UNIVERSIDADE FEDERAL DE PELOTAS
Instituto de Física e Matemática
Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática

Dissertação

Sistemas Lineares sob a ótica dos Registros de Representação Semiótica: uma análise dos entendimentos de acadêmicos do Ensino Superior

Gabrielle Nunes dos Santos

Pelotas, 2019

Gabrielle Nunes dos Santos

Sistemas Lineares sob a ótica dos Registros de Representação Semiótica: uma análise dos entendimentos de acadêmicos do Ensino Superior

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Pelotas, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Thaís Philipsen Grützmann

Pelotas, 2019

Universidade Federal de Pelotas / Sistema de Bibliotecas
Catalogação na Publicação

S237s Santos, Gabrielle Nunes dos

Sistemas lineares sob a ótica dos registros de representação semiótica : uma análise dos entendimentos de acadêmicos do ensino superior / Gabrielle Nunes dos Santos ; Thaís Philipsen Grützmann, orientadora. — Pelotas, 2019.

126 f.

Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Instituto de Física e Matemática, Universidade Federal de Pelotas, 2019.

1. Sistemas lineares. 2. Registros de representação semiótica. 3. Álgebra linear. 4. Ensino superior. I. Grützmann, Thaís Philipsen, orient. II. Título.

CDD : 510.7

Elaborada por Maria Inez Figueiredo Figas Machado CRB: 10/1612

Gabrielle Nunes dos Santos

Sistemas Lineares sob a ótica dos Registros de Representação Semiótica: uma análise dos entendimentos de acadêmicos do Ensino Superior

Dissertação aprovada, como requisito parcial, para obtenção do grau de Mestre em Educação Matemática, Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Instituto de Física e Matemática, Universidade Federal de Pelotas.

Data da Defesa: 18/09/2019.

Banca Examinadora:

Profa. Dra. Thaís Philipsen Grützmann (Orientadora)
Doutora em Educação pela Universidade Federal de Pelotas.

Profa. Dra. Daniela Stevanin Hoffmann
Doutora em Informática da Educação pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Profa. Dra. Maria Arlita da Silveira Soares
Doutora em Educação nas Ciências pela Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul

Agradecimento

Agradeço, especialmente,

Aos meus familiares pelo apoio durante toda minha trajetória acadêmica;

À minha orientadora Professora Dra. Thaís Philipsen Grützmann, pela orientação e contribuições nesta pesquisa;

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Pelotas pelas oportunidades de aprendizagem;

Aos professores Dra. Luciana Chimendes Cabrera e Dr. Giovanni da Silva Nunes por disponibilizarem suas turmas para a produção de dados desta pesquisa, assim como, agradeço também, aos acadêmicos participantes desta pesquisa;

Às professoras Dra. Daniela Stevanin Hoffmann e Dra. Maria Arlita da Silveira Soares por aceitarem participar da banca examinadora deste trabalho e pelas suas importantes colaborações.

RESUMO

SANTOS, Gabrielle Nunes dos. **Sistemas Lineares sob a ótica dos Registros de Representação Semiótica: uma análise dos entendimentos de acadêmicos do Ensino Superior**. 2019. 126 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Instituto de Física e Matemática, Universidade Federal de Pelotas, Pelotas, 2019.

RESUMO

A presente pesquisa tem como objetivo mapear os entendimentos dos acadêmicos do Ensino Superior sobre Sistemas Lineares sob a ótica dos Registros de Representação Semiótica. Para atender o objetivo geral o texto discorre sobre a teoria dos Registros de Representação Semiótica, aporte teórico da pesquisa. Trata-se de uma pesquisa de caráter qualitativo definida como um estudo de caso. Os participantes dessa pesquisa são acadêmicos da Universidade Federal de Pelotas que estavam matriculados nas disciplinas de Álgebra Linear I e II no segundo semestre de 2018. Os dados foram produzidos a partir de uma sequência de atividades envolvendo o conteúdo já mencionado, de um questionário sobre dados gerais dos discentes participantes da pesquisa e de seus entendimentos referentes ao uso de tecnologias digitais nas aulas de Álgebra Linear. As categorias propostas para a análise foram: Compreensão dos Sistemas Lineares; Registros de Representação Semiótica; Argumentos; Métodos escolhidos para a resolução de Sistemas de Equações Lineares; Situações-problema; e por fim, *Software*. A análise dos dados permitiu concluir que com relação à compreensão dos acadêmicos referente ao conceito de Sistemas de Equações Lineares esta possui alguns equívocos como o fato de que todo Sistema Linear é representado por uma matriz quadrada, bem como, as resoluções dos acadêmicos apresentam conhecimento da definição de Sistemas Lineares presentes nos livros-textos, trazendo em algum momento traços destas em suas resoluções. Na análise referente aos Registros de Representação Semiótica as resoluções dos acadêmicos evidenciaram os registros de representação em língua natural, algébrica, matricial e por último, a representação gráfica, nesta ordem. Pode-se destacar que em ambas as turmas, os discentes tiveram dificuldades de justificar e argumentar a fim de aferir a veracidade de um teorema, assim como, percebeu-se a falta de compreensão da linguagem formal presente neste tipo de atividade. Ao analisar os métodos apresentados para a resolução de Sistemas Lineares, identificou-se que em ambas as turmas os métodos escolhidos em maioria foram Substituição e Escalonamento/Eliminação Gaussiana. Constatou-se uma limitada capacidade dos discentes em reconhecer e aplicar o conhecimento matemático a situações da própria Matemática ou de outras áreas do conhecimento. Quanto ao uso de *software*, houve duas indicações principais dos participantes, o uso do *software* GeoGebra, e o uso da programação dos métodos numéricos para a resolução de Sistemas Lineares.

Palavras-chave: Sistemas Lineares. Registros de Representação Semiótica. Álgebra Linear. Ensino Superior.

ABSTRACT

SANTOS, Gabrielle Nunes dos. **Linear Systems from the perspective of The Records of Semiotic Representation: an analysis of the understandings of higher education academics.** 2019. 126 f. Dissertation (Master in Mathematics Education) –graduate program in Mathematics Education, Institute of Physics and Mathematics, Federal University of Pelotas, Pelotas, 2019.

ABSTRACT

The current research aims to map the understandings of higher education academics on Linear Systems from the perspective of the Records of Semiotic Representation. In order to meet the general objective, the text talks about the Register of Semiotic Representation theory as the theoretical framework of the research. It is a qualitative research defined as a study case. The participants in this research are undergraduates of the Universidade Federal do Pampa enrolled in the Linear Algebra I and II courses in the second semester of 2018. The data was collected from a series of activities involving the mentioned content, a questionnaire about general data of the students participating in the research and their opinions on the use of digital technology in the Linear Algebra classes. The categories proposed for the analysis were: Understanding of linear systems; Semiotic Representation Records; Arguments; Methods chosen for the resolution of Linear Equation Systems; Problem situations; and finally, Software.Analysis of the data allowed to conclude that about the undergraduates' comprehension on the concept of Linear Equation Systems there is a misconception like the fact that every Linear System is represented by a square matrix, as well as, the resolutions of the students demonstrate knowledge about the definition of Linear Systems on the current books-texts, bringing at some point traces of these definitions in their resolutions. In the analysis regarding the semiotic representation registers the resolution of the students focused on the representation registers of neutral language, algebraic, matricial, and last, the graphic representation. We are able to highlight that in both classes, the students' struggle to justify, discuss, using argumentation is proof to assess the veracity of a theorem, like the lack of comprehension to the formal speech in this sort of activity. Analyzing the methods presented for the resolution of Linear Systems, it was identified that in both classes the chosen methods were mostly Substitution and Scheduling/Elimination Gaussiana. We also realized an undergraduates' limited ability to recognize and apply mathematical knowledge in situations of mathematics itself or other knowledge areas. Regarding the use of software, there were two main indications from the participants, the use of GeoGebra software and the use of the numeric methods programming for the resolution of Linear Systems.

Keywords: Linear Systems. Theory of Register of Semiotic Representation. Linear Algebra. Higher Education.

Lista de Figuras

Lista de Quadros

Lista de Tabelas

Lista de Abreviaturas e Siglas

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
CNPq	Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico
CSCL	Collaborative System Computer Learning
EAD	Educação à Distância
EB	Educação Básica
EJA	Educação de Jovens e Adultos
EM	Ensino Médio
ES	Ensino Superior
IES	Instituições de Ensino Superior
IFM	Instituto de Física e Matemática
LU	Lower e Upper (inferior e superior)
matE²	Educação e Educação Matemática
OCNEM	Orientações Curriculares Nacionais do Ensino Médio
PNLD	Plano Nacional do Livro Didático
PPC	Projeto Pedagógico do Curso
PPGEMAT	Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática
PIBID	Programa Institucional de Bolsas de Iniciação a Docência
PUC-RS	Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul
PUC-SP	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
RA	Registro de Representação Algébrico
RF	Registro de Representação Figural
RG	Registro de Representação Gráfico

RM	Registro de Representação Matricial
RRS	Registros de Representação Semiótica
SBEM	Sociedade Brasileira de Educação Matemática
SI	Sistema Impossível
SPD	Sistema Possível e Determinado
SPI	Sistema Possível e Indeterminado
TAS	Teoria da Aprendizagem Significativa
TCC	Teoria dos Campos Conceituais
TCLE	Termo de Consentimento Livre e Esclarecido
UFPa	Universidade Federal do Pará
UFPE	Universidade Federal de Pernambuco
UFPel	Universidade Federal de Pelotas
UFSM	Universidade Federal de Santa Maria
UNICAMP	Universidade Estadual de Campinas
UNIPAMPA	Unversidade Federal do Pampa

Sumário

Introdução

Inicialmente, peço-lhes autorização para usar a primeira pessoa do singular, pois a seguir será apresentada a trajetória acadêmica com o intuto de justificar os percursos que me levaram a escolha desta pesquisa de dissertação.

Frequentei durante toda a etapa da Educação Básica (EB) escolas públicas nas quais sempre fui uma estudante com notas acima da média em todas as disciplinas e demonstrava afinidade com a área de Ciências Exatas, principalmente, a Matemática, o que influenciou na minha escolha de graduação, já que das possibilidades de curso da instituição federal de ensino da minha cidade a que mais se aproximava dos meus interesses e afinidades era o curso de Matemática – Licenciatura.

Entre 2014 e 2017, cursei a graduação em Matemática – Licenciatura na Universidade Federal do Pampa (UNIPAMPA) – Campus Itaqui. Participei por três anos do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID) – subprojeto-Matemática UNIPAMPA – Campus Itaqui, realizando monitorias em turmas do Ensino Médio, especificamente, dois anos no 3° ano e um no 1° ano. Essas vivências/experiências me possibilitaram perceber dificuldades dos estudantes da Educação Básica na resolução de atividades relacionadas à Álgebra, principalmente, a resolução de Sistemas Lineares.

