

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE PELOTAS  
INSTITUTO DE FÍSICA E MATEMÁTICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**



**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

**INVESTIGANDO O PENSAMENTO ALGÉBRICO À LUZ DA TEORIA  
DOS CAMPOS CONCEITUAIS**

**AIANA SILVEIRA BILHALVA**

**Pelotas, 2020.**

**AIANA SILVEIRA BILHALVA**

**INVESTIGANDO O PENSAMENTO ALGÉBRICO À LUZ DA TEORIA DOS  
CAMPOS CONCEITUAIS**

Dissertação de mestrado apresentada ao  
Programa de Pós-Graduação em Educação  
Matemática da Universidade Federal de Pelotas  
como requisito parcial à obtenção do título de  
Mestre em Educação Matemática.

Orientadora: Prof.<sup>a</sup>. Dra. Daniela Stevanin Hoffmann

Pelotas, 2020.

Universidade Federal de Pelotas / Sistema de Bibliotecas

Catálogo na Publicação

B595i Bilhalva, Aiana Silveira

Investigando o pensamento algébrico à luz da teoria dos campos conceituais / Aiana Silveira Bilhalva ; Daniela Stevanin Hoffmann, orientadora. — Pelotas, 2020.

108 f. : il.

Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Instituto de Física e Matemática, Universidade Federal de Pelotas, 2020.

Elaborada por Maria Inez Figueiredo Figs Machado CRB: 10/1612

**Banca Examinadora:**

Prof.<sup>a</sup>. Dra. Daniela Stevanin Hoffmann (PPGEMAT/IFM/UFPeI – Orientadora)

Prof. Dr. Antônio Mauricio Medeiros Alves (PPGEMAT/IFM/UFPeI)

Prof. Dr. Marcus Vinicius de Azevedo Basso (PPGEMAT/IME/UFRGS)

## **Agradecimentos**

Agradeço, primeiramente, a esta universidade (UFPel), que me acolhe desde 2013 durante o curso de Licenciatura em matemática, e também me acolheu em 2018 durante a pós-graduação. A todo o grupo de professores e colegas do Programa de pós-graduação em Educação Matemática – PPGEMAT, pessoas maravilhosas que tive o prazer de conhecer e muito aprender. Também, em especial, às minhas colegas: Caliandra Piovesan, Jaíne Quevedo e Letiane Fonseca, que sempre me apoiaram, me impulsionaram para frente, com palavras de conforto e carinho, estarão para sempre no meu coração.

A toda minha família, que é o alicerce de minha vida. Meus pais, sem eles nada disso seria possível, se privaram de tantas coisas para me dar a educação de qualidade que sempre sonharam. Agradeço todas as lições de vida, todos os ensinamentos, encorajamentos para ir atrás dos meus sonhos, é tudo por nós três, sempre. A minha prima e meu afilhado, que são tudo para mim, me dão animo e apoio sempre preciso e estão sempre nos meus pensamentos. Ao Renan Bandeira, que esteve comigo nesses dois anos, nunca deixando que eu desanimasse ou desistisse dos meus sonhos, sempre querendo meu crescimento. Ele que foi meu apoio emocional e incondicional.

As minhas amigas da adolescência e da faculdade, que são ouvidos quando desabo, são colo quando choro, são risada para me fazer rir. Dedico a vocês também, este trabalho, por todas as vezes que não pude estar presente fisicamente. Grata por todo o apoio e compreensão: Franciane, Gabriela, Thais, Marina, Mariana, Patrícia Casarin, Patrícia Umetsubo.

À minha orientadora Daniela Hoffmann. Confesso que é difícil resumir em um parágrafo tudo que aprendi com essa mulher maravilhosa, competente, dedicada e inspiradora. Aprendi com ela a reconhecer meus erros, ter mais calma e acreditar em mim. Agradeço não só as orientações, reuniões, e tudo que relacione com a pesquisa, mas também, por ter sido minha amiga, por ter sido minha tranquilidade, por apoiar minha ideia até o fim (não é que deu certo mesmo?!), por entender todos os contratempos e pelo amparo durante esses dois anos. A você minha eterna gratidão e eterno amor.

Por fim, agradeço aos meus alunos do município de Canguçu – RS, no ano de 2019, a vocês que foram minhas inspirações para as escritas, que foram meu afeto em momentos difíceis, aqueles que me surpreendiam a cada dia com algo novo, gratidão por todos os ensinamentos compartilhados. A vocês também dedico aqui este trabalho.

Para concluir, gostaria de pedir desculpas por omitir ou por não poder agradecer a todos como merecido. Muitas pessoas que contribuíram de forma direta ou indireta e me mostraram que a cada novo ciclo é possível percorrer de forma menos turbulenta, desde que tenhamos ao nosso lado familiares e amigos que possamos contar. Minha gratidão eterna ao universo por ter pessoas tão maravilhosas ao meu lado.

## RESUMO

BILHALVA, Aiana Silveira. **Investigando o pensamento algébrico à luz da teoria dos campos conceituais**. Orientadora: Daniela Stevanin Hoffmann. 2020. 108 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Física e Matemática, Universidade Federal de Pelotas, Pelotas, 2020.

Esta dissertação foi desenvolvida no âmbito do programa de Pós-Graduação em Educação Matemática (PPGEMAT) na Universidade Federal de Pelotas (UFPel). Buscou-se, nesta pesquisa de cunho qualitativo, investigar o pensamento algébrico à luz da Teoria dos Campos Conceituais (TCC). A pergunta que orientou a pesquisa foi: como ocorre a manifestação do pensamento algébrico na resolução de situações-problema que exploram relações e comparações entre padrões compondo parte do Campo Conceitual Algébrico (CCA)? A partir da delimitação de parte do CCA por um conjunto de situações que visava o estabelecimento de relações e comparações entre expressões numéricas e padrões geométricos, objetivava-se identificar as manifestações de invariantes operatórios e de representações do CCA nas resoluções do conjunto de situações exploradas por onze alunos do 8º ano do Ensino Fundamental da cidade de Canguçu/Rio Grande do Sul. Também buscou-se identificar se e como aconteceriam os processos de identificação e expressão de regularidades e invariâncias e de expressão de generalização nessas resoluções. Os alunos foram convidados a desenvolverem estratégias para resolver nove situações-problema de cunho exploratório investigativo. A partir da análise das representações das resoluções, foi possível identificar as resoluções representativas da turma. A discussão sobre as resoluções representativas esperadas e divergentes permitiu identificar os componentes dos esquemas utilizados pelos alunos. Assim, foi possível relacionar a terna da TCC (conjuntos de situações, invariantes e representações) com a manifestação do pensamento algébrico e o desenvolvimento da linguagem algébrica. A manifestação do pensamento algébrico dos alunos foi identificada a partir das representações nas soluções das atividades, nas quais foram encontrados invariantes operatórios. Analisando as resoluções das atividades, foi identificado que os alunos compreendem noções algébricas, porém, têm ainda dificuldades para representá-las em linguagem matemática formal. Apenas na última atividade, estudantes utilizaram a escrita algébrica como representação e apenas uma estava de acordo com a resposta esperada. Por fim, são apresentadas perspectivas de continuidade da pesquisa como, por exemplo, ampliar os conjuntos de situações para outras partes do CCA.

Palavras-chave: Pensamento Algébrico. Teoria dos Campos Conceituais. Ensino Fundamental. Campo Conceitual Algébrico.

## ABSTRACT

BILHALVA, Aiana Silveira. **Investigating algebraic thinking from the perspective of the Theory of Conceptual Fields**. Supervisor: Daniela Stevanin Hoffmann. 2020. 108 p. Master thesis in Mathematics Education – *Instituto de Física e Matemática, Universidade Federal de Pelotas, Pelotas*, 2020.

This master's thesis was developed within the scope of the *Programa de Pós Graduação em Educação Matemática* (PPGEMAT) at the *Universidade Federal de Pelotas* (UFPel). This qualitative research sought to investigate algebraic thinking from the perspective of the Theory of Conceptual Fields (TCF). The question that guided the research was: how does the manifestation of algebraic thinking occur in solving problem situations that explore relationships and comparisons between patterns delimiting part of the Algebraic Conceptual Field (ACF)? Based on the delimitation of part of the ACF by a set of situations that aimed at establishing relationships and comparisons between numerical expressions and geometric patterns, the objective was to identify the manifestations of operational invariants and representations of the ACF in the solutions of a set of situations explored by eleven students from the 8th year of elementary school in the city of *Canguçu/Rio Grande do Sul*. It also sought to identify whether and how the processes of identification and expression of regularities and invariance and the expression of generalization would happen in these solutions. The students were invited to develop strategies to solve nine exploratory investigative situations. It was possible to identify the representative solutions of the class through the analysis of the representations of the solutions. The discussion about the expected and divergent representative solutions allowed to identify the components of the schemes used by the students. Thus, it was possible to establish relationship between the TCF triplet (sets of situations, invariants and representations) with the manifestation of algebraic thinking and the development of algebraic language. The manifestation of students' algebraic thinking was identified from the representations in the solutions of the activities in which operative invariants were found. Analyzing the solutions of the activities, it was identified that the students understand algebraic notions, however, they still have difficulties to represent them in formal mathematical language. Only in the last activity, students used algebraic writing as a representation and only one solution was in accordance with the expected response. Finally, perspectives of continuity of the research are presented, such as expanding the sets of situations to other parts of the CCA.

Keywords: Algebraic Thinking. Theory of Conceptual Fields. Elementary School. Algebraic Conceptual Field.

Lista de Quadros

QUADRO 1: DISSERTAÇÕES E TESES..... 14

QUADRO 2: ARTIGOS DE EVENTOS..... 15

QUADRO 3: CONCEPÇÕES DE ÁLGEBRA ESCOLAR ..... 29

QUADRO 4: TEOREMAS-EM-AÇÃO E CONCEITOS RELACIONADOS NO CONTEXTO DO CAMPO CONCEITUAL ALGÉBRICO..... 35

QUADRO 5: RELAÇÃO ENTRE RESOLUÇÕES E INVARIANTES OPERATÓRIOS. .... 84

## Lista de Figuras

|                                                                                        |    |
|----------------------------------------------------------------------------------------|----|
| FIGURA 1: EXEMPLO DA ATIVIDADE QUE CONTÉM LEI DE FORMAÇÃO (KLÖPSCH, 2010, p. 159)..... | 36 |
| FIGURA 2: ATIVIDADE 1 .....                                                            | 41 |
| FIGURA 3: ATIVIDADE 2 .....                                                            | 42 |
| FIGURA 4: ATIVIDADE 3 .....                                                            | 43 |
| FIGURA 5: ATIVIDADE 4 .....                                                            | 44 |
| FIGURA 6: ATIVIDADE 5 .....                                                            | 45 |
| FIGURA 7: ATIVIDADE 6 .....                                                            | 46 |
| FIGURA 8: ATIVIDADE 7 .....                                                            | 47 |
| FIGURA 9: ATIVIDADE 8 .....                                                            | 48 |
| FIGURA 10: ATIVIDADE 9 .....                                                           | 50 |
| FIGURA 11: RESPOSTA ESPERADA E1 – 1.....                                               | 52 |
| FIGURA 12: RESPOSTA ESPERADA E1 - 2 .....                                              | 52 |
| FIGURA 13: RESPOSTA DIVERGENTE D1 – 1 .....                                            | 53 |
| FIGURA 14: RESPOSTA DIVERGENTE D1 - 2 .....                                            | 53 |
| FIGURA 15: RESPOSTA DIVERGENTE D1 - 3 .....                                            | 53 |
| FIGURA 16: RESPOSTA ESPERADA E2 - 1 .....                                              | 55 |
| FIGURA 17: RESPOSTA DIVERGENTE D2 - 1 .....                                            | 56 |
| FIGURA 18: RESPOSTA DIVERGENTE D2 - 2 .....                                            | 57 |
| FIGURA 19: RESPOSTA DIVERGENTE D2 - 3 .....                                            | 58 |
| FIGURA 20: RESPOSTA ESPERADA E3 - 1 .....                                              | 58 |
| FIGURA 21: RESPOSTA ESPERADA E4 - 1 .....                                              | 59 |
| FIGURA 22: RESPOSTA DIVERGENTE D4 - 1 .....                                            | 60 |
| FIGURA 23: RESPOSTA DIVERGENTE D4 - 2 .....                                            | 61 |
| FIGURA 24: RESPOSTA DIVERGENTE D4 - 3 .....                                            | 62 |
| FIGURA 25: RESPOSTA DIVERGENTE D4 – 4 .....                                            | 63 |
| FIGURA 26: RESPOSTA ESPERADA E5 – 1.....                                               | 64 |
| FIGURA 27: RESPOSTA DIVERGENTE D5 – 1 .....                                            | 65 |
| FIGURA 28: RESPOSTA DIVERGENTE D5 - 2 .....                                            | 66 |
| FIGURA 29: RESPOSTA ESPERADA E6 – 1.....                                               | 67 |
| FIGURA 30: RESPOSTA DIVERGENTE D6 – 1 .....                                            | 67 |
| FIGURA 31: RESPOSTA DIVERGENTE D6 – 2 .....                                            | 68 |
| FIGURA 32: RESPOSTA DIVERGENTE D6 - 3 .....                                            | 69 |
| FIGURA 33: RESPOSTA ESPERADA E7-1 .....                                                | 71 |
| FIGURA 34: RESPOSTA ESPERADA E7 - 2 .....                                              | 71 |
| FIGURA 35: RESPOSTA ESPERADA E7 - 3.....                                               | 72 |
| FIGURA 36: RESPOSTA DIVERGENTE D7 - 1 .....                                            | 73 |
| FIGURA 37: RESPOSTA ESPERADA E8 – 1.....                                               | 74 |
| FIGURA 38: RESPOSTA DIVERGENTE D8 - 1 .....                                            | 75 |
| FIGURA 39: RESPOSTA DIVERGENTE D8 - 2 .....                                            | 75 |
| FIGURA 40: RESPOSTA ESPERADA E9 - 1 .....                                              | 77 |
| FIGURA 41: RESPOSTA ESPERADA E9 - 2 .....                                              | 79 |
| FIGURA 42: RESPOSTA DIVERGENTE D9 - 1 .....                                            | 80 |
| FIGURA 43: RESPOSTA DIVERGENTE D9 - 2 .....                                            | 81 |

## **Lista de Abreviaturas e Siglas**

ANPEd – Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação

BDTD – Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações

CAPES – Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior

CCA – Campo Conceitual Algébrico

CIBEM – Congresso Ibero-Americano de Educação Matemática

EF – Ensino Fundamental

ENEM – Encontro Nacional de Educação Matemática

ENEM – Exame Nacional do Ensino Médio

LIFE – Laboratório Interdisciplinar na Formação de Educadores

PIBID – Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência

PPGECM – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática

PPGEMAT – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática

SAEB – Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica

SIPEM – Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática

SARESP – Sistema de Avaliação do Rendimento Escolar do Estado de São Paulo

TCC – Teoria dos Campos Conceituais

UFPel – Universidade Federal de Pelotas

## Sumário

|                                                            |           |
|------------------------------------------------------------|-----------|
| Introdução.....                                            | 7         |
| Capítulo 1: Como Tudo Começou... ..                        | 11        |
| Capítulo 2: Caminhos Percorridos Ao Longo Da Pesquisa..... | 14        |
| 2.1 Pesquisas sobre o assunto .....                        | 14        |
| Capítulo 3: Fundamentação Teórica.....                     | 19        |
| 3.1 Álgebra e Álgebra Escolar.....                         | 19        |
| 3.2 Pensamento Algébrico .....                             | 22        |
| 3.3 Concepções teóricas sobre Educação Algébrica .....     | 25        |
| 3.3.1 Escrita/linguagem algébrica .....                    | 25        |
| 3.3.3 Situações algébricas.....                            | 27        |
| 3.3.4 Estruturas algébricas .....                          | 28        |
| 3.3.5 Cultura Algébrica.....                               | 28        |
| 3.4 Teoria dos Campos Conceituais .....                    | 30        |
| Capítulo 4: Metodologia Da Pesquisa.....                   | 39        |
| Capítulo 5: Análise e Discussões .....                     | 51        |
| Capítulo 6: Considerações Finais .....                     | 88        |
| Referências.....                                           | 92        |
| <b>Apêndices.....</b>                                      | <b>96</b> |

## Introdução

A presente pesquisa, desenvolvida no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática (PPGEMAT) da Universidade Federal de Pelotas (UFPel), tem como base a investigação do pensamento algébrico à luz da Teoria dos Campos Conceituais (TCC). O principal foco é identificar como ocorre a manifestação do pensamento algébrico na resolução de situações-problema que exploram relações e comparações entre padrões compondo parte do Campo Conceitual Algébrico (CCA). A partir da exploração de parte do CCA, delimitado por um conjunto de situações que visa o estabelecimento de relações e comparações entre expressões numéricas e padrões geométricos (FIORENTINI *et al.*, 1993; 2005) pretende-se, nas resoluções das situações exploradas por alunos do 8º ano do Ensino Fundamental da cidade de Canguçu/Rio Grande do Sul, identificar as manifestações de invariantes operatórios e de representações do CCA.

Uma das preocupações da pesquisadora é com o processo de ensino-aprendizagem de Matemática, na maneira como os alunos compreendem questões algébricas e como desenvolvem o pensamento algébrico. Também, intriga esta pesquisadora por que alguns alunos compreendem melhor o conteúdo com um professor ou, até mesmo, com um colega, e com outros não, e como o professor pode auxiliar para que os estudantes tenham entendimento sobre as questões algébricas. Essas perguntas surgiram nos estágios curriculares supervisionados do Curso de Licenciatura em Matemática e com os primeiros alunos particulares de Ensino Fundamental. De modo geral, a maioria dos estudantes, cujas aprendizagens foram observadas enquanto professora, associava a Álgebra apenas com o uso de sua representação.

Existem diferentes concepções sobre a Álgebra escolar, porém não excludentes. Essas concepções são destacadas por vários autores que, mesmo utilizando nomenclaturas diferentes, acabam apresentando um entendimento comum de que a Álgebra da escola básica é relacionada com a compreensão das “letras”, o que significam e como operar com elas. Geralmente, o conceito de Álgebra é reduzido ao estudo de variáveis e incógnitas, ou seja, ao uso de letras (USISKIN, 1995; RIBEIRO E CURY, 2015; KAPUT, 1995; KIERAN, 2004).

Para alguns desses autores, a Álgebra não tem uma “definição única” que seja aceita por matemáticos e educadores matemáticos, pois os objetos da matemática acadêmica e

os da matemática escolar são distintos (DAVID e MOREIRA, 2013)<sup>1</sup>. A Álgebra escolar pode ser pensada como um conjunto de conteúdos e métodos culturalmente compartilhados, como frações, polinômios, fatoração, teoria dos anéis, álgebra linear, etc. Ou pode ser vista também, como formas de pensamento, tais como a generalização, a abstração e a justificação (RIBEIRO E CURY, 2015; KAPUT, 1995).

O pensamento algébrico, também é fonte de diferentes abordagens conceituais. Segundo Ponte, Branco e Matos (2009), o pensamento algébrico abarca a capacidade de compreender expressões algébricas, equações, inequações e funções e manipula-las, e a capacidade de relacionar diferentes estruturas matemáticas na interpretação e resolução de problemas matemáticos e de outras áreas. Fiorentini *et al.* (1993; 2005) e Lins e Gimenez (1997) dão ênfase ao pensamento algébrico, a fim de discutir a relação entre linguagem e pensamento e de defender a produção de significados, respectivamente. Esses autores propõem um trabalho de Educação Algébrica a partir da análise, exploração e resolução de situações-problema, no qual o desenvolvimento do “transformismo algébrico” (FIORENTINI *et al.*, 1993, pg. 90) ou o “domínio de técnicas manipulativas” (LINS e GIMENEZ, 1997, p. 152) é consequência e não ponto de partida.

Fiorentini *et al.* (1993;2005), em dois dos seus trabalhos, junto a diferentes colaboradores, relatou experiências com situações-problemas com as quais identificaram e exploraram alguns caracterizadores que, quando mobilizados durante atividades de cunho exploratório investigativo, poderiam desenvolver o pensamento algébrico. Para os autores, as investigações matemáticas diferenciam-se por serem situações-problema desafiadoras e abertas, que permitem ao aluno várias possibilidades para explorar e investigar.

Segundo Pais (2002, p.53), Gérard Vergnaud destaca a existência dos “espaços de situações-problema”, que proporcionariam ao aluno a identificação das conexões existentes entre os vários conceitos. Na diversificação desses problemas, ao aproximar-se das vivências escolares e cotidianas, são estruturadas condições para a aprendizagem a partir dos significados presentes. São, nestes momentos de investigação de situações-problema, que os alunos desenvolvem a capacidade de coordenar e adaptar novas aprendizagens frente a uma nova situação, além de utilizar conhecimentos anteriores.

Vergnaud é um psicólogo e educador matemático francês que propôs, com a TCC, uma contribuição às pesquisas cognitivistas, em especial, sobre a aprendizagem matemática (MAGINA, 2001). Para Vergnaud, as competências e concepções

---

<sup>1</sup> É, a partir dessa compreensão, que se optou pela expressão “Álgebra escolar” para designar o objeto de estudo.

desenvolvem-se a partir de experiências com um grande número de situações (novo domínio, novas relações, novos dados numéricos) dentro e fora da escola. Refere-se também a importância ao registro dessas atividades: os gestos e tomada de informações perceptivas, a linguagem e o diálogo, o raciocínio científico e técnico. Os registros fazem, com efeito, o objeto de competências. Em geral, quando se defronta com uma nova situação, o estudante usa o conhecimento desenvolvido em sua experiência de situações anteriores similares e tenta adaptá-lo, registrando-os como percebe ser adequado (VERGNAUD, 2003).

O autor define a ideia de Campo Conceitual como um conjunto de problemas ou situações, que é ao mesmo tempo um conjunto de conceitos. Cujas análises e tratamentos requerem vários tipos de conceitos, esquemas, procedimentos e representações simbólicas, no qual se encontram em conexão. Ou seja, o conjunto de conceitos que contribuem com o domínio de uma determinada situação (VERGNAUD, 2009).

Na presente dissertação, entrelaçando as ideias dos diferentes autores estudados, um dos caracterizadores do pensamento algébrico de Fiorentini *et al.* (2005) foi utilizado para delimitar o conjunto de situações do CCA exploradas, ou seja, para definir a classe de situações-problema (VERGNAUD, 2009). Assim, o caracterizador que explora o estabelecimento de relações e comparações entre expressões numéricas e padrões geométricos (FIORENTINI *et al.*, 1993; 2005) delimitou a parte do CCA investigada, ou seja, o conjunto de situações-problema investigada junto a alunos do 8º ano do Ensino Fundamental da cidade de Canguçu/RS.

A partir desta elaboração teórica, buscou-se responder à questão: como ocorre a manifestação do pensamento algébrico na resolução de situações-problema que exploram relações e comparações entre padrões compondo parte do Campo Conceitual Algébrico (CCA)? O objetivo geral da pesquisa foi definido como: identificar as manifestações de invariantes operatórios e de representações do CCA nessas resoluções – complementando a terna (conjunto de situações, conjunto de invariantes e conjunto de representações simbólicas), apresentada por Vergnaud (2009). O objetivo específico da pesquisa: identificar se e como acontecem os processos de identificação e expressão de regularidades e invariâncias e de expressão de generalização nas resoluções de alunos.

Na sequência, tem-se o memorial descritivo, ou seja, os caminhos percorridos pela autora até chegar a presente pesquisa.

O capítulo 2 trata de algumas pesquisas feitas em revistas, eventos e sites buscando relacionar com a presente pesquisa. Encontram-se autores que também pesquisam sobre

pensamento algébrico, sobre Teoria dos Campos Conceituais, e que apresentam algum tipo de ligação com o tema aqui trabalhado.

O capítulo 3 apresenta a fundamentação teórica da dissertação, dando continuidade às contribuições evidenciadas no capítulo anterior. São quatro subcapítulos que apresentam: uma breve discussão sobre Álgebra e Álgebra escolar; questões relativas ao pensamento algébrico a partir do ponto de vista de diferentes autores como Fiorentini *et al.* (1993), Fiorentini *et al.* (2005), Usiskin (1995), Lins e Gimenez (1997), Lee (2001, apud FIGUEREDO, 2007); diferentes concepções de Educação Algébrica; e, por último, a TCC de Gérard Vergnaud.

O capítulo 4 apresenta a metodologia da pesquisa. Após sua caracterização, é situado o contexto de seu desenvolvimento, os participantes, as atividades e o que se esperava nas resoluções das situações-problema.

No penúltimo capítulo são apresentadas as análises das resoluções de um conjunto de situações-problemas, por onze alunos do 8º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública de Canguçu/RS, distribuídas em nove atividades, que explorava o estabelecimento de relações e comparações entre expressões numéricas e padrões geométricos.

As considerações finais são os resultados e discussões da pesquisa, respondendo à pergunta norteadora: como ocorre a manifestação do pensamento algébrico na resolução de situações-problema que exploram relações e comparações entre padrões compondo parte do Campo Conceitual Algébrico (CCA). A análise das resoluções (representações dos alunos) possibilitou a identificação de resoluções representativas da turma. A discussão sobre esas resoluções representativas esperadas e divergentes permitiu identificar os componentes dos esquemas utilizados pelos alunos. Assim, foi possível relacionar a terna da TCC (conjuntos de situações, invariantes e representações) com a manifestação do pensamento algébrico e o desenvolvimento da linguagem algébrica. A manifestação do pensamento algébrico dos alunos foi identificada a partir das representações nas soluções das atividades, nas quais foram encontrados invariantes operatórios. Analisando as resoluções das atividades, concluiu-se que os alunos compreenderam diversas noções algébricas, porém, com dificuldades para representa-las em linguagem matemática formal. Por fim, são apresentadas perspectivas de continuidade desta pesquisa.

## Capítulo 1: Como Tudo Começou...

Este capítulo é composto pelo memorial descritivo, falando da trajetória da autora até chegar a presente pesquisa, sendo escrito na primeira pessoa do singular, por tratar de aspectos pessoais.

Desde os primeiros anos de vida, tive bons exemplos que me levaram à profissão de professora. Filha e sobrinha de professoras, minhas maiores motivações começaram em casa. Nunca fui obrigada a nada, sempre tive a opção de escolher minha profissão.

As primeiras motivações para me tornar professora, começaram aos três ou quatro anos de idade, quando aprendi a escrever meu nome, em uma porta velha com restos de giz, imitando um quadro negro. Foi meu avô quem me ensinou. Lembro vagamente de algumas cenas, ele sentado com vários bancos vazios em volta, como se fossem alunos, e eu, a professora.

Com quatro ou cinco anos de idade, acompanhava minha mãe nas aulas do curso de Licenciatura Plena em Geografia. Para mim, aquele momento era incrível. Nas aulas, as inspirações começaram, olhava para os professores e me imaginava no lugar deles. Foi a partir deste momento que, quando alguém fazia aquela famosa pergunta que se faz para as crianças “O que você vai ser quando crescer?”, que comecei a responder “Vou ser professora!”.

Tanto pedi, que nos primeiros anos de escola, ganhei um quadro negro do meu pai. Com ele, eu e meus primos brincávamos no pátio de casa: eu organizava as “classes”, repetindo o modelo que via na escola, pegava meu caderno e explicava o conteúdo para os meus “alunos”.

Na adolescência, a ideia de me tornar professora foi se perdendo. Mesmo sendo a colega que explicava o conteúdo para os outros, o ato de ensinar não me chamava mais atenção. Após concluir o Ensino Médio, fiz o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) com a ideia de cursar Engenharia Civil, mas não consegui. No ano seguinte, minha mãe deu a ideia de entrar para Licenciatura em Matemática, já que há disciplinas em comum com a Engenharia, então, poderia pedir reopção e trocar de curso após o primeiro semestre. Lembro até hoje das palavras usadas por ela para me convencer: “Tenta Matemática, tu sempre quiseste ser professora, vá que tu gostes e fiques. Mas se não gostar, podes trocar para Engenharia”. E ela tinha razão, eu gostei e fiquei.

No primeiro semestre, me deparei com um professor que demonstrava em sua fala um amor tão grande pela docência, que me fez enxergar o lado lindo de ensinar. No terceiro

semestre da faculdade, me inscrevi para a seleção do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência<sup>2</sup> (PIBID), na UFPel, na área de Matemática, gerenciado pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES). Fiz parte do subgrupo, Matemática nos Anos Iniciais, por dois anos. Neste projeto, tive a oportunidade de vivenciar situações reais de sala de aula.

Decidi fazer os dois estágios curriculares supervisionados juntos no último semestre da graduação, o Estágio I, referente ao Ensino Fundamental nas séries finais, e o Estágio II, referente ao Ensino Médio. Foram experiências bem diferentes, realidades diferentes, que me mostraram a grandeza da profissão. O professor precisa saber o conteúdo e, além disso, precisa saber como ensinar este conteúdo para diferentes tipos de alunos que aprendem de diferentes maneiras.

Durante a graduação, tive alguns alunos particulares e uma das coisas que me chamou muita atenção foi que, na maioria das vezes, a dificuldade desses alunos era a mesma: Álgebra – o que também pude perceber nos estágios. Quando havia algum exercício que necessitava utilizar o pensamento algébrico, os alunos simplesmente não resolviam ou manipulavam de forma equivocada os procedimentos. Pior ainda era quando se tratava de uma resolução de problema na qual o primeiro passo era escrever em linguagem algébrica.

