

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 Análise de Agrupamentos

2.1.1. Conceito.

Quando se dispõe de uma série de indivíduos (variáveis) não previamente relacionados e se deseja encontrar uma maneira de descrever seus padrões de similaridade mútua, um dos métodos utilizados com esta finalidade é a “Análise de Agrupamentos”. Conforme Possoli (1984), Análise de Agrupamentos é definida como um conjunto de técnicas numéricas cujo propósito fundamental é classificar uma matriz de dados, não previamente agrupados, em grupos discretos de indivíduos similares. O objetivo é agrupar os indivíduos em um número de classes de tal forma que, dentro da classe, sejam similares em alguns aspectos e diferentes dos de outras classes. É formar grupos homogêneos dentro deles e heterogêneos entre eles.

Na análise de agrupamento, existe uma variável de agrupamento (dados), uma função de agrupamento e uma técnica ou método de agrupamento.

2.1.2 Função de Agrupamento

Um conceito fundamental na utilização das técnicas de agrupamento, segundo Bassab (1990), é a escolha de um critério que meça a distância entre dois objetos, ou seja, que quantifique o quanto eles são parecidos. Essa medida pode ser chamada coeficiente de parença. Os coeficientes de parença podem ser divididos em duas categorias:

- medida de similaridade – quanto menor o valor observado, mais parecidos são os objetos.
- medida de dissimilaridade – quanto maior o valor observado, mais parecidos são os objetos.

Entre outras formas, a medida de similaridade pode ser determinada, segundo Curi (1983), pelo coeficiente de correlação de Pearson.

A medida de dissimilaridade, segundo Wilks (1995), pode ser obtida pela idéia de distância quando se consideram os indivíduos como pontos. A mais utilizada é a distância euclidiana definida como

$$d_{ij} = \left[\sum_{p=1}^p (x_{ip} - x_{jp})^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (1)$$

A partir das distâncias euclidianas assim calculadas, obtém-se a matriz de similaridade ou de parença, derivada da matriz de dados.

2.1.3 Métodos de Agrupamentos

Existem vários métodos ou técnicas de agrupamento apresentadas por diversos autores como Everitt (1974), Curi (1983), Bouroche e Saporta (1982). Todos eles podem ser divididos em dois métodos de classificação:

- os métodos não-hierárquicos, que produzem diretamente uma partição em um número de classes fixado a “priori”.

- os métodos hierárquicos, que produzem seqüências de partições em classes cada vez mais vastas até que todos os indivíduos formem uma única classe.

Esta última técnica pode ser dividida em dois grupos:

Aglomerativa: nesta, cada indivíduo, inicialmente, está isolado, formando um grupo individual. Procuram-se os indivíduos mais próximos, que se unem, formando um novo grupo. Prossegue-se até que haja uma única classe incluindo todos os elementos.

Divisiva: parte de um único grupo formado por todos os indivíduos e, por divisões sucessivas, são formados dois, três, n grupos.

Dentre os vários métodos hierárquicos de agrupamentos encontrados na literatura, pode-se destacar o da ligação simples, o da ligação completa, o do centróide e o de Ward.

a) Método da ligação simples ou vizinho mais próximo

Neste método, os grupos, inicialmente constituídos por indivíduos isolados, se fundem de acordo com a menor medida de dissimilaridade (ou maior medida de similaridade) entre dois membros. Os grupos com menor (maior) medida se fundem primeiro. A distância entre dois grupos de objetos G_1 e G_2 será definida, no caso dessa medida ser dada pela distância euclidiana, por

$$d_{G_1, G_2} = \min[d_{ij}] \quad \text{onde: } i \in G_1 \text{ e } j \in G_2 \quad (2)$$

e no caso de similaridade, definida por s, por

$$S_{G_1, G_2} = \max[S_{ij}] \quad \text{onde: } i \in G_1 \text{ e } j \in G_2. \quad (3)$$

A ligação é feita pelos mais altos coeficientes de associação mútua. Para admissão de novos membros aos grupos, é suficiente encontrar quais os que representam os maiores coeficientes de associação com um dos elementos de um determinado grupo.

b) Método da ligação completa ou vizinho mais distante

Os grupos são formados fundindo, ao contrário da ligação simples, os membros mais distantes entre os grupos. No caso da parecença ser definida pela distância, esta será dada por

$$d_{G_1G_2} = \max[d_{ij}] \quad (4)$$

No caso de similaridade (s), em que os grupos são determinados pelos mais baixos coeficientes de associação mútua, por

$$S_{G_1G_2} = \min[S_{ij}] \quad \text{onde: } i \in G_1 \text{ e } j \in G_2 \quad (5)$$

c) Método da Centróide

Segundo Bassab, 1990, este processo é o mais direto, pois substitui cada fusão de grupos por um único ponto representado pelas coordenadas de seu centro. A distância entre os grupos é definida pela distância entre os centros. Em cada etapa, procura-se fundir grupos que tenham a menor distância entre si. A distância entre G_1 e G_2 será:

$$d_{G_1G_2} = \|\bar{x}_{G_1} - \bar{x}_{G_2}\| \quad (6)$$

d) Método de Ward

A perda de informações que resulta do agrupamento de indivíduos, em qualquer estágio de uma análise, pode ser medida, segundo Ward (1963), citado por Everit, 1974, pela soma total do quadrado dos desvios de cada ponto, da média do conglomerado ao qual ele pertence. Os dois grupos, cuja fusão resulte no mínimo incremento da inércia do conjunto, são combinados. O agrupamento é feito diretamente através da equação

$$W = \sum_{i=1}^n \left[x_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum x_i \right)^2 \right] \quad (7)$$

Existindo diversas técnicas para a análise de agrupamentos, a dúvida que surge é qual delas é a mais adequada. Não se encontram na literatura testes estatísticos válidos para avaliar os resultados obtidos em cada método. Por isso, a melhor atitude a

ser adotada pelo pesquisador é a de seguir o critério de ordem pragmática, que mostra que “o melhor método é aquele que fornece os resultados mais coerentes com a realidade em estudo”. É recomendada, portanto, a utilização de vários métodos, optando-se por aquele cujos resultados estejam mais coerentes com o fenômeno em estudo.

