - C > 0$  e  $D - B < 0$  então
6     |  $X \equiv \left[ \frac{\underline{d}-\bar{b}}{\underline{a}-\bar{c}}, \frac{\bar{d}-\underline{b}}{\bar{a}-\underline{c}} \right];$ 
7   fim
8   se  $A - C > 0$  e  $D - B > 0$  então
9     |  $X \equiv \left[ \frac{\underline{d}-\bar{b}}{\bar{a}-\underline{c}}, \frac{\bar{d}-\underline{b}}{\underline{a}-\bar{c}} \right];$ 
10  fim
11  se  $A - C < 0$  e  $0 \in D - B$  então
12    |  $X \equiv \left[ \frac{\bar{d}-\underline{b}}{\underline{a}-\underline{c}}, \frac{\underline{d}-\bar{b}}{\bar{a}-\bar{c}} \right];$ 
13  fim
14  se  $A - C < 0$  e  $D - B < 0$  então
15    |  $X \equiv \left[ \frac{\bar{d}-\bar{b}}{\underline{a}-\bar{c}}, \frac{\underline{d}-\underline{b}}{\bar{a}-\underline{c}} \right];$ 
16  fim
17  se  $A - C < 0$  e  $D - B > 0$  então
18    |  $X \equiv \left[ \frac{\bar{d}-\underline{b}}{\bar{a}-\underline{c}}, \frac{\underline{d}-\bar{b}}{\underline{a}-\bar{c}} \right];$ 
19  fim
20 fim
```

Para o algoritmo na aritmética de Moore com TAI, são realizadas operações aritméticas intervalares com os intervalos de entrada (A, B, C e D), além de comparações com o valor zero. Todas essas operações são executadas em tempo constante, chegando em uma complexidade $O(1)$.

Algoritmo 11: $X = \frac{(D-B)}{(A-C)}$ (CIA)

Entrada: $\lambda_A, \lambda_B, \lambda_C, \lambda_D, A = (\lambda_A \underline{a} + (1 - \lambda_A) \bar{a}), B = (\lambda_B \underline{b} + (1 - \lambda_B) \bar{b}), C = (\lambda_C \underline{c} + (1 - \lambda_C) \bar{c}), D = (\lambda_D \underline{d} + (1 - \lambda_D) \bar{d})$
Saída: $X = [\underline{x}, \bar{x}]$

```

1 início
2    $\lambda_A, \lambda_B, \lambda_C, \lambda_D = 0;$ 
3    $min = \infty$  e  $max = \infty;$ 
4   enquanto  $0 \leq \lambda_A, \lambda_B, \lambda_C \leq 1$  faça
5     |  $X = \left\{ \frac{(\lambda_D \underline{d} + (1 - \lambda_D) \bar{d}) - (\lambda_B \underline{b} + (1 - \lambda_B) \bar{b})}{(\lambda_A \underline{a} + (1 - \lambda_A) \bar{a}) - (\lambda_C \underline{c} + (1 - \lambda_C) \bar{c})} \right\};$ 
6     | se  $X < min$  ou  $X > max$  então
7       |  $min = X$  ou  $max = X$ 
8     fim
9     | incrementa  $\lambda_A, \lambda_B, \lambda_C, \lambda_D;$ 
10  fim
11  retorna  $X = [min, max]$ 
12 fim
```

Algoritmo 12: $X = \frac{(D-B)}{(A-C)}$ (RDM)

Entrada: $\alpha_a, \alpha_b, \alpha_c, \alpha_d, A = \underline{a} + \alpha_a(\bar{a} - \underline{a}), B = \underline{b} + \alpha_b(\bar{b} - \underline{b}), C = \underline{c} + \alpha_c(\bar{c} - \underline{c}), D = \underline{d} + \alpha_d(\bar{d} - \underline{d})$

Saída: $X = [\underline{x}, \bar{x}]$

```

1 início
2    $\alpha_a, \alpha_b, \alpha_c, \alpha_d = 0;$ 
3    $min = \infty$  e  $max = \infty;$ 
4   enquanto  $0 \leq \alpha_a, \alpha_b, \alpha_c, \alpha_d \leq 1$  faça
5      $X = \left( \frac{(d + \alpha_d(\bar{d} - \underline{d}) - b + \alpha_b(\bar{b} - \underline{b}))}{(a + \alpha_a(\bar{a} - \underline{a}) - (c + \alpha_c(\bar{c} - \underline{c})))} \right);$ 
6     se  $X < min$  ou  $X > max$  então
7        $min = X$  ou  $max = X$ 
8     fim
9     incrementa  $\alpha_a, \alpha_b, \alpha_c, \alpha_d;$ 
10  fim
11  retorna  $X = [min, max]$ 
12 fim
```

Nos algoritmos desenvolvidos para as aritméticas CIA e RDM, observamos as operações aritméticas intervalares básicas, bem como uma estrutura de controle que depende do valor atribuído para as variáveis λ e α . Além de comparar os valores atuais de X com os valores em min e max , fazendo as atribuições quando necessário. Afir-mamos que a complexidade de ambas soluções é de ordem $O(n)$.