Com essas percepções, comecei a me questionar: Por que existem tantas dificuldades quando o assunto é o uso de letras (incógnitas, variáveis, constantes,...)? Por que será que algumas pessoas têm facilidade em aprender determinados conteúdos e outras não? Como cada aluno compreende esses conceitos? E foram inúmeros os questionamentos que começaram a surgir.

Essas questões surgiram durante os dois últimos semestres da graduação, quando fazia parte, como bolsista, do projeto de extensão financiado pela CAPES denominado Laboratório Interdisciplinar na Formação de Educadores (LIFE). Neste projeto, são desenvolvidas oficinas voltadas para alunos e professores da região de Pelotas e disponibilizados publicamente vídeos com intuito de mostrar possibilidades de materiais para serem trabalhados com diferentes conteúdos. Nesta bolsa, minha orientadora me apresentou à teoria de Gérard Vergnaud, pois os trabalhos desenvolvidos no LIFE tinham como embasamento teórico a Teoria dos Campos Conceituais (TCC). Por isso, me aproximei da teoria e comecei a estudá-la.

---

<sup>2</sup> Programa do Governo Federal, o PIBID visa qualificar a formação acadêmica de estudantes de licenciatura, futuros professores, promovendo sua inserção em escolas públicas de educação básica, desde o início da sua formação.

Então, percebi que minha formação não poderia parar na graduação, que precisava continuar e tentar responder algumas das minhas dúvidas. Foi então que abriram os processos de seleção de mestrado dos Programas de Pós-Graduação de Ensino de Ciências e Matemática (PPGECM) e o de Educação Matemática (PPGEMAT). Fui selecionada para o mestrado no PPGEMAT, no qual desenvolvi a investigação do pensamento algébrico à luz da Teoria dos Campos Conceituais (TCC).

A partir da definição do tema central, foram feitas pesquisas relacionadas à produção acadêmico-científica recente. No Capítulo 2, a seguir, apresenta-se a busca e análise de artigos, dissertações e teses selecionadas para estudo, no intuito de encontrar contribuições para a presente dissertação em trabalhos que abrangessem a Teoria dos Campos Conceituais, a Álgebra e o Pensamento Algébrico.

## Capítulo 2: Caminhos Percorridos Ao Longo Da Pesquisa

Neste capítulo, são dialogadas com a presente pesquisa, as buscas por produções científico-acadêmico que pudessem auxiliar na investigação do pensamento algébrico à luz da TCC. Apresenta-se e analisa-se os artigos e dissertações estudados e suas contribuições para esta dissertação.

### 2.1 Pesquisas sobre o assunto

Primeiro, foram escolhidas as bases de dados e os respectivos sites<sup>3</sup> a pesquisar: Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD); Revista Bolema; Revista Zetetiké; Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação (ANPED); Congresso Iberoamericano de Educação Matemática (CIBEM); Anais do Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM) e do Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (SIPEM).

As buscas foram feitas a partir dos termos “pensamento algébrico”, “álgebra” e “Teoria dos Campos Conceituais”. Nas diferentes bases de dados, após a pesquisa pelos referidos termos, os trabalhos identificados foram selecionados a partir da análise do título, das palavras-chaves, do resumo e, posteriormente, dos sumários. As buscas foram feitas considerando o período entre 2010 e 2018.

Nas revistas, não houve resultado que relacionasse pelo menos dois dos termos simultaneamente. Na BDTD, foram selecionadas três dissertações (Quadro 1).

Quadro 1: Dissertações e Teses

| Título                                                                                                                                                                      | Autor (a)                 | IES                                | Ano  |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------|------------------------------------|------|
| Aspectos do pensamento algébrico e da linguagem manifestados por estudantes do 6º ano em um experimento de ensino                                                           | Edilaine Pereira da Silva | Universidade Estadual de Londrina  | 2013 |
| Campo conceitual algébrico: análise das noções a serem aprendidas e dificuldades correlatas encontradas pelos estudantes ao final do ensino fundamental (8ª série – 9º ano) | Cristiane Klöpsch         | Universidade Federal de Pernambuco | 2010 |
| Obstáculos à aprendizagem de conceitos algébricos no ensino fundamental: uma aproximação entre os Obstáculos Epistemológicos e a Teoria dos Campos Conceituais              | Luzia Maya Kikuchi        | Universidade de São Paulo          | 2012 |

Fonte: Autoria própria, 2019.

<sup>3</sup> Sites pesquisados: <http://bdtb.ibict.br/vufind/> ; <http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/index> ; <https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike> ; <http://www.anped.org.br/> ; <http://congressos.pucsp.br/index.php/CIBEM/ACESSO> ; <http://www.sbemrasil.org.br/sbemrasil/index.php/anais/enem> ; <http://www.sbemparana.com.br/viisipem/> .

O mesmo aconteceu nas buscas nos anais dos eventos citados anteriormente. Entretanto, nos Anais do XII ENEM (2016), encontrou-se um artigo sobre pensamento algébrico e generalização de padrões (Quadro 2) que, mesmo não relacionando os três termos pesquisados, contribuiu com a presente dissertação.

Quadro 2: Artigos de Eventos

| Evento   | Título                                                                          | Autor (es)                                                                                                                                   | Ano  |
|----------|---------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| XII ENEM | Caracterizadores do pensamento algébrico e generalização de padrões matemáticos | Grace Dórea Santos Banqueiro; Ana Teresa Ferreira dos Santos; Analiza da Silva Cazumbá; Gabriele Souza de Carvalho; Jadna Araújo de Oliveira | 2016 |

Fonte: Autoria própria, 2019.

No artigo, Banqueiro *et al.* (2016) apresenta uma pesquisa voltada a analisar os caracterizadores do pensamento algébrico presentes nas resoluções de atividades envolvendo padrões matemáticos de estudantes de um curso de licenciatura em matemática. As análises se embasaram nas ideias de Fiorentini *et al.* (2005), que utiliza as potencialidades pedagógicas das investigações matemáticas na mobilização e desenvolvimento do pensamento algébrico e de sua linguagem. Os autores constataram que os participantes evidenciaram muitos aspectos dos caracterizadores do pensamento algébrico ao resolverem questões envolvendo padrões.

O artigo de Banqueiro *et al.* (2016) foi usado como leitura de apoio devido à proximidade de assunto, visto que os autores utilizaram os caracterizadores de Fiorentini *et al.* (2005), mais precisamente, os que envolvem questões sobre padrões. Foi utilizado como exemplo um quadro-resumo (Banqueiro *et al.*, 2016, p. 5-6) sobre os caracterizadores do pensamento algébrico, as atividades utilizadas no artigo também foram utilizadas como exemplos para compor o conjunto de situações da presente pesquisa.

A dissertação de Silva (2013) tinha como objetivo identificar, analisar e discutir aspectos do pensamento algébrico manifestados por estudantes do 6º ano do Ensino Fundamental ao resolverem problemas em um experimento de ensino. O trabalho aborda aspectos do pensamento algébrico como evidências de habilidades do pensamento matemático, consideradas necessárias para o sucesso em álgebra ao resolverem problemas que envolvem conceitos algébricos.

A coleta de informações ocorreu no ano de 2012 em uma sala de aula de uma escola pública de Palotina/Paraná. Foram analisados três episódios de ensino e registros escritos de dois problemas à luz da Análise de Conteúdo de Bardin (2004). Silva (2013) identificou alguns aspectos de pensamento algébrico nos registros escritos dos estudantes, destacando: o desenvolvimento de uma linguagem sincopada para expressar-se matematicamente; a utilização de símbolos não convencionais e convencionais

relacionados a conceitos e propriedades; a compreensão dos conceitos envolvidos no problema; a utilização da proporção direta; a resolução de equações por meio de operações inversas; a análise e expressão de relações entre grandezas desconhecidas sem recorrerem a valores específicos, entre outros. Além disso, foram identificados três modos de pensar matemática apresentados pelos estudantes: i) um modo algébrico de pensar; ii) um modo de pensar limitado por crenças e rotinas; iii) um modo ingênuo de pensar.

Mesmo que a dissertação de Edilaine Pereira da Silva (2013) fale de estudantes do 6º ano, série que não foi investigada na presente pesquisa, pode-se aproximar as duas pelo fato de investigarem manifestações do pensamento algébrico na resolução dos alunos. Este trabalho contribuiu para a definição da base teórica da presente pesquisa, referenciando autores como Usiskin (1995), Fiorentini *et al.* (1993; 2005), Kieran (2004), entre outros. A partir dessas referências foi possível compreender e conhecer mais sobre a Álgebra escolar e suas diferentes concepções e sobre propostas de ensino de Álgebra.

Na dissertação de Kikuchi (2012), o objetivo foi investigar os obstáculos à aprendizagem de Álgebra no Ensino Fundamental com o intuito de compreender as dificuldades dos alunos. A autora utilizou a TCC de Gérard Vergnaud como suporte para investigar o ensino da Álgebra. Esta pesquisa tratou sobre os conhecimentos-em-ação, os teoremas-em-ação e as invariantes operatórias e suas influências no aprendizado de Álgebra, mostrando o funcionamento dos esquemas. Assim, a autora oferece alguns indicativos aos professores do que seria necessário para compreender as dificuldades e obstáculos que envolvem o aprendizado de Álgebra e conscientizá-los de que é relevante um acompanhamento aprofundado de seus alunos a longo prazo para realmente obter respostas sobre os obstáculos epistemológicos e os aspectos psicológicos envolvidos na aprendizagem, como definidos por Vergnaud (1994). Kikuchi (2012) conclui dizendo que estudantes necessitam enfrentar as dificuldades encontradas em situações novas para aproximar-se de situações já vivenciadas, obtendo compreensão sobre o assunto novo a partir de suas experiências. Quando Kikuchi (2012) fala sobre dificuldades e obstáculos enfrentados pelos alunos, que servem de subsídio para que o professor possa auxiliá-los, a autora aproxima-se da TCC.

Destaca-se a dissertação de mestrado encontrada: “Campo Conceitual Algébrico: Análise das noções a serem aprendidas e dificuldades correlatas encontradas pelos estudantes ao final do ensino fundamental (8ª série – 9º ano)”, apresentada por Cristiane Klöpsch ao Programa de Pós-Graduação em Psicologia Cognitiva da Universidade Federal de Pernambuco, em Recife, 2010. Nessa pesquisa, a partir dos resultados analisados sobre o Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB), foi identificado o baixo nível de

rendimento dos estudantes brasileiros, principalmente, em conteúdos relacionados com habilidades algébricas. Baseando-se nesses resultados, a autora fez sua pesquisa especialmente voltada para as dificuldades dos alunos.

Baseando-se na TCC, a pesquisa de Klöpsch (2010) tinha como principal objetivo aprofundar a análise dos elementos algébricos a serem aprendidos e das dificuldades apresentadas pelos alunos. Para isso, a autora utilizou de um instrumento de avaliação sistematizado com base em reflexão *a priori* acerca dos elementos que constituem o CCA. Esse instrumento de avaliação era composto por atividades matemáticas algébricas consideradas representativas de competências e habilidades cognitivas deste Campo. Os resultados da pesquisa indicaram que as maiores dificuldades dos estudantes estão relacionadas aos conceitos e situações abordados no 8º ano do Ensino Fundamental, em especial, naquelas que envolvem padrões aritméticos, fatoração e inequações.

Klöpsch (2010) ampliou e separou em seis grupos (KLÖPSCH, 2010, p. 67-68) os elementos do CCA baseados na sistematização do CCA proposto por Da Rocha Falcão (2008, p.11). São esses seis grupos os seguintes: Incógnita, variável (dependente e independente) e argumento; Expressão algébrica (polinômio), equação e inequação; Grau de um polinômio, de uma equação; Termos algébricos (significado, diferença do sistema posicional, semelhança entre termos, operações); Fatoração Algébrica (operações com termos algébricos, propriedades da multiplicação, fatoração aritmética,...); Produtos Notáveis (propriedades da multiplicação e das potências, operações com números reais,...). Essa composição do CCA feita pela autora é um dos principais apoios teóricos, tendo em vista que há poucas pesquisas sobre o Campo Conceitual Algébrico.

Klöpsch (2010) argumentou que o CCA é composto por vários elementos da Álgebra escolar, tomando os Parâmetros Curriculares Nacionais como referência, e que, cada conceito da Álgebra necessita de diferentes esquemas dos alunos em suas resoluções. A autora separou os conteúdos algébricos escolares em seis grupos e tomou esses grupos como definidores das questões que compuseram o CCA da sua pesquisa. Klöpsch (2010) analisa as respostas dos participantes quantitativamente, com pouca atenção aos detalhes apresentados nas resoluções dos alunos.

A dissertação de Klöpsch (2010) contribuiu para o entendimento da complexidade do CCA e do desafio que é defini-lo para pesquisa-lo. A própria autora relata ter consciência de não conseguir abarcar todo o CCA: “Não tivemos a pretensão de construir um instrumento que desse conta de todas as situações e representações de forma que fosse possível avaliar em sua complexidade o CCA” (KLÖPSCH, 2010, p. 87).

As produções acadêmicas estudadas apontaram os mais frequentes problemas relacionados a Álgebra escolar: uso excessivo de regras e procedimentos sem compreensão do que está sendo feito; utilização da linguagem algébrica sem significado; e ausência de desenvolvimento do pensamento algébrico. Este estudo foi muito importante para entender um pouco da produção acadêmico-científica recente sobre a Álgebra escolar por pesquisadores e professores que têm como uma preocupação comum: o uso excessivo de regras e a ênfase no transformismo algébrico pela manipulação em si.

Conclui-se que há poucas produções que relacionem pensamento algébrico e TCC. Compreende-se que explorar o CCA não é tarefa fácil, assim como em Da Rocha Falcão (2008) e Klöpsch (2010), na medida em que ele é definido de forma a abranger tantos conceitos e explorar as relações entre eles.

No Capítulo 3, é apresentada a fundamentação teórica da presente dissertação. Está estruturado em subcapítulos, de modo a discutir brevemente sobre Álgebra e Álgebra escolar; pensamento algébrico; Educação Algébrica; e TCC.

### Capítulo 3: Fundamentação Teórica

Este capítulo apresenta a fundamentação teórica da dissertação, dando continuidade às contribuições evidenciadas no capítulo anterior. São quatro subcapítulos que apresentam: uma breve discussão sobre Álgebra e Álgebra escolar; questões relativas ao pensamento algébrico a partir do ponto de vista de diferentes autores como Fiorentini *et al.* (1993), Fiorentini *et al.* (2005), Usiskin (1995), Lins e Gimenez (1997), Lee (2001, apud FIGUEREDO, 2007); diferentes concepções de Educação Algébrica; e, por último, a TCC de Gérard Vergnaud.

#### 3.1 Álgebra e Álgebra Escolar

Fiorentini *et al.* (1993) afirma que as concepções mais frequentes da Álgebra, baseadas no seu desenvolvimento histórico, estão relacionadas com as concepções dominantes de Educação Algébrica da Educação Matemática elementar. Comparando as concepções de Educação Algébrica dominantes, o autor defende a tese de que o ponto comum entre elas é a redução do pensamento algébrico à linguagem algébrica.

Para Lins e Gimenez (1997), a Álgebra escolar deve ser inserida nos currículos desde as séries iniciais. Os autores apontam que conteúdos aritméticos devem abordar alguns conceitos como generalização, variação e padrões que sejam novamente explorados nos conteúdos algébricos. Essa inserção das ideias algébricas junto aos conceitos aritméticos pode proporcionar significado para esses conteúdos em sua formalização. Os autores indicam que, atualmente, os ensinamentos da Aritmética e da Álgebra são vistos, na Educação Básica, como coisas completamente distintas, como se fosse concluído o conteúdo aritmético, para depois começar o algébrico.

Esse pode ser um dos fatores que confunde os alunos, quando tentam tratar de conceitos algébricos com as mesmas regras já conhecidas da Aritmética. Por exemplo, quando os alunos encontram uma expressão do tipo  $x+2$ , tendem a somar os elementos, juntando todos, como na aritmética (encontrando  $3x$ ), como se fosse possível somar um número com parte literal a outro sem, afinal, para eles o sinal de igualdade implica em um resultado (alguns, chegam a “sumir” com o símbolo  $x$ , pois, ele não tem significado para esses alunos).

Para Lins e Gimenez (1997), a Álgebra pode ser vista como a generalização da Aritmética, considerando o foco como a obtenção de relações e a expressão da

generalização dos processos, mas não apenas desse modo. Enquanto a Aritmética encontra soluções concretas, respostas numéricas para problemas específicos, a Álgebra trabalha com soluções genéricas e expressões que podem ser aplicáveis a mais de um problema, por exemplo. Pode estar, neste distanciamento entre Aritmética e Álgebra, a dificuldade de alguns alunos em compreender que a Álgebra é composta por outros processos (generalização, variação, estruturação, modelagem) para além da representação literal. Os conteúdos aritméticos e algébricos acabam sendo trabalhados separadamente, como se um não dependesse do outro, e pelo contrário, se complementam.

Quando se faz uma ruptura entre a abordagem da Aritmética e a Álgebra o estudante não consegue perceber essa relação e encara como se fosse uma nova Matemática, a Matemática das letras com novas regras, fórmulas e aplicações; e isso impede que ele consiga fazer a associação entre as duas, trazer os conceitos já absorvidos na Aritmética e aplica-los na Álgebra de forma mais natural (OLIVEIRA; LAUDARES, 2015, p.4).

Zalman Usiskin dedicou-se a estudar a Educação Algébrica. A princípio, o autor preocupou-se com as concepções de Educação Algébrica na área do conhecimento matemático, de modo a analisar o que cada concepção implica. Ele percebeu que, quando um aluno tem contato com as “letras”, diz-se que está estudando Álgebra. Mas, como o próprio conceito de variável é multifacetado, não podemos reduzir a Álgebra apenas ao uso dessas “letras” (USISKIN, 1995).

Reconhecemos equações, identidades, propriedades, fórmulas e funções conforme os papéis atribuídos às letras. O autor apresenta cinco igualdades com a mesma estrutura (produto de dois números é igual a um terceiro), porém com letras em papéis diferentes, destacando-os: incógnita, argumento, generalização, representações e funções. Segundo o autor, “as finalidades da álgebra são determinadas por, ou relacionam-se com concepções diferentes da álgebra que correspondem à diferente importância relativa dada aos diversos usos das variáveis” (USISKIN, 1995).

Vários autores ainda concordam que, nos livros-textos de Álgebra escolar, é excessivo o uso do aspecto transformacional, dando maior ênfase para as regras de manipulação das letras e menos importância para as noções conceituais (USISKIN, 1995; RIBEIRO E CURY, 2015; KAPUT, 1995; KIERAN, 2004; PONTE, BRANCO, MATOS, 2009). Segundo esses autores, não podemos reduzir a Álgebra escolar ao uso de “letras”, como é feito na maioria das vezes. É importante também que o aluno tenha a capacidade de perceber e fazer uso correto de regularidades, padrões, variações, etc.

Para Fiorentini *et al.* (2005), a Álgebra escolar vem enfatizando as habilidades de manipulação das expressões, priorizando o domínio da linguagem algébrica. Dessa forma, o ensino de Álgebra fica reduzido à parte literal, de transformismo algébrico (manipulação), enfatizando a linguagem algébrica ao invés de buscar desenvolver o pensamento algébrico e seu processo de significação. Segundo o autor, é preciso superar a visão de que a Álgebra seria apenas um instrumento para a resolução de problemas, que facilita a comunicação matemática, e considerá-la, também, uma forma específica de pensamento e de leitura do mundo.

Fiorentini *et al.* (1993; 2005), trabalhou com três concepções sobre educação algébrica. A primeira, chamou de linguístico-pragmática<sup>4</sup>, a segunda concepção, de fundamentalista-estrutural<sup>5</sup>, e a terceira concepção, de fundamentalista-analógica. Esta última, uma síntese das duas anteriores, tentou recuperar o valor instrumental da Álgebra e preservar a preocupação fundamentalista, através do uso de modelos analógicos geométricos (blocos de madeira ou figuras geométricas) ou físicos (como a balança) que contribuiriam para a visualização e justificativa das passagens do transformismo algébrico e não com base nas propriedades estruturais. O problema em comum entre as três concepções, segundo os autores, é que reduzem o ensino da Álgebra aos seus aspectos linguísticos e transformistas, enfatizando mais a linguagem algébrica do que o pensamento algébrico e seu processo de significação.

Fiorentini *et al.* (1993), visando desenvolver uma natureza interdependente da linguagem e do pensamento matemático, propõem uma quarta concepção de educação algébrica. Nessa concepção, o ensino da Álgebra teria início nos anos iniciais do Ensino Fundamental com a exploração de situações-problemas “relativamente abertas ou problematização de fatos tidos como aritméticos ou geométricos que demandem a construção de generalizações, a representação de número generalizado ou de grandezas incógnitas e variáveis” (FIORENTINI *et al.*, 2005, p.6-7). A segunda etapa dessa concepção seria fazer o percurso inverso, iniciando por uma expressão algébrica, tida como pura ou simbólica, tentando atribuir sentidos ou significações a ela. Seria apenas depois dessa etapa que o transformismo algébrico ganharia destaque na prática pedagógica. Esta seria a terceira e última etapa, na qual a atenção recai sobre o modo como as expressões

---

<sup>4</sup> Esta concepção entendia que o papel do ensino da Álgebra era fornecer um instrumento técnico, para resolução de equações ou de problemas. Enfatizando o transformismo algébrico.

<sup>5</sup> Esta concepção entendia que o papel do ensino da Álgebra era fornecer os fundamentos lógico-matemáticos para toda a matemática escolar. Através da Teoria dos Conjuntos, das estruturas e das propriedades (comutatividade, elemento neutro, ...), assim o emprego das estruturas servia para justificar logicamente a passagem presente no transformismo algébrico.

algébricas podem ser transformadas em expressões equivalentes e sobre procedimentos que validam tais transformações. Não existe a necessidade dessas etapas acontecerem nesta ordem linear. Por exemplo, na exploração de padrões de sequências geométricas ou numéricas, as generalizações construídas pelos alunos podem, muitas vezes, envolver processos de transformação de expressões algébricas (FIORENTINI *et al.*, 2005).

Em Fiorentini *et al.* (2005), temos a identificação de caracterizadores do pensamento algébrico como características a serem exploradas por atividades algébricas que propiciem o desenvolvimento deste pensamento pelo aluno. Para cada caracterizador deste pensamento, podem ser propostas diferentes situações a partir das quais poderão ser desenvolvidos conceitos algébricos.

Nesta pesquisa, os alunos foram convidados a explorar um conjunto de situações que possibilitava estabelecer relações e comparações entre expressões numéricas ou padrões geométricos. Para isso, registraram seu pensamento de forma escrita e foram convidados a conversar e explicar algumas respostas. Esperava-se que, nas resoluções escritas das atividades, ocorresse a manifestação do pensamento algébrico – o que ocorreu, conforme mostram os dados.

### **3.2 Pensamento Algébrico**

Há dúvidas sobre a definição do que seja pensar algebricamente, como pode-se perceber nas produções de diferentes autores que trazem concepções distintas, mas não excludentes, sobre o assunto. O pensamento algébrico não exclui o uso das representações simbólicas, tão pouco as substitui, pelo contrário, dá significado para objetos da Álgebra, para relações existentes, etc.

Fiorentini *et al.* (1993) faz referência ao pensamento algébrico, mas relata que não existe uma única forma de se abordar este pensamento. A partir de exemplos, em que o pensamento algébrico se manifesta, apontam alguns elementos que podem ser vistos como caracterizadores desse pensamento, como identificação de regularidades e de variações, tentativas de expressão da estrutura de uma situação-problema e o desenvolvimento do processo de generalização (FIORENTINI *et al.*, 1993, p.87).

Ponte, Branco e Matos (2009) também defendem que a ideia de pensar algebricamente deve ser trabalhada mutuamente com o simbolismo algébrico, sem pré-requisitos. Os autores afirmam:

Aprender Álgebra implica ser capaz de pensar algebricamente numa diversidade de situações, envolvendo relações, regularidades, variação e

modelação. Resumir a actividade algébrica à manipulação simbólica, equivale a reduzir a riqueza da Álgebra a apenas uma das suas facetas (PONTE, BRANCO, MATOS, 2009, p. 10).

Cyrino e Oliveira (2011) apresentam o pensamento algébrico como a maneira de dar significado para os objetos da Álgebra, às relações existentes entre eles, à modelação, e à resolução de problemas no contexto da generalização destes objetos (CYRINO; OLIVEIRA, 2011).

Os autores Lins e Gimenez (1997) entendem a álgebra como “um conjunto de afirmações, para as quais é possível produzir significado em termos de números e operações aritméticas, possivelmente, envolvendo igualdade ou desigualdade” (p. 150) e o pensamento algébrico como um dos “distintos modos de produzir significado para a álgebra” (p. 151). Eles reafirmam: “pensar algebricamente [...] é produzir significado para situações em termos de números e operações aritméticas (e igualdades ou desigualdades), e com base nisso transformar as expressões obtidas operando sempre de acordo com (1), (2) e (3)” (p. 151). Sendo (1), (2) e (3), as características fundamentais do pensamento algébrico:

(1) produzir significados apenas em relação a números e operações aritméticas [...]; (2) considerar números e operações apenas segundo propriedades, e não “modelando” números em outros objetos, por exemplo, objetos “físicos” ou geométricos [...]; (3) operar sobre números não conhecidos como se fossem conhecidos. (LINS; GIMENEZ, 1997, p. 151).

O projeto de Educação Algébrica desses autores objetiva permitir que os alunos sejam capazes de produzir significados para a álgebra (conforme (1), (2) e (3)) e de pensar algebricamente, devendo ser, o desenvolvimento de habilidades técnicas de manipulação, uma consequência desse trabalho. Para isso, os autores propõem atividades nas quais, a partir de uma situação, os alunos produzam afirmações e suas respectivas “justificações” e expressões a fim de trabalhar com as transformações dessas expressões (LINS; GIMENEZ, 1997, p. 152).

Fiorentini *et al.* (1993) coloca o pensamento algébrico como “um tipo especial de pensamento que pode se manifestar não apenas nos diferentes campos da Matemática, como também em outras áreas do conhecimento” (p. 88). Os autores também concluem que há diversas formas de expressar o pensamento algébrico:

através da linguagem natural, através da linguagem aritmética, através da linguagem geométrica ou através da criação de uma linguagem específica para este fim, isto é, através de uma linguagem algébrica, de natureza estritamente simbólica (FIORENTINI *et al.*, 1993, p. 88).

Ao defenderem sua proposta de Educação Algébrica, os autores apontam etapas que diferem da prática pedagógica da álgebra escolar conforme discutida anteriormente. Segundo eles, a Educação Algébrica deveria iniciar pelo trabalho com situações-problema:

É esse trabalho reflexivo e analítico sobre situações-problema de naturezas diversas, isto é, sobre o modo como conduzimos e expressamos o nosso pensamento visando a resolução de tais situações, que possibilitará a construção de uma linguagem simbólica que seja significativa para o estudante (FIORENTINI *et al.*, 1993, p.89).

Dessa forma, a partir da análise de situações-problema, o objetivo seria chegar às expressões simbólicas algébricas. Numa segunda etapa, seria o inverso: a partir de expressões algébricas, tentar atribuir-lhes significações. E, finalmente, na terceira e última etapa, deve-se enfatizar o transformismo e a manipulação a fim de compreender como uma expressão pode ser transformada em outra equivalente e quais procedimentos legitimam essa manipulação (FIORENTINI *et al.*, 1993).

Em Fiorentini *et al.* (2005), são enunciados caracterizadores do pensamento algébrico, retomando a ideia de que para possibilitar seu desenvolvimento na educação básica o professor precisa levar para a sala de aula atividades que manifestem esses caracterizadores. Segundo os autores, esses caracterizadores podem mobilizar e desenvolver o pensamento algébrico dos alunos, a partir de tarefas exploratórias de diferentes finalidades. São eles:

- Estabelecer relações/comparações entre expressões numéricas ou padrões geométricos;
- Perceber e tentar expressar as estruturas aritméticas de uma situação-problema;
- Produzir mais de um modelo aritmético para uma mesma situação-problema; ou, reciprocamente, produz vários significados para uma mesma expressão numérica;
- Interpretar uma igualdade como equivalência entre duas grandezas ou entre duas expressões numéricas;
- Transformar uma expressão aritmética em outra mais simples;
- Desenvolver algum tipo de processo de generalização;
- Perceber e tentar expressar regularidades ou invariâncias;
- Desenvolver/criar uma linguagem mais concisa ou sincopada ao expressar-se matematicamente. (FIORENTINI *et al.*, 2005, p.5).

Neste trabalho, o caracterizador que explora o estabelecimento de relações e comparações entre expressões numéricas e padrões geométricos foi utilizado para delimitar a parte do CCA investigada. Dessa forma, será explorado um conjunto de situações matemáticas que possibilite compreender como ocorre a manifestação do

pensamento algébrico na resolução de situações-problema que exploram relações e comparações entre padrões compondo parte do Campo Conceitual Algébrico CCA.

### 3.3 Concepções teóricas sobre Educação Algébrica

Alguns pesquisadores têm se dedicado a estudar sobre as concepções de Educação Algébrica, nas relações com a sala de aula e naquilo que é exigido dos alunos neste assunto. Este subcapítulo está fundamentado nas concepções de Fiorentini et al. (1993; 2005), Usiskin (1995), Lins e Gimenez (1997), Lee (2001 apud FIGUEREDO 2007).