Todos os métodos hierárquicos aglomerativos de agrupamentos têm uma forma gráfica única para representar o resultado final: o dendrograma. É composto por linhas ligadas segundo os níveis de similaridade que agrupam pares de espécimes ou de variáveis. Como este gráfico é uma simplificação em duas dimensões de uma relação em n dimensão, é inevitável que algumas distorções apareçam. A medida de tal distorção pode ser obtida por um coeficiente de correlação entre os valores da matriz inicial de similaridade e daquela derivada do dendrograma.

Com relação ao número de grupos a ser adotado, embora haja métodos objetivos para sua determinação, como, por exemplo, a evolução da inércia em etapas sucessivas dos agrupamentos, muitos autores são favoráveis a adotar um critério subjetivo, através de um corte transversal no dendrograma. Vale, neste caso, o bom senso do pesquisador de acordo com os objetivos da pesquisa.

2.2 Séries Temporais

2.2.1 Considerações Gerais

As observações de grandezas ligadas a algum fenômeno estão relacionadas, muitas vezes, com o tempo. De um modo geral, denomina-se série temporal a um conjunto de observações ordenadas no tempo. Essas observações podem ser feitas de uma forma contínua, como é o caso da temperatura do ar registrada por um termógrafo,

ou de uma forma discreta, em intervalos de tempo igualmente espaçados ou não. A temperatura mínima diária e os totais mensais de precipitações em um local são exemplos.

Quando a série é contínua deve ser transformada em discreta através de amostragem em intervalos de tempo igualmente espaçados. Em alguns casos, o valor da série é obtido acumulando-se valores em intervalos de tempo iguais, como é o caso das precipitações mensais e, em outros, pela média das observações durante um intervalo de tempo, como, por exemplo, a média mensal das temperaturas mínimas diárias.

Entre os objetivos da análise de séries temporais, destaca-se a simples descrição do comportamento da série, a investigação do mecanismo gerador, a identificação de periodicidades embutidas nos dados e a projeções (previsões) de valores futuros.

A análise de séries temporais fundamenta-se no fato de que as observações apresentam alguma dependência entre elas, isto é, possuem algum padrão não aleatório. A identificação desse comportamento não aleatório é fundamental para a criação de modelos que possam descrever o comportamento dos dados e ser utilizado para predição quanto ao futuro (Stiverson, 1981 citado por Ferraz, 1999).

2.2.2 Componentes de uma Série Temporal

Uma série temporal X_t , $t = 1, 2, \dots, N$ pode ser considerada, geralmente, como uma soma de três componentes: uma tendência (T_t), uma sazonalidade (S_t) e uma aleatoriedade (a_t).

$$X_t = T_t + S_t + a_t, \quad t = 1, 2, \dots, N \quad (8)$$

a) Tendência

A componente tendência aparece quando os dados apresentam um crescimento (ou diminuição) ao longo do tempo. O caso mais simples é quando flutuam ao redor de uma reta com inclinação crescente (ou decrescente). A série com tendência contrapõe-se à série estacionária. Uma série é estacionária quando se desenvolve no tempo aleatoriamente ao redor de uma média constante, ou seja, quando as medidas estatísticas não são afetadas pela mudança do intervalo de tempo em que são calculadas. Portanto, as características probabilísticas de $X(t + \tau)$ são as mesmas de $X(t)$ para todo τ .

Segundo Morettin e Tolo (1981), a identificação da tendência, numa série, se faz importante por dois motivos: 1^o) para eliminá-la, pois muitos procedimentos de análise estatística de séries temporais pressupõem a estacionariedade dos dados para sua aplicação; 2^o) para a escolha adequada do modelo de previsão a ser adotado. Existem modelos apropriados para séries que apresentam tendência.

A estimativa e a eliminação da tendência podem ser feitas com a aplicação de várias metodologias. Apresentamos as três mais usadas.

1^o) A transformação mais simples consiste em se efetuarem diferenças sucessivas entre os elementos da série original até se obter uma série estacionária. Geralmente uma ou duas diferenças são suficientes para atingir esse objetivo. A primeira diferença da série $X(t)$ é definida como $\Delta X(t) = X(t) - X(t-1)$.

2^o) Outro procedimento para a eliminação da tendência consiste em ajustar aos valores observados uma função do tempo, como um polinômio, uma função exponencial, uma função logarítmica ou outra função suave de t . O caso mais geral é o de se ajustar um polinômio de grau m , da forma

$$T_t = \beta_0 + \beta_1 t + \dots, \beta_m t^m \quad (9)$$

onde $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_m$ são os parâmetros cujas estimativas podem ser obtidas pelo método dos mínimos quadrados.