A Tabela 19 resume o que foi analisado no presente capítulo, ilustrando de forma mais clara os resultados das análises de complexidade desenvolvidas para cada algo-ritmo.

Tabela 19 – Complexidade computacional das formas e aritméticas das soluções com-pletas para as equações lineares

Equação Linear	Aritmética Intervalar		
	Moore/TAI	CIA	RDM
$A + X = B$	$O(1)$	$O(n)$	$O(n)$
$AX + B = C$	$O(1)$	$O(n)$	$O(n)$
$AX + BX = C$	$O(1)$	$O(n)$	$O(n)$
$AX + B = CX + D$	$O(1)$	$O(n)$	$O(n)$

A partir da Tabela 19 percebemos que, independente da equação linear, o esforço computacional da aritmética intervalar se mantém o mesmo em cada uma das aritméticas. Temos ordem constante para a aritmética de Moore utilizando TAI, nas quatro equações lineares e ordem linear para CIA e RDM também nas quatro equações.

4.5 Considerações do capítulo

Sabendo da importância de analisarmos o esforço computacional de um problema, o presente capítulo teve como objetivo medir o esforço computacional do problema em calcular a solução completa de equações lineares com coeficientes intervalares nas formas e aritméticas verificadas no capítulo anterior.

Salientamos que Moore, na primeira forma de escrita como solução para todas as equações lineares apresentadas, não pode ser aplicada, devido às restrições da aritmética, e por isso a aritmética só deve ser utilizada na solução dessa equação linear através da aplicação do espaço intervalar baseado na teoria das aproximações. Observando o resultado das soluções completas, Moore com TAI contém ordem de complexidade menor que CIA e RDM para o mesmo problema em questão.

É válido ratificar que as aritméticas CIA e RDM irão retornar resultados com um esforço computacional maior que a aritmética de Moore com TAI, devido às variáveis λ e α . A quantidade de valores para as variáveis deverá ser definida na implementação, onde quanto mais valores entre o intervalo $[0, 1]$ forem utilizados, mais esforço será necessário para os cálculos. Portanto, é fundamental que se tenha uma implementação eficaz dessas aritméticas intervalares, podendo utilizar-se de recursos como a programação paralela, por exemplo, na tentativa de diminuir o custo de processamento.

Portanto, definidas as aritméticas que retornam a solução completa, Moore com TAI, CIA ou RDM, e após as análises de complexidade, pode-se afirmar que o problema de calcular a solução completa para as equações lineares com coeficientes intervalares é um problema tratável e computável, visto que existem algoritmos razoáveis que resolvem o problema em um número finito de passos.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Quando se trabalha com computação numérica, um dos fatores de maior importância é a exatidão da resposta desses cálculos. O que sempre se procura são resultados cada vez mais exatos e com um menor erro possível contido neles. A matemática intervalar surge com o objetivo principal de realizar um controle automático de erros dos cálculos, retornando respostas com a maior exatidão possível.

Diante de diversos trabalhos na literatura relatando problemas e restrições com o uso da aritmética convencional de Moore em alguns problemas simples, como no caso da solução de equações lineares e com diversas aritméticas intervalares surgindo no intuito de suprir tais limitações, fica a pergunta: qual aritmética intervalar provê solução completa para equações lineares com coeficientes intervalares?