A seguir, serão apresentadas relações entre as principais ideias dos autores supracitados, configurando uma possível nova classificação das diferentes concepções acerca da Álgebra Escolar. Apesar das nomenclaturas diferentes, foi possível identificar aproximações entre as diversas classificações dos autores por semelhanças nas definições e nos encaminhamentos pedagógicos. Assim, (novas) cinco concepções foram determinadas: Escrita/linguagem algébrica; Interpretação/significação algébrica; Situações algébricas; Estruturas algébricas; e Cultura algébrica. Em seguida de suas descrições, segue um quadro resumo das concepções (Quadro 3).

#### 3.3.1 Escrita/linguagem algébrica

Aqui foram agrupadas algumas concepções que têm como principais ideias comuns: o forte uso do transformismo algébrico; a ênfase no uso dos símbolos, das regras e técnicas; busca pela generalização da aritmética; e a álgebra como instrumento para futuramente resolver problemas.

Para Fiorentini et al. (1993; 2005), a concepção de Educação Algébrica linguístico-pragmática, relaciona o papel pedagógico da Álgebra com um instrumento para resolver problemas. Nesta concepção, é forte o uso de técnicas de resolução pelo emprego de regras e métodos algébricos, de maneira a considerar que a aquisição, mesmo mecânica, de técnicas necessárias para o “transformismo algébrico” seria condição “necessária e suficiente” para o aluno adquirir a capacidade de resolver problemas (FIORENTINI et al., 2005).

Usiskin (1995) trata como Aritmética Generalizada àquela concepção que utiliza a letra como generalizadora de modelos. Por exemplo, a propriedade aritmética na qual “a ordem das parcelas não altera o resultado” pode ser escrita de forma algébrica pela igualdade  $a + b = b + a$  (USISKIN, 1995).

Para Lins e Gimenez (1997), a Álgebra como Aritmética Generalizada é caracterizada por atividades identificadas pelo cálculo com letras. Esta concepção é muito comum em livros didáticos, sendo justificada pelo modo tradicional de ensino predominante na Educação Algébrica. É uma concepção que enfatiza o uso de técnicas sem utilizar o pensamento algébrico, chamando-a de Letrista.

Para Lee (2001apud FIGUEREDO 2007), a Álgebra como Linguagem enfatiza a utilização do uso da linguagem, reconhecendo que a Álgebra envolve um lado escrito, no qual existem símbolos e regras. A autora diz ainda que a linguagem algébrica é diferente de qualquer outra linguagem que seja familiar aos alunos e que, nessa visão, a Álgebra desenvolvida nas escolas tem mais o papel sintático do que semântico. Ela também fala da Álgebra como Aritmética Generalizada e afirma que essa visão de Álgebra vem sendo muito criticada por pesquisadores, no entanto, é o modelo implícito dominante nos livros didáticos da Álgebra utilizados. Para a autora, generalizações de padrões numéricos e o estudo da estrutura da Aritmética, são concepções adequadas à introdução da Álgebra.

### 3.3.2 Interpretação/significação algébrica

As concepções desta subseção trazem em comum a utilização da Álgebra na resolução de problemas, buscando um caráter instrumental, mas não apenas isso. Traz, também, o trabalho de interpretação e resolução, utilizando materiais físicos ou geométricos como exemplos. Ou seja, a Álgebra nessas concepções é vista como uma ferramenta que pode dar significado a algo concreto.

Para Fiorentini *et al.* (1993; 2005), a concepção de Educação Algébrica chamada de fundamentalista-analógica vincula-se ao papel pedagógico da Álgebra como instrumento de resolução de problemas. Essa concepção buscava recuperar o valor instrumental da Álgebra e preservar o caráter fundamentalista, mas sem base nas propriedades estruturais, e, sim, através do uso de modelos analógicos geométricos (blocos de madeira ou mesmo figuras geométricas) ou físicos (como a balança de dois pratos) que auxiliam na visualização e justificativas das passagens do transformismo algébrico.

Usiskin (1995), na concepção Estudo de procedimentos para resolver problemas, trata as letras como incógnitas ou constantes, ou seja, valores específicos a serem encontrados. A Álgebra é concebida como estudo de procedimentos a serem resolvidos, nos quais a ordem é simplificar e resolver. O aluno, além de interpretar e traduzir o problema para a linguagem algébrica em equações, precisa dominar as habilidades em manejar matematicamente essas equações para obter a resolução.

Para Lins e Gimenez (1997) a concepção Letrista-facilitadora, ainda que na linha da letrista, valoriza a utilização do concreto, ou seja, os adeptos a esta concepção tratam a Álgebra como algo extremamente abstrato trazendo, por exemplo, o uso da balança de dois pratos, como uma maneira de facilitar a aprendizagem. Nesse caso, o “concreto” deve ser algo que traga significado para determinado problema, de modo que traga a formalização deste conteúdo. No exemplo da balança, o conteúdo a ser formalizado seria o de equações do primeiro grau.

Lee (2001 apud FIGUEREDO 2007) considera a Álgebra como uma atividade de resolução de problemas, e também como uma ferramenta para construir significados.

### 3.3.3 Situações algébricas

As diferentes concepções aqui agrupadas caracterizam-se pela exploração de situações-problema abertas. São situações que necessitam do uso de ferramentas algébricas e/ou linguagem algébrica para serem resolvidas. Para isso, o aluno deve compreender e organizar essas situações.

Fiorentini *et al.* (1993; 2005) destaca que um ponto negativo comum identificado nas concepções de Educação Algébrica é a redução do pensamento algébrico na Álgebra escolar. O ponto comum de partida é o simbolismo algébrico e o ensino da Álgebra fica reduzida ao transformismo algébrico. Essas observações levaram os autores a refletir sobre pensamento e linguagem baseados em Vygotsky (1993). Segundo eles, a linguagem também é resultado de uma forma de pensamento, no processo de ensino aprendizagem, “a linguagem não antecede necessariamente o pensamento, embora a apropriação da linguagem possa potencializar e promover o desenvolvimento do pensamento algébrico”. Dessas reflexões, surgiu uma concepção de Educação Algébrica, segundo Fiorentini *et al.* (1993; 2005), que tem a exploração de situações-problema relativamente abertas. Os autores classificaram essas situações-problema como tarefas exploratório investigativas com ênfase no ensino de Álgebra.

Usiskin (1995) identifica esta concepção como “Estudo de relações entre grandezas”. Nela fórmulas e expressões relacionam grandezas representadas por letras. Por exemplo, quando falamos na área de um triângulo, estamos expressando uma relação entre três grandezas (área, altura e base), sem a necessidade de resolvermos nada.

Em Lins e Gimenez (1997), a concepção denominada Modelagem Matemática continua no “concreto”, porém, seus adeptos partem do “concreto”, que pode ser visto na realidade, com atividades de investigação de situações reais ou “realistas”. Na Álgebra escolar, este tipo de investigação começa quando é necessário utiliza-la a fim de

compreender ou organizar alguma situação, assim, a Álgebra é usada como uma ferramenta e não como um objeto primário de estudo.

### 3.3.4 Estruturas algébricas

As concepções agrupadas a seguir utilizam a Álgebra como linguagem simbólica de forma que as letras são utilizadas como símbolos arbitrários. Na escola básica, essas estruturas matemáticas são conhecidas como as propriedades algébricas que podem ser reconhecidas em todo o campo da matemática.

Para Fiorentini *et al.* (1993; 2005), após o Movimento da Matemática Moderna, que veio contrapor a concepção linguístico-postulacional, surge a concepção fundamentalista-estrutural. Nesta concepção, o papel pedagógico passou a ser fundamentador de vários campos da Matemática, e o papel da álgebra era fornecer fundamentos lógicos para toda a matemática escolar (FIORENTINI *et al.*, 1993).

Segundo Usiskin (1995), na escola básica, a Álgebra como estudo das estruturas é reconhecida pelo estudo das propriedades das operações com números reais ou polinômios. Esta concepção caracteriza-se pelo fato de utilizar as letras como símbolos arbitrários. As atividades conhecidas como cálculo algébrico, normalmente presentes no currículo, encontram-se nesta concepção (produtos notáveis, fatoração, operações com monômios e polinômios).

Lee (2001apud FIGUEREDO 2007) diz existir várias atividades envolvendo a Álgebra em diversas áreas e em outros campos matemáticos, como Aritmética e a Geometria. Segundo a autora, a Álgebra está associada a aspectos de manipulação dos símbolos – simplificação de expressões.

### 3.3.5 Cultura Algébrica

Nessa concepção, mais antropológica, a Álgebra tem foco na comunidade e na cultura. Lee (2001apud FIGUEREDO 2007) argumenta que a Álgebra engloba valores, crenças, práticas, tradições, histórias e processos de transmissão. Nesse contexto, a Álgebra trabalharia em conjunto com as concepções anteriores, nas quais as atividades algébricas requerem o uso de ferramentas algébricas, fomentando o pensamento algébrico e a linguagem de comunicação algébrica. Não é uma cultura isolada das outras culturas elementares da Matemática, mas, unida com os campos da Aritmética e da Geometria, como vem ocorrendo historicamente.

Quadro 3: Concepções de Álgebra Escolar

| Concepções de Álgebra                       | Concepções de Álgebra e Educação Algébrica segundo alguns autores                                                                                                                                                                                                                                                                          | Principais ideias de cada concepção                                                                                                                                                                                                                                                                       |
|---------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Escrita/linguagem algébrica</b>          | <ul style="list-style-type: none"> <li>➤ Linguístico-pragmática (Fiorentini <i>et al.</i>, 1993; 2005);</li> <li>➤ A álgebra como aritmética generalizada (Usiskin, 1995);</li> <li>➤ Letrista (Lins e Gimenez, 1997);</li> <li>➤ Álgebra como Aritmética Generalizada e Álgebra como Linguagem (Lee, 2001apud FIGUEREDO 2007);</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>➤ Estudo de procedimentos, regras e técnicas</li> <li>➤ Ênfase no transformismo algébrico</li> <li>➤ Linguagem algébrica para generalização de modelos aritméticos</li> <li>➤ Instrumento para o futuro</li> </ul>                                                 |
| <b>Interpretação/significação algébrica</b> | <ul style="list-style-type: none"> <li>➤ Fundamentalista-analógica (Fiorentini <i>et al.</i>, 1993; 2005);</li> <li>➤ Estudo de procedimentos para resolver problemas (Usiskin, 1995);</li> <li>➤ Letrista-facilitadora (Lins e Gimenez, 1997);</li> <li>➤ Álgebra como Ferramenta (Lee, 2001apud FIGUEREDO 2007);</li> </ul>              | <ul style="list-style-type: none"> <li>➤ Ferramenta para dar significado</li> <li>➤ Valores específicos a serem encontrados</li> <li>➤ Interpretar e traduzir para simbolismo algébrico</li> <li>➤ Valoriza o concreto</li> </ul>                                                                         |
| <b>Situações algébricas</b>                 | <ul style="list-style-type: none"> <li>➤ Tarefas exploratórias e investigativas (Fiorentini <i>et al.</i>, 1993; 2005);</li> <li>➤ Estudo de relações entre grandezas (Usiskin, 1995);</li> <li>➤ Modelagem Matemática (Lins e Gimenez, 1997);</li> <li>➤ Álgebra como Ferramenta (Lee, 2001apud FIGUEREDO 2007);</li> </ul>               | <ul style="list-style-type: none"> <li>➤ Exploração de situações-problema</li> <li>➤ Compreender e organizar uma situação</li> <li>➤ Fórmulas e expressões</li> <li>➤ Letras representando grandezas</li> <li>➤ Estudo das relações entre grandezas</li> <li>➤ Pode ou não partir da realidade</li> </ul> |
| <b>Estruturas algébricas</b>                | <ul style="list-style-type: none"> <li>➤ Fundamentalista-estrutural (Fiorentini <i>et al.</i>, 1993; 2005);</li> <li>➤ Estudo das estruturas (Usiskin, 1995);</li> <li>➤ Álgebra como atividade (Lee, 2001apud FIGUEREDO 2007);</li> </ul>                                                                                                 | <ul style="list-style-type: none"> <li>➤ Linguagem simbólica, letras como símbolos arbitrários;</li> <li>➤ Propriedades atribuídas a números reais ou polinômios;</li> </ul>                                                                                                                              |
| <b>Cultura algébrica</b>                    | <ul style="list-style-type: none"> <li>➤ Álgebra como Cultura (Lee, 2001 apud FIGUEREDO 2007).</li> </ul>                                                                                                                                                                                                                                  | <ul style="list-style-type: none"> <li>➤ Álgebra como valores, crenças, práticas sociais, tradições, história, etc.</li> </ul>                                                                                                                                                                            |

Fonte: Autoria própria, 2020.

### 3.4 Teoria dos Campos Conceituais

Em sua teoria, Gérard Vergnaud, propunha uma estrutura, baseado nas pesquisas cognitivistas, em especial, sobre a aprendizagem de Matemática, permitindo situar e estudar as filiações (continuidades) e as rupturas (descontinuidades) entre conhecimentos, ou seja, estudar as relações existentes entre os conceitos matemáticos. Isso possibilitou duas análises importantes: a primeira se refere à relação existente entre os conceitos, como os esquemas e os invariantes operatórios, explícitos e implícitos, nos comportamentos dos sujeitos frente a uma determinada situação; e a segunda sustenta um aprofundamento das relações existentes entre o significado e o significante (VERGNAUD, 2003; 2009).

Segundo Vergnaud (2009), para adquirir um conceito é preciso interagir com diferentes situações em que ele esteja presente. Ainda, segundo o autor, em uma situação, há vários conceitos presentes. Assim, não faz sentido fazer referência a um conceito isolado, mas sim, a um campo composto por vários conceitos, representações e situações que se articulam formando um campo conceitual (VERGNAUD, 2009).

Em geral, pesquisadores e professores têm dificuldade de compreender que conceitos, por mais simples que possam ser, não estão restritos a um único tipo de situação, assim como, uma simples situação não está relacionada a um único conceito (MAGINA, 2008). Um processo de aprendizagem não se dá apenas por uma situação isolada ou por um único conceito. Por isso, a Teoria dos Campos Conceituais estuda o conjunto de conceitos interligados por um conjunto de situações.

A TCC permite que o professor, enquanto mediador, possa elaborar um conjunto de atividades que proporcione a reflexão do aluno em cada situação, ou seja, proponha caminhos para a aprendizagem de novos conhecimentos. Assim, a aprendizagem é construída à medida que o aluno vai compreendendo determinado conceito, comparando-o a conceitos anteriores similares e adaptando tais conceitos de acordo com as novas informações.

Além da articulação de conceitos, que aparecem na construção de um campo conceitual, Vergnaud (2003; 2009; 2014) identificou três elementos que

ajudam a compreender a composição de um campo conceitual, ou a terna de conjuntos (S, I, R), na qual:

- S representa um conjunto de situações que tornam o conceito significativo;
- I corresponde a um conjunto de invariantes (objetos, propriedades e relações) que podem ser reconhecidos e usados pelo sujeito para analisar e dominar essas situações;
- R refere-se a um conjunto de representações simbólicas que podem ser usadas para pontuar e representar as situações e os procedimentos para lidar com elas.

Segundo Vergnaud (2009), a aquisição do conhecimento se dá, em geral, a partir de situações-problema já conhecidas, relacionadas a características locais (pertencentes a um determinado conjunto de situações). Consequentemente, todos os conceitos têm um domínio de validade restrito que varia de acordo com a experiência e com o desenvolvimento cognitivo do aluno.

A fim de estabelecer relação entre o conceito e uma determinada situação, Gérard Vergnaud retoma a teoria de Piaget<sup>6</sup> - e suas ideias sobre a função simbólica, que se originam da Semiótica. Esta é a ciência que estuda a comunicação e envolve três elementos básicos: o referente (S), que é a realidade, o objeto; o significado (I), que é individual, estando ligado à funcionalidade do referente; e o significante (R), que diz respeito ao coletivo e é expresso por símbolos, signos e sinais (Vergnaud, 2003; 2009; 2014).

Essa terna de conjuntos, com inspiração na teoria de Piaget, pode ser entendida como a representação de um conceito desenvolvido pelo aluno a partir de sua interação com várias situações. Nesse sentido, Vergnaud vinculou sua terna de sustentação da formação de conceito (S, I, R) e os elementos básicos da função simbólica.

Por exemplo, na situação “A soma das idades de Maria e João é 40. A idade de João é igual à idade de Maria mais 18. Qual a idade de cada um deles?”,

---

<sup>6</sup> Um dos mais importantes pensadores do século XX, o suíço Jean Piaget (1896 – 1980) foi o criador da Epistemologia Genética, teoria do conhecimento baseada no estudo da origem psicológica do conhecimento humano. A partir do estudo das concepções infantis de tempo, espaço, causalidade física, movimento e velocidade, Piaget criou uma teoria do conhecimento centrada no desenvolvimento natural da criança (MAGINA, *et al.*, 2008).

aqui teríamos o referente (S), a situação. O significado (I) é o que dá sentido ao referente, ou seja, o que dá significado para o problema. O significante (R) são os símbolos utilizados para expressar esse problema. Logo o significado e o significante podem ser expressos por:  $M + J = 40$  e  $J = M + 18$ . Assim, é matematicamente possível identificar os referentes, ou seja, a idade de Maria (11 anos) e a de João (29 anos).

Para descrever e analisar os avanços de um aluno em relação a determinado conceito, é preciso considerar sua maneira de resolução das situações-problema que tornam tal conceito significativo e quais estratégias foram desenvolvidas para que chegasse até a solução. Estas são chamadas por Vergnaud de competências e concepções. Existe uma inter-relação entre as ideias de competências e concepções, perpassando pela ideia de situação. As competências podem ser interpretadas pelas ações dos alunos sobre determinadas situações a fim de alcançar um objetivo. E as concepções evoluem à medida que o aluno lida com a situação (VERGNAUD, 2003; 2009; 2014).

Para entender o que são as competências e concepções, Vergnaud faz uso do conceito de “esquema” utilizado por Jean Piaget. Este conceito ganha força com Gérard Vergnaud no campo da Matemática. Para ele, as competências podem ser entendidas como combinações de esquemas, dizem respeito à forma com que a pessoa organiza seus invariantes de ação ao lidar com determinado tipo de situação (VERGNAUD, 2009; 2014).

Vergnaud (2009) traz a ideia de que a atividade é, ao mesmo tempo, repetição e variação, não sendo possível compreender o pensamento presente na atividade humana sem perceber seu duplo caráter sistemático e oportunista. Não existe repetição sem sistema de regras; o ser humano não se adapta à contingência, à variedade e à novidade sem que haja categorias de pensamento possíveis de identificar e tratar a informação pertinente. Para o autor o conceito de esquema é uma organização invariante da atividade para uma classe de situações dada.

O esquema é, portanto, universal, como o conceito. É a organização que é invariante, não a conduta observável; os esquemas não são estereótipos. Se certos esquemas engendram condutas relativamente estereotipadas esse não é o caso da maioria dos esquemas: eles engendram condutas diferentes em função das variáveis de situação. O esquema não

organiza somente a conduta observável, mas também o pensamento subjacente (VERGNAUD, 2009, n.p.).

A partir dessa composição de situações, Vergnaud apresenta quatro tipos de componentes de um esquema:

- um objetivo (ou mais), subobjetivo e antecipações;
- regras de ação, coleta de informações e controle;
- invariantes operatórios (conceitos-em-ação e teoremas-em-ação);
- possibilidades de inferências (VERGNAUD, 2009, n.p.).

A parte intencional do esquema é o objetivo, que é essencial para a organização da atividade. Ela decompõe-se em subobjetivos organizados sequencial e hierarquicamente a partir dos quais surgem diversas antecipações. Às vezes, quando os objetivos são apenas parcialmente conscientes, os efeitos esperados da ação não são previsíveis pelo sujeito. É o caráter intencional da conduta e da atividade que não pode ser ignorado. Os objetivos, juntamente com os efeitos, são a fonte de aspectos diferenciais importantes da conduta (VERGNAUD, 2009).

As regras de ação, de tomada de informação e de controle são responsáveis pela parte geradora do esquema, pela passagem do tempo da conduta e da atividade. Conduta não é somente ação, mas, também, as informações necessárias à continuidade das atividades e os controles que permitem ao sujeito ter segurança de que ele fez o que pensava fazer e que continua no caminho escolhido. Às vezes, essas regras de ação podem ser condicionadas pela representação do objetivo e as conceptualizações que permitem identificar os objetos presentes, suas propriedades e relações, e as transformações ocorridas na conduta de cada sujeito (VERGNAUD, 2009)

Os invariantes operatórios são componentes cognitivos essenciais dos esquemas, processos que o indivíduo desenvolve ao longo da vida. Os invariantes podem ser explícitos, quando o aluno tem consciência dos conceitos que está utilizando ou tem consciência de uma concepção relacionada. Nesse caso, os invariantes podem ser expressos por palavras ou representações simbólicas. Os invariantes operatórios podem, ainda, ser implícitos, quando o estudante utiliza alguns conceitos que não estão claros ou de que não tem consciência. Nesse caso, os conceitos utilizados podem ser reconhecidos pelo

professor em termos de objetos e propriedades do problema, ou por meio de procedimentos e relações do aluno (VERGNAUD, 2003; 2009).

O conceito de invariante operatório permite falar ao mesmo tempo de identificação de objetos materiais ou de suas relações pela percepção e interpretação das informações nas situações. A noção de invariante operatório aplica-se ao próprio problema da função simbólica, isto é, à passagem da realidade à representação. Não basta saber que os objetos, as classes de objetos, as relações, etc., se projetam, sob certas formas, nos diversos planos da representação; igualmente, é preciso interrogar-se sobre a forma pela qual essa projeção ocorre e sobre as condições que a permitem. Os invariantes operatórios podem ser divididos em conceitos em ação e teoremas em ação. (VERGNAUD, 2014).

Os conceitos em ação permitem retirar as informações pertinentes das ações dos alunos e selecionar os teoremas em ação necessários para justificar a situação. Os conceitos em ação permitem identificar os objetos, as propriedades e as relações pertinentes à ação do aluno em determinada situação.

Por “objeto” é preciso compreender ao mesmo tempo objetos materialmente perceptíveis e “objetos construídos” pela cultura, pela ciência, pela técnica, ou pelo próprio sujeito individual. Por “propriedades e relações” é preciso compreender ao mesmo tempo predicados observáveis e predicados que podem ser inferidos a partir dos observáveis, mas que são eles próprios, construções culturais ou individuais (VERGNAUD, 2009, n.p.).

Entre os conceitos em ação, alguns são compostos por objetos, outros, por predicados com um lugar, e outros, por predicado com vários lugares. Algumas vezes os predicados podem tornar-se objetos e estabelecer relações com outros objetos.

Um teorema em ação é uma proposição tida como verdade na ação em determinada situação. Entre os teoremas em ação, alguns possuem proposições tidas como verdadeiras aqui e no momento presente; enquanto outros são universalmente verdadeiros, para toda uma classe de situações. Então as proposições dos teoremas podem oscilar de particulares a universais (VERGNAUD, 2009).

A importância das inferências em situações deve-se justamente porque o esquema não é um estereótipo e não corresponde à metáfora de que existiriam formas “conectadas” da atividade no cérebro. As possibilidades que o esquema traz consigo resultam de teoremas em ação específicos do domínio e da classe de situações à qual está direcionado o esquema, mas, também, a teoremas em ação mais gerais, que requerem vários domínios de atividade e que são constantemente formalizados em termos lógicos como a dedução, a indução e a abdução (VERGNAUD, 2009).

Por exemplo, um esquema utilizado para resolver uma equação (incógnitas), que representa igualdade de ambos os lados, pode ser utilizado também para resolver funções algébricas (variáveis), que representam um conjunto de números interdependentes. Mesmo que sofram algumas alterações, é possível utilizar o mesmo esquema em diferentes situações.

Em Da Rocha Falcão (2008), o autor faz um quadro onde associa os Teoremas-em-ação com alguns conceitos Algébricos.

Quadro 4: Teoremas-em-ação e conceitos relacionados no contexto do campo conceitual algébrico

| Teoremas-em-ação                                                                                                                             | Conceitos                                                           |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------|
| - Igualdade se mantém desde que, a cada operação realizada em um membro da mesma, se realize a mesma operação no outro.                      | - Princípio algébrico da equivalência                               |
| - Recipientes podem conter conjuntos de quantidades discretas ou quantidades contínuas correspondentes a um único valor numérico específico. | - Incógnitas                                                        |
| - Quantidades discretas ou contínuas podem variar em função de outras quantidades, de acordo com determinadas regras.                        | - Variáveis<br>- Funções<br>- Igualdade (=) semanticamente ampliada |

Fonte: DA ROCHA FALCÃO, 2008, p. 38.

Também, em Da Rocha Falcão (2008), temos alguns elementos básicos do CCA, que podem ser subdivididos em: Álgebra como ferramenta representacional (números, medidas, incógnitas e variáveis, regras de atribuição de símbolos, gama de acepções do sinal de igual) e Álgebra como ferramenta de resolução de problemas (operadores, sintaxe, propriedades de operações, princípio da equivalência, conhecimentos-em-ação vinculados a experiências extraescolares de compensação e equilíbrio, fatos aritméticos instrumentais – elemento neutro da adição).

Klöpsch (2010) concebe o CCA como sendo o conjunto de situações, representações e invariantes que envolvem elementos essenciais para a construção dos conceitos e atividades algébricas. Na definição do CCA para sua pesquisa, a autora seleciona um conjunto de questões construído a partir das seguintes etapas: Circunscrição de determinada competência a avaliar (ex.: competência matemática ao final da 4ª série EF); Decomposição da competência em temas, descritores e habilidades; Transposição em situações significativas de avaliação – Instrumento; e Desempenho no instrumento.

Destaca-se a ausência de questões que explorem padrões figurais na pesquisa de Klöpsch (2010). Apenas uma das questões explora leis de formação de padrões numéricos (Figura 1), porém a exploração dessa questão é diferente da que vem sendo trabalhada na presente pesquisa, pois a autora indica quais são as leis de formação que devem ser utilizadas para os alunos determinarem as sequências.

Q23- Podemos utilizar a álgebra para determinar leis de formação para seqüências numéricas. Por exemplo, a seqüência (0, 2, 4, 6, 8,... ) pode ser representada por  $2n$ , onde  $n$  pertence ao conjunto dos Naturais ( $\mathbb{N}$ ). Ou seja, ao substituir  $n$  por 0 obtém-se o primeiro elemento da seqüência, ao substituir  $n$  por 1 se obtém o segundo termo da seqüência e assim por diante. Veja mais alguns exemplos:

(2, 4, 6, 8,...)  $\rightarrow$  Lei de formação:  $2n + 2, n \in \mathbb{N}$

(-5, 5, 15, 25,...)  $\rightarrow$  Lei de formação:  $10n - 5, n \in \mathbb{N}$

Determine as leis de formação para as seguintes seqüências:

a) (0, 5, 10, 15, 20, 25, 30,...)  $\rightarrow$  Lei de formação:

b) (1, 3, 5, 7,...)  $\rightarrow$  Lei de formação:

*Figura 1: Exemplo da atividade que contém lei de formação (KLÖPSCH, 2010, p. 159)*

O campo conceitual para Vergnaud é um conjunto de situações cujo domínio progressivo requer variedade de conceitos, de esquemas e de representações simbólicas com estreita ligação, o conjunto de conceitos contribuem para o domínio dessas situações (VERGNAUD, 2009). Os trabalhos de Da Rocha Falcão (2008) e Klöpsch (2010) mostram que a TCC de Vergnaud pode ser aplicada em outros campos da Matemática, além do Campo Aditivo e do Campo Multiplicativo (VERGNAUD, 1986; 1993; 2003; 2009; 2014) e do Campo da Geometria Plana (VERGNAUD, 1997).

Além dos trabalhos de Klöpsch (2010) e Da Rocha Falcão (2008) serem um exemplo de que a TCC pode ser aplicada na Álgebra, o próprio Vergnaud traz em seus textos alguns exemplos de pesquisadores que utilizaram a teoria dos Campos Conceituais em outras áreas além dos desenvolvidos por ele (Campo Conceitual Aditivo, Multiplicativo e da Geometria da Plana).

Vergnaud relata a tese de Catherine Boyer, pesquisadora francesa, que trabalhou sobre o conceito de reprodução vegetal com um grupo de crianças de nove a onze anos de idade. Ela chamou atenção para um ciclo que vai da semente à planta, da planta à flor, da flor ao fruto, do fruto à semente. Vergnaud citou um aspecto importante para o qual a autora chama atenção: os conceitos de semente, de flor e de fruta fazem parte de um processo de conceitualização cotidiana e esses conceitos cotidianos não coincidem com os conceitos científicos e, às vezes, até se opõem à aprendizagem desses conceitos (VERGNAUD, 2003, p. 32).

Outro Campo Conceitual discutido pelo próprio Vergnaud (1997) é o da Geometria Plana, com especial importância à noção de simetria que, desde muito cedo, está presente no cotidiano. O autor analisa as resoluções dos alunos ao completarem padrões de figuras (geométricas ou não) e encontra a utilização de propriedades importantes da simetria, como o fato de que algumas figuras simétricas são similares enquanto outras são invertidas, assim como o fato dos pontos constituintes de figuras simétricas serem equidistantes do eixo de simetria.

Além dessas propriedades, existem diversas outras competências relacionadas aos gestos e à percepção para completar os desenhos. Nesse sentido, o conceito de simetria não pode ser construído isoladamente, sem o concurso de diversos outros conceitos que devem ser explorados pelo professor, como ângulos, eixos, translação, rotação. A simetria é, portanto, uma noção conceitual operacional e complexa, pois os conceitos não podem ser derivados apenas de regularidades empíricas diretamente “visíveis”, apesar das representações pictóricas da simetria terem inegável interesse para sua conceptualização. Estas reflexões levam a necessidade de compreender o conceito de simetria de forma ampla, na qual diversas situações e representações estão envolvidas, as quais demandam de uma série de outros conceitos (VERGNAUD, 1997).