Quando $m = 1$, ter-se-á um polinômio de primeiro grau, ou seja, tornar-se-á um caso simples de regressão linear, de modo que a equação (09) ficará

$$T_t = \beta_0 + \beta_1 t \quad (10)$$

3^o) A terceira técnica, não paramétrica, consiste em suavizar (filtrar) os valores da série ao redor de um ponto, para estimar a tendência naquele ponto. Utiliza-se um filtro linear (F), de tal forma que a série X_t é transformada em uma série X_t^* , dada por $X_t^* = F(X_t)$, $t = 1, 2, \dots, N$. O modelo (8), livre da componente sazonal S_t , transformado por F, torna-se

$$X_t^* = T_t^* + a_t^* \quad \text{onde} \quad \begin{cases} T_t^* = F(T_t) \\ a_t^* = F(a_t) \end{cases} \quad (11)$$

O objetivo é utilizar um filtro (F) tal que $T_t^* \cong T_t$ e $a_t^* \cong 0$, de modo que, após suavizarem-se as observações X_t , tenha-se $F(X_t) = X_t^* \cong T_t$. O filtro habitualmente utilizado, denominado “filtro de médias móveis”, apresenta a forma

$$X_t^* = \sum_{k=-n}^n b_k X_{t+k}, \quad t = n+1, \dots, N-n \quad (12)$$

Estão-se utilizando, com este procedimento, $2n+1$ observações ao redor do instante t para estimar a tendência neste instante. Entretanto, nesta operação, serão perdidas n observações no início e n no fim da série. O caso mais comum é quando se

faz $b_k = \frac{1}{2n+1}$, para todo o k , de modo que a equação (12) torna-se

$$X_t^* = \frac{1}{2n+1} \sum_{k=-n}^n X_{t+k}, \quad t = n+1, \dots, N-n \quad (13)$$

Estimada a tendência (\hat{T}_t), de uma série X_t , por qualquer método, obtém-se uma série ajustada para a tendência, ou livre de tendência, (X_t^*), dada por

$$X_t^* = X_t - \hat{T}_t \quad (14)$$

b) Sazonalidade.

A componente sazonal aparece quando há dados coletados intra-anuais, registrados, por exemplo, diariamente, semanalmente ou mensalmente, onde estão embutidas as variações decorrentes das estações do ano.

Quando uma série apresenta um único dado por ano, não aparece a sazonalidade, e o modelo (8) reduz-se a

$$X_t = T_t + a_t \quad (15)$$

c) Aleatoriedade

A componente aleatória ou residual é o que sobra quando são eliminadas a tendência e a sazonalidade. Geralmente corresponde a um “ruído branco”, ou seja um conjunto de valores com média zero e variância constante.

O modelo proposto conforme a equação (8) é um modelo aditivo e somente pode ser assim considerado quando a sazonalidade é independente da tendência. Quando isso não ocorre, há outros modelos mais adequados para o caso, como o modelo multiplicativo.

2.2.3 Modelos de Previsão

Uma das finalidades do estudo de séries temporais é a de se fazer previsões ou projeções de valores futuros.

Conhecendo-se os valores de uma série até o instante t , chamado origem das previsões, quer-se prever os valores até o instante $t + h$, $h \geq 1$, em função dos valores X_t . Denomina-se $\hat{X}(h)$ a previsão de $X(t + h)$, de origem t e horizonte h .

Existem muitos tipos de modelos ou equações de previsão. Alguns, mais simples, são constituídos por equações obtidas diretamente dos dados, ou seja,

constituem um procedimento puramente estatístico. Outros, mais sofisticados, estão atrelados, além dos dados, a alguma teoria correlacionada com o fenômeno em estudo. Estar-se-á interessado, neste trabalho, apenas no primeiro tipo.

A descrição de uma série temporal pode ser feita no domínio do tempo ou no domínio da frequência, caracterizando duas classes de modelos.

No domínio do tempo, os modelos são caracterizados por um número finito de parâmetros, estimados através das observações. Os modelos autoregressivos (AR), de médias móveis (MA), autoregressivos-médias móveis (ARMA) e autoregressivos-integrados-médias móveis (ARIMA) são exemplos.

No domínio da frequência, os modelos são não paramétricos, isto é, apresentam um número infinito de parâmetros. Na análise harmônica ou análise de Fourier, estão os fundamentos para esses modelos. Para Pereira, 1984, citado por Ferraz, 1999, a abordagem no domínio da frequência supõe que a série temporal possa ser considerada como uma soma ou superposição linear de ondas periódicas de senos e cossenos de diferentes períodos ou frequências. Portanto, um fenômeno físico qualquer, descrito, habitualmente, no domínio do tempo, pode ser descrito no domínio da frequência. A transformada de Fourier nos permite relacionar essas duas representações da mesma função.

Para melhores detalhes, consulte-se Morettin e Tolo (1981). Neste trabalho, focar-se-á a atenção para a Análise Harmônica e para o Modelo Espectral que se baseia na transformada discreta de Fourier. Será testado, também, um modelo de alisamento, o “Alisamento Exponencial Linear de Brown” (AELB). Apresentar-se-á, a seguir, resumidamente, a fundamentação teórica dessas metodologias.

2.2.4 Alisamento Exponencial Linear de Brown (AELB)

Os modelos de alisamento fazem parte de um grupo de métodos de previsão ditos “automáticos”. Segundo Morettin e Tolo (1981), “técnicas específicas desse tipo

assumem que os valores extremos da série representam a aleatoriedade e, assim, através do alisamento desses extremos, pode-se identificar o padrão básico”. Distingue-se o Alisamento Exponencial Simples (AES) e o Alisamento Exponencial Linear de Brown.