Faço parte do grupo de pesquisa matE² (Educação e Educação Matemática) – CNPq que tem por objetivo discutir dimensões subjacentes às temáticas de currículo, trabalho docente, políticas públicas, gestão educacional e formação de professores, contando com a presença de pesquisadores da Universidade Federal do Pampa (UNIPAMPA), Universidade Federal de Santa Maria (UFSM), dentre outras. No grupo de pesquisa foi possível realizar leituras e discussões acerca das propostas curriculares e conceitos didático-metodológicos para o ensino e aprendizagem da Matemática tanto na licenciatura quanto na Educação Básica. Dentre as atividades realizadas no grupo destaco a análise dos objetivos apresentados pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC) para a área da Matemática.

Reunindo as minhas vivências/experiências como discente em um curso no qual nas disciplinas de cunho específico o enfoque era dado as questões conceituais e procedimentais do conceito ensinado e sendo pibidiana, com interesse pelo estudo da Álgebra e pela formação inicial do professor de Matemática, realizei meu Trabalho de Conclusão de Curso intitulado *Conteúdos de Álgebra Linear ensinados na Educação Básica: Uma análise de livros do Ensino Superior.* Neste, iniciei meus estudos sobre a teoria dos Registros de Representação Semiótica (RRS) de Raymond Duval, a fim de analisar os encaminhamentos dados pelos livros-textos de Álgebra Linear do Ensino Superior referente ao ensino de Sistemas Lineares, Matrizes e Determinantes tendo em vista o trabalho atrelado a teoria dos RRS e as transformações cognitivas de tratamento e conversão.

Para determinar quais livros seriam analisados foi realizado o mapeamento das bibliografias básicas de instituições brasileiras de Ensino Superior, com o auxílio do site e-Mec**.** Neste site buscou-se quais eram as instituições brasileiras que oferecem cursos de Licenciatura em Matemática. Em seguida, procurou-se as páginas na web de cada instituição e nelas os Projetos Pedagógicos de Curso (PPC) dos cursos de Licenciatura em Matemática. Assim, foram obtidas as informações sobre as bibliografias básicas das disciplinas que englobam sistemas lineares, matrizes e determinantes. Após a realização do mapeamento foram definidos para análise os dois livros-texto de Álgebra Linear mais citados nas bibliografias básicas dos cursos de Licenciatura em Matemática.

O livro-texto mais utilizado, presente em 75 de 137 bibliografias, foi o livro *Álgebra Linear* de José Luiz Boldrini *et al*., 3ª edição, de 1980 (identificado como livro A), e em segundo lugar, presente em 46 de 137 bibliografias, o livro *Álgebra linear com aplicações* de Howard Anton e Chris Rorres, 8ª edição, de 2006 e 10ª edição[1], de 2012 (identificado como livro B).

As categorias propostas para a análise dos livros-texto foram: a localização dos Sistemas Lineares, Matrizes e Determinantes na obra, a fim de identificar se a abordagem dos Sistemas de Equações Lineares vinha antes ou depois do estudo de Matrizes e Determinantes; as relações/conexões, quanto

[1] Optou-se por analisar a 10° ed. pois era a única que tinha-se acesso a versão impressa.

ao uso de conexões entre as ideias matemáticas e a aplicação das mesmas em contextos não matemáticos; as situações-problema, para verificar a presença de uma amostra representativa e articulada de situações-problema que permitissem contextualizar, retomar, ampliar e aplicar o conhecimento matemático a situações da própria Matemática ou de outras áreas do conhecimento; *software,* com relação a indicação do uso de *software* que permitissem explorar, simultaneamente, as várias representações semióticas do objeto matemático; os argumentos, possibilitando o entendimento de enunciados e proposições matemáticas através de diversos tipos de argumentos e métodos de prova e se propiciava aos discentes situações em que os mesmos teriam de conjeturar sobre relações matemáticas, investigá-las e justificá-las; métodos escolhidos para a resolução de Sistemas de Equações Lineares, para indicar quais os métodos descritos para a resolução dos Sistemas Lineares e os Registros de Representação Semiótica presentes nas atividades, para aferir se eram utilizados diferentes tipos de registros e se nas atividades as transformações cognitivas (tratamento e conversão) eram exploradas.

Esta investigação possibilitou verificar que as relações/conexões e situações-problema presentes nos livros-texto (BOLDRINI *et al.*, 1980; ANTON; RORRES, 2012) emergem de relações em contextos matemáticos, necessitando explorar melhor as relações de sistemas lineares com outras áreas do conhecimento.

O uso de *software*, como ferramenta para a programação dos métodos de resolução de sistemas, operações envolvendo matrizes, cálculo de matrizes inversas, dentre outros, não foi explorado em nenhum dos livros analisados. Sublinha-se que é desejável que estes recursos sejam inseridos em disciplinas de Álgebra Linear, tendo em vista as suas potencialidades, por exemplo, na integração de conteúdos de Álgebra com a programação.

Constatou-se que, a presença de atividades que potencializam a argumentação em ambos os livros foi pouco explorada. Estas atividades representam 7% das atividades categorizadas no livro A e 6% das atividades categorizadas no livro B. Ressalta-se que, conforme documento da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM), de 2003, é importante que os conteúdos sejam tratados de modo que o futuro professor compreenda que a validação de uma afirmação está diretamente relacionada à consistência dos argumentos utilizados. Também, é preciso que o acadêmico saiba "noções de conjectura, teorema, demonstração, examinar consequências do uso de diferentes definições, analisar erros cometidos e ensaiar estratégias alternativas" (SBEM, 2003, p. 15). Por isso, a importância de explorar mais atividades deste tipo.

Ao analisar os métodos apresentados para a resolução de sistemas lineares, identificou-se que ambos os livros-texto exploraram o método de escalonamento, que é o proposto pelas Orientações Curriculares Nacionais para Ensino Médio (OCNEM) (BRASIL, 2006), o qual pode ser ensinado na Educação Básica. Outros métodos foram identificados no livro B, por exemplo, Gauss-Jordan, a eliminação gaussiana, matriz inversa, Regra de Cramer, Fatoração LU (LU vem do inglês *lower* e *upper*, inferior e superior), em contrapartida no livro A foram expostos os métodos redução à forma escada, método de Gauss, regra de Cramer.

Na análise referente a aspectos da teoria dos Registros de Representação Semiótica[2], em particular, transformações cognitivas, constatou-se que no livro A o registro com maior ênfase foi o Registro de Representação Matricial, presente em 82% das atividades. A conversão esteve presente em 44% das atividades. O sentido de conversão mais explorado foi da Representação em Língua Natural para a Representação Matricial. Pode-se afirmar que foram explorados poucos sentidos de conversão. Não foram identificadas atividades que solicitavam a conversão no sentido da Representação Algébrica para a Representação Gráfica (RA→RG) ou da Representação Matricial para a Representação Gráfica (RM→RG).

No livro B, 84% das atividades exploraram em algum momento a Representação Matricial (RM). A conversão foi identificada em 35% das atividades, destas 16% solicitavam a conversão no sentido da representação algébrica para a representação matricial (RA→RM). No entanto, foram explorados um contingente mais amplo de sentidos de conversão como: RA→RM[3], RM→RA[4], RG→RA[5], RF→RA[6], RA→RG[7].

---

[2] Os pressupostos desta teoria serão apresentados no próximo capítulo.
[3] Representação Algébrica para a Representação Matricial.

Pesquisas do grupo liderado pelo francês Jean-Luc Dorier (1997 *apud* FRANÇA, 2007) apontam que, nas disciplinas de Álgebra Linear, acadêmicos de diferentes cursos de graduação apresentam algumas dificuldades ao trabalhar com conceitos, geralmente, abordados na Educação Básica, como: matrizes, sistemas de equações lineares, transformações lineares. Para Jean-Luc Dorier (1997 *apud* FRANÇA, 2007, p. 18), um dos motivos para essas dificuldades de aprendizagens deve-se ao fato da "abordagem extremamente formal e predominantemente algébrica do ensino, presente nos livros didáticos e utilizada por professores que ministram essa disciplina [Álgebra Linear]".

Considerando que os livros-textos são uma das principais ferramentas utilizadas pelos professores para o planejamento das aulas, bem como dão suporte aos estudantes para o entendimento dos conteúdos, assim, o modo como os conceitos são abordados e apresentados aos estudantes pode vir a influenciar o modo como os registros de representação são mobilizados e articulados pelos acadêmicos na resolução de atividades.

Nesse contexto, optei por aprofundar a minha pesquisa referente aos conteúdos de Álgebra Linear junto ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática (PPGEMAT), da Universidade Federal de Pelotas (UFPel), por acreditar na importância de se pensar a formação inicial e continuada do professor de Matemática.

Com isso, a **questão da pesquisa** é: "*Quais são os entendimentos dos acadêmicos do Ensino Superior sobre Sistemas Lineares sob a ótica dos Registros de Representação Semiótica?* ".

Optou-se pelo estudo dos Sistemas Lineares, pois, este está presente no currículo matemático de todas as etapas escolares (Ensino Fundamental, Médio e Superior), assim como, relaciona-se com conteúdos de outras áreas do conhecimento, como, Química – balanceamento de equações, Informática – análise de métodos numéricos, Física – estudo do fluxo de redes elétricas e tráfego de veículos, Nutrição – planejamento de cardápios personalizados e Economia – construção de modelos econômicos (BERTOLAZI; SAVIOLI, 2018).

---

[4] Representação Matricial para a Representação Algébrica.
[5] Representação Gráfica para a Representação Algébrica.
[6] Representação Figural para a Representação Algébrica.
[7] Registro de representação algébrico para o registro de representação gráfico.

Ademais, em disciplinas como a Álgebra Linear, que abordam conceitos que serão ensinados pelo futuro professor de Matemática é desejável que tais conceitos sejam ensinados afim de proporcionar conhecimento abrangente da Matemática, relacionando aspectos dessa, com a sua construção histórica, suas aplicações, métodos empregados ao longo dos tempos, assim como, as questões percebidas, atualmente, nessa área de conhecimento, como por exemplo, avanços e desafios (SBEM, 2003).

Corroborando com o documento da SBEM, Bertolazi e Savioli (2018, p. 33) afirmam que, para a compreensão de um conceito matemático é preciso que sua construção envolva "o estabelecimento de relações e significados, o entendimento de situações em que o mesmo pode ser aplicado e formas diferenciadas para representá-lo". As diferentes formas de representação de um mesmo conceito matemático, "instigam organizações mentais que podem estimular operações de generalização, possibilitando a construção e a formação do pensamento abstrato" (BERTOLAZI; SAVIOLI, 2018, p. 33). Por isso, a importância do trabalho pautado na teoria dos Registros de Representação Semiótica.