Nesta pesquisa, o CCA está sendo associado a um caracterizador do pensamento algébrico (Fiorentini, *et al.*, 2005) de forma a estudar as resoluções de um conjunto de situações matemáticas (S), que exploram um conjunto de propriedades e relações algébricas (I), utilizando um conjunto de diferentes representações simbólicas (R). S é um conjunto de situações problema que exploram o estabelecimento de comparações e relações entre expressões numéricas ou padrões geométricos. I são os invariantes operatórios que dão significação para essas situações e podem ser identificados como as relações entre padrões figurais e numéricos. R é um conjunto de representações desses invariantes que podem ser expressos por desenhos, frases, escrita simbólica algébrica, etc.

A proposta desta dissertação foi compreender manifestações do pensamento algébrico na resolução de situações-problema que compõem a parte do CCA que explora relações e comparações entre padrões. O ponto principal foi identificar as manifestações de invariantes operatórios e de representações do CCA nessas resoluções – complementando a terna (conjunto de situações, conjunto de invariantes e conjunto de representações simbólicas). Buscou-se também identificar se e como acontecem os processos de identificação e expressão de regularidades e invariâncias e de expressão de generalização nas resoluções de alunos.

O Capítulo 4 é composto pela metodologia da pesquisa. Nele, são apresentados os participantes, as atividades e o que se esperava como resolução das situações-problema.

## Capítulo 4: Metodologia Da Pesquisa

Neste capítulo, será apresentada a metodologia da pesquisa. Após a caracterização do tipo de pesquisa, é situado o contexto da pesquisa, os participantes, as atividades e o que se esperava nas resoluções das situações-problema.

Esta é uma pesquisa que segue a abordagem qualitativa. Segundo Minayo (1994) esse tipo de pesquisa trabalha um “universo de significados, motivos, aspirações, crenças, valores e atitudes, o que corresponde a um espaço mais profundo das relações, dos processos e dos fenômenos que não podem ser reduzidos à operacionalização de variáveis” (MINAYO, 1994, p. 21).

A pesquisa qualitativa se caracteriza pelo estudo exaustivo e profundo de um ou de poucos objetos, de maneira a permitir o seu conhecimento mais amplo e detalhado (GIL, 2008, p. 57). Entende-se esta pesquisa como qualitativa porque, ao investigar a manifestação do pensamento algébrico à luz da TCC, busca-se analisar as resoluções dos alunos a fim de identificar manifestações de invariantes operatórios e de representações de parte do CCA.

A pesquisa foi desenvolvida durante o segundo semestre do ano de 2019, com uma turma de onze (11) alunos do 8º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública localizada no município de Canguçu/RS, da qual a pesquisadora foi, também, professora titular. A escolha foi feita devido ao acesso à turma, que tinha um número reduzido de alunos, e por ter sido orientada, de acordo com os Planos de Ensino de Matemática da escola, a começar o trabalho com Álgebra com a turma de 7º ano. Assim, pensou-se que o 8º ano já teria iniciado o conteúdo algébrico no ano anterior e poderiam estar familiarizados com a Álgebra escolar.

Como os estudantes são menores de idade, antes deles, os pais e/ou responsáveis foram consultados para permitir a participação. O Termo de Consentimento Livre e Esclarecido encontra-se no Apêndice A.

A pesquisa teve como uma das principais ações desenvolver a aplicação de atividades matemáticas, disponíveis no Apêndice B, a fim de estudar como alunos manifestam seu pensamento algébrico em situações-problema que exploram relações e comparações entre padrões compondo parte do CCA. Para isso, foram analisadas as resoluções e as conversas que a professora-

pesquisadora teve em aula com os estudantes, buscando identificar a presença de manifestação do pensamento algébrico. Era esperado a identificação das manifestações de invariantes operatórios e de representações nas resoluções dos alunos, a partir de seus processos de identificação e expressão de regularidades e invariâncias e de expressão de generalização.

Foram feitas nove atividades no total, nas quais os alunos deveriam perceber regularidades e padrões, tanto figurais como numéricos. Pretendia-se que os alunos, a partir dessas atividades e de suas manifestações do pensamento algébrico, chegassem a uma escrita algébrica (linguagem literal/formal). Essas situações propostas foram discutidas em grupo, a fim de perceberem quais maneiras achavam mais adequadas para a resolução das situações. Cada aluno fez suas próprias anotações e, a partir delas e das discussões, foi feita uma conversa com o grande grupo para debater as respostas encontradas e analisar como foram desenvolvidas.

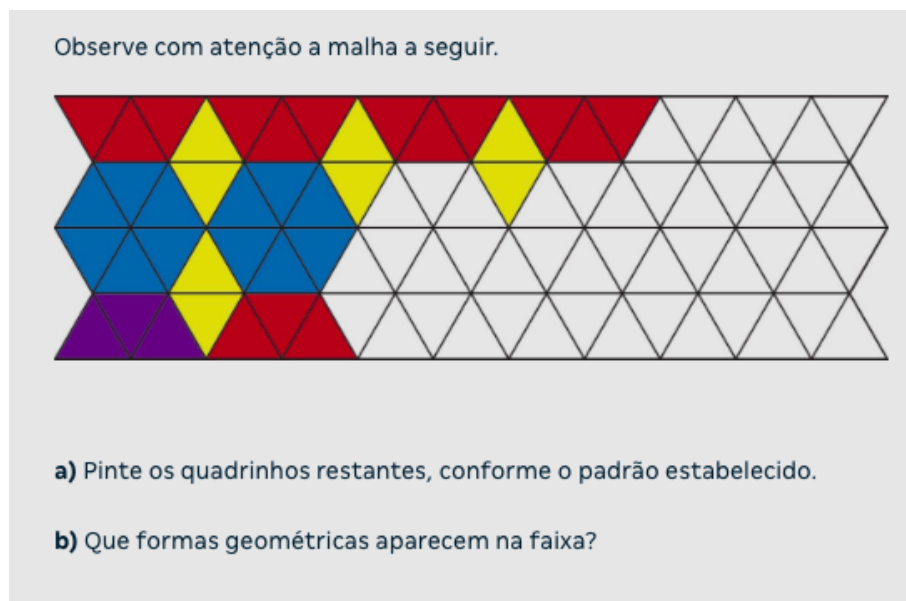
As atividades foram escolhidas a partir da elaboração teórica, de acordo com o caracterizador “estabelecimento de relações e comparações entre expressões numéricas ou padrões geométricos”. De acordo com a TCC, este caracterizador delimita um conjunto de situações-problema, um conjunto de invariantes e um conjunto de representações. Assim, entende-se que as atividades exploram parte do CCA. As situações propostas tinham estruturas parecidas, porém, em cada uma delas, mudava-se as sequências, as leis de formações, a forma de perguntar, etc.

Partiu-se das questões que exploravam padrões de figuras, padrões numéricos, para que os alunos fossem se familiarizando com os objetivos (desenvolvimento de algum tipo de generalização; identificação e expressão de regularidades ou invariâncias) da pesquisa. Na sequência, foram feitas atividades nas quais, além dos padrões e regularidades, foram trabalhadas a generalização de padrões para, então, identificar se os estudantes chegavam até a escrita algébrica ou se demonstravam pensamento algébrico de outra forma nas suas resoluções. A ideia da sequência de atividades era inserir maiores dificuldades, buscando a fase de generalização e, até mesmo, a fase da escrita algébrica literal.

As respostas dos alunos foram classificadas como “esperadas” e “divergentes”, com base no que se imaginou, antecipadamente, serem possíveis

resoluções para as situações-problema selecionadas. A seguir, é apresentada a definição do que “era esperado” em cada atividade e, no próximo capítulo, apresenta-se as análises realizadas.

Nas quatro primeiras atividades, esperava-se que os estudantes identificassem os padrões nas sequências geométricas e numéricas e representassem o próximo elemento das sequências da sua maneira (desenhos, cores, números, escrita, etc.). Seguem as atividades.



*Figura 2: Atividade 1*

Na atividade 1, esperava-se que os alunos pintassem a malha de acordo com o padrão já estabelecido, percebendo que a partir das diferentes cores era possível continuar a sequência formando diferentes formas geométricas. Assim, esperava-se que seguissem pintando os trapézios vermelhos na linha superior, os trapézios roxo e vermelho de forma alternada na parte inferior e os hexágonos azuis e os losangos amarelos. A questão ainda solicitava a identificação das figuras da faixa com o intuito de que essa identificação, das figuras formadas pelas cores, auxiliaria na própria pintura.

Descubra qual o próximo elemento das sequências abaixo:

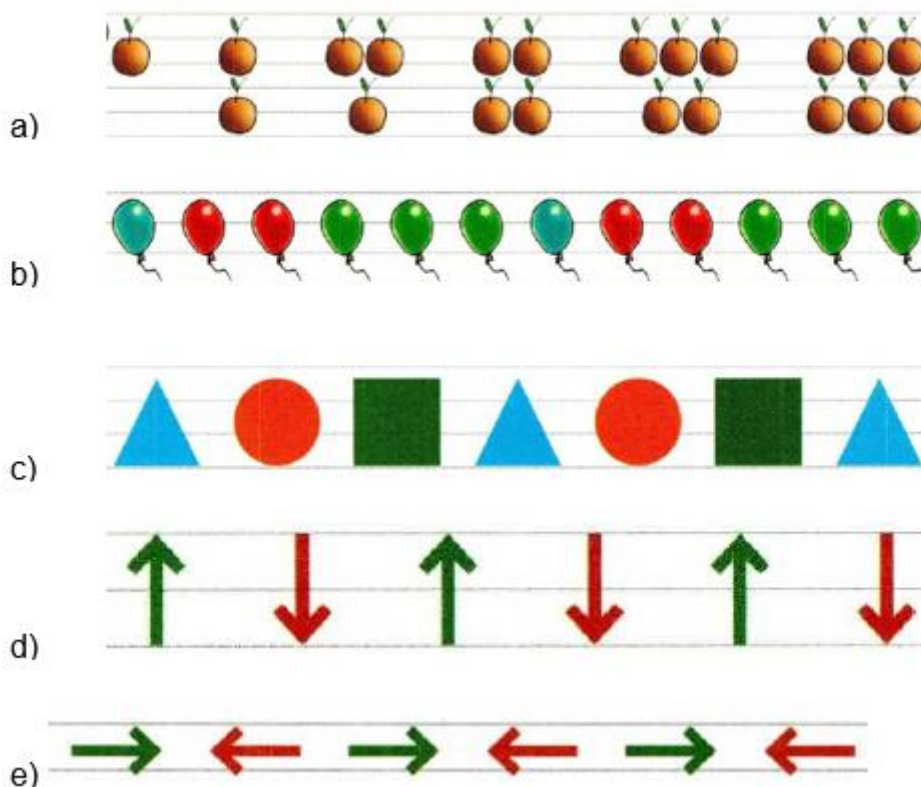


Figura 3: Atividade 2

Na atividade 2, era esperado que os alunos encontrassem o próximo elemento da sequência. Pode-se identificar que as sequências têm padrões de formação distintos, sendo a primeira formada pelo acréscimo de uma laranja a cada novo elemento e as demais, por repetidas sequências de cores e formas. Esperava-se que os estudantes identificassem o padrão das sequências, independente do padrão ser formado por um ou mais elementos, e desenhassem apenas o elemento seguinte, conforme orientação escrita da atividade. Assim, esperava-se que houvesse identificação do padrão e identificação do elemento seguinte, bem como a diferenciação entre ambos.

As respostas esperadas eram: na letra “a” sete laranjas – padrão uma laranja a mais que a quantidade anterior ou quantidade de laranjas igual à posição do elemento na sequência; na “b” um balão azul – padrão um balão azul, dois balões vermelhos, três balões verdes – podendo considerar apenas a característica cor; na “c” círculo vermelho – padrão triângulo azul, círculo

vermelho, quadrado verde – podendo considerar apenas uma das características (forma ou cor); na “d” seta para cima verde – padrão seta para cima verde, seta para baixo vermelha – podendo considerar apenas uma das características (orientação ou cor); e na letra “e” seta para direita verde – padrão seta para direita verde, seta para esquerda vermelha – podendo considerar apenas uma das características (orientação ou cor).

Descubra os elementos que estão faltando nas sequências abaixo:

- a) 0 1 2  4  6 7   10
- b) 5 10  20 25   40  50
- c) 10 9  7   4 3  1 0
- d) 2 6  14   26 30
- e) 21  17   11  7 5 3 1

Figura 4: Atividade 3

Na atividade 3, era esperado que os estudantes preenchessem as lacunas com os valores corretos de acordo com o padrão que identificassem. A seguir, em vermelho, estão as respostas esperadas:

- a) 0, 1, 2, **3**, 4, **5**, 6, 7, **8**, **9**, 10 – padrão um a mais que o elemento anterior;
- b) 5, 10, **15**, 20, 25, **30**, **35**, 40, **45**, 50 – padrão 5 a mais que o anterior;
- c) 10, 9, **8**, 7, **6**, **5**, 4, 3, **2**, 1, 0 – padrão 1 a menos que o anterior;
- d) 2, 6, **10**, 14, **18**, **22**, 26, 30, **34** – padrão 4 a menos que o anterior;
- e) 21, **19**, 17, **15**, **13**, 11, **9**, 7, 5, 3, 1 – padrão 2 a menos que o anterior.

Descubra o próximo elemento da sequência:

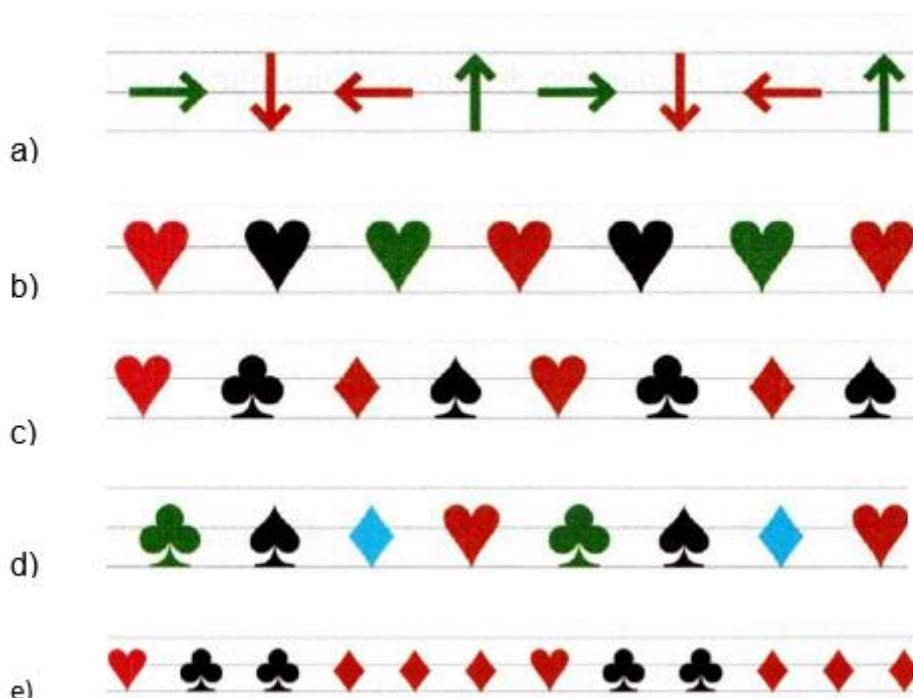


Figura 5: Atividade 4

Na atividade 4, utilizou-se a mesma ideia da atividade 2, de composições distintas por formas ou orientação e cores. As respostas esperadas eram: na letra “a” seta verde para a direita – padrão seta verde para direita, seta vermelha para baixo, seta vermelha para esquerda, seta verde para cima – podendo considerar apenas a característica orientação; na “b” coração preto – padrão coração vermelho, coração preto, coração verde – podendo considerar apenas a característica cor; na “c” coração vermelho – padrão coração vermelho, paus preto, ouro vermelho, espada preto – podendo considerar apenas a característica forma; na “d” paus verde – padrão paus verde, espada preto, ouro azul, coração vermelho – podendo considerar apenas uma das características (forma ou cor); e na letra “e” coração vermelho – padrão um coração vermelho, dois paus pretos, três ouros vermelhos – podendo considerar apenas a característica forma.

As próximas cinco atividades eram compostas por sequências figurais e solicitavam, além da identificação do próximo elemento, que os alunos respondessem sobre posições cada vez maiores, buscando o desenvolvimento

de processos de identificação e expressão de regularidades e invariâncias e de expressão de generalização nas resoluções de alunos. Por exemplo, foi dada uma sequência com oito posições e uma das questões perguntava sobre o elemento da 53ª posição e/ou a lei de formação da sequência. Seguem as questões.

Observe a sequência abaixo, identifique a sua regra e continue desenhando:



- a) Quais as figuras que correspondem a 8ª e 9ª posição?
- b) Qual a 15ª figura? E qual a 18ª?
- c) Que figura ocupa a 63ª?
- d) O que você observa em relação ao quadrado e às posições ocupadas por ele?
- e) Como você descreveria a regra de formação desta sequência?

*Figura 6: Atividade 5*

A sequência da atividade 5 era composta pela repetição do padrão triângulo azul, círculo vermelho e quadrado verde, igual à letra “c” da atividade 2. Na letra “a”, esperava-se que o estudante representasse os próximos elementos (círculo vermelho e quadrado verde, nessa ordem). Nas letras “b” e “c”, esperava-se que o aluno identificasse que as figuras múltiplas de três, como a 15ª, a 18ª e a 63ª, eram sempre quadrados verdes. Na letra “d”, era esperado que o aluno manifestasse o que tinha percebido em relação aos quadrados verdes e as posições ocupadas por essas figuras, buscando a identificação de que quadrados verdes ocupam sempre posições múltiplas de três. Por fim, na letra “e”, era esperado que eles descrevessem o padrão de repetição das formas e/ou das cores – apenas uma das características era suficiente para identificar o padrão. Por exemplo, eram esperados desenhos ou a escrita dos nomes das figuras e das cores e a indicação da possibilidade de continuação. Imaginou-se

que poderiam manifestar uma escrita algébrica, como por exemplo, quadrados ficam nas posições  $3.n$ , ou, múltiplas de três.

Observe a sequência abaixo, descubra sua regra e continue desenhando:

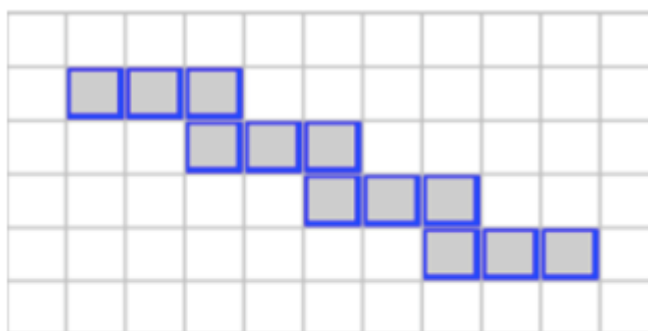


- a) Quais as figuras que correspondem a 7ª e 8ª posição?
- b) Qual a 10ª figura da sequência?
- c) Qual a 17ª figura da sequência?
- d) E a 46ª figura?
- e) Como você descreveria a regra de formação dessa sequência?

*Figura 7: Atividade 6*

A sequência da atividade 6 era composta pela repetição do padrão seta verde para cima, seta vermelha para baixo, igual à letra “d” da atividade 2 – e, da mesma forma, ou a orientação ou a cor da seta determinava o padrão. Na letra “a”, esperava-se que o estudante representasse os próximos elementos (seta verde e seta vermelha, nessa ordem). Nos itens “b”, “c” e “d”, era esperado que, ao encontrarem as 10ª, 17ª e 46ª figuras, os alunos identificassem a relação entre as setas verdes para cima com os números ímpares e entre as setas vermelhas para baixo e as posições pares. Na letra “e”, esperava-se que os alunos se utilizassem da terminologia matemática, por exemplo, registrando que os números pares são setas vermelhas para baixo e os ímpares são setas verdes para cima.

Uma escada é construída da seguinte forma:



Na figura acima ela possui 4 degraus, com 12 quadrados no total.

- Desenhe uma escada com 2 degraus. Quantos quadrados são necessários para construir essa escada?
- Quantos quadrados são necessários para construir uma escada de 8 degraus?
- Quantos quadrados são necessários para construir uma escada de 32 degraus?
- Encontre a regra que relaciona o número de quadrados de uma escada com o número de degraus da mesma.

*Figura 8: Atividade 7*

Na atividade 7, houve a opção por abordar a decomposição dos elementos da sequência desenhada, uma escada com quatro degraus. A identificação de que essa escada era composta por 12 quadrados estava informada por escrito e no próprio desenho. O propósito era que os alunos identificassem o padrão de cada degrau que formava a escada, ou seja, a identificação de que um degrau era composto por três quadrados.

A letra “a” era um pouco diferente das atividades anteriores, que solicitavam a identificação do(s) próximo(s) elemento(s), pois ela solicitava que o aluno pensasse em um elemento anterior ao apresentado. Ao apresentar uma escada com quatro degraus e solicitar informações sobre uma escada com dois degraus, esperava-se que os alunos desmembrassem a escada em degraus e os degraus em quadrados, identificando a relação entre a quantidade de quadrados e a quantidade de degraus na proporção de 3 para 1. Esperava-se que os alunos utilizassem a operação inversa, ou seja, identificassem o elemento solicitado na própria representação da escada apresentada, reduzindo-a a metade. O intuito principal era permitir que os alunos identificassem a quantidade de quadrados a cada degrau e, portanto, a regra de formação da sequência.

Na letra “b”, esperava-se que os alunos construíssem a escada com oito degraus, possibilitando descobrir quantos quadrados eram necessários nessa situação, oportunizando novamente que os alunos percebessem a relação entre as quantidades de degraus e quadrados. Havia, também, a possibilidade de análise proporcional, dobrando a escada e seus elementos: “se uma escada com quatro degraus tem 12 quadrados, uma escada com oito degraus (o dobro de degraus) tem o dobro de quadrados, ou seja,  $12 \cdot 2 = 24$ ”.

A letra “c” novamente solicitava a quantidade de quadrados para um número maior de degraus, 32. Seria possível desenhar e encontrar a resposta, mas o esperado era de que os alunos utilizassem alguma relação de proporção entre a quantidade de degraus e a quantidade de quadrados. Esperava-se por respostas baseadas na relação proporcional de “1 degrau tem 3 quadrados, então, 32 degraus têm  $32 \cdot 3$  quadrados” ou na relação proporcional de “4 degraus têm 12 quadrados; para 32 degraus, que são 8 vezes mais degraus ( $4 \cdot 8 = 32$ ), são 8 vezes mais quadrados ( $12 \cdot 8 = 96$ )”.

Na letra “d”, era esperado que os estudantes manifestassem a relação entre as quantidades de degraus e de quadrados (para cada degrau, três quadrados) e chegassem à escrita algébrica literal “ $q = 3 \cdot d$ ” ( $q$  = quantidade de quadrados e  $d$  = quantidade de degraus) ou que expressassem, de alguma forma, que a quantidade de quadrados era múltipla de três.

Observe a sequência a seguir:



- Qual a próxima figura? Desenhe.
- E qual a seguinte figura? Desenhe.
- Observando a sequência, quantos quadradinhos tem cada figura?
- Quantos quadradinhos tem a 6ª figura?
- E a 7ª? E a 8ª?
- Quantos quadradinhos tem uma figura numa posição qualquer?
- Escreva a regra de formação dessa sequência.

Figura 9: Atividade 8

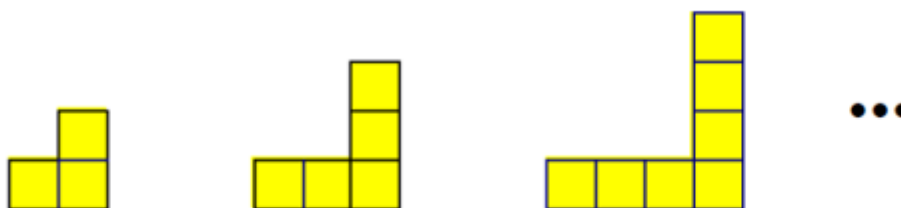
Na atividade 8, as letras “a” e “b” solicitavam as duas figuras seguintes às apresentadas na situação, ou seja, os dois elementos seguintes nas 4ª e 5ª posições. Para obter esses elementos, deve-se acrescentar 2 quadrados empilhados verticalmente a cada posição (a altura não ultrapassa duas linhas), ou seja, obteremos 8 quadrados empilhados em duas linhas de quatro quadrados na 4ª posição e, posteriormente, 10 quadrados empilhados em duas linhas na 5ª posição.

Na letra “c”, foi solicitado que os alunos indicassem a quantidade de quadrados em cada figura. Esperava-se que os alunos indicassem as quantidades de quadrados desenhados nos três primeiros elementos desenhados (3, 4 e 6) e nos dois elementos identificados por eles nas letras “a” e “b” (8 e 10) a fim de identificar a relação existente entre o número da posição da figura e a quantidade de quadradinhos nesta posição – o dobro.

Nas letras “d” e “e”, esperava-se que o aluno identificasse a relação entre a quantidade de quadrados e o número da posição da figura e, então, sem desenhar, determinasse a relação: para encontrar a quantidade de quadradinhos, de acordo com o número da posição da figura, deve-se multiplicar o número da posição por 2. Assim, a quantidade de quadrados das 6ª, 7ª e 8ª figuras seriam  $6.2=12$ ,  $7.2=14$  e  $8.2=16$ .

Nas letras “f” e “g”, esperava-se que os alunos expressassem por meio da linguagem algébrica, podendo chegar na resposta  $q = 2.p$  ( $q$  = quantidade de quadrados,  $p$  = número posição da figura). Na letra “f”, imaginava-se que os alunos pudessem explicar que a cada posição, dois quadrados eram acrescentados, ou, ainda, que multiplicar o número da posição por dois, resultaria na quantidade de quadrados.

Observe a sequência de figuras abaixo:



- Desenhe a próxima figura da sequência. Quantos quadradinhos ela tem?
- Desenhe a 5ª figura da sequência. Quantos quadradinhos ela tem?
- Construa uma tabela relacionando a posição de cada figura com o seu número de quadradinhos.
- A 11ª figura tem quantos quadradinhos?
- E a 17ª figura?
- Como descobrir a quantidade de quadradinhos de qualquer figura da sequência? Escreva uma regra.

Figura 10: Atividade 9

Na última atividade 9, as letras “a” e “b” solicitavam os desenhos das próximas figuras (4ª e 5ª posições) e a quantidade de quadrados de cada uma. Esperava-se que os alunos desenhassem e conseguissem identificar o padrão da sequência, relacionando o número da posição da figura com a quantidade de quadrados dela.

Na letra “c”, era esperado que eles associassem a quantidade de quadrados com número da posição da figura e foi pedido que construíssem uma tabela com a intenção de facilitar a visualização dessa relação.

Nas letras “d” e “e”, esperava-se que, analisando a tabela, conseguissem identificar a quantidade de quadrados nas figuras de posições 11 e 17.

Na letra “f”, era esperado que os alunos indicassem como descobrir a quantidade de quadrados para uma figura qualquer e quais relações usaram para determinar a quantidade de quadrados. Por exemplo, para descobrir a quantidade de quadradinhos “fazemos a posição duas vezes mais um”. Ou seja,  $q = 2.p + 1$ , que era resposta esperada na forma algébrica literal ( $q$  = quantidade de quadrados e  $p$  = posição da figura).

O Capítulo 5 traz as análises e discussões a respeito das resoluções dos alunos à luz da TCC.

## Capítulo 5: Análise e Discussões

Neste capítulo, são apresentadas as análises das resoluções de onze alunos do 8º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública de Canguçu/RS acerca de um conjunto de situações-problemas, distribuídas em nove atividades, que explorava o estabelecimento de relações e comparações entre expressões numéricas e padrões geométricos (FIORENTINI *et al.*, 2005).

Além das resoluções registradas nas folhas de atividades disponibilizadas para a turma (Apêndice B), são considerados, para fins de análise, os registros da professora-pesquisadora sobre conversas e explicações verbais dos alunos sobre suas resoluções. As situações-problema foram resolvidas individualmente pelos alunos e, posteriormente aos registros nas folhas de atividades, foram possibilitadas discussões no grande grupo – que não resultaram em modificações nas respostas. Nenhuma das resoluções sofreu intervenção da professora-pesquisadora.

A cada uma das situações-problema, as resoluções foram analisadas, seguindo os parâmetros esperados como resposta, descritos no capítulo anterior. Foram identificadas diferentes estratégias de resolução desta turma, de modo a agrupar as resoluções pela identificação de semelhanças nas respostas. A partir desse agrupamento, foi possível identificar resoluções representativas dessa turma.

Em seguida, foi feita a análise das resoluções representativas da turma e sua separação entre respostas esperadas e respostas divergentes. As respostas esperadas foram assim classificadas, pois apresentaram as características identificadas no capítulo anterior. As respostas divergentes, ao contrário, não apresentaram o imaginado como resposta. É importante salientar que optou-se por classificar dessa forma, pois não se estava avaliando respostas corretas e/ou erradas, e sim o pensamento manifestado pelos alunos. Inclusive, foram nas respostas divergentes que surgiram manifestações mais claras do pensamento algébrico, nas quais os alunos mostraram ter noções algébricas mesmo sem a representação através da escrita formal.