O modelo AES é apropriado para processos com média localmente constante. Este método pode ser descrito pela equação

$$\bar{X}_t = \alpha X_t + (1-\alpha)\bar{X}_{t-1} \quad , \quad \bar{X}_1 = X_1, \quad t = 1, 2, \dots, N \quad (16)$$

onde

\bar{X}_t é o valor exponencialmente alisado, e

α é a constante de alisamento que varia entre zero a um ($0 \leq \alpha \leq 1$).

Quando uma série apresenta tendência, o AES não é adequado, pois fornece previsões que subestimam ou superestimam constantemente os valores reais. Para evitar essas falhas, utiliza-se o método de “Alisamento Exponencial Linear de Brown”. Este método consiste em calcular um segundo valor exponencialmente alisado ($\bar{\bar{X}}_t$) pela equação

$$\bar{\bar{X}}_t = \alpha \bar{X}_t + (1-\alpha)\bar{\bar{X}}_{t-1} \quad , \quad \bar{\bar{X}}_1 = X_1 \quad (17)$$

onde

\bar{X}_t : alisamento exponencial simples dado por (15),

α : constante de alisamento.

Considerando-se uma série temporal livre da componente sazonal e que apresenta uma tendência linear dada por

$$X_t = b_1 + b_2 t + a_t \quad , \quad t = 1, 2, \dots, N, \quad (18)$$

a equação de previsão, quando se considera a origem da variável tempo, o instante correspondente à primeira observação, será dada por

$$\hat{X}_t(h) = \hat{b}_1 + \hat{b}_2 (t+h) \quad , \quad h > 0 \quad (19)$$

onde \hat{b}_1 e \hat{b}_2 são as estimativas dos parâmetros b_1 e b_2 .

Se se mudar a origem dos tempos para o instante da t -ésima observação, a equação de previsão será

$$\hat{X}_t(h) = \hat{b}_{1,t} + \hat{b}_{2,t} h, \quad (20)$$

onde as estimativas dos parâmetros são dadas por

$$\begin{aligned} \hat{b}_{1,t} &= 2\bar{X}_t - \bar{\bar{X}}_t \\ \hat{b}_{2,t} &= \frac{\alpha}{1-\alpha} (\bar{X}_t - \bar{\bar{X}}_t) \end{aligned} \quad (21)$$

A maior dificuldade na aplicação dos métodos de alisamento é a determinação da constante de alisamento α . Valores grandes de α implicam atribuir um peso maior para as observações próximas e, quando o valor atribuído é pequeno, pesos maiores são atribuídos aos valores mais distantes. Neste caso, as flutuações aleatórias dos valores próximos exercerão um peso menor no cálculo da previsão. Geralmente, a escolha da constante de alisamento α é feita por tentativas, de modo a minimizar a soma dos quadrados dos erros de ajustamento.

2.2.5 Análise Espectral

A Análise Harmônica, Análise de Fourier ou, ainda, Análise Espectral, é um processo útil para analisar dados em componentes harmônicos periódicos. Permite descrever, no domínio da frequência, uma série de dados ordenados no tempo. Para Morettin, 1979, ao examinar séries temporais, resultantes da observação de processos estocásticos, o objetivo básico da análise harmônica é o de aproximar uma função do tempo por combinações de harmônicos nos quais a série pode ser decomposta.

Em muitas situações, o período fundamental é conhecido. Isso ocorre com diversas variáveis meteorológicas que apresentam uma periodicidade anual devido às

estações do ano, mas podem apresentar outras periodicidades menores devidas a outros fatores. A temperatura média mensal do ar numa localidade é um exemplo.

Em outras situações, como é o caso da temperatura mínima média mensal, para um determinado mês do ano, como janeiro, medida durante vários anos, não há um período predeterminado para a repetição do fenômeno. Mesmo assim, é possível pensar que frequências estejam embutidas nesta série temporal. Tem-se, portanto, duas situações distintas:

1º) conhece-se o período e quer-se estimar a amplitude e a fase.

2º) quer-se estimar o período, a amplitude e a fase.

No primeiro caso, o procedimento é a Análise Harmônica Clássica que pode ser encontrada em diversos autores, como Kaplan (1972), Shumway (1988), Priestley (1981), Morettin (1979), Amaral (1988), Assis (1996). No segundo caso, no qual se situa o presente trabalho, uma ferramenta adequada é a Análise Espectral que se baseia na função de autocovariância e sua transformada de Fourier, o espectro.

2.2.6 Função de Autocovariância

Autocovariância de “lag” k , conforme Box, Jenkins e Reinsel (1994), pode ser definida como a covariância entre X_t e X_{t+k} , sendo k o número de intervalos de tempo defasados, ou seja

$$\gamma_k = C_{ov}(X_t, X_{t+k}) = E[(X_t - \mu)(X_{t+k} - \mu)] \quad (22)$$

Assim, a autocovariância entre dois pontos é o valor esperado do produto do desvio de cada ponto em relação à média do processo.

De maneira semelhante, a autocorrelação de “lag” k é definida como

$$\rho_k = \frac{E[(X_t - \mu)(X_{t+k} - \mu)]}{\sqrt{E[(X_t - \mu)^2]E[(X_{t+k} - \mu)^2]}} = \frac{E[(X_t - \mu)(X_{t+k} - \mu)]}{\sigma_x^2} \quad (23)$$

levando-se em conta que, para um processo estacionário, a variância $\sigma_x^2 = \gamma_0$ é a mesma no instante t e no instante $t+k$. Portanto, a autocorrelação de “lag” k , isto é, a correlação entre X_t e X_{t+k} é

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} \quad \text{o que implica em } \rho_0 = 1 . \quad (24)$$

Na prática, como não se conhecem os verdadeiros valores mas somente as amostras de observações, são necessárias estimativas.