Portanto, o **objetivo geral** desta pesquisa *é mapear os entendimentos dos acadêmicos do Ensino Superior sobre Sistemas Lineares sob a ótica dos Registros de Representação Semiótica.*

Ao continuar a leitura, o capítulo 1 aborda alguns aspectos da teoria dos Registros de Representação Semiótica segundo Raymond Duval atrelando-a ao conteúdo de Sistemas Lineares. O capítulo 2 apresenta o mapeamento de teses e dissertações, visando identificar o cenário atual das pesquisas brasileiras envolvendo a teoria dos Registros de Representação Semiótica no ensino de Álgebra Linear.

No capítulo 3, são descritos os encaminhamentos metodológicos, desta pesquisa, a saber, o local de pesquisa, a produção de dados e as escolhas metodológicas da análise. No capítulo 4 discorre a análise dos planos de ensino das disciplinas de Álgebra Linear I e II, nas quais os acadêmicos participantes, desta pesquisa, estavam matriculados, bem como os objetivos das atividades propostas e a análise dos protocolos com a resolução dos participantes, finalizando com as considerações finais, as referências, anexo e os apêndices.

1 A Teoria dos Registros de Representação Semiótica e os Sistemas de Equações Lineares

Este capítulo apresenta pressupostos da teoria dos Registros de Representação Semiótica (RRS), teoria base desta pesquisa, relacionando-a com o objeto de estudo, Sistemas Lineares. A teoria dos RRS foi desenvolvida pelo pesquisador francês Raymond Duval (psicólogo e filósofo) e tem contribuido com a área da Educação Matemática. Conforme Brandt e Moretti (2014, p. 24), Duval "contribui com reflexões sobre o funcionamento cognitivo do pensamento humano na aprendizagem matemática", associando os registros de representação semiótica com as atividades de apreensão conceitual.

A teoria dos RRS foi sistematizada na obra *Sémiosis et pensée humaine: Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*[8], publicada em 1995. Trata-se de uma teoria cognitivista, referente ao desenvolvimento cognitivo do pensamento matemático e à influência dos registros de representação semiótica neste desenvolvimento.

Existem, para Duval (*apud* DAMM, 2012), três tipos de representações: as mentais, as computacionais e as semióticas. As representações mentais têm por ofício a objetivação, isto é, uma expressão particular independente da comunicação, ou seja, independente da expressão para o outro. Já as representações computacionais referem-se ao tratamento, pois estas não podem ser satisfeitas apenas pelas representações mentais. Já as representações semióticas "[...] realizam de maneira indissociável, uma função de objetivação e uma função de expressão. Elas realizam de alguma forma uma função de tratamento, porém este tratamento é intencional, função fundamental para a aprendizagem humana" (DAMM, 2012, p. 174).

O que são as representações semióticas? São "produções constituídas pelo emprego de sinais (enunciados em língua natural, fórmula algébrica, gráfico, figura geométrica,...)" (DUVAL, 2009, p. 15), entendidas, muitas vezes, como forma de exteriorizar as representações mentais. Ou seja, as

[8] "Semiose e pensamento humano: registros semióticos e aprendizado intelectual" (tradução nossa).

representações semióticas seriam “inteiramente subordinadas as representações mentais e contemplariam apenas as funções de comunicação” (DUVAL, 2009, p. 15), porém, segundo o autor, além de necessárias para fins de comunicação, elas também são indispensáveis para o desenvolvimento de qualquer atividade matemática.

A importância das representações semióticas na Matemática se deve ao fato de que os objetos matemáticos só podem ser acessados por meio de suas representações semióticas, o que diferencia a Matemática das demais áreas, e ao modo como se dá a apreensão dos conceitos matemáticos (DUVAL, 2011). Com isso, a fim de diferenciar os sistemas semióticos utilizados na Matemática e os utilizados em outras áreas, o autor utiliza-se do termo “registro”. Os registros de representação semiótica são

> [...] sistemas semióticos criadores de novos conhecimentos que satisfazem, basicamente, duas condições: (a) Produzem representações que permitem acesso e exploração a objetos inacessíveis perceptivelmente ou instrumentalmente; (b) Permitem transformações em novas representações (MORAN; FRANCO, 2015, p. 63).

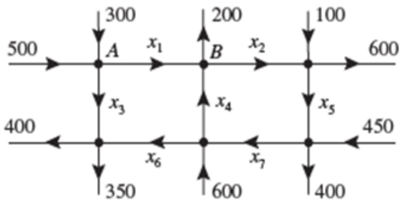
A impossibilidade de acesso aos objetos matemáticos, por meio de instrumentos, gera o que Duval (2009, 2011, 2012, 2013) designa como *Paradoxo Cognitivo da Matemática*: como não confundir o objeto matemático com a sua representação semiótica se só se tem acesso a eles por meio delas?

> É essencial jamais confundir os objetos matemáticos, como os números, as funções, as retas, etc., com suas representações, quer dizer, as escrituras decimais ou fracionárias, os símbolos, os gráficos, os traçados de figuras [...] porque um mesmo objeto matemático pode ser dado através de representações muito diferente (DUVAL, 2009, p. 14).

Ademais, um dos problemas destacado por Duval (2009) é que muitas vezes, devido as diferentes representações de um mesmo objeto, os estudantes acabam por não reconhecer um determinado objeto em uma representação diferente.

Os Sistemas Lineares, por exemplo, são definidos como um conjunto de equações lineares (ANTON; RORRES, 2012), podendo ser representado por registros de representação distintos, como pode ser observado no Quadro 1.

Quadro 1: Exemplos de Registros de Representação Semiótica

Registro de Representação Figural	Registro de Representação Algébrica	Registro de Representação Matricial
A figura dada mostra uma rede viária de ruas de mão única com fluxo de tráfego nos sentidos indicados. As taxas de fluxo ao longo das ruas são medidas pelo número médio de veículos por hora. (a) Monte um sistema linear cuja solução forneça as taxas de fluxo desconhecidas (b) Resolva o sistema para as taxas de fluxo desconhecidas. 	$\begin{cases} x_1 + x_3 = 800 \\ x_1 - x_2 + x_4 = 200 \\ x_2 - x_5 = 500 \\ x_5 - x_7 = -50 \\ x_4 + x_6 - x_7 = 600 \\ x_3 + x_6 = 750 \end{cases}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 800 \\ 200 \\ 500 \\ -50 \\ 600 \\ 750 \end{bmatrix}$

Fonte: Elaboração da autora (2018), com base em Anton e Rorres (2012).

As dificuldades de aprendizagem resultantes do paradoxo cognitivo do pensamento matemático, para Duval (2012, p. 270, *grifos do autor*), "se dão pelo fato de que não há *noesis* sem *semiose*" e, portanto, enquanto o ensino não levar em conta essa abordagem, tais dificuldades permanecerão. Entende-se nas palavras de Duval (2009, p. 15, *grifos do autor*) que, "*semiósis* é a apreensão ou produção de uma representação semiótica, e *noésis* os atos cognitivos como a apreensão conceitual de um objeto".

A atividade matemática, para Duval (2009, 2012, 2013), é constituída por dois tipos de transformações, a saber: tratamento e conversão. Atualmente, o autor chama essas transformações de "gestos intelectuais específicos em qualquer atividade matemática" (DUVAL, 2013, p. 16).

"Um tratamento é uma *transformação de representação interna a um registro* de representação ou a um sistema" (DUVAL, 2009, p. 57, *grifos do autor*), no qual cada registro de representação possuiu regras específicas a serem seguidas para a realização do tratamento. No Quadro 2 é apresentado um exemplo de tratamento. Na atividade exposta exige-se um tratamento no registro de representação algébrico para determinar a solução de um Sistema de Equações Lineares por meio do Método de Escalonamento.

Este método consiste em reduzir o Sistema Linear inicial para um sistema equivalente a esse (com a mesma solução), porém em forma de escada ou escalonado. Para escalonar um Sistema Linear as seguintes operações elementares entre linhas podem ser realizadas no sistema:

(a) transpor ou permutar as linhas;

(b) multiplicar as linhas por um escalar não nulo;

(c) substituir uma das linhas por sua adição com um múltiplo de outra linha.

Quadro 2: Exemplo de tratamento no registro de representação algébrica

Resolva o Sistema Linear pelo método do escalonamento.

$$\begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ 2x + 4y - 3z = 1 \\ 3x + 6y - 5z = 0 \end{cases} \quad L_2 \rightarrow L_2 - 2L_1$$

$$\begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ +2y - 7z = -17 \\ 3x + 6y - 5z = 0 \end{cases} \quad L_3 \rightarrow L_3 - 3L_1$$

$$\begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ +2y - 7z = -17 \\ +3y - 11z = -27 \end{cases} \quad L_3 \rightarrow L_3 - \frac{3}{2}L_1$$

$$\begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ +2y - 7z = -17 \\ -\frac{1}{2}z = -\frac{3}{2} \end{cases} \quad L_3 \rightarrow L_3 - \frac{3}{2}L_1$$

$$\begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ 2y - 7 \cdot 3 = -17 \\ z = 3 \end{cases}$$

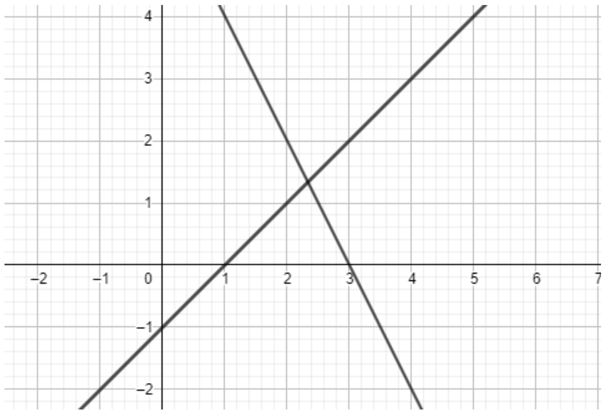
$$\begin{cases} x + 2 + 2 \cdot 3 = 9 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$$

Fonte: Elaboração da autora, 2018.

"A conversão é então uma *transformação externa em relação ao registro de representação de partida*" (DUVAL, 2009, p. 58-59, *grifos do autor*), ou seja, há uma mudança da representação de partida, para uma representação em outro registro (HENRIQUES; ALMOULOUD, 2016), o registro de chegada. No exemplo exposto no Quadro 3 a representação de partida é a algébrica e a representação de chegada é a gráfica.