Por fim, estabeleceu-se a discussão dessas análises das resoluções representativas a fim de identificar as manifestações de invariantes operatórios e de representações do CCA.

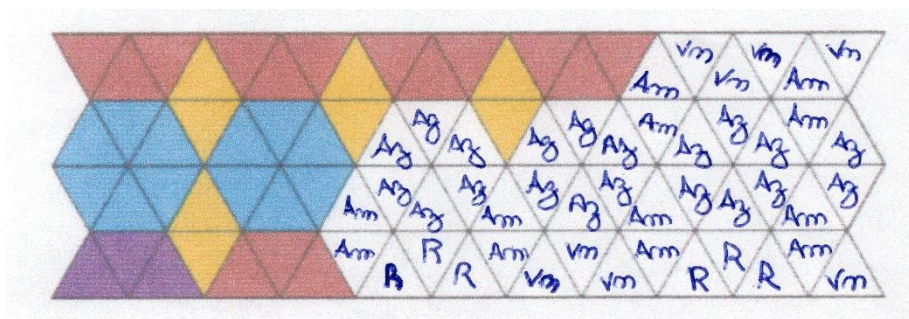
A atividade 1 apresentava uma malha a ser pintada e completada de acordo com a sequência de cores previamente estabelecida (p. 44, Figura 2). Foram selecionadas e analisadas as resoluções representativas da turma (Figuras 11 a 15) para essa primeira atividade.

A primeira resolução representativa esperada, com a malha pintada de acordo com o padrão, foi identificada como resposta esperada (E1-1, Figura 11).



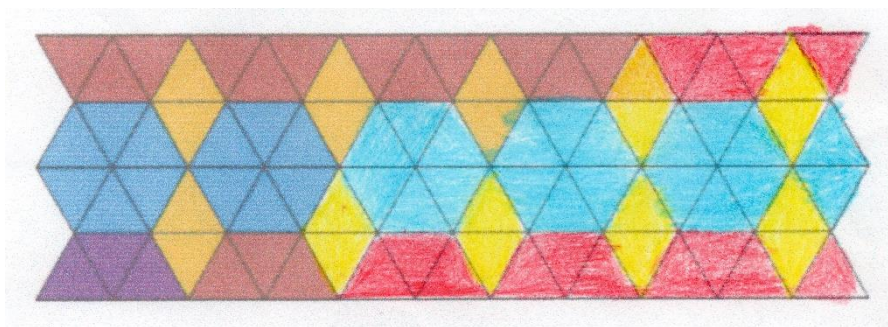
*Figura 11: resposta esperada E1 - 1*

A Figura 12, também é uma resolução representativa esperada, porém com representação diferente da anterior. Nela, o aluno escreve as iniciais das cores correspondentes ao invés de pintar a malha.



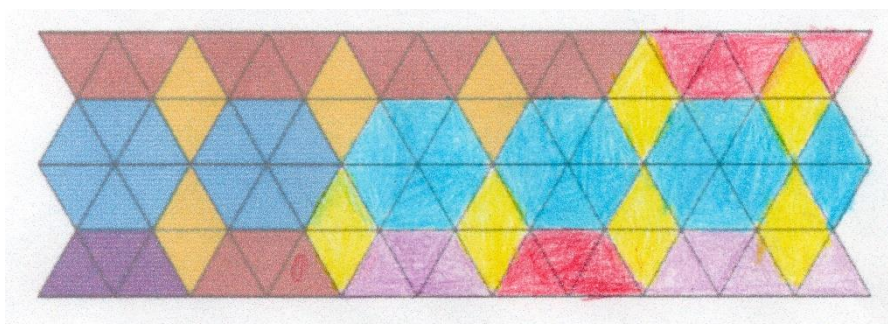
*Figura 12: resposta esperada E1 - 2*

As resoluções representativas a seguir, diferenciaram-se na linha de baixo da malha. A primeira resposta divergente (Figura 13) teve todos os trapézios de baixo pintados na cor vermelha, igual aos da linha de cima. Isso indica que o aluno não identificou o padrão da última linha (trapézio roxo, trapézio vermelho, trapézio roxo, ...) mas repetiu o da primeira.



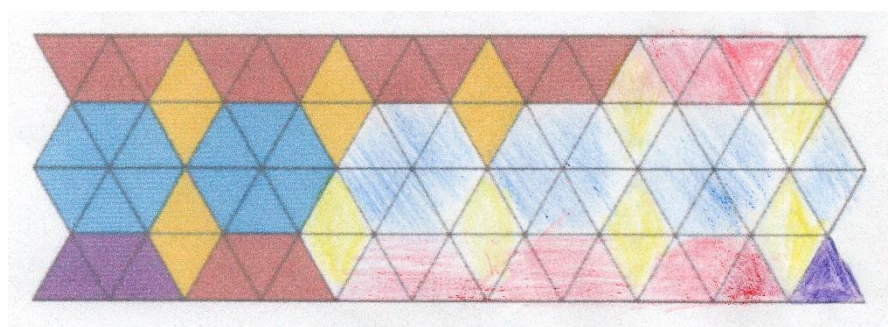
*Figura 13: resposta divergente D1 – 1*

A resposta divergente da Figura 14, assim como a anterior, tem uma sequência de cores dos trapézios da parte de baixo diferente da esperada. O aluno, ao invés de pintar o último triângulo que “sobrou” ao final da malha de vermelho, seguiu pintando de roxo.



*Figura 14: resposta divergente D1 - 2*

A resposta divergente a seguir (Figura 15) tem um modo diferente das anteriores e da resposta esperada. O aluno verbalizou que “criou” seu próprio padrão para os trapézios da parte de baixo, pintando todos de vermelho; o último triângulo que sobrou, o aluno pintou de roxo. Assim, segundo ele, o padrão utilizado é de trapézios roxos nas pontas da malha e trapézios vermelhos entre os roxos.



*Figura 15: resposta divergente D1 - 3*

A atividade 1 ainda apresentava uma segunda questão sobre as formas geométricas identificáveis na malha. A ideia era que a identificação das figuras formadas a partir das cores auxiliaria na pintura do padrão, porém, as respostas não indicaram essa relação. Alguns alunos identificaram somente os triângulos, e outros perceberam que a partir dos triângulos eram formados hexágonos, trapézios e losangos, mas isso não influenciou na pintura, porque mesmo tendo pintado os trapézios, losangos e hexágonos com cores diferentes, apenas identificaram os triângulos que os compõem.

A atividade 2 era composta por cinco sequências figurais, distribuídas em itens, do “a” até “e”. A atividade solicitava que os alunos descobrissem o próximo e esperava-se que esses elementos fossem representados de alguma forma (desenhos, cores, escrita, etc.). Com essa atividade, esperava-se que os estudantes identificassem o padrão das sequências, mas desenhassem apenas o elemento seguinte, independente do padrão ser formado por um ou mais elementos.

Foram identificadas, então, quatro resoluções representativas para a atividade 2. Pode-se identificar, então, três tipos de regras de ação utilizadas nessa atividade: dos alunos que entendem as ideias de sequência, padrão e elementos e suas distinções (E2-1, Figura 16); dos alunos que não diferenciam o padrão dos elementos (D2-1, Figura 17 e D2-2, Figura 18); e do aluno que cria sua própria sequência (D2-3, Figura 19), ou seja, não entendeu que existe padrões a serem seguidos nas sequências apresentadas ou entendeu e tentou mostrar que poderia criar outros padrões e outras sequências.

A resolução representativa esperada (E2-1, Figura 16), tem-se apenas o desenho do próximo elemento, podendo indicar a compreensão e a diferenciação das ideias de elemento e padrão:

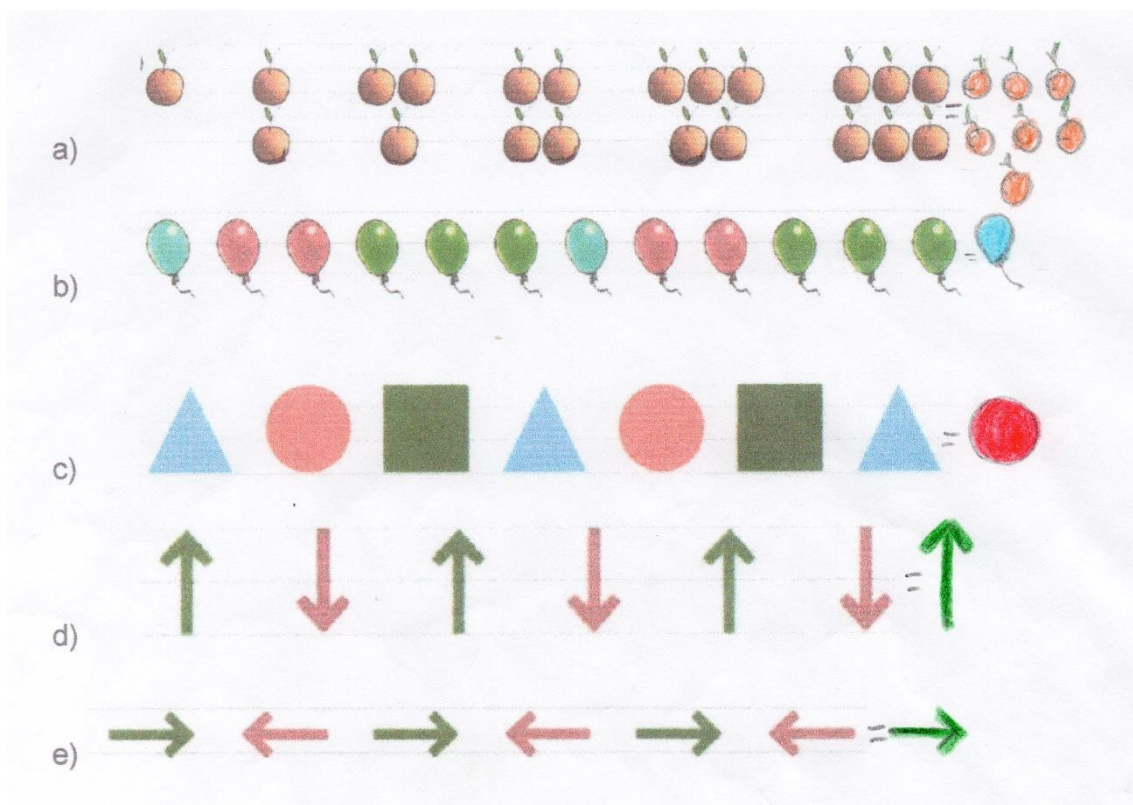


Figura 16: resposta esperada E2 - 1

Entre as resoluções representativas divergentes, na primeira resposta divergente (D2-1, Figura 17), é importante destacar o tipo de representação utilizada pelo estudante. Nos itens “a” e “b”, ele percebeu que não importava se utilizasse as cores ou as formas, pois mesmo representando apenas uma das duas características, conseguiria expressar seu entendimento do padrão desta sequência. Como pode-se observar no item “b”, o estudante não desenhou os balões, apenas representou com as cores de cada balão – a troca da cor vermelha por laranja foi devido à falta de opção de lápis de cor vermelho, conforme conversa com a professora-pesquisadora.

Pode-se notar que o estudante desenhou o padrão de formação completo de cada sequência nas letras “b” (padrão de balões coloridos, um azul, dois vermelhos e três verdes), “d” (padrão de setas coloridas: uma seta verde para cima, uma seta vermelha para baixo) e “e” (padrão de setas coloridas: uma seta verde para direita, uma seta vermelha para esquerda).

O item “c” apresenta uma diferença destas, pois a sequência foi continuada com três elementos, sendo que o padrão também era formado por três elementos, porém, o aluno não desenha o padrão. A resposta possível, que

manteria a regra de ação utilizada na resolução das letras “b”, “d” e “e”, seria desenhar o padrão repetido na sequência, entretanto, a repetição do padrão completo modificaria a sequência ao colocar dois triângulos azuis juntos. O fato da resposta apresentar três novos elementos desenhados pelo aluno, e não apenas o círculo e o quadrado que completariam a estrutura de repetição do padrão da sequência, permite inferir que o aluno, assim como diversos colegas, possa ter interpretado o padrão ser formado por três elementos com a necessidade de desenhar três elementos.

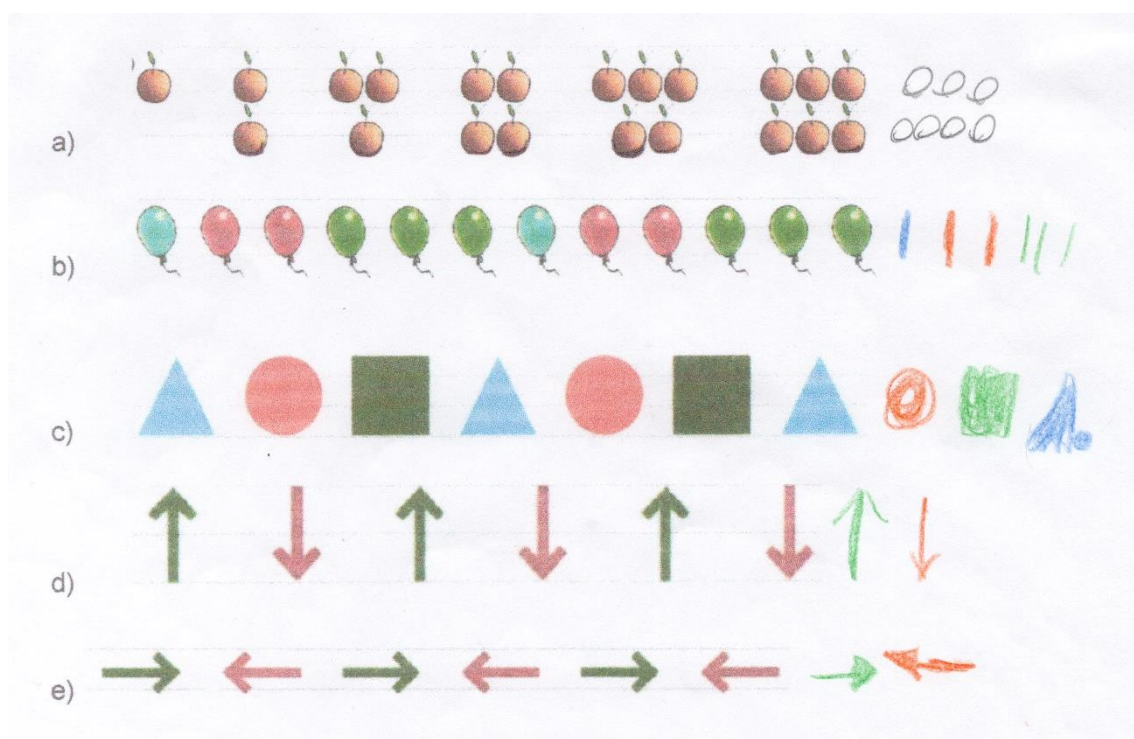


Figura 17: resposta divergente D2 - 1

A resolução representativa a seguir (D2-2, Figura 18) é divergente da esperada. No item “a”, observa-se que o aluno apresentou dois tipos de representações, desenhando as sete laranjas e colocando também o número 7 ao lado. Na letra “b”, o estudante não desenhou apenas o próximo elemento da sequência como pede o enunciado, mas apresentou duas vezes o padrão da sequência, repetindo duas vezes a sequência com um balão azul, dois vermelhos e três verdes. Nos demais itens, o aluno dá continuidade à sequência desenhando dois elementos. Pode-se perceber que existe um tipo de regra de ação na resposta desse aluno, ele segue um modo de fazer próprio, repetindo

sempre dois elementos da sequência. Pode-se inferir que, na letra b), ele tenha repetido duas vezes o padrão, por interpretá-lo como elemento.

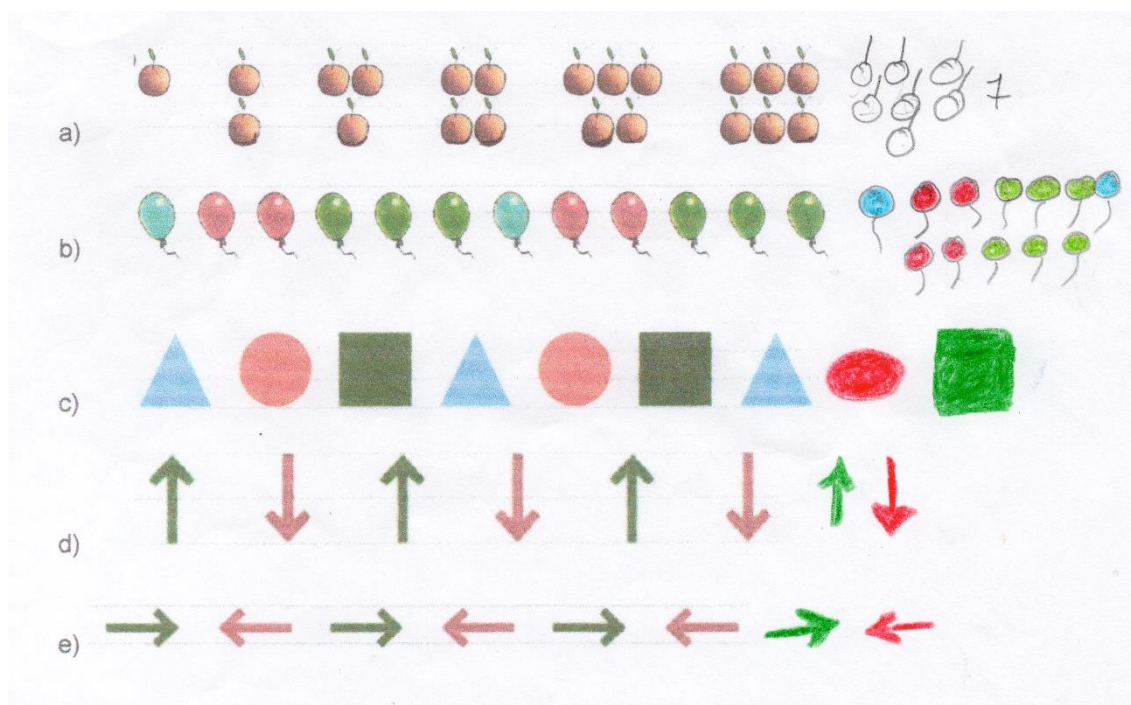
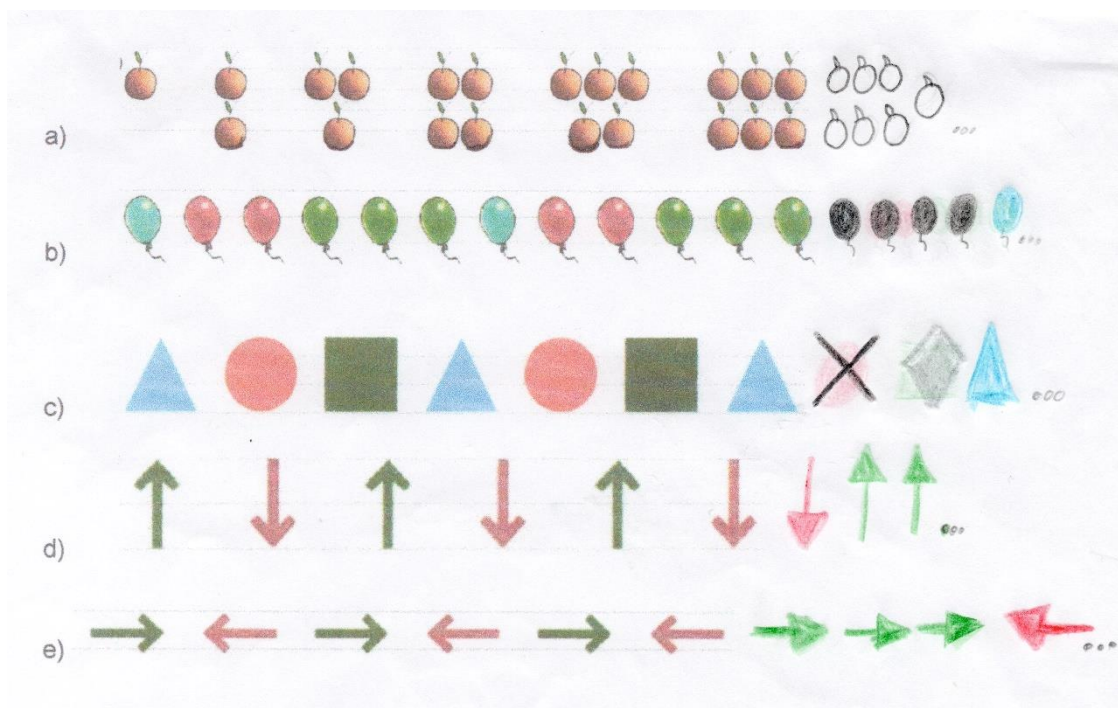


Figura 18: resposta divergente D2 - 2

A resolução representativa a seguir (D2-3, Figura 19) também é divergente da esperada, pois o estudante entende que pode criar sua própria sequência, que os elementos dados e a ordem em que são colocados não determinam como deve ser a continuidade da sequência. Por exemplo, na letra “b”, antes de continuar a sequência com o balão azul, o aluno desenhou quatro balões pretos, criando outra sequência a partir da dada.

Na letra “c”, ele desenhou um losango preto e um triângulo azul, mas é possível perceber que ele identificou a sequência original, pois ele chegou a desenhar o círculo vermelho (resposta esperada), mas o marcou com um risco em x, para poder criar seu próprio padrão. Na letra “d”, criou uma sequência na qual as setas começariam alternadas uma para cima verde e outra para baixo vermelha e, em determinado momento passariam a ser duas verdes para cima e duas vermelhas para baixo. E, no item “e”, o aluno coloca três setas verdes e uma vermelha, não mostrando qual seria seu padrão, mas sem seguir a resposta esperada. Pode-se inferir que estudante entendeu as ideias de sequência, elementos e padrão e, entendendo, criou os seus próprios.



*Figura 19: resposta divergente D2 - 3*

As respostas divergentes da atividade 2 podem ter sido influenciadas pela letra “a”, pois o próximo elemento a ser desenhando seriam sete laranjas, podendo fazer com que os alunos sentissem a necessidade de desenhar mais elementos para os próximos itens também. Porém, a atividade 4 não corrobora com essa inferência.

A atividade 3 tinha o objetivo completar as lacunas com os números das sequências, identificando padrões numéricos. Não foram apresentados erros nessa atividade, todos os 11 alunos completaram corretamente os cinco itens de “a” até “e”. A seguir, tem-se a resolução representativa (E3-1, Figura 20).



*Figura 20: resposta esperada E3 - 1*

A atividade 4, assim como a atividade 2, era composta por cinco itens, do “a” até o “e”, que solicitavam o próximo elemento que continuava as sequências

figurais. Com essa atividade, esperava-se que os estudantes identificassem o padrão das sequências e desenhassem o elemento seguinte (ou descrevessem). Esta atividade apresentou um maior número de resoluções representativas divergentes comparada com a atividade 2.

Na resolução representativa esperada (E4-1, Figura 21), o estudante desenhou apenas o próximo elemento de cada sequência.

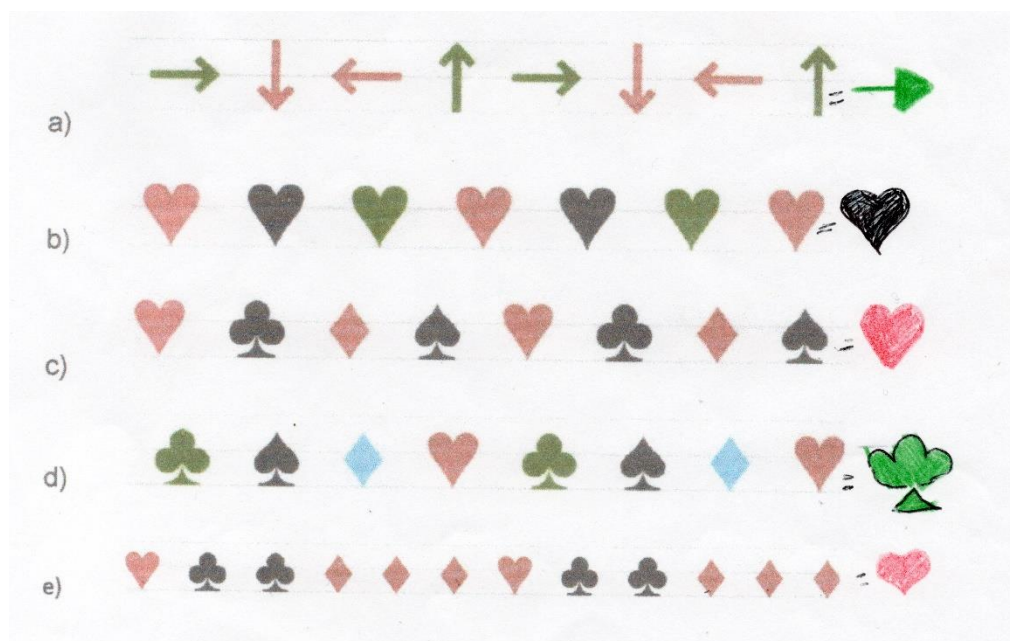


Figura 21: resposta esperada E4 - 1

Na primeira resolução representativa divergente (D4-1, Figura 22), o estudante deu continuidade às sequências, desenhando todos os elementos que formavam o padrão de formação das sequências, com exceção do item “b”. Neste item, o aluno repetiu o coração vermelho, entendendo o próximo elemento como as três cores que se repetiam, sem dar importância para o último elemento que já estava desenhado na atividade. Infere-se que o estudante necessitava desenharm todo o padrão de formação da sequência, mesmo repetindo algum elemento, como fez na letra “b”.

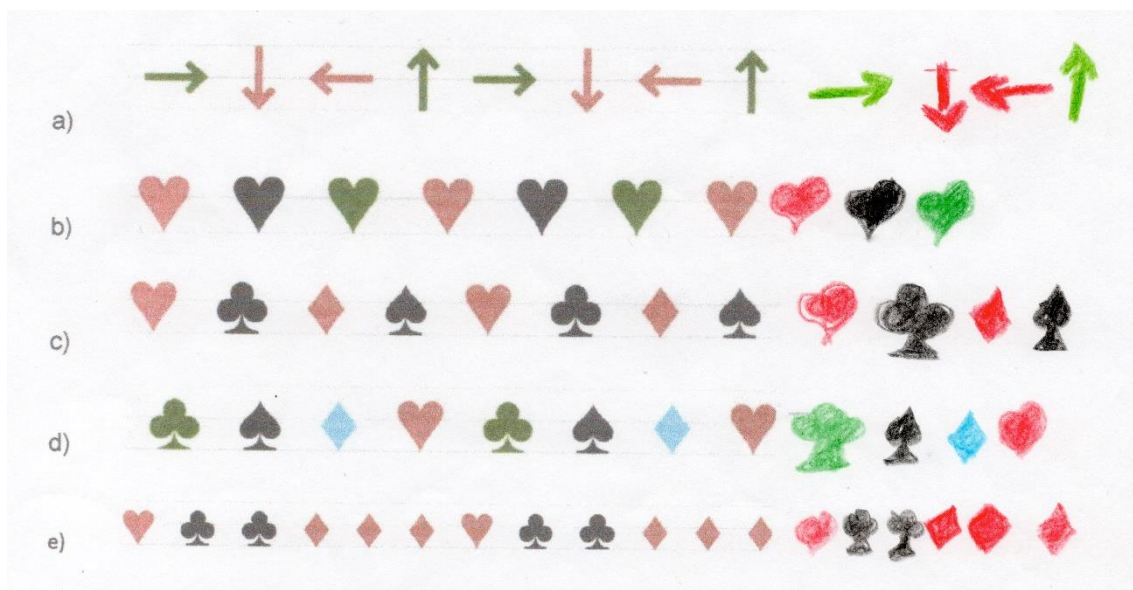


Figura 22: resposta divergente D4 - 1

Na resolução representativa divergente a seguir (D4-2, Figura 23), tem-se um tipo de representação diferente. É possível inferir que o estudante entendeu que não havia necessidade de representar a forma e a cor ao mesmo tempo nos itens “b”, “d” e “e” em que o aluno representou apenas com as cores, pois não se repetiam nenhum formato de mesma cor. Já nas letras “a” e “c”, não pôde seguir essa ideia, pois havia direções, formas ou cores que se repetiam. O aluno, com exceção do item “b”, dá continuidade à sequência a partir do desenho de três elementos, independentemente da quantidade de elementos distintos que formam o padrão. Analisando as quantidades de elementos que formam os padrões das sequências e as resoluções do aluno, identifica-se que: nas sequências cujos padrões eram formados por quatro elementos distintos, o aluno desenhou os próximos três; na sequência cujo padrão era formado por três elementos distintos, desenhou os próximos dois.