As estimativas das autocovariâncias são dadas por

$$\hat{\gamma}_k = c_k = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-k} (x_t - \bar{x})(x_{t+k} - \bar{x}), \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (25)$$

e as estimativas das autocorrelações por

$$\hat{\rho}_k = r_k = \frac{c_k}{c_0} \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (26)$$

A função que associa cada valor de k com o respectivo valor de C_k , é denominado “função de autocovariância” do processo estocástico. Da mesma forma, a função que associa a cada valor de k , o respectivo coeficiente de autocorrelação (ρ_k), é chamada “função de autocorrelação” (f. a. c.) do processo.

2.2.7 Função periódica

Chama-se uma função $f(t)$ de periódica quando é definida para todo $t \in \mathbb{R}$, e tal que

$$f(t+T) = f(t) \quad (27)$$

onde T é um número positivo chamado período da função $f(t)$.

O número T é um dos períodos de $f(t)$. Às vezes existem vários números com esta propriedade, mas o menor número real positivo com esta característica é chamado período fundamental de $f(t)$, denominado simplesmente período.

As funções periódicas mais familiares são as funções trigonométricas como seno e cosseno, que são 2π -periódicas, pois

$$\text{Sen}(x + 2\pi) = \text{sen}(x) \quad \text{e} \quad \text{cos}(x + 2\pi) = \text{cos}(x) \quad (28)$$

Denomina-se harmônico a função $f(t)$ que pode ser expressa em função do seno ou cosseno, da forma

$$f(t) = A \cos \omega t \quad \text{ou} \quad f(t) = A \text{sen} \omega t \quad (29)$$

onde o coeficiente A é a amplitude e ω a frequência angular, dada em rad/s.

Pode-se expressar ω em função do período ($\omega = 2\pi/T$) ou da frequência ($\omega = 2\pi f$), onde f representa o número de ciclos por unidade de tempo.

Se se introduzir um parâmetro adicional Φ , chamado fase, que nos forneça o deslocamento da onda em relação à origem, a expressão de um harmônico passa a ser

$$f(t) = A \cos(\omega t + \Phi) \quad (30)$$

Fazendo o desenvolvimento do cosseno de uma soma de arcos, obtemos

$$f(t) = a \cos \omega t + b \text{sen} \omega t \quad (31)$$

onde $a = A \cos \Phi$ e $b = -A \text{sen} \Phi$

Uma série temporal $X(t)$ pode ser considerada uma superposição de harmônicos de diferentes frequências. Sua representação será feita pela expressão de uma série trigonométrica da forma

$$X(t) = \sum_{\omega} [a_{\omega} \cos \omega t + b_{\omega} \text{sen} \omega t] \quad (32)$$

onde \sum_{ω} pode representar uma soma finita, infinita ou até mesmo uma integral.

A Expressão (32) é denominada representação espectral de $X(t)$.

2.2.8 Série de Fourier e Coeficientes de Fourier

Seja $f(x) = f(x + 2\pi)$ uma função periódica integrável sobre o intervalo $[-\pi, \pi]$. A série trigonométrica

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x + \dots + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x + \dots$$

ou, compactamente

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)] , \quad (33)$$

é chamada **Série de Fourier**, onde a_n e b_n são os **coeficientes de Fourier**. O objetivo consiste em determinar a_n e b_n . Pode-se demonstrar (ver Kaplan, 1972) que estes podem ser determinados por

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (34)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad n = 1, 2, \dots \quad (35)$$

A partir da série de Fourier para funções 2π -periódicas, pode-se obter a série para funções com período genérico T . Para isso, substituí-se a variável x por $x = 2\pi t/T$ e obtém-se a função dependente da variável t , que será T -periódica e integrável no intervalo $[0, T]$. A série de Fourier desta função será

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t] \quad (36)$$

$$\text{com } \omega_n = \frac{2\pi}{T} n ,$$

Os coeficientes, definidos utilizando o critério da aproximação dos mínimos quadrados (Morettin, 1979), são dados pelas expressões

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos \omega_n t dt, \quad n \geq 0 \quad (37)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin \omega_n t dt, \quad n \geq 1 \quad (38)$$

2.2.9 Forma complexa da Serie de Fourier

Em muitas situações práticas, é conveniente escrever a série de Fourier na sua forma complexa. Isto pode ser feito utilizando a fórmula de Euler $e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$, que relaciona uma exponencial complexa com as funções trigonométricas seno e cosseno.

Seja $f(x)$ uma função real 2π -periódica. A forma complexa da série de Fourier de $f(x)$ é dada, segundo Kaplan, 1972, por:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{inx}, \quad (39)$$

onde o coeficiente de Fourier complexo é dado, para $n \in \mathbb{Z}$, por

$$C_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx. \quad (40)$$

Se uma função $f(t)$ possui período T , a forma complexa da série de Fourier será representada por

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i\omega_n t}, \quad \omega_n = \frac{2\pi n}{T} \quad (41)$$

e o coeficiente complexo de Fourier para $f(t)$, definido para $n \in \mathbb{Z}$, será

$$C_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-i\omega_n t} dt. \quad (42)$$

Observação: Muitos autores utilizam o símbolo (\sim) no lugar da igualdade ($=$) nas expressões da série de Fourier, pois nem sempre esta série determinada pelos

coeficientes calculados pelas expressões 37, 38 e 42, converge para $f(t)$. Se ela não convergir, não representa a função periódica. Figueiredo (1977), analisa as condições para que a série de Fourier seja igual à função $f(t)$.