Quadro 3: Exemplo de conversão do registro de representação algébrico para o registro de representação gráfica

Registro de Representação Algébrico	**Registro de Representação Gráfica**
Dado o Sistema Linear abaixo represente-o graficamente e encontre a solução do mesmo. $\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + y = 6 \end{cases}$	Solução: a partir da representação gráfica do Sistema Linear, o ponto $\left(\frac{7}{3}, \frac{4}{3}\right)$. 

Fonte: Elaboração da autora, 2018.

A conversão para a representação gráfica de um Sistema Linear com o uso de um *software* de Matemática dinâmica, por exemplo, GeoGebra, auxiliaria na obtenção rápida das soluções de sistemas de ordem 2×2 e 3×3, assim como, na determinação dos tipos de sistemas. Já que um **Sistema de Equações Lineares** pode ser descrito como consistente ou inconsistente, de acordo com o número de soluções possíveis para o sistema.

Um Sistema Linear possível e determinado é aquele que possui apenas uma única solução, que é representada pelo ponto de intersecção entre as retas no caso de sistemas de ordem 2×2 (Figura 1) e o ponto de intersecção dos planos no caso dos sistemas de ordem 3×3 (Figura 2).

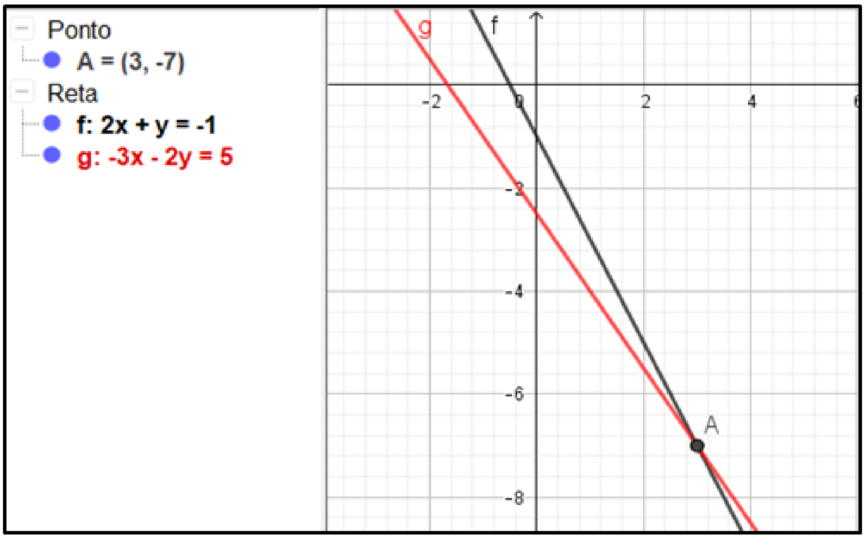


Figura 1: Registro de Representação Gráfica de um Sistema Linear 2×2 com uma única solução
Fonte: Elaboração da autora em 2018.

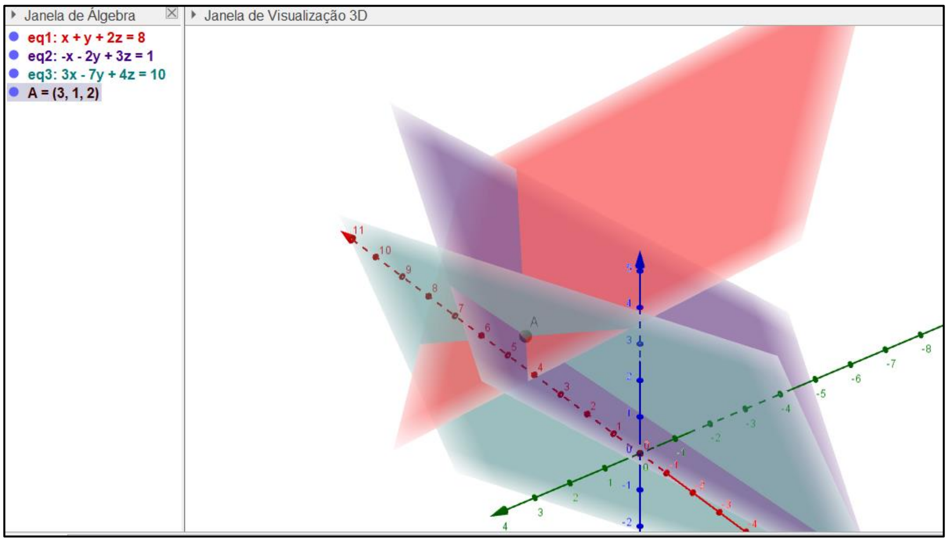


Figura 2: Registro de Representação Gráfica de um Sistema Linear 3×3 com uma única solução
Fonte: Elaboração da autora em 2019.

Um Sistema Linear é denominado Possível e Indeterminado, se esse possui um número infinito de soluções. Já nos casos em que a representação gráfica do sistema são retas coincidentes, estas representam graficamente a solução de um sistema ordem 2×2 (Figura 3), no caso de um sistema de ordem 3×3 temos planos coincidentes (Figura 4), três planos secantes, que possuem apenas uma reta em comum (Figura 5), e dois planos coincidentes e um plano secante (Figura 6), por isso estes possuem um número infinito de soluções.

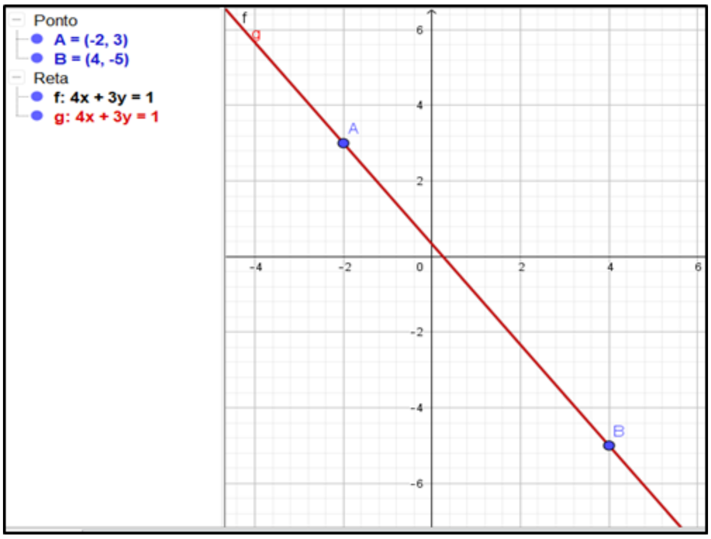


Figura 3: Registro de Representação Gráfica de um Sistema Linear 2×2 consistente com infinitas soluções

Fonte: Elaboração da autora em 2018.

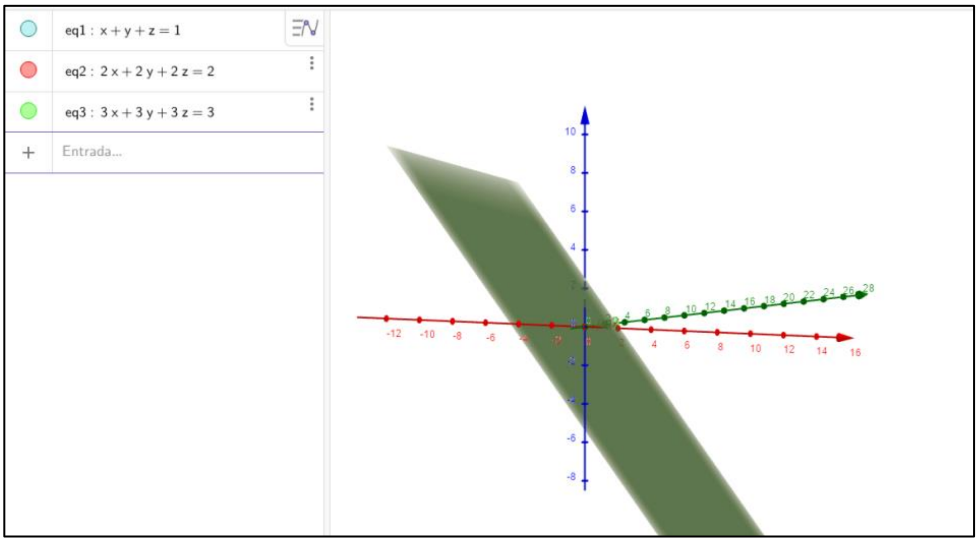


Figura 4: Registro de Representação Gráfica de um Sistema Linear 3×3 consistente com infinitas soluções

Fonte: Elaboração da autora em 2019.

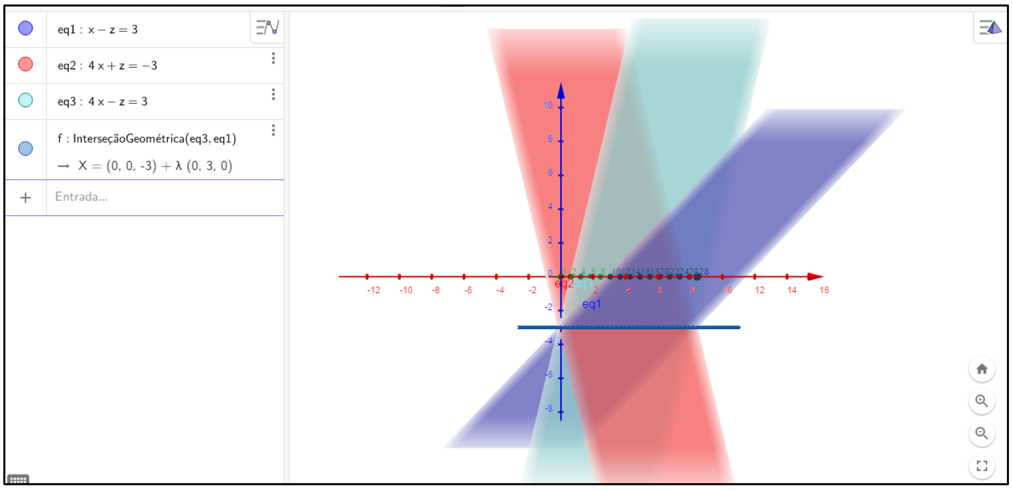


Figura 5: Registro de Representação Gráfica de um Sistema Linear 3×3 consistente com infinitas soluções

Fonte: Elaboração da autora em 2019.