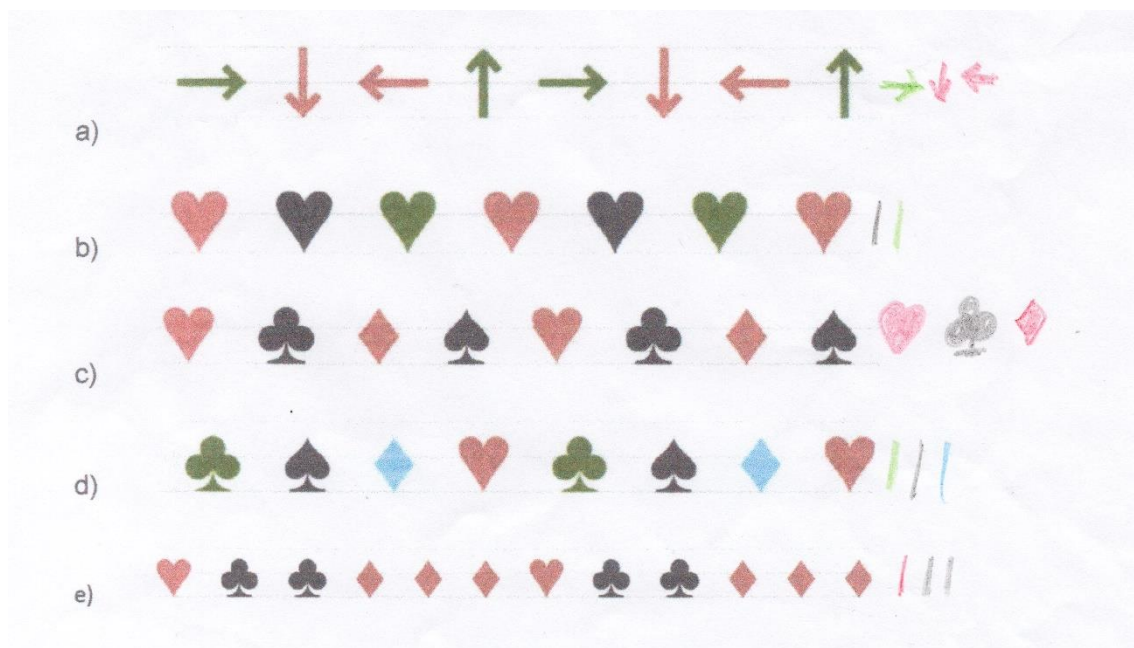


Figura 23: resposta divergente D4 - 2

Na resolução representativa divergente a seguir (D4-3, Figura 24), na letra “a”, o aluno colocou o próximo elemento como uma seta vermelha para baixo, mas, o próximo elemento seria a seta verde para a direita. Infere-se que a intenção era desenhar o padrão de formação completo. As letras “b”, “c” e “d” apresentam resoluções com estrutura parecida a regra de ação aplicada na atividade anterior, nas quais foram desenhados os três próximos elementos da sequência. Na letra “b”, o aluno desenhou três elementos, mesma quantidade de elementos do padrão. Mesmo que, nas letras “c” e “d”, os padrões de formação fossem compostos com quatro elementos, acredita-se que a regra de ação desta resolução representativa equivalesse a desenhar os três próximos dos elementos das sequências, com exceção das letras “a” e “e”.

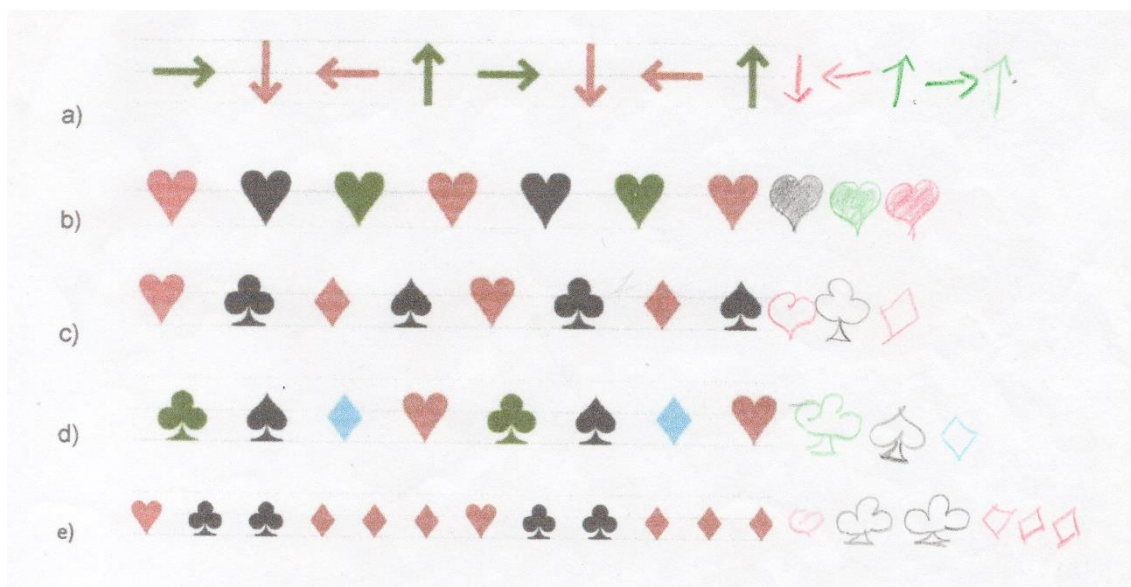


Figura 24: resposta divergente D4 - 3

A próxima resolução divergente (D4-4, Figura 25) apresenta regra de ação própria. Destaca-se no registro da resolução dois fatos novos e inesperados (ver na Figura 25 os destaques circulados no item “a” e repetidos nos demais): o aluno identificou e delimitou os padrões de formação e colocou reticências indicando a continuidade das sequências em todos os itens. Também em todos os itens, o aluno desenhou sempre a mesma quantidade de elementos seguintes que a quantidade de elementos do padrão.

Nas letras “a”, “c”, “d” e “e”, o aluno desenhou o padrão completo. Apenas no primeiro item ele utilizou as duas características para definir o padrão. Nas demais, ele manteve a sequência de formas, mas modificou a sequência de cores do padrão que ele desenhou. Na letra “b”, ele desconsiderou a característica definidora do padrão da sequência, a cor, e desenhou três corações (forma) azuis – uma cor que ele introduziu.

Ele explicou para a professora-pesquisadora que os próximos elementos, poderiam ser diferentes da parte desenhada da sequência apresentada na folha da atividade e, assim, os elementos seguintes poderiam ser inventados por ele. Essa resolução divergente da esperada gerou uma discussão interessante com a turma. Os colegas tentaram explicar que o padrão já estava pronto, que ele não poderia criar um porque o próximo elemento da sequência já existia. Mesmo ouvindo os colegas, o estudante manteve seu registro e continuou utilizando sua regra de ação em outras atividades.

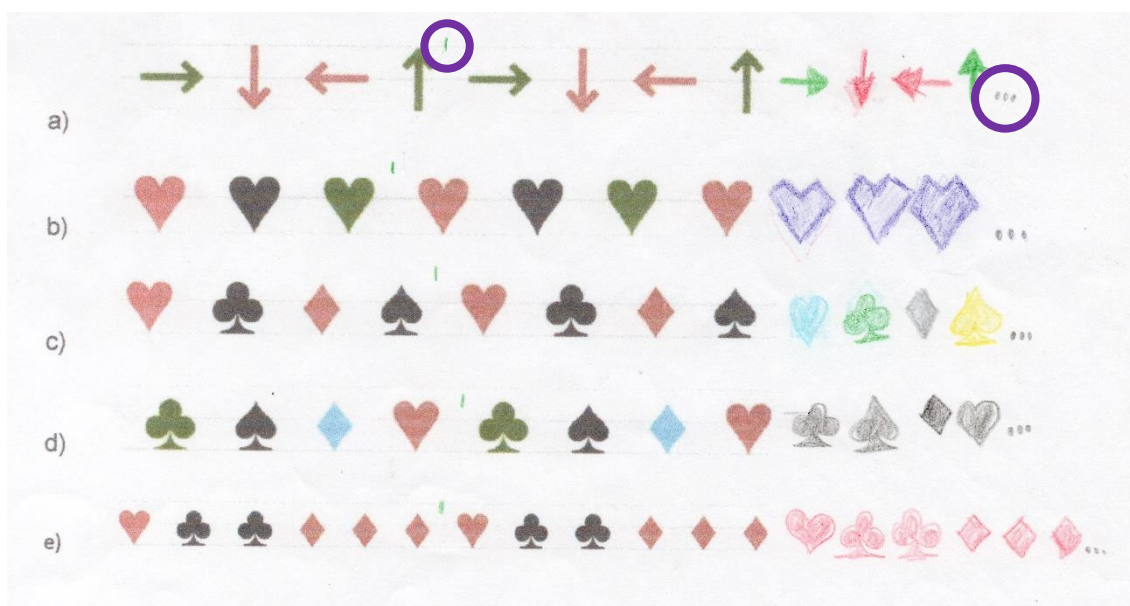


Figura 25: resposta divergente D4 – 4

A atividade 5 era composta por uma sequência figural, a respeito da qual foram formuladas cinco questões. A atividade solicitava que os alunos respondessem as questões a fim de encontrar: os próximos dois elementos – item “a”; três elementos seguintes, em determinadas posições maiores – itens “b” e “c”; a relação entre os números das posições ocupadas pelos quadrados – item “d”; e a regra de formação da sequência – item “e”. Esperava-se que esses elementos fossem representados de alguma forma (desenhos, cores, escrita, etc.). Analisando as resoluções da turma, foram identificadas, então, três resoluções representativas.

A resposta esperada para a atividade 5 é apresentada a seguir (E5-1, Figura 26). Na letra “a”, temos apenas as posições pedidas, desenhadas e identificadas por escrito pelo aluno. Nas letras “b” e “c” os alunos teriam que responder quadrado verde as figuras das posições solicitadas, múltiplas de três. Alguns dos alunos explicaram como chegaram às respostas destes dois itens na letra “d”, como mostra a resposta representativa: “porque é só saber a tabuada do 3”. Quando questionados pela professora-pesquisadora sobre o que seria a “tabuada do três”, os alunos responderam que seriam os números múltiplos de três, podendo assim considerar que a resposta desses alunos correspondeu ao esperado. Na letra “e”, alguns alunos desenharam, outros escreveram em

linguagem corrente e outros abreviaram a escrita, mas todos expressaram a regra como sendo “triângulo, bolinha e quadrado”.

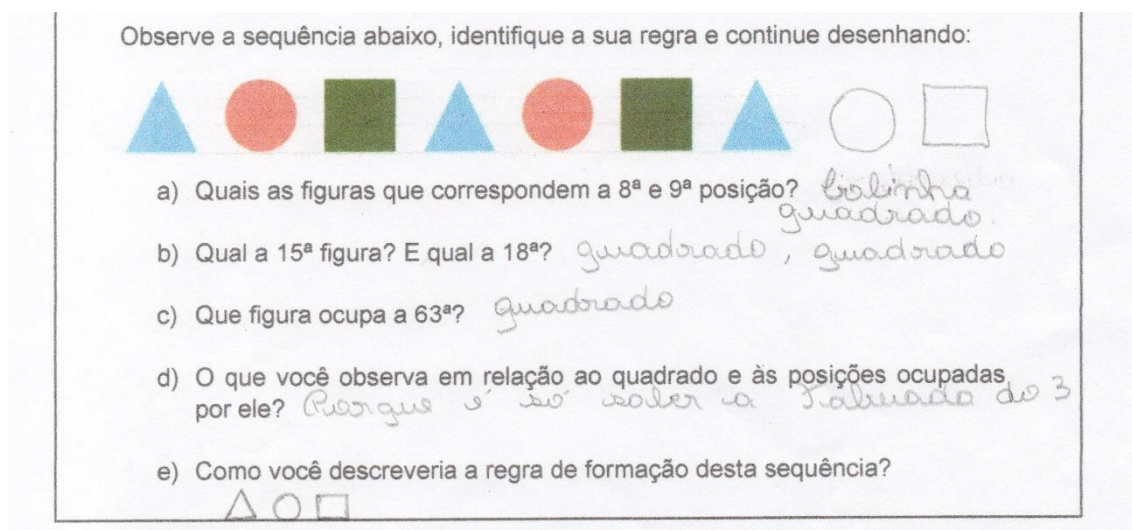


Figura 26: resposta esperada E5 – 1

A primeira resolução representativa divergente da atividade 5 está a seguir (D5-1, Figura 27). Na letra “a”, por exemplo, o aluno respondeu com os desenhos de um triângulo azul e uma bolinha vermelha, mas na sequência original ele acrescentou os desenhos de uma bolinha vermelha e um quadrado verde. Na letra “b”, o estudante desenhou dois triângulos azuis, mas a resposta esperada eram dois quadrados verdes. Percebe-se que não havia compreendido que nas posições múltiplas de três estariam os quadrados verdes. Porém, na letra “c”, o estudante chegou na resposta esperada e, como pode-se observar na letra “d”, entendeu que a regra de formação se dava a partir de múltiplos de três. Quando questionado sobre as letras “a” e “b” o aluno disse que só na letra “c” percebeu que os quadrados eram múltiplos de três, mas não quis arrumar as anteriores. A letra “e” apresentou resolução conforme o esperado.

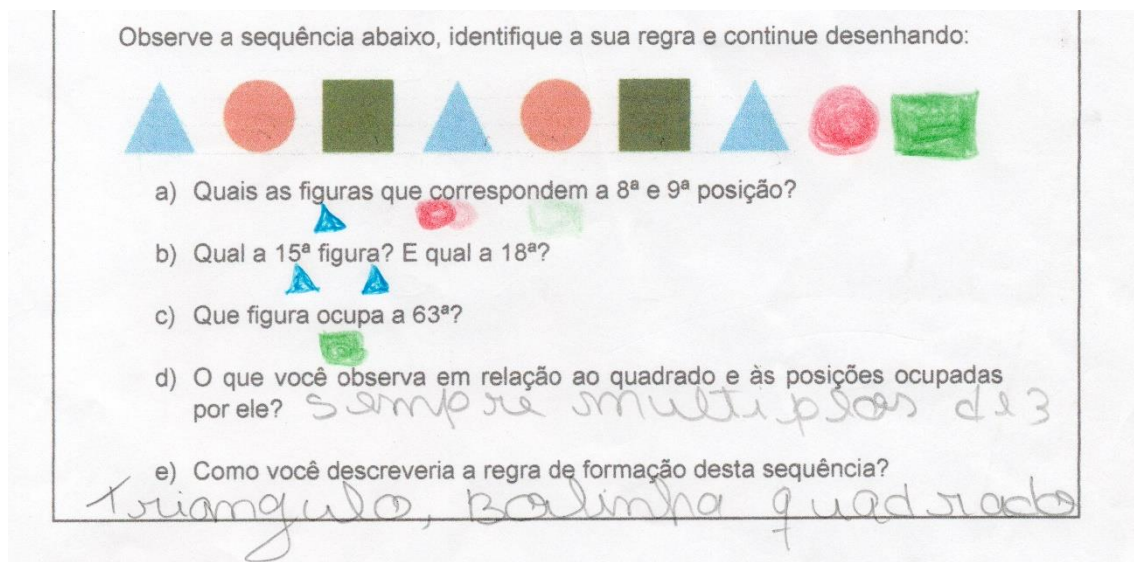


Figura 27: resposta divergente D5 – 1

Foi identificada outra resolução representativa divergente (D5-2, Figura 28). São destaque, na letra “c”, as escritas encontradas: “ $63 = 20 \times 3 + 3$ ” (conforme D5-2) ou “ $63 = 10 \times 6 + 3$ ”. Não era esperado que os alunos fizessem a decomposição do número da posição do elemento 63 a partir da quantidade de figuras que já conheciam dos itens anteriores ou que já estavam desenhadas na sequência original. É uma resolução representativa dos estudantes que escreveram “ $63 = \_\_\_ + 3$ ”. Torna possível a inferência de que os alunos identificaram que os elementos se repetiam aos trios, então decompuseram o número de modo que encontrassem alguma relação com o número 3 e seus múltiplos. Essa resposta também representa a diferenciação dos atributos da sequência, pois apenas as cores foram representadas, uma vez que apenas uma das características (forma ou cor) era necessária para a identificação do padrão.

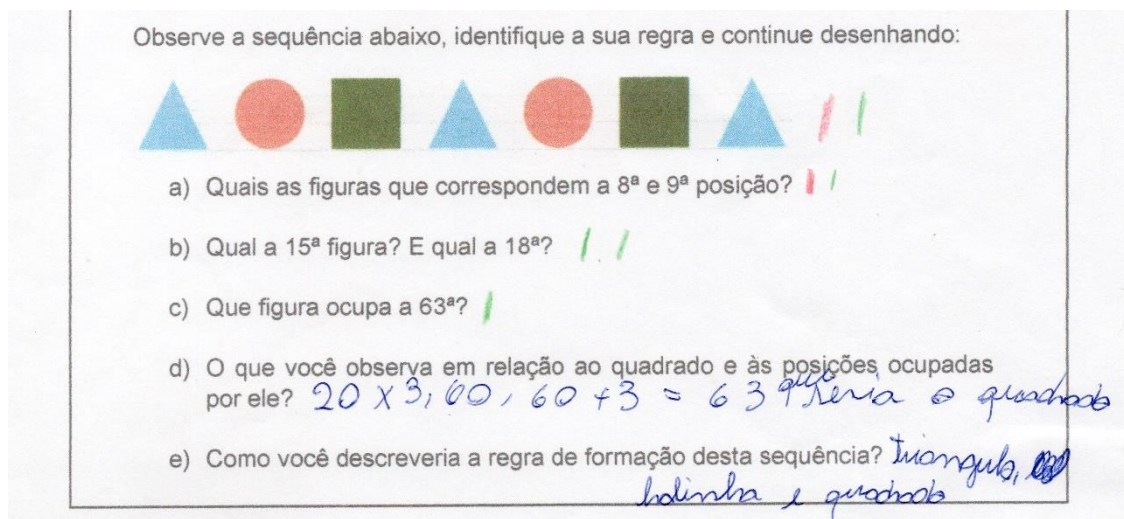


Figura 28: resposta divergente D5 - 2

A atividade 6 era composta por uma sequência figural, a respeito da qual foram formuladas cinco questões. A atividade solicitava que os alunos respondessem as questões a fim de encontrar: os próximos dois elementos – item “a”; três elementos seguintes, em determinadas posições maiores – itens “b”, “c” e “d”; a regra de formação da sequência a partir da relação entre os números das posições ocupadas pelos elementos serem pares ou ímpares – item “e”. Esperava-se que esses elementos fossem representados de alguma forma (desenhos, cores, escrita, etc.). Analisando as resoluções desta atividade, foram identificadas, quatro resoluções representativas.

A resolução representativa esperada está a seguir (E6-1, Figura 29). Nos itens “b”, “c” e “d”, alguns alunos explicaram como chegaram na resposta esperada: “as setas verdes são sempre ímpares”, “as setas vermelhas são pares”, “as setas vermelhas são múltiplos de dois”. Na letra “e”, os alunos escreveram a regra de formação esperada, indicando que as setas vermelhas eram múltiplos de dois, ou que a sequência era composta por setas verdes em posições ímpares e setas vermelhas em posições pares. Também pode-se identificar a diferenciação dos atributos da sequência, pois ora há referência para a cor, ora há referência para a orientação da seta.

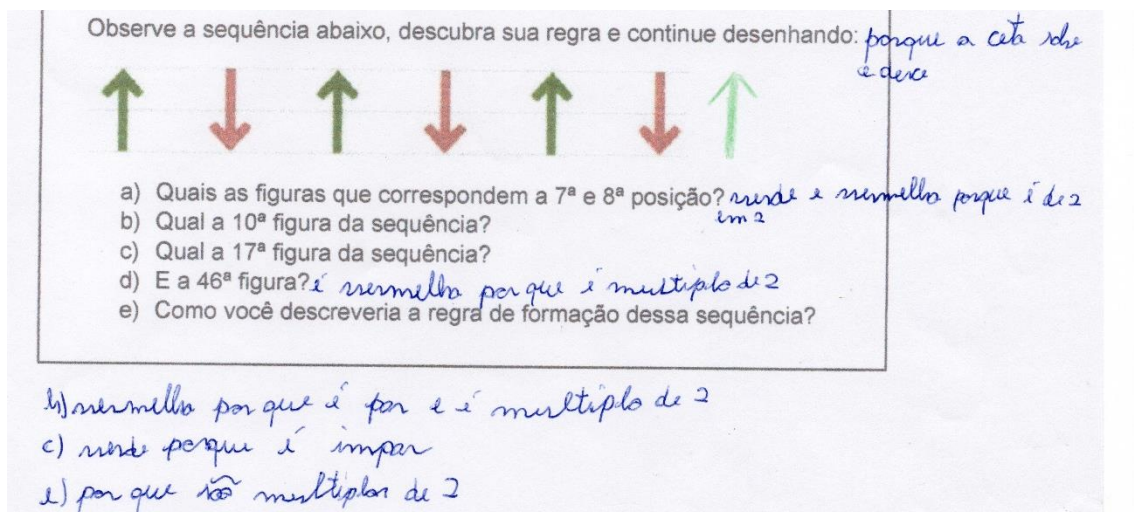


Figura 29: resposta esperada E6 – 1

Segue-se para a análise da resolução representativa divergente (D6-1, Figura 30) que apresenta apenas parte do processo de resolução da situação-problema nos itens “b”, “c” e “d”. Quando questionado sobre o que tinha feito, a explicação do aluno foi de que já haviam seis setas na sequência dada, então, ele apenas calculou quantas setas faltavam para completar a quantidade pedida, e escreveu as posições solicitadas a partir da composição. Porém, não registrou quais eram as setas das posições solicitadas nos itens e disse que não sabia quais eram e preferiu deixar como estava. Infere-se que o aluno parou o registro neste momento porque não conseguiu usar “o que já sabia”, que a posição 10 é encontrada a partir da 6ª posição desenhada, mais quatro elementos. Porém, não houve a identificação que o elemento na 10ª posição seria igual a qualquer posição par. Essa inferência vale para as letras “c” e “d”.

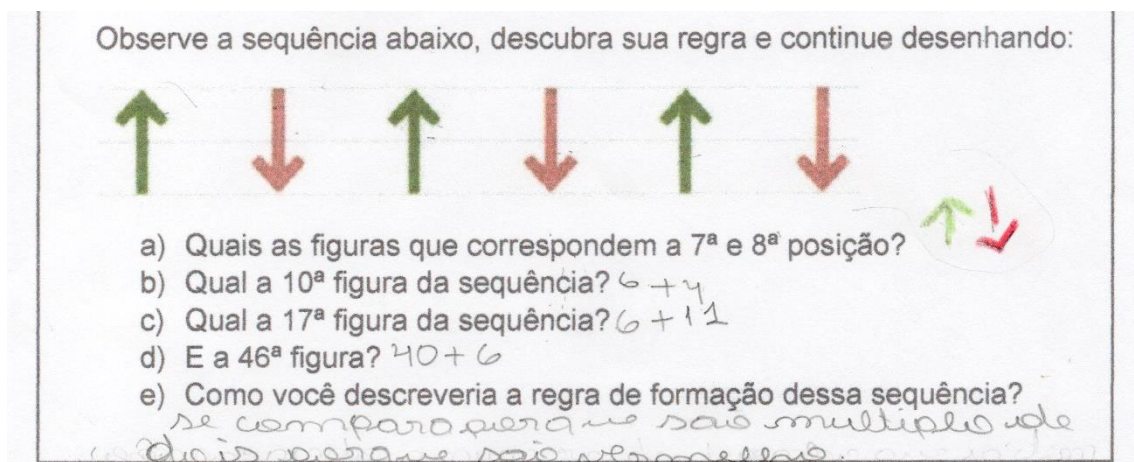


Figura 30: resposta divergente D6 – 1

A seguir, temos outra resolução representativa divergente (D6-2, Figura 31). Na letra “e”, era esperado que os estudantes percebessem que as setas verdes eram ímpares e as vermelhas pares. Porém, a maioria dos estudantes responderam como regra de formação: “sobe e desce” e “para cima, para baixo, para cima, para baixo”, sem relacionar as posições com os números pares e ímpares. Também houve registro escrito “de dois em dois”, porém, sem referência explícita ao padrão.

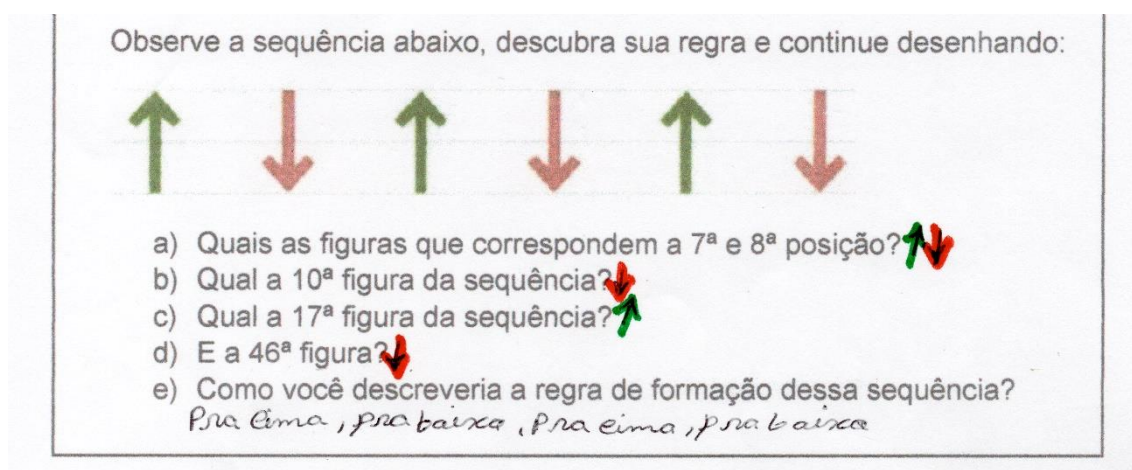


Figura 31: resposta divergente D6 – 2

A última resolução representativa divergente (D6-3, Figura 32), apresenta as explicações do aluno para a tentativa de criação de novos padrões, porém, com a conclusão de que o padrão original não pode ser modificado. Por exemplo, na letra “a”, o aluno argumenta que tentou encontrar outras soluções que não fossem “seta verde e seta vermelha”, mas não conseguiu, e concluiu que talvez não haja outra solução mesmo. Nos itens “b”, “c” e “d”, o aluno explicou que tentou fazer o mesmo, mas não obteve êxito, ou seja, ele encontrou apenas a resposta esperada. Na letra “e”, escreve uma regra de formação, similar a dos colegas “seta para cima verde, seta para baixo vermelha” e diz “são inúmeras possibilidades, mas de uma coisa eu sei, independente de como é formada essa sequência, quando ela se iniciar novamente será com ‘seta verde para cima’, pode ser óbvio mas foi percebendo isso que descartei a sequência das primeiras três figuras lá em cima”. O estudante ainda diz “e se a sequência for apenas com essas figuras ‘seta verde para cima e vermelha para baixo’ sempre serão a base



aparecia de forma explícita, era esperado que os alunos a identificassem para responder às perguntas.

Na letra “a”, um pouco diferente das situações anteriores, esperava-se que os alunos tivessem o pensamento reverso, ou seja, que diminuíssem a escada já apresentada, tirando dois degraus. Todos os alunos chegaram na resposta esperada e identificaram essa posição anterior. Nas letras “b” e “c” havia o intuito de descobrir quantos quadrados eram necessários para construir escadas maiores. Era possível desenhar para descobrir, mas o esperado era de que os alunos multiplicassem o número de degraus por três, pois a cada degrau tem três quadrados. Nestas letras, a maioria dos alunos chegaram na resposta esperada sem desenhar e quando questionados de como encontraram o resultado sem desenho, diziam “é muito fácil, só multiplicar por três; é só fazer a tabuada do três”. Com essas respostas orais, percebeu-se que eles conseguiram compreender a lei de formação dessa sequência. Na letra “d”, solicitava-se que os alunos descrevessem a lei de formação e o esperado era de que chegassem na linguagem algébrica, mas, se conseguissem descrever com suas palavras, também seria considerado esperado dependendo de como o aluno explicou. Foram identificadas quatro resoluções representativas da turma, três esperadas e uma divergente.

Na primeira resposta representativa esperada (E7-1, Figura 33), alguns alunos mostraram suas regras de ações, deixando claro como chegaram nas respostas: na letra “a”, com o desenho da escada, e, nas letras “b” e “c”, com as multiplicações. Aqueles que não deixaram explicitados como chegaram ao resultado, quando questionados responderam que tinham multiplicado os valores dados nas letras “b” e “c” por três para chegar ao número de quadrados. Também é possível perceber, na letra “d”, que no exemplo representativo o aluno entendeu a lei de formação dessa sequência, dizendo que para encontrar a relação entre quadrado e degraus “é só multiplicar o número por 3”, porém não fica claro se é para multiplicar o número de quadrados ou de degraus. Só foi possível compreender que eles queriam dizer que seriam os degraus multiplicados por três, depois de uma conversa com o grande grupo.

Na figura acima ela possui 4 degraus, com 12 quadrados no total.

a) Desenhe uma escada com 2 degraus. Quantos quadrados são necessários para construir essa escada? 6

b) Quantos quadrados são necessários para construir uma escada de 8 degraus?  $3 \times 8 = 24$

c) Quantos quadrados são necessários para construir uma escada de 32 degraus?  $32 \times 3 = 96$

d) Encontre a regra que relaciona o número de quadrados de uma escada com o número de degraus da mesma. é multiplicar o número por 3.

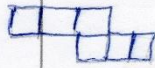


Figura 33: resposta esperada E7-1

A seguir, tem-se outra resolução representativa esperada (E7-2, Figura 34), com um desenho para auxiliar na letra “a”. Nas letras “b” e “c”, o aluno colocou a resposta final, mas bem abaixo na folha tem-se a multiplicação de 32 por 3 que resulta em 96, resposta da letra “c”. Ou seja, podemos identificar que o aluno compreendeu o padrão dessa sequência, entendendo que quando se multiplica por três o número de degraus é encontrado o número de quadrados. Na letra “d”, a resposta desse aluno foi uma das que chegaram mais perto de uma linguagem algébrica, pois ele escreve que a lei de formação é “fazer 3x (três vezes) o número de degraus”, ou seja,  $q = 3 \cdot d$ .