2.2.10 Coeficientes Discretos de Fourier

Geralmente não se dispõe de uma expressão funcional de $f(t)$ e, além disso, não se conhecem seus valores em todos os pontos do intervalo $0 \leq t \leq T$ e, sim, para um conjunto discreto de pontos igualmente espaçados $t_0, t_1, t_2, \dots, t_{N-1}$. Desta forma, não é possível resolver as integrais dadas nas equações 37, 38 e 42, que definem os coeficientes de Fourier. Na prática, os coeficientes de Fourier são determinados aproximando a integral por sua soma de Riemann (ver Morettin, 1979), por

$$A_n^{(N)} = \frac{2}{N} \sum_{j=0}^{N-1} x(t_j) \cos\left(\frac{2\pi nj}{N}\right) \quad (43)$$

$$B_n^{(N)} = \frac{2}{N} \sum_{j=0}^{N-1} x(t_j) \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi nj}{N}\right) \quad (44)$$

$$\text{e} \quad C_n^{(N)} = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} x(t_j) e^{-\frac{in2\pi}{N}j} \quad (45)$$

onde $t_j = \frac{T}{N}j$, $j = 0, 1, 2, 3, \dots, N-1$

chamados “coeficientes discretos de Fourier” em função de seno e cosseno e na forma complexa.

Na realidade, para determinar todos os coeficientes discretos de Fourier, basta determiná-los para

$$n = 0, 1, 2, \dots, N/2 \quad \text{se } N \text{ é par}$$

$$n = 0, 1, 2, \dots, (N-1)/2 \quad \text{se } N \text{ é ímpar}$$

2.2.11 Transformada de Fourier e o Espectro

Dada uma função do tempo $f(t)$, não periódica, define-se a transformada de Fourier de $f(t)$, (ver Morettin, 1979 ou Figueiredo, 1977), como

$$C(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (46)$$

sendo sua inversa

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} C(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (47)$$

A equação (46) diz que, dada uma função do tempo $f(t)$, pode-se determinar uma nova função $C(\omega)$, expressa em função da variável freqüência ($\omega = 2\pi f$). A equação (47) diz que, dada esta nova, ou transformada, função $C(\omega)$, pode-se recuperar a função temporal original $f(t)$. A função $C(\omega)$ pode ser vista como uma versão transformada de $f(t)$ e é chamada **transformada de Fourier** de $f(t)$. A função do tempo $f(t)$ é referida, do mesmo modo, por **transformada inversa de Fourier** de $C(\omega)$. Juntas, elas constituem um par de transformadas de Fourier.

O espectro de um processo estocástico é definido como a transformada de Fourier da sua função de autocovariância $C(\alpha)$.

Se $C(\alpha)$ é absolutamente integrável, isto é $\int_{-\infty}^{\infty} |C(\alpha)| d\alpha < \infty$, então a função de densidade espectral, ou espectro, $f(\omega)$ pode ser representada como a transformada de Fourier

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} C(\alpha) e^{-i\omega\alpha} d\alpha, \quad -\infty < \alpha < \infty. \quad (48)$$

E, se $C(\alpha)$ é absolutamente somável, então

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} C(\alpha) e^{-i\omega\alpha}, \quad -\pi \leq \omega \leq \pi. \quad (49)$$

O espectro $f(\omega)$ definido por (48) é limitado, não negativo e uniformemente contínuo, correspondendo à transformada de Fourier da função de autocovariância.

Na realidade, esta definição de espectro é adequada quando se têm sinais determinísticos. Estes apresentam uma forma matemática definida e se aplicam a classes especiais de funções, como as funções absolutamente integráveis. Quando se têm processos aleatórios, no entanto, o limite pode não convergir para $f(\omega)$, e a função passa a não ter sentido. Vai-se analisar, a seguir, como obter estimadores do espectro para o processo estocástico estacionário a partir da transformada finita de Fourier.

2.2.12 Transformada Discreta de Fourier e o Periodograma

A transformada de Fourier para um conjunto finito de observações $X(t)$, $t = 1, 2, 3, \dots, N$, de um processo estocástico estacionário, na sua forma complexa, é definida por Morettin, 1979, como

$$d_{(\omega)}^{(N)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi N}} \sum_{t=1}^N X(t) e^{-i\omega t}, \quad -\infty < \omega < \infty. \quad (50)$$

Na prática, considera-se um número finito de frequências ω_j dado por

$$\omega_j = \frac{2\pi j}{N}, \quad -\left[\frac{N-1}{2}\right] \leq j \leq \left[\frac{N}{2}\right].$$

Portanto,

$$d_j^{(N)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi N}} \sum_{t=1}^N X(t) e^{-\frac{i2\pi jt}{N}}, \quad (51)$$

chamada “transformada discreta de Fourier”.

O periodograma ou espectro amostral é um dos estimadores do espectro $f(\omega)$ do processo estocástico estacionário. Os estimadores são baseados em observações do processo obtidas nos instantes $t = 1, 2, \dots, N$.