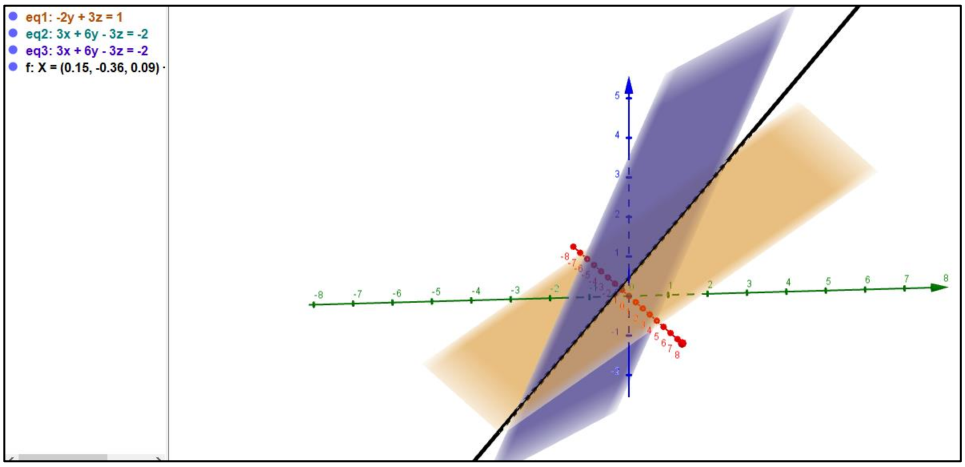


Figura 6: Registro de Representação Gráfica de um Sistema Linear 3×3 consistente com infinitas soluções

Fonte: Elaboração da autora em 2019.

O Sistema Linear Impossível é aquele que não possui solução. Referente a sistemas de ordem 2×2 desse tipo tem por representação gráfica duas retas paralelas (Figura 7), as quais não possuem pontos em comum. No caso de sistemas de ordem 3×3, esses podem apresentar planos paralelos (Figura 8). Este tipo de sistema é denominado inconsistente.

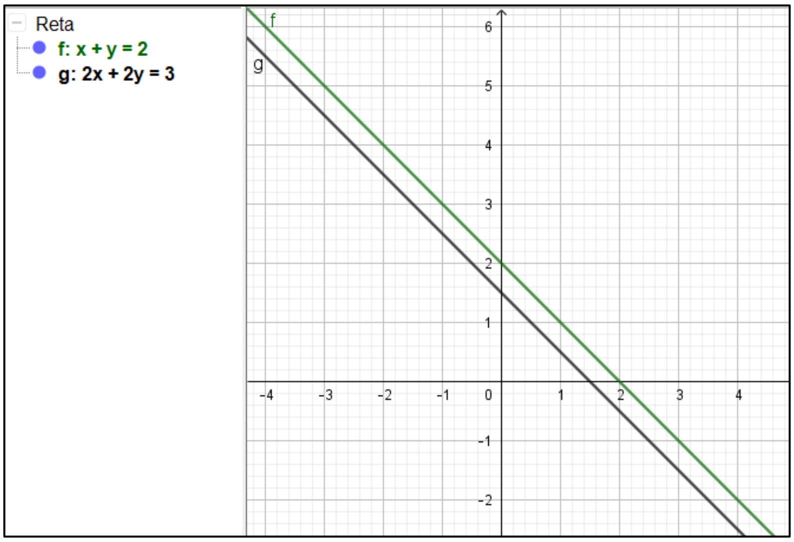


Figura 7: Registros de Representação Gráfica de um Sistema Linear 2×2 inconsistente
Fonte: Elaboração da autora em 2018.

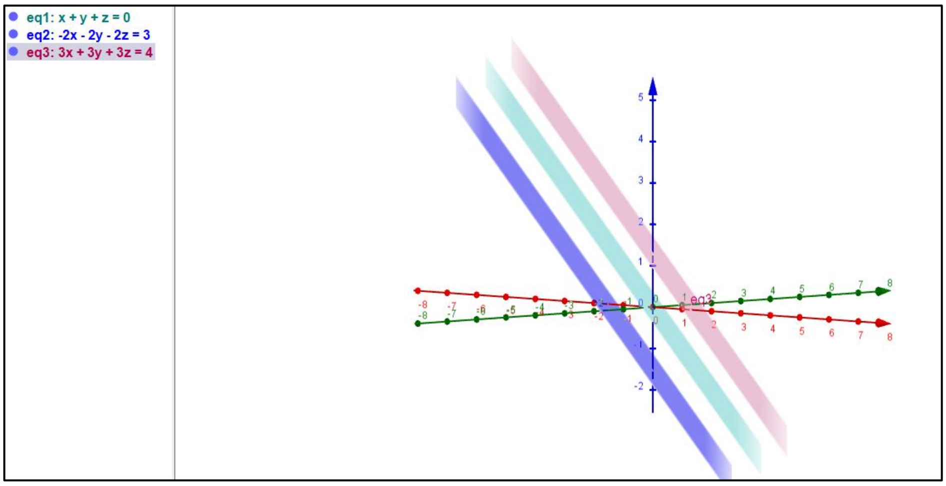


Figura 8: Registros de Representação Gráfica de um Sistema Linear 3×3 inconsistente
Fonte: Elaboração da autora em 2019.

Para Abrantes, Morais e Barros (2018, p. 5), quando o assunto são Sistemas de Equações Lineares, além do registro da língua natural, outros dois registros são considerados importantes, "o registro algébrico e o registro gráfico. Saber converter um sistema de equações lineares representado no registro algébrico para uma representação num sistema cartesiano, e vice-versa, é fundamental para compreensão desse conceito".

Para tanto, os estudantes teriam que ter sido, no mínimo, apresentados a essas diferentes representações, além de serem capazes de reconhecer que elas representam um mesmo conteúdo. É importante que na realização de uma atividade matemática, o discente possa e consiga mobilizar diferentes registros de representação semiótica (figuras, gráficos, escrituras simbólicas, língua natural, ...), bem como saiba qual registro pode ser utilizado ao invés de outro para que o tratamento envolva um número reduzido de etapas e a atividade seja resolvida (DUVAL, 2012).

Na sequência, são expostos os trabalhos identificados referente a Álgebra Linear e a teoria dos Registros de Representação Semiótica.

2 Álgebra Linear e Registros de Representação Semiótica: conhecendo algumas pesquisas sobre o tema

Posteriormente à definição do tema e do aporte teórico, foi realizado um levantamento de pesquisas na área de Educação Matemática que abordaram conceitos de Álgebra Linear e a teoria dos Registros de Representação Semiótica.

Para tanto, foi realizada uma busca avançada na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações[9], inicialmente, para dissertações e, posteriormente, para teses, tendo como recorte temporal os últimos 15 anos. Utilizou-se as seguintes palavras-chave: 1° Registros de Representação Semiótica; 2° Matemática; 3° Álgebra Linear.

Obteve-se, ao final das buscas, 60 dissertações e 60 teses que, após refinamento, foram identificadas as pesquisas que abordavam o trabalho com conteúdos de Álgebra Linear e tinham como aporte teórico a teoria dos RRS, resultando em oito dissertações (Quadro 4) e quatro teses (Quadro 5). Assim, os Quadros 4 e 5 apresentam as pesquisas brasileiras envolvendo Álgebra Linear, dos últimos 15 anos, que utilizam a teoria dos RRS como aporte teórico.

Quadro 4: Dissertações selecionadas

Título: O conceito de independência e dependência linear e os registros de representação semiótica nos livros didáticos de Álgebra Linear			
Autor: André Lúcio Grande			
Orientadora: Barbara Lutaif Bianchini			
Ano	**IES**	**Conceitos Matemáticos**	**Etapa de Ensino**
2006	PUC/RS	Independência e dependência linear	ES
Título: Conceitos fundamentais da Álgebra Linear: Uma abordagem integrando Geometria Dinâmica			
Autora: Michele Viana Debus de França			
Orientadora: Ana Paula Jahn			
Ano	**IES**	**Conceitos Matemáticos**	**Etapa de Ensino**
2007	PUC/SP	Vetores e coordenadas, dependência linear, base e transformações lineares.	ES

[9] Disponível em: http://bdtd.ibict.br/vufind/.

Título: Sistemas Lineares na segunda série do Ensino Médio: Um olhar sobre os livros didáticos			
Autora: Carla dos Santos Moreno Battaglioli			
Orientadora: Barbara Lutaif Bianchini			
Ano	**IES**	**Conceitos Matemáticos**	**Etapa de Ensino**
2008	PUC/SP	Sistemas Lineares	EB-EM
Título: A conversão de Registros de Representações Semiótica no estudo de Sistemas de Equações Algébricas Lineares			
Autora: Lígia Françoise Lemos Pantoja			
Orientador: Renato Borges Guerra			
Ano	**IES**	**Conceitos Matemáticos**	**Etapa de Ensino**
2008	UFPa	Sistemas Lineares	EB-EM EJA
Título: Vetores: Interações a Distância para a aprendizagem de Álgebra Linear			
Autora: Juliana Pereira Gonçalves de Andrade			
Orientadora: Verônica Gitirana Gomes Ferreira			
Ano	**IES**	**Conceitos Matemáticos**	**Etapa de Ensino**
2010	UFPE	Vetores, dependência linear	ES
Título: Um estudo sobre a resolução algébrica e gráfica de Sistemas lineares 3×3 no 2° ano do Ensino Médio			
Autora: Ana Lucia Infantozzi Jordão			
Orientadora: Barbara Lutaif Bianchini			
Ano	**IES**	**Conceitos Matemáticos**	**Etapa de Ensino**
2011	PUC/SP	Sistemas Lineares	EB-EM
Título: Sistemas Lineares: Uma proposta de atividades com abordagem de diferentes Registros de Representação Semiótica			
Autora: Nilza Aparecida de Freitas			
Orientadora: Celina Aparecida Almeida Pereira *Abar*			
Ano	**IES**	**Conceitos Matemáticos**	**Etapa de Ensino**
2013	PUC/SP	Sistemas Lineares	EB-EM
Título: Registros de Representação Semiótica mobilizados no estudo de Sistemas Lineares no Ensino Médio			
Autora: Marilena da Silveira Boemo			
Orientadora: Rita de Cássia Pistóia Mariani			
Ano	**IES**	**Conceitos Matemáticos**	**Etapa de Ensino**
2015	UFSM	Sistemas Lineares	EB-EM

Fonte: Elaboração da autora, 2018.