Na busca de uma resposta, foram estudadas diferentes aritméticas intervalares, a fim de entender suas diferenças em relação à aritmética de Moore. Além da definição de espaço de corpo dinâmico através do uso da teoria das aproximações intervalares. Posteriormente, destacou-se alguns trabalhos importantes na fundamentação do problema.

Desenvolvemos soluções genéricas para quatro equações lineares, sendo elas: $A + X = B$, $AX + B = C$, $AX + BX = C$ e $AX + B = CX + D$. Separamos cada equação linear em duas formas de escrita, uma sendo a original e a outra isolando o X da equação. Com cada forma de escrita foi demonstrado como solucioná-la nas aritméticas Moore com TAI, Markov, *Affine*, CIA e RDM. Assim, foi possível verificar se as duas formas de escrita chegavam na mesma solução em cada aritmética.

Como conclusão da análise da forma genérica, temos que para todas as equações lineares aplicadas em Moore com TAI, na sua segunda forma de escrita, CIA em ambas formas e RDM também nas duas escritas chegam a soluções completas.

Para complementar esse resultado, fizemos uma análise do esforço computacional de calcular cada forma de solução completa em cada aritmética intervalar, chegando como conclusão que as aritméticas intervalares CIA e RDM retornam a solução do problema em ordem linear de complexidade, já a aritmética de Moore com TAI possui ordem de complexidade constante. Além disso, para as aritméticas intervalares

analisadas, Moore com TAI, CIA e RDM, tem-se a solução do problema com esforço computacional aceitável, podendo dizer que o problema de calcular equações lineares com coeficientes intervalares é um problema tratável. Salienta-se que não focamos em uma análise de esforço computacional atrelada a um ambiente de programação ou linguagem de programação intervalar, visto que para algumas aritméticas não foram encontradas implementações e o desenvolvimento delas não era o foco desta tese.

Como conclusão, podemos afirmar que a aritmética de Moore apresenta algumas restrições que podem influenciar em resultados incompletos. Por isso, cada vez mais têm sido utilizadas aritméticas alternativas que, com os resultados apresentados por alguns trabalhos, retornam intervalos corretos, podendo tratar problemas mais complexos.

Na presente tese propomos investigar qual aritmética retornava uma solução completa para o problema de calcular equações lineares com coeficientes intervalares, após análises das soluções nas formas genéricas de resolução e de complexidade computacional verificamos que Moore com o uso da teoria das aproximações intervalares, nos casos onde retorna solução completa, sempre será a opção mais eficiente em termos de esforço computacional. Já CIA e RDM são as aritméticas indicadas para serem utilizadas nos casos onde Moore não se aplica, porém sabe-se que o esforço de computar um intervalo solução completo nessas aritméticas é sempre maior.

5.1 Trabalhos futuros

- Trabalhos recentes vem demonstrando restrições da aritmética de Moore em soluções de diversos tipos, como por exemplo, de equações cúbicas. Em vista da grande gama de equações, funções e operações mais complexas que possam ser resolvidas com aritmética intervalar, fica como trabalho futuro investigar o comportamento das diferentes aritméticas intervalares aplicadas nas soluções dessas equações, funções e operações complexas.
- Com o desenvolvimento da tese, foi possível verificar a diversidade de aritméticas intervalares e a falta de ferramentas computacionais para utilizá-las. Fica como sugestão realizar uma análise do que existe de pacotes e bibliotecas implementadas nas diferentes linguagens e o desenvolvimento daquelas que ainda não foram implementadas.
- Sugere-se também realizar uma análise da complexidade computacional de encontrar a solução completa para equações cúbicas.
- Para a aritmética *Affine* foram encontradas na literatura bibliotecas com implementação na linguagem C++. Não foi foco deste trabalho trabalhar com imple-

mentações das aritméticas, pois elas existem em diferentes linguagens. Porém, fica como trabalho futuro investigar o funcionamento das bibliotecas *Affine* e replicar as soluções descritas nesta tese.