Um estimador para o espectro $f(\omega_j)$, segundo Morettin (1979), é

$$I_j^{(N)} = |d_j^{(N)}|^2 = \frac{1}{2\pi N} \left| \sum_{t=1}^N X(t) e^{-i\omega_j t} \right|^2 \quad (52)$$

para frequências $\omega_j = \frac{2\pi j}{N}$, $-\left[\frac{N-1}{2}\right] \leq j \leq \left[\frac{N}{2}\right]$.

Este estimador é chamado de periodograma, ou espectro amostral, dos valores $X(t)$, $t = 1, 2, \dots, N$.

Pode-se definir o periodograma para qualquer frequência $\omega \in [-\pi, \pi]$ mas, na prática, só pode ser calculada para um número finito de frequências dadas por $\omega_j = (2\pi j)/N$.

O periodograma pode, também, ser expresso em função do seno e cosseno, pela transformada discreta de Fourier, ou seja

$$I_n = \frac{N}{2} (A_n^2 + B_n^2) . \quad (53)$$

O periodograma, conforme Box, Jenkins e Reinsel, 1994, fornece a forma como as variâncias da série, constituídas por uma combinação de senos e cossenos, estão distribuída entre as várias frequências harmônicas distintas. Da mesma forma, o espectro mostra como as variâncias de um processo estocástico estão distribuídas entre os intervalos contínuos de frequências.

Pelo exposto, verifica-se que o periodograma é a transformada de Fourier da função de autocovariância amostral assim como o espectro é a transformada de Fourier da função de autocovariância teórica.

Além do periodograma, outros métodos para estimar o espectro são utilizados com os “Estimadores Espectrais Suavizados” (Morettin, 1979) e o “Método da Máxima Entropia” (Maximum Entropy Spectral Analysis: MESA), desenvolvido por Burg (1967), citado por Kane (1987).

2.3. Aplicações

Tanto a Análise de Agrupamento como a Análise Espectral são metodologias científicas com larga aplicação em pesquisas utilizadas nos mais diversos ramos do conhecimento.

A **Análise de Agrupamento**, em estudos climatológicos e geográficos, foi utilizada por Diniz (1994), para o estudo da radiação solar no Estado da Paraíba e (2002) para análise das temperaturas máximas e mínimas no Estado do Rio Grande do Sul, com dados obtidos em 40 estações meteorológicas no período de 1913 a 1998. Neste trabalho foram testados quatro métodos hierárquicos de agrupamento, tendo sido escolhido o da ligação completa por apresentar uma estrutura climatologicamente coerente à do Estado. A função de agrupamento utilizada foi a distância euclidiana simples. Foram adotadas quatro regiões homogêneas por parecerem representativas, visto que todas as regiões apresentaram um número satisfatório de estações meteorológicas em cada grupo.

Ainda com relação à temperatura, Kim et. al. (2000) determinaram nove regiões homogêneas no Estado do Paraná com relação às temperaturas máximas e mínimas diárias, utilizando dados de vinte e nove estações meteorológicas.

Com relação a precipitações, inúmeros trabalhos foram desenvolvidos, no Brasil e no Exterior, no sentido de determinar regiões homogêneas com relação ao regime de distribuição das chuvas em diversas localidades.

Souza et.al. (1992) utilizando dados de 60 estações, com um período mínimo de 14 anos e um máximo de 72 anos, analisaram o comportamento das precipitações pluviais médias e máximas no Estado de Alagoas. Silva et al. (1996) obtiveram cinco microrregiões de precipitação homogêneas, determinadas através da técnica da análise de agrupamento, no estado do Rio Grande do Norte. Utilizaram dados de 59 postos pluviométricos durante o período de 1910 a 1990. Na Região Nordeste Brasileira, Silva et al. (1996) determinaram quatro grupos com características homogêneas em relação às precipitações pluviométricas, utilizando dados totais mensais de 127 postos

meteorológicos espalhados nos sete estados daquela região brasileira. Braga et al. (1998), utilizando dados de 140 estações meteorológicas no Estado da Bahia, determinaram as regiões homogêneas, neste Estado, com relação às precipitações pluviométricas. A identificação destas regiões foi feita através da técnica hierárquica de agrupamento de Ward. Pode-se citar, ainda, o trabalho de Khan & Kin (1998) com dados de 13 estações nos estados do Rio Grande do Sul e Santa Catarina.

No exterior, Gadgil & Iengar (1980) utilizaram a mesma técnica para estudar a distribuição das chuvas registrada por 53 estações na Península Indiana; Varni et al. (1996), na Argentina, determinaram regiões homogêneas com dados pluviométricos mensais de 12 estações, no período de 1985 a 1994. A técnica utilizada foi a análise de componentes principais.

Na área de Meio Ambiente, Dorling et al. (1992) utilizaram a Análise de Agrupamento para preceder ao estudo da poluição do ar em Eskdalemuir, Escócia. Buscaram estabelecer a quantidade de aerossóis e a concentração iônica na precipitação pluvial. Yu & Chang (2001), utilizando séries temporais de dados poluentes do ar, O_3 e PM_{10} , no período de julho de 1993 a junho de 1998, procederam à divisão da bacia em termos da qualidade do ar em Taiwan. Fizeram uso de métodos estatísticos multivariados, de método rotacional Varimax e de análise de agrupamento.

Na medicina, Possoli (1984) valeu-se da Análise Multivariada para avaliar as condições de saúde pública dos municípios do Rio Grande do Sul. Os grupos homogêneos de municípios foram obtidos pela análise de uma série de variáveis indicadoras do nível de saúde de uma população.