Quadro 5: Teses selecionadas

<table>
<tr><td colspan="4">Título: Articulação entre Álgebra Linear e Geometria: Um estudo sobre Transformações Lineares na perspectiva dos Registros de Representação Semiótica</td></tr>
<tr><td colspan="4">Autora: Mônica Karrer</td></tr>
<tr><td colspan="4">Orientadora: Ana Paula Jahn</td></tr>
<tr><th>Ano</th><th>IES</th><th>Conceitos Matemáticos</th><th>Etapa de Ensino</th></tr>
<tr><td>2006</td><td>PUC/SP</td><td>Transformações Lineares</td><td>ES</td></tr>
<tr><td colspan="4">Título: As Transformações Geométricas em um jogo interativo entre quadros: Um estudo teórico</td></tr>
<tr><td colspan="4">Autora: Eliedete Pinheiro Lino</td></tr>
<tr><td colspan="4">Orientadora: Maria José Ferreira da Silva</td></tr>
<tr><th>Ano</th><th>IES</th><th>Conceitos Matemáticos</th><th>Etapa de Ensino</th></tr>
<tr><td>2014</td><td>PUC/SP</td><td>Transformações Geométricas</td><td>-</td></tr>
<tr><td colspan="4">Título: Ensino e Aprendizagem de Álgebra Linear: Uma discussão acerca de aulas tradicionais, reversas e de vídeos digitais</td></tr>
<tr><td colspan="4">Autor: Valdinei Cezar Cardoso</td></tr>
<tr><td colspan="4">Orientador: Samuel Rocha de Oliveira</td></tr>
<tr><th>Ano</th><th>IES</th><th>Conceitos Matemáticos</th><th>Etapa de Ensino</th></tr>
<tr><td>2014</td><td>UNICAMP</td><td>Matrizes e Sistemas de Equações Lineares; Espaços e Subespaços Vetoriais, Base e Dimensão; e Transformações Lineares</td><td>ES</td></tr>
<tr><td colspan="4">Título: Uso de Tecnologias Digitais no ensino e na aprendizagem de Álgebra Linear na perspectiva das Teorias da Aprendizagem Significativa e dos Registros de Representação Semiótica</td></tr>
<tr><td colspan="4">Autora: Rosana Maria Luvezute Kripka</td></tr>
<tr><td colspan="4">Orientador: Regis Alexandre Lahm</td></tr>
<tr><th>Ano</th><th>IES</th><th>Conceitos Matemáticos</th><th>Etapa de Ensino</th></tr>
<tr><td>2018</td><td>PUC/RS</td><td>Matrizes. Matriz inversa. Determinantes. Sistema de Equações Lineares. Transformações Lineares no plano. Autovalor e Autovetor</td><td>ES</td></tr>
</table>

Fonte: Elaboração da autora, 2018.

A partir da leitura das pesquisas pode-se destacar que, o conceito de Álgebra Linear mais abordado foi Sistemas Lineares, no contexto da Educação Básica (EB), especificamente, no Ensino Médio (EM), o que revela a preocupação desses pesquisadores com as dificuldades de aprendizagem desse conceito já na Educação Básica.

Battaglioli (2008) apresenta a análise de livros didáticos de Matemática da Educação Básica, no que tange ao ensino de Sistemas Lineares. A teoria dos Registros de Representação Semiótica foi o aporte teórico escolhido. Ao analisar os livros didáticos, a pesquisadora constatou que há ênfase para registro algébrico, sendo os outros registros pouco explorados, além de ser priorizado o ensino de algoritmos como a Regra de Cramer e Escalonamento, para a solução de um Sistema Linear, não explorando o significado do resultado obtido.

Em Pantoja (2008), é proposta uma sequência didática que tornou possível estabelecer uma conexão entre o Método de Substituição e o Método de Escalonamento. Para a elaboração e análise da sequência didática, a autora utilizou como aporte teórico a teoria dos Registros de Representação Semiótica. Segundo Pantoja (2008), o estudo de Sistemas Lineares no Ensino Médio restringe-se ao emprego de técnicas oriundas do ensino prévio de matrizes sem conexão com as técnicas ensinadas no Ensino Fundamental. Havendo uma quebra sequencial na construção desse conceito. Além disso, o próprio desenvolvimento histórico dos Sistemas Lineares não envolveu o estudo matricial.

A sequência proposta em Pantoja (2008) foi aplicada em uma turma de estudantes da Educação para Jovens e Adultos (EJA), seguindo as seguintes etapas: inicialmente, foram propostas situações-problema envolvendo equações simples, com o intuito de verificar como os estudantes utilizavam o registro de representação algébrico e como realizavam as resoluções. Na sequência, as atividades com problemas contextualizados que envolviam "situações da vida real, a fim de despertar a atenção dos alunos para a presença, mesmo que implícita, do nosso objeto de estudo nas formulações de diferentes situações problemas" (PANTOJA, 2008, p. 73), sendo resolvidas por meio do Método de Substituição. E, por fim, atividades envolvendo Sistemas Lineares cujo contexto é a própria Matemática, para que por meio destes os estudantes identificassem regularidades nos sistemas apresentados e nos modos de resolução, e que por meio de deduções realizassem a conversão do Método de Substituição para o Método de Escalonamento.

Sublinha-se, também, a sequência de ensino, envolvendo a resolução algébrica e gráfica de Sistemas Lineares com estudantes do 2º ano do Ensino Médio, proposta em Jordão (2011). A sequência foi desenvolvida com o auxílio do *software* educacional *Winplot,* a fim de possibilitar a compreensão da representação gráfica da solução de um sistema, além de explorar o trabalho com diferentes registros de representação, fundamentando-se na teoria de Duval. O desenvolvimento dessa sequência potencializou aos estudantes experimentarem a resolução de um Sistema Linear, mobilizando pelo menos dois registros de representação, além de constatarem a relevância do trabalho com o registro algébrico concomitante ao gráfico, o qual foi facilitado com a ajuda do ambiente computacional. A utilização do *software,* também, facilitou a visualização, experimentação e simulação dos sistemas. Os resultados de Jordão (2011) indicam possibilidades de articulação entre pressupostos teóricos de Duval, em especial, a atividade de conversão e o uso de *software* de Matemática Dinâmica para a aprendizagem de conceitos da Álgebra Linear, especificamente, Sistemas Lineares.

Freitas (2013) abordou os diferentes registros de representação de Sistemas Lineares de ordem 2×2. Para tanto, a autora, planejou uma sequência didática que permitisse que os estudantes determinassem a solução dos Sistemas Lineares em diferentes registros (gráfico, algébrico e língua natural). O *software* GeoGebra foi utilizado para a visualização e manipulação do objeto sistemas na sua representação gráfica. Freitas (2013) considera que, o trabalho mobilizando os diferentes registros e as transformações cognitivas de tratamento e conversão propiciaram uma evolução dos estudantes durante a resolução das atividades, havendo uma melhora significativa no desempenho dos mesmos.

Boemo (2015) buscou relacionar as ideias apresentadas em Battaglioli (2008), Jordão (2011) e Freitas (2013) sobre sistemas de equações lineares e a teoria dos Registros de Representação Semiótica. Para tanto, organizou a pesquisa em três momentos: (i) a análise do livro didático de matemática, disponível aos estudantes que participaram da investigação; (ii) análise dos cadernos de alguns estudantes das turmas de 2° Ano do Ensino Médio de uma escola da região central do estado do Rio Grande do Sul; (iii) elaboração e desenvolvimento de três sequências de atividades sobre Sistemas Lineares.

A autora pode constatar, no decorrer de sua pesquisa, que do total das atividades categorizadas no livro didático, 68,75% apresentavam, em algum momento, tratamento no registro algébrico, considerando, também, as atividades que envolviam conversão. Estando esta presente em 79,46% das atividades. Vale destacar que, o único método apresentado pelo livro didático para a resolução de Sistemas Lineares de ordem 3×3 foi o escalonamento.

A ênfase no registro algébrico se repetiu nas atividades utilizadas pelos professores e verificadas durante a análise dos cadernos dos estudantes.

Assim, a conversão teve um destaque “ínfimo”, segundo Boemo (2015). A conversão tendo como registro de partida o registro gráfico não foi contemplada, além disso, as atividades envolvendo este registro exploraram apenas a representação de sistemas de ordem 2×2.

A partir da análise do livro didático e dos cadernos dos estudantes, a autora planejou e desenvolveu três sequências de atividades, com diferentes objetivos, a saber,

> Comparar soluções de um sistema linear 2×2 a partir de diferentes sistemas semióticos [...], Fazer com que os alunos identificassem e justificassem se um sistema linear de ordem 3×3 possui ou não solução, tomando como elemento de partida o RGr[10] [...], Fazer com que os alunos estabelecessem se Sistemas Lineares de ordem 3×3 possuem ou não solução por meio de uma análise de propriedades aritméticas com base no RAl_T[11] e/ou no RAl[12], para posteriormente analisarem essa solução no RGr e no RAl [..] (BOEMO, 2015, p. 135-136).

Durante a análise da resolução dos estudantes nas atividades das sequências, pode-se identificar que os estudantes apresentaram melhor desempenho em atividades nas quais precisavam realizar tratamentos no registro algébrico. A autora constatou, também, que em atividades que demandavam a resolução de Sistemas Lineares de ordem 2×2, a escolha da maioria, foi pelo método de substituição, e em sistemas de ordem 3×3, o escalonamento.

Outrossim, no que diz respeito às pesquisas realizadas no âmbito do Ensino Superior, estas tratam de conceitos como transformações lineares, vetores, base, dependência e independência linear.

Grande (2006) investigou os registros de representação mobilizados no estudo de independência linear em livros-texto de Álgebra Linear. Este estudo permitiu ao autor inferir que, nos capítulos destinados a abordar noções de dependência e independência linear há uma escassez da abordagem de alguns registros de representação, a saber: geométrico e registro em língua natural. Também, verificou a pouca abordagem de conversões nas atividades propostas pelos livros-texto.

---

[10] Registro Gráfico.
[11] Registro Algébrico Tabular.
[12] Registro Algébrico.

França (2007, p. 12) analisou “contribuições do uso da Geometria Dinâmica na compreensão de conceitos fundamentais de Álgebra Linear, tais como vetores e coordenadas, dependência linear, base e transformações lineares”. Para tal, as atividades propostas visavam “investigar em que medida um tratamento geométrico e a articulação entre registros de representação (algébrico, gráfico e geométrico), auxiliados pelo ambiente Cabri-Géométre, influenciam nas concepções de estudantes que já cursaram a disciplina de Álgebra Linear”.

Neste sentido, as bases teóricas foram a teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval e a Teoria dos Campos Conceituais (TCC) de Vergnaud (1990)[13]. Quanto as questões metodológicas, seguiram os pressupostos do experimento de ensino proposto por Steffe e Thompson (2000)[14].