REFERÊNCIAS

A. PIEGAT, M. L. Is the conventional interval-arithmetic correct? **Journal of Theoretical and Applied Computer Science**, Poland, v.6, n.2, p.27–44, 2012.

A. PIEGAT, M. L. Correctness checking of uncertain-equation solutions on example of the interval-modal method. **Modern Approaches in Fuzzy Sets, Intuitionistic Fuzzy Sets, Generalized Nets and Related Topics**, Poland, v.1, p.159–170, 2013.

ANDRZEJ PIEGAT, M. P. Computing with words with the use of inverse RDM models of membership functions. **International Journal of Applied Mathematics and Computer Science**, Poland, v.25, n.3, p.675–688, 2015.

CHALCO-CANO, Y.; LODWICK, W.; BEDE, B. Single level constraint interval arithmetic. **Fuzzy Sets and Systems**, Amsterdam, The Netherlands, The Netherlands, 2014.

CLAUDIO, D. M. **Interval Approximation Theory**. Porto Alegre: Universidade Federal do Rio Grando do Sul, 1994.

CLÁUDIO, D. M.; MARINS, J. M. **Cálculo Numérico Computacional: Teoria e Prática**. São Paulo: Atlas, 1989.

COMBA, J.; STOLFI, J. **Affine arithmetic and its applications to computer graphics**. [S.l.]: Anais do VII SIBGRAPI, 1993. 9-18p.

DENISS D.; KREINOVICH V.; RUMP, S. M. An overview of computation complexity intervals and the origins of calculus. **Reliable Computing**, [S.l.], v.4, p.191–197, 1998.

FERREIRA, R. V.; FERNANDES, B. J. T.; BEZERRA, E. S. R.; CAMPOS, M. A. Interval Computation with Java-XSC. **XXVIII CNMAC**, [S.l.], 2005.

FERSON, S.; GINZBURG, L.; KREINOVICH, V. Absolute bounds on the mean of sum, product, etc.: A probabilistic extension of interval arithmetic. In: SIAM WORKSHOP ON VALIDATED COMPUTING, 2002, Toronto. **Anais...** [S.l.: s.n.], 2002.

FIGUEIREDO, L. H. de; STOLFI, J. Affine arithmetic: concepts and applications. **Numerical Algorithms**, Netherlands, v.37, p.147–158, 2004.

HICKEY, T.; JU, Q.; EMDEN, M. H. V. Interval Arithmetic: From Principles to Implementation. **Journal of the ACM**, [S.l.], v.48, n.5, p.1038–1068, September 2001.

HUKUHARA, P. M. Integration des Applicaitons Mesurables dont la Valeur est un Compact Convexe. **Funkcial Ekvac**, Japão, v.10, p.205–229, 1967.

INTLAB - INTerval LABoratory. <http://www.ti3.tu-harburg.de/rump/intlab/>.

INTPY. <http://pypi.python.org/pypi/IntPy/0.1.3>.

KAUCHER, E. Algebraische Erweiterungen der Intervallrechnung unter Erhaltung der Ordnungs- und Verbandsstrukturen. **Grundlagen der Computer-Arithmetik**, Germany, p.65–79, 1977.

KAUCHER, E. Interval analysis in the extended interval space IR. **Fundamentals of Numerical Computation (Computer-Oriented Numerical Analysis)**, Vienna, p.33–49, 1980.

KLATTE, R. et al. **C-XSC. A C++ Class Library for Extended Scientific Computing**. [S.l.]: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1993.

KORZENOWSKI, H. **Estudo sobre resolução de equações de coeficientes intervalares**. 1994. Dissertação (Mestrado em Ciência da Computação) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Instituto de Informática. Curso de Pós-Graduação em Ciência da Computação.

KREINOVICH, V.; LAKEYEV, A.; ROHN, J.; KAHL, P. **Computational Complexity and Feasibility of Data Processing and Interval Computations**. United States: Dordrecht: Kluwer, 1998.

KULISCH, U.; MIRANKER, L. **Computer Arithmetic in Theory and Practice**. 1th.ed. New York: Academic Press, 1981.