Na figura acima ela possui 4 degraus, com 12 quadrados no total.

a) Desenhe uma escada com 2 degraus. Quantos quadrados são necessários para construir essa escada? 6

b) Quantos quadrados são necessários para construir uma escada de 8 degraus? 24

c) Quantos quadrados são necessários para construir uma escada de 32 degraus? 96

d) Encontre a regra que relaciona o número de quadrados de uma escada com o número de degraus da mesma. Fazer ~~24~~  $3 \times$  o número de degraus



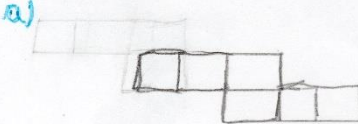
Figura 34: Resposta esperada E7 - 2

Na próxima resolução representativa esperada (E7-3, Figura 35), o aluno respondeu a letra “d” com uma explicação que podemos considerar uma das mais próximas da linguagem algébrica. Ele escreve “é só analisar o exemplo da escada antes do exercício a, com isso podemos bolar a ideia de que é apenas preciso multiplicar o número de degraus determinado por 3, já que foi o número

de *degraus* escolhido para fazer os degraus” – infere-se que o aluno quis dizer que 3 foi o número determinado para a quantidade de *quadrados* necessários para fazer cada degrau. Entende-se que o aluno compreende a relação entre as quantidades de degraus e de quadrados e a regra de formação da escada (sequência de degraus). O aluno mostrou ter pensamento algébrico, apenas não chegou na linguagem formal.

Na figura acima ela possui 4 degraus, com 12 quadrados no total.

- Desenhe uma escada com 2 degraus. Quantos quadrados são necessários para construir essa escada?
- Quantos quadrados são necessários para construir uma escada de 8 degraus?
- Quantos quadrados são necessários para construir uma escada de 32 degraus?
- Encontre a regra que relaciona o número de quadrados de uma escada com o número de degraus da mesma.

a)  6 quadrados

b) 24 quadrados

c) 96 quadrados

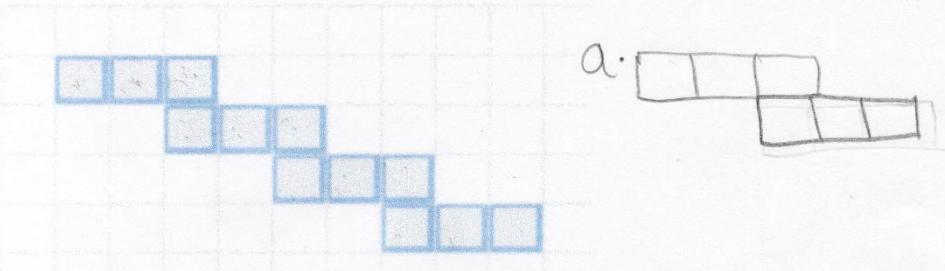
d) É só analisar o exemplo da escada antes do exercício a), com isso podemos brilhar a ideia de que é apenas preciso multiplicar o número de degraus determinado por 3, já que foi o número de degraus escolhido para fazer os degraus.

Figura 35: resposta esperada E7 - 3

Na resolução representativa divergente (D7-1, Figura 36), tem-se apenas na letra “d” diferenças com a primeira resposta esperada (E7-1, Figura 33). Neste item, o estudante responde como lei de formação um exemplo específico para 4 degraus, explicando que deveria multiplicar 3 por 4, pois 3 é o número de quadrados que tem em cada degrau. O aluno entendeu o padrão da sequência, compreendeu a regra de formação, mas não soube dar exemplos genéricos, apenas um numérico já explicitado. Isso permite a inferência de que a

representação com letras não atingiu significação para ele, ou seja, o aluno ainda está limitado às informações numéricas da situação-problema.

Uma escada é construída da seguinte forma:



Na figura acima ela possui 4 degraus, com 12 quadrados no total.

- Desenhe uma escada com 2 degraus. Quantos quadrados são necessários para construir essa escada? 6
- Quantos quadrados são necessários para construir uma escada de 8 degraus? 24
- Quantos quadrados são necessários para construir uma escada de 32 degraus? 36
- Encontre a regra que relaciona o número de quadrados de uma escada com o número de degraus da mesma.

Eu tenho que fazer 3 x 4 para dar pois 4 é do degrau e 3 de quadrados

Figura 36: resposta divergente D7 - 1

A atividade 8 era composta por uma sequência figural, a respeito da qual foram formuladas sete questões. A atividade solicitava que os alunos respondessem as questões a fim de encontrar: os próximos dois elementos – itens “a” e “b”; a sequência numérica correspondente à quantidade de quadrados em cada posição – item “c”; três elementos seguintes, em determinadas posições maiores – itens “d” e “e”; a quantidade de quadrados do elemento de uma posição qualquer – item “f”; e a regra de formação da sequência – item “g”. Esperava-se que esses elementos fossem representados de alguma forma (desenhos, cores, escrita, etc.). Analisando as resoluções da turma, foram identificadas, então, três resoluções representativas.

Segue a resolução representativa esperada (E8-1, Figura 37). Nela, o aluno respondeu todas as letras conforme o esperado, indicando que

compreendeu que a sequência é determinada pelo padrão de “2 em 2”. Na letra “f” para ele descobrir uma posição qualquer bastava “multiplicar por 2”. Mesmo mostrando que tem pensamento algébrico o aluno não formaliza a escrita algébrica.

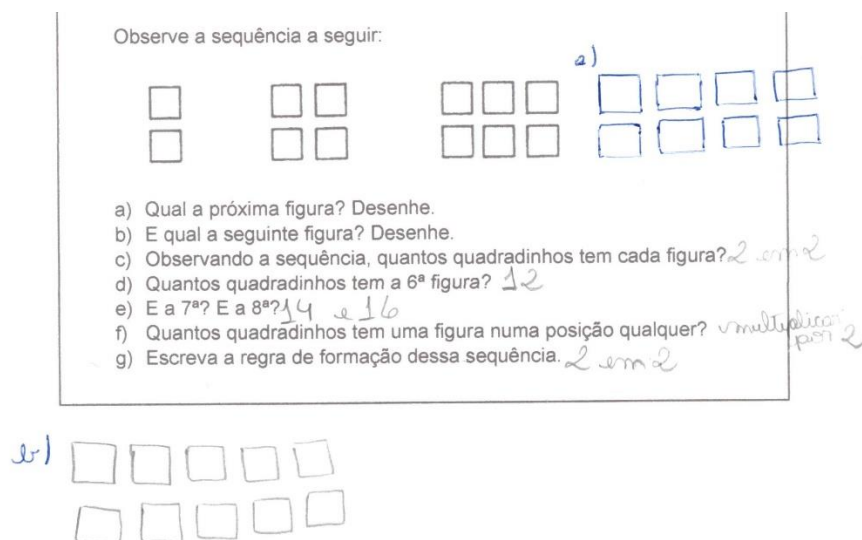


Figura 37: resposta esperada E8 – 1

Na próxima resolução representativa divergente (D8-1, Figura 38), o estudante chegou ao esperado em quase todos os itens, mas, no item “f”, utilizou um exemplo numérico para explicar a regra de formação da sequência. Pode-se perceber que, mesmo entendendo o padrão e a regra dessa sequência, o aluno ainda está ligado à escrita numérica, não tendo alcançado a formalização algébrica, mesmo demonstrando indícios de pensamento algébrico em sua escrita e na fala. Quando foi questionado oralmente o porquê do exemplo da posição 12, respondeu que entendia que para uma posição qualquer precisava dizer qual seria essa posição e que poderia ter dado vários outros valores, já que pede uma posição qualquer. Na letra “g”, escreveu como regra de formação “adição de 2 em 2” ou “multiplicação vezes” – a primeira funciona pensando apenas nos termos da sequência e a segunda relaciona a posição do elemento com a quantidade de quadrados.

Observe a sequência a seguir:

a) Qual a próxima figura? Desenhe.  $\begin{array}{ccc} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{array} = 8$

b) E qual a seguinte figura? Desenhe.  $\begin{array}{cccc} \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \end{array} = 10$

c) Observando a sequência, quantos quadradinhos tem cada figura? *de 2 em 2*

d) Quantos quadradinhos tem a 6ª figura? *12*

e) E a 7ª? E a 8ª?  $7^{\text{a}} = 14$ ,  $8^{\text{a}} = 16$

f) Quantos quadradinhos tem uma figura numa posição qualquer?  $2n = 12 \times 2$

g) Escreva a regra de formação dessa sequência.  
*adição de 2 em 2 ou multiplicação vezes 2*

Figura 38: resposta divergente D8 - 1

Na outra resolução representativa divergente (D8-2, Figura 39), destaca-se as respostas das letras “c” e “f”, pois o aluno respondeu apenas com o número 2, o que não informa nada sobre essa sequência. Quando questionado, disse que para ele estava claro que o padrão era de duas vezes o número de posição (letra f) ou de 2 em 2 (letra c) e que o número 2 apresentado como resposta significava isso nos dois itens. Da mesma forma que a resposta divergente anterior (D8-1, Figura 38), também relacionou a formação da sequência ou pelo termo anterior ou pela relação entre o número da posição e a quantidade de quadrados.

Observe a sequência a seguir:

a) Qual a próxima figura? Desenhe.  $\begin{array}{ccc} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{array}$

b) E qual a seguinte figura? Desenhe.  $\begin{array}{cccc} \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \end{array}$

c) Observando a sequência, quantos quadradinhos tem cada figura? *2*

d) Quantos quadradinhos tem a 6ª figura? *12*

e) E a 7ª? E a 8ª? *14*, *16*

f) Quantos quadradinhos tem uma figura numa posição qualquer? *2*

g) Escreva a regra de formação dessa sequência.  
*Se posi aumenta 2, ou posi multiplica por 2*

Figura 39: resposta divergente D8 - 2

Destaca-se, ainda, sobre a letra “c”, que nenhum dos alunos a interpretou como o esperado, isto é, não houve identificação das quantidades de quadrados em cada elemento via representação da sequência numérica “2,4,6,8,10”.

Entretanto, nos registros e nas falas, interpreta-se que a estrutura da sequência estava presente, apenas, não na representação imaginada. Isso tanto para a letra “c”, quanto para as letras “d” e “e”. A maioria não registrou no papel como tinha chegado às respostas, mas quando questionados, alguns responderam: “como vai de 2 em 2 só podia ser essa resposta”, “só usei a tabuada do 2”, “multiplica por 2, professora”. Foram essas falas que possibilitaram identificar que os alunos entenderam como se dava a formação da sequência e, portanto, como descobrir os quadrados sem precisar desenhá-los.

A atividade 9 era composta por uma sequência figural, a respeito da qual foram formuladas sete questões. A atividade solicitava que os alunos respondessem as questões a fim de encontrar: os próximos dois elementos e a quantidade de quadrados que havia em cada um – itens “a” e “b”; a relação entre o número da posição do elemento e a quantidade de quadrados do elemento – item “c”; a quantidade de quadrados de dois elementos seguintes, em determinadas posições maiores – itens “d” e “e”; a quantidade de quadrados do elemento de um elemento qualquer e a regra de formação da sequência – item “f”; a sentença matemática para uma posição  $p$ . A proposta de construção da tabela, no item “c”, tentava facilitar a visualização da relação entre o número da posição do elemento e a sua quantidade de quadrados. Era esperado que essa tabela pudesse ser utilizada, também, para a resolução dos itens seguintes. Analisando as resoluções da turma, foram identificadas, então, quatro resoluções representativas.

A seguir, tem-se a primeira resolução representativa esperada (E9-1, Figura 40). É importante destacar as várias regras de ação, utilizadas por este aluno para responder os itens, espalhados pela folha de atividade. Nas respostas das letras “a”, “b” e “c”, o aluno desenhou o solicitado no primeiro item e pediu a professora-pesquisadora que considerasse as demais respostas pela tabela acima do último elemento da sequência dada (destaque retangular roxo na Figura 40). Nas letras “d” e “e”, o aluno apresenta uma justificativa e as operações matemáticas que justificariam suas respostas na parte inferior da folha (fora do retângulo com a atividade). Nota-se a tentativa de encontrar elementos desconhecidos a partir dos já identificados. Na letra “f”, na lateral esquerda da folha, sinalizado com a seta, apareceu o registro “fazer  $2x+1$ ” e o aluno seguiu com um exemplo “ $23 \times 2 = 46 + 1 = 47$ ”. Na resposta da letra “g”,

$$\frac{8}{p+2+1}$$

$$\frac{2p-2}{2p+1}$$


NOME:    
TURMA:    
DATA:  

Observe a sequência de figuras abaixo:



Figura 1

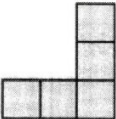


Figura 2

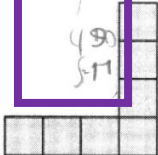


Figura 3

a) Desenhe a próxima figura da sequência. Quantos quadradinhos ela tem? 

b) Desenhe a 5ª figura da sequência. Quantos quadradinhos ela tem? 

c) Construa uma tabela relacionando a posição de cada figura com o seu número de quadradinhos. 2

d) A 11ª figura tem quantos quadradinhos? ~~28~~ 23

e) E a 17ª figura? 33

f) Como descobrir a quantidade de quadradinhos de qualquer figura da sequência? Escreva uma regra.

g) Escreva a sentença matemática para uma posição p.

Page 2 of 7

$$\begin{array}{r} 23 \\ \times 2 \\ \hline 46 \\ + 1 \\ \hline 47 \end{array}$$

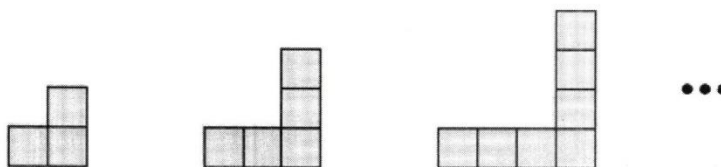
Relacionar com o processo em fig 11-5 = 6 ai  
em fig 12 = 12 : com o resultado de 5 = 11 + 12 = 6 = 72

[illegible]

77

Segue segunda resolução representativa esperada (E9-2, Figura 41). Infere-se que o aluno compreendeu o padrão e a regra de formação da sequência, apenas, ainda utilizou uma linguagem algébrica sincopada para expressar-se, não a literal. Na letra “c”, criou uma tabela com números (bem) diferentes dos solicitados na atividade, mostrando que compreendeu a regra de formação dessa sequência. Na letra “f”, destaca-se o uso da linguagem sincopada pelo aluno ao explicar a regra de formação: escreve “Nº P”. Questionado pela professora-pesquisadora, ele disse que significava o número da posição, mostrando compreensão da relação existente entre número da posição e a quantidade de quadrados. Na letra “g”, em que era solicitada uma “sentença matemática para uma posição p”, o aluno apresentou um exemplo numérico organizado em dois passos: “1º passo: descobrir o número da sua posição”, “2º passo: multiplicar por 2 e adicionar 1”. O exemplo resolvido, fornecido pelo aluno, foi com o número 1.000.000.000.000, mostrando que “pode utilizar números muito grandes que sempre dá certo” – conforme fala do aluno. O aluno também disse que gostaria de colocar o “mais 1” como terceiro passo, mas não deu tempo. Para ele, ficou faltando essa separação, pois seriam três passos a seguir e não dois. Quando questionado se existiria uma fórmula matemática para resolver em qualquer posição, o aluno respondeu: “sim, 2 vezes  $N^{\circ}P + 1$ ”. Destaca-se que, mesmo não escrevendo formalmente seu entendimento, é possível identificar que o estudante manifesta pensamento algébrico.

Observe a sequência de figuras abaixo:



- Desenhe a próxima figura da sequência. Quantos quadradinhos ela tem? 9
- Desenhe a 5ª figura da sequência. Quantos quadradinhos ela tem?
- Construa uma tabela relacionando a posição de cada figura com o seu número de quadradinhos.
- A 11ª figura tem quantos quadradinhos?
- E a 17ª figura?
- Como descobrir a quantidade de quadradinhos de qualquer figura da sequência? Escreva uma regra.
- Escreva a sentença matemática para uma posição  $p$ .

a) 9 QUADRADOS

b) 11 QUADRADOS

|        |   |    |     |      |      |           |
|--------|---|----|-----|------|------|-----------|
| N.º P. | 1 | 5  | 100 | 500  | 1000 | 1.000.000 |
| N.º Q. | 3 | 11 | 201 | 1001 | 2001 | 2.000.001 |

d) 23

e) 35

f) Multiplicar 2 pelo N.º P. e somar mais 1.

g) 1º passo: Descubra o número de sua posição.  
 $1.000.000.000.000$   
 2º passo: Multiplique por 2 e adicione 1.  
 $1.000.000.000.000 \cdot 2 = 2.000.000.000.000 + 1 = 2.000.000.000.001$

Figura 41: resposta esperada E9 - 2

Nas duas resoluções representativas divergentes identificadas (D9-1, Figura 42 e D9-2, Figura 43 a seguir) destacam-se os itens “f” e item “g”, sobre a “regra” e “sentença matemática para uma posição  $p$ ”. As respostas registradas “ $p \cdot p + 1$ ”, que correspondem à expressão  $p^2 + 1$  (visto que  $p \cdot p = p^2$ ), têm significado matemático diferente das regras expressas no item anterior (multiplicar por 2 e somar 1). É possível identificar que esses alunos entendem as duas respostas como iguais, tanto pelas falas sobre suas respostas quanto pela primeira resposta divergente identificada (D9-1, Figura 42). Este aluno apresentou, na letra “g”, duas respostas matematicamente diferentes, mas de

igual resultado para o aluno: ao lado do item, há o registro “multiplica por 2 e soma 1”; logo abaixo, outro registro na letra “g”, “ $p \cdot p + 1$ ”.

Ainda, sobre as resoluções representativas divergentes, destaca-se as tabelas da letra “c”. Na resposta D9-1 (Figura 42), o aluno usou, como valores das posições, números em sequência de 1 em 1 (1, 2, 3, 4, 5). O outro estudante, na resposta D9-2 (Figura 43), construiu a tabela com valores que ele conhecia do enunciado ou que ele mesmo encontrou em algum item anterior (1, 2, 11, 17). Este aluno ainda colocou uma legenda na tabela: “NP” (número da posição), e “NQ” (número de quadrados).

Observe a sequência de figuras abaixo:

a) Desenhe a próxima figura da sequência. Quantos quadradinhos ela tem? *9*

b) Desenhe a 5ª figura da sequência. Quantos quadradinhos ela tem? *41*

c) Construa uma tabela relacionando a posição de cada figura com o seu número de quadradinhos.

d) A 11ª figura tem quantos quadradinhos? *23*

e) E a 17ª figura? *35*

f) Como descobrir a quantidade de quadradinhos de qualquer figura da sequência? Escreva uma regra. *Multiplica por 2 e soma 1*

g) Escreva a sentença matemática para uma posição  $p$ . *Multiplica por 2 e soma 1*

a)

b)

c)

|   |   |   |   |    |
|---|---|---|---|----|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5  |
| 3 | 5 | 7 | 9 | 11 |

*NP: p + 1*

Figura 42: resposta divergente D9 - 1

Observe a sequência de figuras abaixo:

a) Desenhe a próxima figura da sequência. Quantos quadradinhos ela tem?

b) Desenhe a 5ª figura da sequência. Quantos quadradinhos ela tem? 11

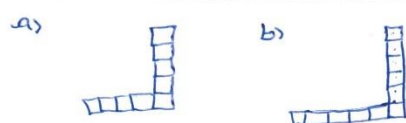
c) Construa uma tabela relacionando a posição de cada figura com o seu número de quadradinhos.

d) A 11ª figura tem quantos quadradinhos? 23

e) E a 17ª figura? 35

f) Como descobrir a quantidade de quadradinhos de qualquer figura da sequência? Escreva uma regra.

g) Escreva a sentença matemática para uma posição p.



a)

|    |   |   |   |   |
|----|---|---|---|---|
| NP | 1 | 2 | 3 | 4 |
| NQ | 3 | 5 | 7 | 9 |

f) basta multiplicar por dois e adicionar 3.

g)  $P, P + 3 =$

Figura 43: resposta divergente D9 - 2

Outros pontos observados sobre a atividade 9 mereceram atenção. A maioria dos alunos disse que nunca tinha construído uma tabela e não saberia fazer esse item. A professora-pesquisadora fez uma discussão com a turma a partir de um exemplo de tabela que associava distância e tempo a partir de uma velocidade conhecida e um dos alunos pediu para ir no quadro criar uma tabela diferente. Com isso, os colegas lembraram de trabalhar com a leitura de tabelas em anos anteriores. Os exemplos foram apagados do quadro, buscando evitar que houvesse influência nas respostas. Entretanto, percebeu-se que nas representações houve uma predominância com as tabelas na horizontal, da

mesma forma como foi exemplificado no quadro. Mesmo que o formato da tabela tenha sido repetido em algumas representações, não se acredita que os exemplos discutidos com o grande grupo tenham influenciado os alunos em suas representações, pois serviram para lembrar da estrutura de tabelas, e por que houve várias representações diferentes (valores, legendas, etc.) nas respostas dos alunos.

A diferença dos registros escritos e das falas dos alunos foi significativa, principalmente, quando colocavam apenas as respostas finais numéricas. Quando questionados como chegaram nas respostas, explicaram que “era sempre o dobro da posição mais um” (para a posição 11 seria  $22 + 1 = 23$ , para a posição 17 seria  $34 + 1 = 35$ ), mostrando que compreenderam a regra da sequência. Ainda, as diferenças entre os significados da “regra” e da “sentença matemática para uma posição  $p$ ” indicaram que a compreensão da maioria da turma era de que “fazer vezes 2 e somar 1”; “fazer  $2x+1$  (esse  $x$ , para eles, significa vezes)”; “basta multiplicar por 2 e adicionar 1”; “multiplica por 2 e adiciona 1” e “multiplicar 2 pelo  $N^o P$  e somar mais 1” era equivalente a escrever “ $p.p + 1$ ”. Quando questionados sobre a “sentença matemática”, respondiam com exemplos numéricos “se minha posição for 100 eu vou ter  $200 + 1 = 201$ ” e, mesmo respondendo corretamente com números, continuavam acreditando que a sentença matemática que criaram era a correta. Infere-se que a confusão entre “multiplicar 2 vezes o valor da posição” e “multiplicar posição por posição” indique que ainda não está clara a diferença entre a representação do dobro ( $2p$ ) e a representação do quadrado ( $p^2$ ) de um valor genérico. Os exemplos numéricos também apontam para diferenciação entre tratamento algébrico e aritmético por parte dos estudantes.

Terminada a análise das resoluções de cada uma das situações-problema investigadas, parte-se para a discussão dessas análises a fim de identificar as manifestações de invariantes operatórios e de representações do CCA.

Na classe de situações trabalhadas, pode-se identificar diferentes esquemas direcionados a essas situações. Os esquemas são compostos por quatro componentes: a) objetivos e subobjetivos e antecipações; b) regras de ação, de coleta de informações e de controle; c) invariantes operatórios; e d) possibilidades de inferências. Esses quatro componentes foram identificados durante as análises das resoluções.

Os objetivos, subobjetivos e antecipações eram determinados pelas próprias situações-problema que exploravam o estabelecimento de relações e comparações entre expressões numéricas e padrões geométricos. As resoluções possibilitaram o desenvolvimento de processos de generalização e a expressão de regularidades e invariâncias. Os alunos ao decorrer das atividades construíram suas estratégias próprias, alguns inclusive chegaram na escrita algébrica. Na representação de suas estratégias, os alunos desenvolveram regras de ação, de tomada de informações e de controle próprias, que se repetiram em diferentes atividades, conforme análise anterior. A partir dessa análise, identificou-se que os objetivos, subobjetivos e antecipações das questões foram aceitos pelos alunos e tomados como seus, permitindo que continuassem resolvendo de acordo com o caminho que achavam mais adequado.

Na análise que possibilitou a identificação das regras de ação, foram identificadas, também, as inferências dos alunos em cada situação-problema. Por exemplo, o uso de reticências indicando a continuidade da sequência; o cálculo de respostas com números muito grandes indicando a compreensão de que a regra funciona para qualquer valor; o desenho de mais de um elemento podendo mostrar que compreendeu o padrão de formação, etc.

Dessa forma, havendo identificado três dos componentes dos esquemas utilizados pelos alunos, falta a identificação dos invariantes operatórios. A representação, que está diretamente ligada aos esquemas, permitiu a identificação dos invariantes operatórios, principalmente os registros escritos e, também, as falas.

Os invariantes operatórios são os objetos, as propriedades e as relações reconhecidas e utilizadas pelo sujeito na análise e no domínio de uma classe de situações. Por exemplo, a identificação do padrão de formação da sequência a partir da análise dos elementos (objetos) que a compõem; a relação entre os elementos de uma sequência; a relação entre o elemento e a posição que ele ocupa na sequência; as operações que justificam os valores encontrados, etc.

As representações permitiram reconhecer os significados atribuídos pelos alunos para os invariantes operatórios. Segundo Vergnaud (2009), a representação é atividade, além de ser repertório de conceitos e formas simbólicas. Ele destaca que os invariantes operatórios são elementos essenciais

da representação. Uma das definições de representação abordadas pelo autor diz respeito às categorias de pensamento com as quais os sujeitos captam e integram as informações presentes em uma situação.

Essas representações, algumas não são acessíveis ao observador externo e o educador está, às vezes, despreparado para interpretar o que a criança acreditou compreender ou fazer. Mas certas representações são objetiváveis, no sentido de que podemos delas perceber indicadores importantes nas produções do sujeito (palavras pronunciadas, desenhos, gestos analógicos, operações feitas pelo sujeito, etc.) (VERGNAUD, 2014, p. 86).

Conforme análise anterior, em que as regras de ação, de coleta de informação e de controle foram identificadas, a partir das representações dos alunos, registradas nas folhas de atividade e nas falas das discussões sobre as situações-problema, foi possível identificar os invariantes operatórios relacionados à classe de situações trabalhadas. Sem as representações não seria possível acessar as manifestações do pensamento algébrico dos alunos. E foram elas que permitiram aos alunos acessarem e utilizarem seus esquemas.

A seguir (Quadro 5), apresentam-se os invariantes operatórios identificados nas resoluções dos estudantes. Houve resoluções que apresentaram mais de um invariante operatório.

Quadro 5: Relação entre resoluções e Invariantes Operatórios.

| Invariantes Operatórios Encontrados                                                                                                                     | Questões                                                                     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------|
| Criação de padrões diferentes, novas sequências                                                                                                         | D1-3<br>D2-3(b, c, d, e)<br>D4-4(b, c)                                       |
| Representação de apenas um elemento                                                                                                                     | E2-1<br>D2-3(a)<br>E4-1                                                      |
| Representação de “n” vezes o padrão completo                                                                                                            | D2-1 (b, d, e)<br>D2-2(b, d, e)<br>D4-1; D4-3(e)<br>D4-4(a, d, e)<br>D6-3(e) |
| Representação da mesma quantidade de elementos do padrão                                                                                                | D2-1(c)<br>D4-3(b)                                                           |
| Representação de um determinado número de elementos relacionados ao número de elementos do padrão: padrão com “n” elementos, desenho de “n±1” elementos | D2-2(c)<br>D4-2 (a, b, c, d)<br>D4-3(c, d)                                   |
| Representação apenas da(s) característica(s) necessária(s) e suficiente(s) para a identificação do padrão: cor, forma, orientação, etc.                 | D2-1(a, b)<br>D4-2(b, d, e)<br>D4-4(d, e)<br>E5-1<br>D5-1                    |

|                                                                                           |                                                                                                                                                                                                                     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                                                                                           | D5-2<br>E6-1<br>D6-1<br>D6-2                                                                                                                                                                                        |
| Representações diferentes para mesma resposta: desenho, nome por extenso, número, etc.    | D2-2(a)<br>D5-1<br>D5-2<br>E9-1(g)                                                                                                                                                                                  |
| Representação da continuidade da sequência                                                | D4-4<br>D6-3                                                                                                                                                                                                        |
| Representação da identificação do padrão                                                  | D4-4<br>D6-3                                                                                                                                                                                                        |
| Identificação da relação entre (característica do) elemento e posição: “n” depende de “p” | E5-1(d)<br>D5-1(d)<br>D5-2(d)<br>E6-1(b, c, d)<br>D6-1(b, c, d, e)<br>E7-1(b, c, d)<br>E7-2(d)<br>E7-3(d)<br>D7-1(d)<br>E8-1(f)<br>D8-1(f, g)<br>D8-2(g)<br>E9-1(c, f, g)<br>E9-2(f, g)<br>D9-1(f, g)<br>D9-2(f, g) |
| Identificação do próximo elemento da sequência a partir do elemento anterior              | D6-2(e)<br>D6-3(e)<br>E8-1(c, g)<br>D8-1(c, g)<br>D8-2(g)                                                                                                                                                           |
| Decomposição da grandeza solicitada em outras já conhecidas                               | D5-2(d)<br>D6-1(b, c, d)<br>E9-1(d)                                                                                                                                                                                 |
| Exemplos numéricos solicitados/utilizados                                                 | D5-2(d)<br>D7-1(d)<br>E9-1(c)<br>D9-1(c)<br>D9-2(c)                                                                                                                                                                 |
| Exemplos numéricos novos                                                                  | D8-1(f)<br>E9-1(f)<br>E9-2(c, g)                                                                                                                                                                                    |
| Representação da operação matemática utilizada                                            | D5-2(d)<br>E7-1(b, c)<br>E7-2<br>E9-1<br>E9-2                                                                                                                                                                       |
| Escrita sincopada                                                                         | E7-2(d)<br>D7-1 (d)<br>E9-1 (f)<br>E9-2(f, g)                                                                                                                                                                       |

|                                                                                           |                               |
|-------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------|
|                                                                                           | D9-1(f)<br>D9-2(f)            |
| Escrita literal/formal                                                                    | E9-1(g)<br>D9-1(g)<br>D9-2(g) |
| Interpretação da representação de dobro e quadrado para quaisquer valores: “2.p” e “p.p”. | D9-1(f, g)<br>D9-2(f, g)      |

Fonte: Autoria própria, 2020.