Participaram do experimento 18 discentes de uma turma de terceiro ano de Licenciatura em Matemática de uma universidade, que já haviam cursado a disciplina de Álgebra Linear, assim como, já estavam familiarizados com o uso do *software* e suas ferramentas. No decorrer dos encontros, constatou-se facilidade na mobilização do registro de representação algébrica, entretanto, foram identificadas dificuldades na realização das tarefas devido a falta de conhecimentos-prévios sobre os conceitos, exigindo o auxílio do professor para a retomada dos mesmos. Após as intervenções do professor, verificou-se uma evolução dos sujeitos na compreensão dos conceitos, bem como um domínio mais amplo das representações gráficas, algébrica e geométrica, realizando as conversões em ambos os sentidos. O trabalho com o *software,* segundo a autora, contribuiu para a elaboração de conjecturas, a validação experimental das hipóteses e estratégias levantadas durante a resolução das atividades devido ao uso de diferentes ferramentas do *software* dinâmico.

Destaca-se que a maioria dos estudos envolvendo objetos de Álgebra Linear é realizada em turmas presenciais. Assim, o objetivo de Andrade (2010) foi analisar os requisitos necessários ao desenvolvimento de *software*

[13] VERGNAUD, G. **La théorie de champs conceptuels**. Recherches en Didactique de Mathématiques, vol. 10, n. 23, p. 133-170,1990.
[14] STEFFE, L. P.; THOMPSON, P. W. **Taching Experimente Methodology:** Underlying Principles and Essential Elements. In: KELLY, A. E. e LESH, R. A. (Eds.) Research Design in Mathematics and Science Education. London: LEA, p. 267-307, 2000.

educativos que amparassem a aprendizagem à distância de objetos de dependência linear, pertencentes à Álgebra Linear. Para tanto, a pesquisadora utilizou como referencial teórico a teoria dos Registros de Representação Semiótica (RRS), a Aprendizagem Colaborativa Apoiada pelo Computador (CSCL) e a Engenharia de *Software* Educativos.

Nesse contexto, o estudo foi dividido em quatro etapas: levantamento das dificuldades de aprendizagem dos objetos no referido contexto, pela especificação dos requisitos, pelo desenvolvimento do protótipo, e por fim, pela validação. Para isso, a metodologia utilizada foi o *Design Experiments*, por ser um método de investigação e análise de fenômenos de aprendizagem, possibilitando a validação do protótipo de um *software* educativo a ser desenvolvido pela autora e oferecer subsídios para a concepção e análise do experimento como um todo.

Para identificar as dificuldades dos acadêmicos, dois instrumentos de produção de dados foram elaborados um questionário, com o intuito de caracterizar os sujeitos da pesquisa, e um teste, com enfoque no levantamento das dificuldades de aprendizagem do objeto dependência e independência linear. Tais dificuldades foram separadas em duas categorias: uso restrito de registros e problemas com a comunicação a partir das representações matemáticas.

O protótipo criado possui características de *software* colaborativo de geometria dinâmica com ferramentas específicas para a aprendizagem de vetores, dependentes ou independentes, sendo possível a manipulação direta dos vetores e de botões de adicionar e multiplicar os vetores por escalares, por exemplo. Outro ponto é a associação do contexto de geometria dinâmica com o registro de representação numérico. O mesmo, também, associa funcionalidades de *chat* no qual podem ser utilizados registros matemáticos e construções geométricas de maneira colaborativa.

Apesar da elaboração do protótipo ter levado em conta as especificidades do contexto e dos objetos do estudo, o *Design Experiments* realizado para a validação do protótipo mostrou que o uso desse sistema favoreceu a compreensão informal dos objetos. Identificou-se a presença de dificuldades referentes à manipulação das representações dos objetos e à comunicação necessária para a aprendizagem no contexto da Educação a Distância (EAD).

Karrer (2006) desenvolveu, com um grupo de acadêmicos do curso de Engenharia da Computação, uma sequência de ensino para a aprendizagem de transformações lineares, destacando a articulação entre geometria e álgebra, fundamentada na teoria dos Registros de Representação Semiótica. Para tal, inicialmente, realizou uma análise de livros-texto de Álgebra Linear, a qual permitiu a pesquisadora concluir que, dentre os quatro livros analisados: três exploravam o registro da língua natural, o registro simbólico-algébrico e o numérico; um livro apresentou atividades que exigiam a manipulação dos registros numérico-tabular e simbólico-matricial. Além disso, em todas as obras o registro menos explorado foi o gráfico, bem como a atividade de conversão foi negligenciada, principalmente, a que parte da representação no registro gráfico.

O desenvolvimento da sequência de ensino proporcionou aos acadêmicos a ampliação do conhecimento sobre transformações lineares, além de ampliar o domínio das representações semióticas e a realização de conversões.

Diferente da tese de Karrer (2006), a segunda tese identificada, defendida por Lino (2014), trata-se de um estudo teórico sobre transformações geométricas, tendo como finalidade trazer uma concepção ampla desse conteúdo, assim como, uma visão geométrica com uma nova organização destas transformações, com o intuito de significar o estudo das mesmas. Para tanto, a autora, utilizou como referencial teórico a noção de quadro proposta por Douady. Utilizou também a ideia sobre ponto de vista de Rogalski, por permitir que o estudo possa abordar diferentes pontos de vista, a autora utiliza os pontos de vista do quadro da geometria, no quadro da geometria analítica e do quadro da álgebra. A teoria dos RRS foi utilizada para representar as transformações geométricas e a mobilização de tratamentos e conversões.

Segundo a autora, a pesquisa realizada permitiu compreender as transformações geométricas e "apresentá-las em um estudo desde as séries iniciais com dobraduras até o ensino superior" (LINO, 2014, p. 8).

Cardoso (2014) investigou as contribuições do uso da metodologia de vídeos didáticos no ensino de conceitos da Álgebra Linear. Para tanto, trabalhou com duas turmas do Ensino Superior, em uma delas foram realizadas aulas expositivas-dialogadas seguindo o cronograma presente no plano de ensino e na outra foram inseridos o uso de vídeos didáticos, utilizando a proposta de aulas reversas[15]. Os referenciais teóricos adotados foram: TCC, RRS e a teoria Cognitiva da Aprendizagem Multimídia. A teoria dos RRS foi utilizada para a realização da análise dos exercícios resolvidos presentes em cinco livros didáticos de Álgebra Linear.

Nesta análise, o autor pode verificar que em alguns conceitos de Álgebra Linear as atividades que envolvem conversões são poucas, a exemplo, no ensino de espaços vetoriais. Também, foi identificado que o registro de representação mais utilizado foi o simbólico-algébrico e os menos utilizados foram simbólico-matricial, geométrico-figural e gráfico. Tais verificações foram levadas em conta pelo autor no momento de planejar e analisar as atividades realizadas pelos acadêmicos. Com relação às considerações sobre a análise das aulas, percebeu-se que o método das aulas reversas contribui com a aproximação entre os acadêmicos e o professor, com isso, facilitou a conceitualização dos conceitos abordados.

Kripka (2018) buscou identificar as potencialidades e fragilidades percebidas pelos discentes e pela docente de Álgebra Linear sobre o uso de recursos tecnológicos digitais nas tarefas propostas. A fundamentação teórica escolhida foi Aprendizagem Significativa, proposta por Ausbel e a teoria dos RSS. Participaram do estudo três turmas de Álgebra Linear do curso de Engenharia Civil, destas duas fizeram uso de recursos tecnológicos em todas as tarefas e uma utilizou tais recursos em apenas uma tarefa.

Um dos pontos levantados pela autora diz respeito à dificuldade dos discentes em expressar-se utilizando o registro de língua natural, pois faltava no momento da escrita clareza ao relatar os procedimentos utilizados e nas justificativas para as respostas apresentadas. O uso dos recursos tecnológicos digitais influenciou nos momentos de aprendizagem, pois exigiam que os

[15] Nessa metodologia, o professor grava previamente todo o curso, dividindo-o em vídeos digitais de, no máximo, 5 minutos e, semanalmente, indica aos estudantes quais vídeos deverão ser assistidos e quais as páginas do livro-texto devem ser lidas para as aulas da próxima semana. Nas aulas presenciais, o professor fornece listas de exercícios e discute com os estudantes as possíveis dúvidas e a resolução dos exercícios propostos (CARDOSO, 2014, p. 105).

estudantes tivessem o entendimento necessário sobre o objeto de estudo para transitar entre os diferentes registros semióticos (KRIPKA, 2018).

Diante desses resultados, foi possível aferir que, o principal enfoque, quando o assunto é pesquisa envolvendo Álgebra Linear e Registros de Representação Semiótica na Educação Básica, é o conteúdo de Sistemas Lineares. Destaca-se a existência de apenas dois trabalhos envolvendo estes conceitos no Ensino Superior, nos quais foram identificadas dificuldades na aprendizagem desse conteúdo, assim como, dos conceitos de Matrizes e Determinantes.

Nota-se, nas pesquisas realizadas na Educação Básica, a preocupação dos pesquisadores de analisar como os conteúdos de Álgebra Linear são abordados nos livros-didáticos, levando em conta a teoria dos Registros de Representação Semiótica, já que esses são selecionados pelas escolas por meio do Plano Nacional de Livros Didáticos (PNLD), sendo renovados constantemente, e são uma das ferramentas mais utilizadas por professores e estudantes.

No que diz respeito às pesquisas realizadas no âmbito no Ensino Superior, constatou-se que estas tratam de conceitos como transformações lineares, vetores, base, dependência e independência linear, mostrando uma diversidade dos conceitos abordados.

A maioria das pesquisas, em ambos os contextos, evidencia e expõe a importância e as potencialidades da utilização de recursos tecnológicos digitais no ensino de conceitos de Álgebra Linear, pois este auxilia no trabalho com diversos registros de representação de um mesmo objeto, bem como permite a visualização no registro de representação gráfico de alguns conceitos (vetores, planos, transformações lineares, dentre outros).

Algumas lacunas identificadas nas pesquisadas mapeadas podem ser apontadas como: a falta de estudos sobre outros conteúdos a serem abordados na Educação Básica, como, por exemplo, vetores e transformações lineares; o número restrito de pesquisas no Ensino Superior, preocupadas com os livros-textos presentes das bibliografias básicas das disciplinas de Álgebra Linear. Ademais, ressalta-se a necessidade de pesquisas sobre conteúdos de Álgebra Linear tendo como participantes da pesquisa futuros professores de

Matemática, dos sete trabalhos mapeados apenas França (2007) realizou um trabalho com acadêmicos de uma licenciatura em Matemática.

No próximo capítulo é apresentada a metodologia utilizada no desenvolvimento desta pesquisa, delimitando o objetivo geral e os específicos, o local e os sujeitos da pesquisa, a produção e a análise dos dados.