LANDOWSKI, M. Differences between moore and rdm interval arithmetic. In: IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE INTELLIGENT SYSTEMS IS'2014, 7., 2014, Poland. **Anais...** [S.l.: s.n.], 2014. p.331–340.

LANDOWSKI, M. RDM interval method for solving quadratic interval equation. **Prze-glad Elektrotechniczny**, Poland, 2017.

LEAL, U. A. S. **Incerteza Intervalar em Otimização e Controle**. 2015. Tese (Doutorado em Ciência da Computação) — Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”.

LODWICK, W. A. Constrained interval arithmetic. **CCM Report**, United States, v.138, 1999.

LODWICK, W. A.; UNTIETD, E. A. A Comparison of Interval Analysis Using Constraint Interval Arithmetic and Fuzzy Interval Analysis Using Gradual Numbers. **Advances in Imaging and Electronic Physics**, United States, 2008.

MARKOV, S. Calculus for interval functions of a real variable. **Computing**, [S.l.], v.22, p.325–337, 1979.

MOORE, R. E. **Interval arithmetic and automatic error analysis in digital computation**. 1962. Tese (Doutorado em Ciência da Computação) — Stanford University.

MOORE, R. E. **Interval Analysis**. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1966. 159 p.

MOORE, R. E. **Methods and Applications of Interval Analysis**. 2.ed. Madison, Wisconsin: Studies in Applied and Numerical Mathematics (SIAM), 1979. 200 p.

MOORE, R.; KEARFOTT, M.; CLOUD, J. **Introduction to Interval Analysis**. Philadelphia: Studies in Applied and Numerical Mathematics (SIAM), 2009. 213 p.

NEUMAIER, A. **Interval Methods for Systems of Equations**. United Kingdom: Cambridge University Press, 1991.

OLIVEIRA, P.; DIVERIO, T.; CLAUDIO, D. **Fundamentos de Matemática Intervalar**. Porto Alegre, Brasil: Sagra-Luzzato, 1997. 93 p.

POPOVA, E. D. Extended interval arithmetic in IEEE floating-point environment. **Interval Computations**, France, v.4, p.100–129, 1994.

RATSCHEK, H.; ROKNE, J. **New Computer Methods for Global Optimization**. Chichester, United Kingdom: Limited, 1988. 229 p.

RUGGIERO, M. A. G.; LOPES, V. L. R. **Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais**. 2.ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 1996.

SANTIAGO, R. H. N.; BEDREGAL, B. R. C.; ACIÓLY, B. M. Formal Aspects of Correctness and Optimality of Interval Computations. **Formal Aspects of Computing**, [S.l.], v.18, p.231–243, 2006.

SEVASTJANOV, P.; DYMOVA, L. A new method for solving interval and fuzzy equations: Linear case. **Information Sciences**, Poland, v.179, p.925–937, 2009.

STEFANINI, L. A generalization of Hukuhara difference and division for interval and fuzzy arithmetic. **Fuzzy Sets and Systems**, Italy, v.161, p.1564 – 1584, 2010.

SUNAGA, T. Theory of an Interval Algebra and its Applications to Numerical Analysis. **Research Association of Applied Geometry (RAAG) Memoirs**, Toquio, Japão., v.2, p.29–46, 1958.

TOMASZEWSKA, K. A new approach to diabetic control – human glucose metabolism using interval arithmetic. **PhD Interdisciplinary Journal**, Poland, 2015.

TOSCANI, L.; VELOSO, P. **Complexidade de Algoritmos**: análise, projetos e métodos. [S.l.]: Sagra-Luzzato, 2001.

TRAN, A. V.; WANG, Y. Quantifying Model-Form Uncertainty in Molecular Dynamics Simulation. **The Minerals, Metals & Materials Society**, United States, p.283–292, 2016.

VACCARO, G. L. R. **Solução de Equações Intervalares**. 2001. Tese (Doutorado em Ciência da Computação) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul - UFRGS.

YALAA - Yet Another Library for Affine Arithmetic. <http://www.scg.inf.uni-due.de/fileadmin/Projekte/YalAA/index.html>.