Na área da Biologia, destaca-se o trabalho de Curi (1984), onde analisa os aminoácidos livres do tecido nervoso cerebral, num experimento com ratos recém-nascidos e jovens, submetidos a tratamentos experimentais. Fez uso da análise de agrupamento, com a ordenação das unidades por componentes principais e com a análise de variância multivariada, que serviu para indicar o nível de similaridade mais adequado para a definição dos agrupamentos.

Com relação à **Análise Harmônica**, diversos trabalhos de aplicação foram feitos, como o de Ribeiro (2003), que procedeu a Análise harmônica da radiação solar

global mensal na região de Pelotas, num período de 10 anos. Estabeleceu um modelo para a estimativa da radiação solar global mensal total de um ano médio. Neste modelo, foi incluída somente a onda anual (1 harmônica) por apresentar um percentual de representatividade da variação total dos dados de 98,74 %. Procedeu, também, à análise harmônica para um período de 30 anos, com dados estimados pela equação de Amgström-Prèscott.

Aos dados de precipitação, a Análise Harmônica tem sido aplicada por diversos autores com Amaral (1968), para estudo de dados mensais de precipitação em Pelotas-RS, de 1900 a 1951. Em seu modelo, o autor incluiu as ondas anual, semestral e quadrimestral. Baptista da Siva (1977) também o fez para dados de precipitação de Pelotas, de 1900 a 1951, porém para dados pentadais. Além dos harmônicos anual, semestral e quadrimestral, foi incluída, em seu modelo, a onda de 10,4 dias. Thiébaud (1976), em Viçosa-MG.; Pereira (1978), no município de Grajaú-MA; Feltrin (1980), no Município de Bandeirantes-PR e Santos (1984), no Município de Bananeiras-PB , fizeram, igualmente, trabalhos de aplicação da análise harmônica para dados de precipitação.

Ferraz (1999) apresentou um estudo detalhado sobre a aplicação de **modelos de séries temporais** na análise de dados mensais de precipitação pluviométrica, de janeiro de 1966 a dezembro de 1997, no município de Lavras-MG. Considerou o período de 1966 a 1996 para ajuste dos modelos e o ano de 1997 para verificação de previsão. Verificou, pela Análise Periodográfica, a existência de apenas uma periodicidade destacada na série, de ordem 12, correspondente a uma sazonalidade de 12 meses. Utilizou, para previsão, os modelos SARIMA, regressão e alisamento sazonal aditivo de Holt e Winters, concluindo que podem ser usados para prever precipitações pluviais no município de Lavras.

Já, para a **Análise Espectral**, encontra-se o trabalho de Nordemann (1998), no qual utilizou este método para analisar as séries das médias mensais e anuais dos valores do nível do rio Paraguai, em Ladário, Mato Grosso do Sul, de janeiro de 1900 até abril de 1995. Neste trabalho identificou, além da periodicidade anual devida ao

movimento de translação da Terra, mais nove ondas periódicas significativas, com períodos de 28,4; 14,6; 8,9; 7,8; 6,6; 4,8; 3,8; 2,8 e 2,3 anos, respectivamente.

Reis (1995) estudou as características dinâmicas dos sinais das forças horizontais na direção do movimento observadas nos pontos de engate de um trator. Utilizou a técnica da análise espectral para conhecer o espectro de frequência e identificar as frequências geradas pela relação solo-ferramenta, trator e implemento, na ruptura do solo à frente da ferramenta.

Baptista da Silva et al. (2001) estudaram o comportamento dos totais trimestrais das chuvas no Estado do Ceará, a partir de 20 estações meteorológicas, definindo, pela Análise de Agrupamentos, quatro regiões homogêneas quanto ao regime de chuvas. Precederam, igualmente, à Análise Espectral, estabelecendo modelos constituídos por duas ou três ondas senoidais, escolhidas, pela magnitude dos picos no periodograma, para os quatro grupos formados.

Morettin et. Al (1983) examinaram uma série de 131 anos dos totais anuais de chuvas em Fortaleza com o intuito de verificar a existência de periodicidades nessa série temporal. A análise espectral mostrou duas periodicidades destacadas, com períodos de 13,1 e 26,2 anos, respectivamente. A aplicação de testes estatísticos, como o de Fisher, mostrou serem significativas essas duas ondas, que foram incluídas no modelo proposto para descrição do regime de chuvas nesse local.

Kane (1987) analisou, também, as precipitações anuais de Fortaleza, no período de 1849 a 1976, detectando, pela Análise do Espectro de Potência através do Método da Máxima Entropia (Maximum Entropy Spectral Analysis: MESA), 16 periodicidades, tendo suas amplitudes obtidas pela Análise de Regressão Múltipla. Destas, 9 foram significativas ao nível de $2\sigma_{rk}$, 5 ao nível de $3\sigma_{rk}$ e somente duas periodicidades, de 12,9 e 25,1 anos, se mostraram como as mais significativas (significantes em um nível de $5\sigma_{rk}$). Formou, deste modo, quatro grupos. O primeiro, com as 16 ondas, explicou 61,9% da variância; o segundo, com 9 ondas, 52,6%; o terceiro, com 5 ondas, 40,1% e o quarto com as duas mais significativas, 25,6% da variância.

Kane & Teixeira (1990) valeram-se, igualmente, do Método da Máxima Entropia para estimar as ondas mais significativas no espectro da série das médias anuais de temperatura em superfície de massas de ar, continentais e marítimas, no hemisfério

norte e no hemisfério sul. Usaram Regressão Múltipla para estimar os coeficientes seno e cosseno de cada onda.