A análise das resoluções e a identificação dos invariantes operatórios permitiram a identificação do processo de desenvolvimento da manifestação do pensamento algébrico dos alunos. Analisando o Quadro 5, é possível identificar uma complexificação dos invariantes operatórios e dos esquemas, que os alunos utilizaram para expressar seu pensamento nas resoluções das situações-problema. Entende-se que a investigação deu início à construção de uma linguagem literal/formal significativa para os estudantes. Por exemplo, a representação do registro escrito deles passou da escrita por extenso, em língua natural, pela introdução de números (“tabuada do 3”); depois, na passagem da escrita sincopada para a escrita literal/formal, iniciou com a inserção de símbolos de operações matemáticas (“faz 3x o número de degraus”) e finalizou com a representação por letras (apenas na questão 9).

Ressalta-se que a escrita algébrica apenas apareceu na atividade 9, quando foi inserida a solicitação explícita por “uma sentença matemática para uma posição p”. Nas situações-problema das folhas de atividade 5, 6, 7 e 8, solicitava-se a “regra” de formação das sequências, mas não existia uma pergunta direta que utilizasse a linguagem algébrica. Foi nessa questão que, além da linguagem corrente e sincopada, surgiu a escrita formal/literal.

Vergnaud (2014, p. 17), ressalta que um dos problemas mais importantes da didática é de dar ênfase a ordem pela qual as noções podem ser adquiridas pelos alunos, considerando que ordem de complexidade só pode ser considerada parcial, e que essa ordem dá lugar para aprendizagem simultânea de noções relativamente dependentes.

O próximo capítulo é composto pelas considerações finais, respondendo à questão da pesquisa e aos objetivos geral e específicos.



## **Capítulo 6: Considerações Finais**

Este capítulo apresenta os resultados e discussões da pesquisa, respondendo à pergunta orientadora: como ocorre a manifestação do pensamento algébrico na resolução de situações-problema que exploram relações e comparações entre padrões compondo parte do CCA. Responde, também, ao objetivo geral (identificar as manifestações de invariantes operatórios e de representações do CCA nessas resoluções) e aos objetivos específicos da pesquisa (identificar se e como acontecem os processos de identificação e expressão de regularidades e invariâncias e de expressão de generalização nas resoluções de alunos).

As conclusões organizadas neste capítulo têm fundamentação na análise das resoluções representativas de uma turma de 11 alunos do 8º ano do Ensino Fundamental. Esses alunos haviam começado os estudos sobre Álgebra no ano anterior e continuaram no 8º ano. Mesmo já tendo noções e resolvido questões algébricas pertinentes ao currículo escolar, tiveram muita dificuldade quando foram propostas as situações-problema da pesquisa. Isso pode fazer referência à abordagem exploratório investigativa das folhas de atividade, trabalhadas de forma diferente das quais os alunos estão acostumados. As tarefas escolares matemáticas costumam ser realizadas após a explicação do conteúdo, da realização de exemplos pelo professor, de atividades e de avaliação. Já as atividades propostas na pesquisa tiveram uma abordagem investigativa, sem explicação prévia, solicitando observação, interação e estabelecimento de relações. Assim, ao inverso do modo como estão acostumados a trabalhar em sala de aula, os alunos puderam desenvolver esquemas próprios de resolução. Quando a professora-pesquisadora propunha as atividades, eles pareciam felizes, interagiam com os colegas a respeito das atividades, e defendiam suas formas de pensar, coisas que não mostravam durante as aulas regulares.

Infere-se que, o estranhamento apresentado pelos estudantes, durante a realização das situações propostas, se deve à falta de estabelecimento de relação entre o papel da representação da letra e seu significado. Algo a ser repensado para trabalhar com futuras turmas: fazer o papel inverso ao dos

currículos escolares, tentar trabalhar com a significação antes da representação, enfatizando o pensamento algébrico.

Em geral, as respostas dos alunos apresentaram esquemas que foram se repetindo e se modificando ao longo das nove situações propostas, nas diferentes formas de representar o próximo elemento da sequência, de explicar como se dava a regra de formação das sequências, diferentes estratégias e valores para encontrar os elementos pedidos, entre outras respostas comuns que foram analisadas no capítulo anterior. Mesmo quando apareceram respostas diferentes para a mesma atividade, foi possível perceber que os alunos seguiram com seu modo próprio de responder, apresentando os mesmos esquemas em diferentes atividades.

Pode-se, perceber ao longo desta pesquisa, que os estudantes ao resolverem as situações de forma exploratório investigativa, encontraram significado para generalizações e expressões de padrões. Muitos, em conversas durante as aplicações das atividades, diziam não ver semelhança com “a Álgebra da escola”, o que foi mudando ao longo dos encontros. Então percebe-se que o tipo de exploração utilizada na pesquisa contribuiu para que os alunos dessem significado para essas situações, chegando inclusive a escrita formal algébrica.

As atividades foram dispostas de forma a aumentar a complexidade das situações-problema e das solicitações, visto que os alunos disporiam de conhecimentos anteriores, adaptando-os para, assim, utilizar em atividades que poderiam gerar novos conhecimentos. Assim, desenvolveu-se, ao longo dos encontros, diferentes sequências e padrões. Foram acrescentadas perguntas sobre posições maiores, mas ainda possíveis de serem encontradas por desenhos e, por fim, posições maiores e cansativas de serem representadas através de desenhos. E, por fim, foi abordada a representação de regras de formação e apenas na última atividade foi falado em “sentença matemática”.

Quando se analisa as respostas dos alunos, é percebido que, mesmo não tendo a escrita algébrica, houve indícios da manifestação do pensamento algébrico. Eles a comunicam em suas falas, escritas em linguagem corrente, através de “contas”, desenhando, criando suas estratégias próprias. Da forma como diz Fiorentini *et al.* (1993, p. 88), o pensamento algébrico foi manifestado através de todos esses meios, mesmo sem a representação algébrica formal.

Ao longo dos encontros, pode-se perceber que os alunos foram aprimorando suas respostas, dando respostas mais longas, com explicações e justificações. Apenas na última atividade é explícito o aparecimento da linguagem algébrica. Esse não era o foco da pesquisa, mas contribuiu para entender melhor as diferentes maneiras de representar e de pensar algebricamente, como por exemplo, as respostas da atividade 9 (Figuras 40, 41, 42 e 43).

Todas as atividades foram baseadas no caracterizador delimitador das situações (estabelecer relações/comparações entre expressões numéricas ou padrões geométricos), proporcionando o surgimento dos caracterizadores determinados como objetivos específicos na presente pesquisa (identificar se e como acontecem os processos de identificação e expressão de regularidades e invariâncias e de expressão de generalização).

Os invariantes operatórios foram identificados (Quadro 5) nas resoluções dos alunos, assim como foram as regras de ação, os objetivos e as inferências. As representações, juntamente com as explicações dos alunos, subsidiaram as análises que permitem, então, dizer que os esquemas estão presentes nas classes de situações propostas, tanto nas resoluções representativas esperadas quanto nas divergentes.

Os esquemas estão relacionados com as manifestações do pensamento algébrico dos alunos, ou seja, estão presentes nas representações diferentes, nas estratégias diferentes, na significação que cada aluno expressa em suas representações, etc. Cada aluno utiliza diferentes esquemas, dependendo das suas vivências anteriores, assim, consegue adapta-las para novos conhecimentos. No capítulo anterior (Quadro 5), os invariantes foram identificados juntamente com as representações dos alunos nas situações propostas. Isso pode ser tomado como resposta ao o objetivo geral dessa pesquisa, que tinha como foco: identificar as manifestações dos invariantes operatórios e de representações do CCA. Ou seja, foi identificado o conjunto de situações (S), o conjunto de invariantes (I) e o conjunto de representações simbólicas (R), identificando então, a terna de conjuntos (VERGNAUD, 2009).

As manifestações do pensamento algébrico na presente pesquisa se deram através dos invariantes operatórios apresentados anteriormente e das representações analisadas. Cada aluno dispõe de seus próprios esquemas,

mesmo quando pensavam de modo diferentes dos colegas, debatiam e, cada um representava de maneira diferente. Essa interação da turma deu suporte para a análise, sendo possível perceber o caminho percorrido pela turma até chegar à manifestação do pensamento algébrico, chegando, em alguns casos, a fazer isso através da linguagem algébrica.

Analisando as atividades, ao decorrer do período de aplicação, foi percebido, no grande grupo, um entendimento sobre noções algébricas a partir das discussões, nas quais era percebido que o modo de expressar e de relacionar posições com elementos, expressar as regras de formação das sequências, foram se desenvolvendo. Os alunos mostraram, nas últimas atividades, respostas mais sofisticadas, sendo que alguns representaram algebricamente sentenças, uns em linguagem sincopada, outros em linguagem formal/literal. Mesmo as respostas divergentes, em que a regra e a sentença matemática trazem significados diferentes, mostraram esse desenvolvimento. Conclui-se que houve, nos esquemas apresentados pelos alunos, manifestação do pensamento algébrico sobre parte do CCA.

Em futuros trabalhos, a presente pesquisa pode ter continuidade seguindo as etapas da proposta de Educação Algébrica de Fiorentini *et al.* (1993). A primeira, cujo objetivo é chegar nas expressões simbólicas através da análise investigativa de situações. A segunda e terceira etapas seriam trabalhar as expressões para atribuir-lhes significação e operar com o transformismo. Visto que a presente pesquisa deu ênfase à primeira etapa, uma possibilidade seria atribuir valores para a “sentença matemática” escrita por alguns alunos (“p.p+1”) e confronta-los com os valores resultantes para posições conhecidas.

Outra possível continuação, seria trabalhar com as outras partes do CCA, visto que nessa pesquisa trabalhou-se apenas com um dos caracterizadores de Fiorentini *et al.* (2005) na delimitação do conjunto de situações (estabelecimento de relações e comparações entre expressões numéricas e padrões geométricos), poder-se-ia utilizar os demais caracterizadores para compor o restante do CCA aqui proposto. Uma outra ideia de continuação deste trabalho seria com turmas de outros anos do ensino fundamental.

## Referências

- BIGODE, A. J. L. **Matemática hoje é feita assim**. Antônio José Lopes Bigode. – São Paulo: FTD, 2000. – (Coleção matemática hoje é feita assim).
- CYRINO, M. C. C.T; DE OLIVEIRA, H. M. Pensamento algébrico ao longo do ensino básico em Portugal. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, v. 24, n. 38, p. p. 97-126, 2011.
- DAVID, Maria Manuela MS; MOREIRA, Plínio Cavalcanti. **Formação matemática do professor: licenciatura e prática docente escolar**. Autêntica, 2013.
- DANTE, L. R. **Tudo é matemática: ensino fundamental**– 8ª série/ Luiz Roberto Dante; ilustrações: Alcy Linares, Grafos. – São Paulo: Átila, 2005.
- DA ROCHA FALCÃO, J.T. **Psicologia da Educação Matemática: uma introdução**. – 1. reimp. – Belo Horizonte: Autêntica, 2008.
- DA SILVA, E. P. **Aspectos Do Pensamento Algébrico E Da Linguagem Manifestados Por Estudantes Do 6º Ano Em Um Experimento De Ensino**. 2013. Dissertação de Mestrado (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina. Londrina.
- DE SOUZA, E. R; DINIZ, M. I. de S. V. **Álgebra: Das variáveis às equações e funções**. IME-USP, 3ª ed 1998.
- FIGUEIREDO, A. J. **Saberes e concepções de educação algébrica em um curso de licenciatura em matemática**. 2007. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.
- FIORENTINI, D.; MIORIM, M. Â.; MIGUEL, A. A contribuição para repensar... a educação algébrica elementar. **Pró-posições**, v. 4, n. 1, p. 78-91, 1993.
- FIORENTINI, D.; FERNANDES, F. L. P.; CRISTOVÃO, E. M. Um estudo das potencialidades pedagógicas das investigações matemáticas no desenvolvimento do pensamento algébrico. **Seminário Luso-Brasileiro de Investigações Matemáticas no Currículo e na Formação do Professor**, 2005. Portugal. Disponível em: <[http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/seminario\\_lb.htm](http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/seminario_lb.htm)>. Acesso em: 28 jun. 2018.
- GIL, A. C. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. 6. ed. Editora Atlas SA, 2008.
- GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa** – [2. Reimpr.] – 6. ed. – São Paulo : Atlas, 2017.

GITIRANA, V. Repensando multiplicação e divisão: contribuições da teoria dos campos conceituais. **São Paulo: Editora PROEM, 2014.**

KAPUT, James J. **A Research Base Supporting Long Term Algebra Reform?**, 1995.

KIERAN, Carolyn. **Algebraic thinking in the early grades: What is it.** The Mathematics Educator, 2004, 8.1: 139-151.

KLÖPSCH, C. **Campo conceitual algébrico: análise das noções a serem aprendidas e dificuldades correlatas encontradas pelos estudantes ao final do ensino fundamental (8º série – 9º ano).** 2010. Dissertação de Mestrado (Programa de Pós-Graduação em Psicologia Cognitiva) – Universidade Federal de Pernambuco.

LINS, R. C. GIMENEZ, J. **Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI.** Campinas, SP: Papirus, 1997.

MAGINA, S. A Teoria dos Campos Conceituais: contribuições da Psicologia para a prática docente. **Encontro Regional de Professores de Matemática**, v. 18, 2005. Campinas. Disponível em: <<http://www.ime.unicamp.br/erpm2005/anais.htm>>. Acesso em: 13 jan. 2019.

MAGINA, S. Repensando adição e subtração: contribuições da teoria dos campos conceituais. **São Paulo: PROEM, 2001.**

MAGINA, S; DOS SANTOS, A.; MERLINI, V. L. O raciocínio de estudantes do Ensino Fundamental na resolução de situações das estruturas multiplicativas Primary students' reasoning in multiplicative structures problem solving. **Ciência & Educação (Bauru)**, v. 20, n. 2, p. 517-533, 2014.

MINAYO, M.C.S. Ciência, Técnica e Arte: O Desafio da Pesquisa Social. **Pesquisa social: teoria, método e criatividade**, v. 18, p. 31-50, 1994

OLIVEIRA, S.C. LAUDARES, J.B. Pensamento Algébrico: uma relação entre álgebra, aritmética e geometria. **VII Encontro Mineiro de Educação Matemática, 2015, São João del-Rei. Anais...** São João del-Rei, UFSJ, 2015.

PAIS, L. C. **Didática da Matemática; uma análise da influência francesa – 2.** Ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

PCN, Parâmetros Curriculares Nacionais. Matemática. **Secretária de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998.**

PONTE, J. P.; BRANCO, N.; MATOS, A. **Álgebra no ensino básico.** Lisboa: Ministério da Educação, 2009

POSSAMAI, J.P; SILVA, V.C. Concepções de Álgebra e Compreensão de Variável. **VII CIBEM – Congresso Ibero-Americano de Educação Matemática. Anais...**Montevideo, Uruguay. 2013

RIBEIRO, A. J. **Equação e seus multisignificados no ensino de Matemática: contribuições de um estudo epistemológico**. 2007. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

RIBEIRO, A. J.; CURY, H.N. **Álgebra para a Formação do Professor: explorando os conceitos de equação e de função**. Autêntica, 2015.

SANTOS, D. M. F.; MORELATTI, M. R. M. **Ensino de equação do 1o grau: concepções de professores de matemática**. Appris Editora e Livraria Eireli-ME, 2016.

SBRANA, F.C; ALVES, K.A; ALMEIDA, M.V.R; GOMES, V.M.S. A Álgebra Da Educação Básica Por Alunos Concluintes Do Ensino Médio. **XII ENEM – Encontro Nacional de Educação Matemática. Anais...** São Paulo, 2016.

SILVA, C. B. **Introdução a álgebra no ensino fundamental: o “X” da questão**. 2016. Dissertação (Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de Presidente Prudente. Presidente Prudente.

VERGNAUD, G. Psicologia do desenvolvimento cognitivo e didática das matemáticas. Um exemplo: as estruturas aditivas. **Análise psicológica**, v. 5, p. 75-90, 1986.

VERGNAUD, G. Teoria dos campos conceituais. In: Anais do 1º Seminário Internacional de Educação Matemática do Rio de Janeiro, 1993, UFRJ. Rio de Janeiro: Projeto Fundação - Instituto de Matemática - UFRJ, 1993. p. 1 – 26.

VERGNAUD, G. The nature of mathematical concepts. In: NUNES, T.; BRYANT, P. (Eds). **Learning and Teaching Mathematics: An Internal Perspective**. Hova (East Sussex): Psychology Press, 1997. P. 5-28.

VERGNAUD, G. A gênese dos campos conceituais. In: E.P. Grossi (Ed). **Porque ainda há quem não aprende? A teoria**. Petrópolis, Vozes, 2003.

VERGNAUD, G. O que é aprender? In: BITTAR, Marilena; MUNIZ, Cristiano Alberto. (Org.) **A Aprendizagem matemática na perspectiva da teoria dos campos conceituais**. 1ª edição DIGITAL– Curitiba: Editora CRV, 2009.

VERGNAUD, G. **A criança, a matemática e a realidade**: problemas do ensino da matemática na escola elementar. Curitiba: UFPR, 2014.

USISKIN, Z. Concepções sobre a álgebra da escola média e utilizações das variáveis. **Shulte, Alberto P.(Org.). As ideias da álgebra. Traduzido por Hygino H. Domingues**. São Paulo: Atual, p. 9-22, 1995.

ZANELLA, M. S. **Um Estudo de Problemas da Estrutura Aditiva de Números Racionais na Representação Fracionária.** Anais do XI Encontro Nacional de Educação Matemática. Curitiba, 2013.

## **Apêndices**

## APÊNDICE A – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO (TCLE)

Investigando o Pensamento e o Campo Conceitual Algébrico Nos Anos Finais do Ensino Fundamental

Aiana Silveira Bilhalva – (53) 99902-1993 – aiana\_bilhalva@hotmail.com

Orientadora Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Daniela Hoffmann – danielahoffmann.ufpel@gmail.com

O adolescente sob sua responsabilidade está sendo convidada a participar do projeto de pesquisa: *Investigando o Pensamento e o Campo Conceitual Algébrico Nos Anos Finais do Ensino Fundamental* que investiga como alunos dos anos finais do Ensino Fundamental resolvem situações matemáticas que exploram o Campo Conceitual Algébrico (CCA). O objetivo da pesquisa é analisar a resolução de situações matemáticas trabalhadas em aula, desenvolvidas por alunos dos 7º, 8º e 9º anos do Ensino Fundamental. A pesquisa é um estudo de caso que analisará algumas das produções realizadas pelos alunos durante as atividades escolares, bem como fotos, registros de áudio e vídeo e do diário de observações da pesquisadora.

A participação do adolescente sob sua responsabilidade é muito importante e se dará a partir das práticas pedagógicas regulares realizadas diariamente com a turma. As aulas ocorrerão de maneira igual para todas/os estudantes, independente da participação na pesquisa. A diferença acontecerá para aquelas/es que aceitarem participar, posteriormente à realização das atividades, pois terão suas produções digitalizadas e, possivelmente, analisadas e comentadas em trabalho(s) acadêmico(s).

Esclarecemos que estão garantidos o sigilo dos nomes e informações relacionadas que possam identificar as/os participantes e instituições envolvidos, direta ou indiretamente, preservando a identidade do adolescente sob sua responsabilidade. Apenas apresentações e publicações acadêmicas serão permitidas a partir da dissertação resultante desta pesquisa e mantendo os mesmos compromissos.

Os materiais digitalizados produzidos pelos estudantes nas atividades escolares, assim como fotos, áudios, vídeos e arquivos de texto produzidos e utilizados pela pesquisadora ficarão sob responsabilidade da professora orientadora, por um período de cinco anos, podendo ser solicitada para sua consulta.

Esperamos, como benefícios resultantes da participação do adolescente sob sua responsabilidade, contribuir para o ensino-aprendizagem de conceitos algébricos na escola básica, especialmente, com o desenvolvimento do pensamento algébrico das/os participantes.

Uma vez que as aulas seguem a mesma didática, indistintamente entre participantes e não-participantes da pesquisa, não são identificados possíveis desconfortos e riscos decorrentes da participação na pesquisa. A prática pedagógica da professora com a turma mantém-se inalterada e oferece as mesmas oportunidades de ensino-aprendizagem de matemática para todos estudantes.

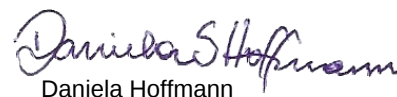
Caso o(a) senhor(a) tenha dúvidas ou necessite de maiores esclarecimentos poderá nos contatar, mesmo após a finalização da dissertação – nossos contatos estão no cabeçalho. Esclarecemos que a participação do adolescente é totalmente voluntária, podendo o/a senhor/a recusar ou desistir da participação do adolescente sob sua responsabilidade a qualquer momento, sem que isto implique qualquer ônus ou prejuízo ao adolescente sob sua responsabilidade. Esclarecemos ainda, que nem o/a senhor/a e nem o adolescente sob sua responsabilidade pagarão ou serão remunerados/as pela participação.

Informamos que esta pesquisa atende e respeita os direitos previstos no Estatuto da Criança e do Adolescente- ECA, Lei Federal nº 8069 de 13 de julho de 1990, sendo eles: direito à vida, à saúde, à alimentação, à educação, ao esporte, ao lazer, à profissionalização, à cultura, à dignidade, ao respeito, à liberdade e à convivência familiar e comunitária. Garantimos também que será atendido o Artigo 18 do ECA: “É dever de todos velar pela dignidade da criança e do adolescente, pondo-os a salvo de qualquer tratamento desumano, violento, aterrorizante, vexatório ou constrangedor.”

Caso concorde com a participação do adolescente sob sua responsabilidade nesta pesquisa, pedimos que assine abaixo, juntamente conosco,

Nome e assinatura da/o responsável

Aiana Silveira Bilhalva

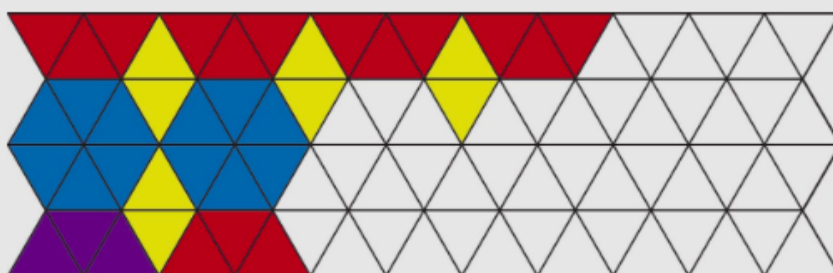
  
Daniela Hoffmann

Canguçu, 05 de abril de 2019.

## APÊNDICE B: Atividades Aplicadas

NOME:  
TURMA:  
DATA:

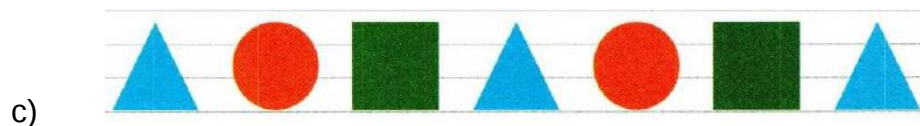
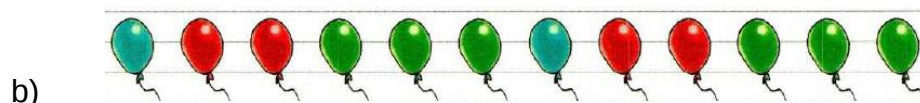
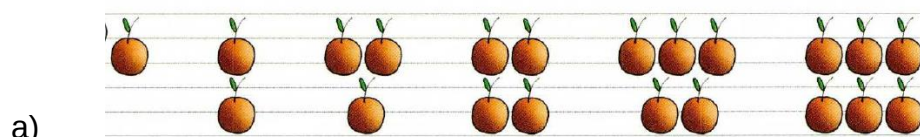
Observe com atenção a malha a seguir.



a) Pinte os quadrinhos restantes, conforme o padrão estabelecido.

b) Que formas geométricas aparecem na faixa?

2- Descubra qual o próximo elemento das sequências abaixo:

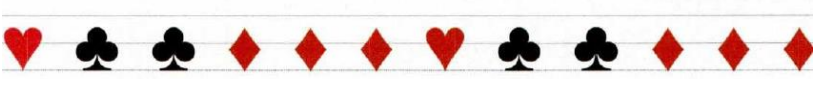


NOME:  
TURMA:  
DATA:

3- Descubra os elementos que estão faltando nas sequências abaixo:

- a) 0 1 2  4  6 7   10
- b) 5 10  20 25   40  50
- c) 10 9  7  4 3  1 0
- d) 2 6  14   26 30
- e) 21  17   11  7 5 3 1

4- Descubra o próximo elemento da sequência:

- a) 
- b) 
- c) 
- d) 
- e) 

NOME:

TURMA:

DATA:

5- Observe a sequência abaixo, identifique a sua regra e continue desenhando:



- a) Quais as figuras que correspondem a 8ª e 9ª posição?
- b) Qual a 15ª figura? E qual a 18ª?
- c) Que figura ocupa a 63ª?
- d) O que você observa em relação ao quadrado e às posições ocupadas por ele?
- e) Como você descreveria a regra de formação desta sequência?

NOME:

TURMA:

DATA:

6- Observe a sequência abaixo, descubra sua regra e continue desenhando:



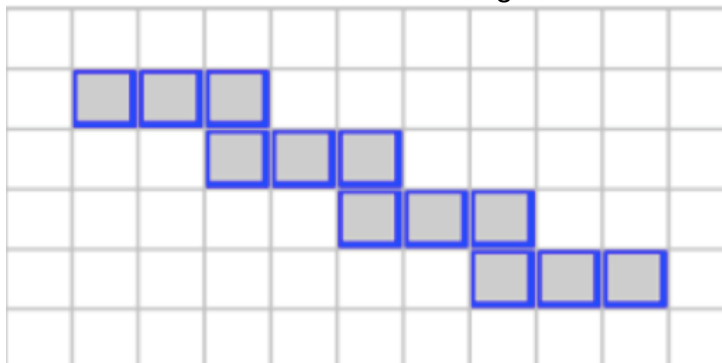
- a) Quais as figuras que correspondem a 7<sup>a</sup> e 8<sup>a</sup> posição?
- b) Qual a 10<sup>a</sup> figura da sequência?
- c) Qual a 17<sup>a</sup> figura da sequência?
- d) E a 46<sup>a</sup> figura?
- e) Como você descreveria a regra de formação dessa sequência?

NOME:

TURMA:

DATA:

7- Uma escada é construída da seguinte forma:

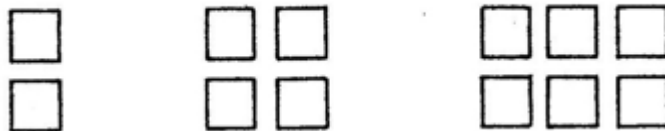


Na figura acima ela possui 4 degraus, com 12 quadrados no total.

- Desenhe uma escada com 2 degraus. Quantos quadrados são necessários para construir essa escada?
- Quantos quadrados são necessários para construir uma escada de 8 degraus?
- Quantos quadrados são necessários para construir uma escada de 32 degraus?
- Encontre a regra que relaciona o número de quadrados de uma escada com o número de degraus da mesma.

NOME:  
TURMA:  
DATA:

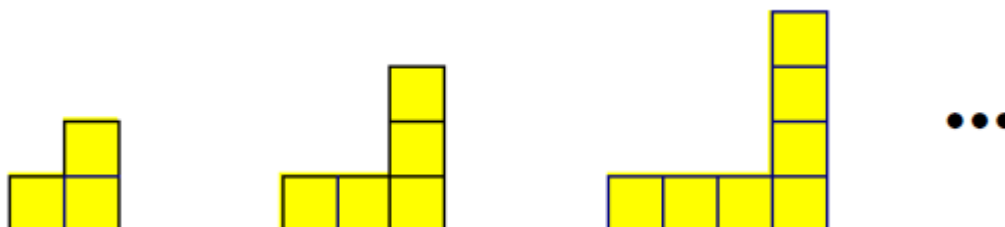
8- Observe a sequência a seguir:



- a) Qual a próxima figura? Desenhe.
- b) E qual a seguinte figura? Desenhe.
- c) Observando a sequência, quantos quadradinhos tem cada figura?
- d) Quantos quadradinhos tem a 6ª figura?
- e) E a 7ª? E a 8ª?
- f) Quantos quadradinhos tem uma figura numa posição qualquer?
- g) Escreva a regra de formação dessa sequência.

NOME:  
TURMA:  
DATA:

9- Observe a sequência de figuras abaixo:



- a) Desenhe a próxima figura da sequência. Quantos quadradinhos ela tem?
- b) Desenhe a 5ª figura da sequência. Quantos quadradinhos ela tem?
- c) Construa uma tabela relacionando a posição de cada figura com o seu número de quadradinhos.
- d) A 11ª figura tem quantos quadradinhos?
- e) E a 17ª figura?
- f) Como descobrir a quantidade de quadradinhos de qualquer figura da sequência? Escreva uma regra.
- g) Escreva a sentença matemática para uma posição  $p$ .