3 Metodologia da Pesquisa

O capítulo 3, referente à metodologia, está dividido em subitens, a saber: local de pesquisa e os sujeitos, onde apresenta-se o local onde a pesquisa foi realizada e quem foram os sujeitos dessa; a produção dos dados da pesquisa, no qual é exposto como se deu a produção dos dados desta pesquisa; e por fim, as escolhas metodológicas para a análise dos dados, em que é descrito a teoria utilizada para a análise das resoluções e as categorias de análise, de forma a facilitar ao leitor a identificação de cada escolha metodológica.

A pesquisa seguiu uma abordagem qualitativa. Conforme Borba (2004), este tipo de pesquisa é indicada para estudos que buscam analisar a percepção, através do trabalho com discursos e linguagens, bem como aqueles que priorizam entender, interpretar e problematizar os dados obtidos, não apenas expô-los quantitativamente.

Ademais, esta pesquisa seguiu pressupostos de um estudo de caso, conforme Yin (2010). Para o autor a escolha pela metodologia de estudo de caso se aplica quando os pontos a seguir são satisfeitos.

As características da questão de pesquisa, que segundo o autor, são perguntas do tipo “Como” ou “Por que”. Neste contexto, a questão desta pesquisa a ser respondida foi: “*Quais são os entendimentos dos acadêmicos do Ensino Superior sobre Sistemas Lineares sob a ótica dos Registros de Representação Semiótica?*”, tendo o intuito de compreender e investigar como estes acadêmicos realizam atividades sobre Sistemas Lineares, a fim de indicar quais registros de representação semiótica são mobilizados pelos acadêmicos; quais registros são mais utilizados; quais transformações foram realizadas com maior êxito.

Outro ponto refere-se ao nível de controle que o pesquisador tem sobre os eventos, sobre a pesquisa e sobre os participantes, que no estudo de caso deve ser pouco ou nenhum, não é desejável ou praticável a manipulação do comportamento dos participantes (PONTE, 2006). Nesta pesquisa, a pesquisadora não possuiu nenhum controle sobre a maneira como os acadêmicos realizaram as atividades nem sobre as respostas obtidas no questionário. Contudo, havia uma expectativa daquilo que poderia ser evidenciado durante a análise dos dados obtidos, por exemplo, a facilidade dos acadêmicos em realizarem tratamentos no Registro de Representação Algébrica.

O último ponto é que no estudo de caso há um enfoque para eventos contemporâneos ao invés dos históricos, bem como quando não há manipulação dos comportamentos relevantes para a pesquisa, ou seja, quando não há interferência do pesquisador durante a realização das atividades.

Ademais, o estudo de caso é uma investigação de caráter empírico, que analisa um fenômeno em um determinado contexto específico, podendo ocorrer observação direta desse, assim como, a realização de entrevistas com os participantes da pesquisa. Este tipo de estudo não possui caráter experimental, sendo usado quando o investigador não pretende modificar a situação, mas sim, entendê-la (PONTE, 2006).

Nessa perspectiva, esta pesquisa foi realizada no contexto da Universidade Federal de Pelotas, no curso de Matemática – Licenciatura (Diurno), tendo como objetivo geral, *mapear os entendimentos dos acadêmicos do Ensino Superior sobre Sistemas Lineares sob a ótica dos Registros de Representação Semiótica*.

Para complementar, propõe-se os seguintes objetivos específicos:

- investigar como os acadêmicos compreendem o conceito de Sistemas de Equações Lineares;
- identificar quais os Registros de Representação Semiótica são mobilizados pelos acadêmicos;
- compreender como esses acadêmicos resolvem atividades que se utilizam das transformações cognitivas de tratamento e conversão;
- analisar como os acadêmicos resolvem atividades que favorecem a argumentação e a prova de enunciados ou proposições matemáticas;
- elencar quais os métodos escolhidos para a resolução dos sistemas lineares (escalonamento – eliminação gaussiana; método de Gauss – Jordan; Regra de Cramer; outros);
- verificar se reconhecem e aplicam o conhecimento matemático, Sistemas Lineares, a situações da própria matemática ou de outras áreas do conhecimento;

- analisar a percepção dos acadêmicos sobre a contribuição do uso das tecnologias digitais de informação e comunicação nas aulas.

Na sequência são detalhados o local e os sujeitos desta pesquisa.

3.1 O local da pesquisa e os participantes

A pesquisa foi realizada na Universidade Federal de Pelotas (UFPel) que possui, desde 1969, o Instituto de Física e Matemática (IFM), cujo curso de Licenciatura em Matemática foi criado em 1991, pela Portaria 406[16]. Atualmente, o IFM possui os cursos de graduação em Matemática divididos em Matemática (Diurno) – Licenciatura, Matemática (Noturno) – Licenciatura, Matemática (a Distância) – Licenciatura, distribuídos administrativamente em dois campus: Campus Anglo e Campus Capão do Leão.

Os sujeitos da pesquisa foram os acadêmicos da UFPel, que estavam cursando as disciplinas de Álgebra Linear I (AL I) e Álgebra Linear II (AL II) no segundo semestre letivo de 2018. Essas fazem parte da matriz curricular dos cursos de Licenciatura em Matemática (Diurno e Noturno).

A escolha por essas disciplinas justifica-se, pois em Álgebra Linear I inicia-se o contato dos licenciandos com os conceitos de Álgebra Linear, bem como o ensino de Sistemas de Equações Lineares faz parte de sua ementa. Já Álgebra Linear II é uma disciplina optativa[17] que dá sequência aos conteúdos da disciplina de Álgebra Linear I e, por ser uma optativa, imaginava-se que os acadêmicos matriculados tem o intuito de aprofundar seus conhecimentos na área.

Participaram da produção de dados 16 acadêmicos da disciplina de Álgebra Linear I e 7 de Álgebra Linear II. O Quadro 6 apresenta um perfil desses participantes.

---

[16] Informações retiradas do site da IFM, disponível em: https://wp.ufpel.edu.br/ifm/apresentacao/. Acesso em: 05 set. 2018.

[17] Disciplina escolhidas pelos acadêmicos em caráter complementar, não fazendo parte da grade curricular obrigatória do curso.

Quadro 6: Perfil dos sujeitos da pesquisa

Caracterização dos sujeitos			
		AL I	AL II
Média de idade		24 anos	27 anos
Anos de ingresso		2015-2016-2017-2018	2008-2014-2015-2016-2017
Curso	Matemática	5 licenciandos	3 licenciandos
	Física	8 bachareis e 3 licenciandos	2 bachareis
	Outro	--	1 Ciências Econômicas

Fonte: Elaboração da autora, 2018.

No próximo item, explica-se é exposta como foi realizada a coleta das informações, a partir da aplicação das atividades.

3.2 A produção de dados da pesquisa

A etapa de produção de dados foi realizada em 2018/2, pois as disciplinas citadas no item anterior estavam sendo ministradas neste período, seguindo os procedimentos relatados na sequência.

Inicialmente, foi solicitada via *e-mail* a autorização dos docentes responsáveis por estas disciplinas para que a pesquisadora se utilizasse de uma de suas aulas para aplicar a sequência de atividades (Apêndice A) e o questionário (Apêndice B).

- Na turma de Álgebra Linear I a produção de dados ocorreu no dia 10 de Outubro de 2018, tendo início as 8:30h e finalizada às 10h.
- Na turma de Álgebra Linear II a produção de dados ocorreu no dia 18 de Setembro de 2018, tendo início às 14h e finalizada às 16h.

Em ambas as turmas, a produção de dados transcorreu da seguinte maneira: a pesquisadora foi apresentada à turma pela sua orientadora (presente durante o momento), após a pesquisadora expôs a sua pesquisa, solicitando a participação voluntária dos acadêmicos, mediante a assinatura do Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE) (Anexo A), explicitando os tópicos contidos no mesmo.

Posteriormente à assinatura do TCLE, foram distribuídas as folhas contendo as atividades a serem realizadas, a pesquisadora explicou cada uma das atividades e os acadêmicos iniciaram a resolução individualmente.

Por fim, as folhas com as resoluções dos discentes foram recolhidas e o questionário foi distribuído, transcorrendo da mesma maneira que a realização das atividades. Conforme os acadêmicos iam entregando os questionários eram liberados da aula.

No último item do capítulo 3, apresenta-se o procedimento que foi utilizado para a análise.

3.3 Escolhas metodológicas para a análise dos dados

A análise do material produzido foi realizada segundo as ideias de Bardin (2004) referente à Análise de Conteúdo. Conforme a autora, esta metodologia de análise perpassa três momentos: “a pré-análise, a exploração do material e o tratamento dos resultados, a inferência e a interpretação” (BARDIN, 2004, p. 95).

Na pré-análise, há a organização das ideias iniciais, a fim de tornar viáveis e aplicáveis algumas intuições de um primeiro momento da pesquisa, como também, é a fase em que é planejado o roteiro e a maneira como os dados serão analisados. Cabe ressaltar que, estes procedimentos não são imutáveis, podendo ser reorganizados no decorrer da análise.

Nesse contexto, a pré-análise é dividida em três fases: “a escolha dos documentos a serem submetidos à análise, a formulação das hipóteses e dos objetivos e a elaboração de indicadores que fundamentem a interpretação final” (BARDIN, 2004, p. 95).

Na primeira fase, são escolhidos os documentos a serem analisados. No caso desta pesquisa, os documentos analisados foram as resoluções dos acadêmicos das atividades propostas e as respostas do questionário. Essa escolha foi feita após a determinação dos objetivos da pesquisa, tendo em vista que há uma flexibilidade na ordem dos momentos estabelecidos pela autora.

Na segunda fase, é realizada a formulação das hipóteses e os objetivos, podendo ser reformulados, verificados ou refutados durante a análise dos resultados. Com base nos resultados obtidos da análise dos livros-texto de Álgebra Linear, realizada pela pesquisadora em seu Trabalho de Conclusão de Curso, reforçados pelos apontamentos das pesquisas mapeadas, tem-se a hipótese que o registro mais utilizado pelos acadêmicos será aquele que aparece como predominante no livro-texto abordado, ou seja, os Registros de Representação Algébrica e Matricial, sendo o menos utilizado o Registro de Representação Gráfica.

Na sequência, terceira fase, foram elaborados os indicadores, categorias de análise, finalizando as etapas da pré-análise. Essas categorias estão descritas no Quadro 7, na sequência, as mesmas foram definidas de acordo com as atividades propostas e o objetivo de cada uma delas.

Na exploração do material, é realizada a análise, codificação ou enumeração dos dados obtidos, separando-os por meio das categorias de análise definidas. Trata-se da etapa mais cansativa e trabalhosa, exigindo interpretação das resoluções e das respostas dos acadêmicos. (BARDIN, 2004).

Nesta etapa, os dados obtidos por meio dos protocolos dos discentes das turmas foram distribuídos em tabelas (separadas por atividade) e as suas resoluções foram classificadas como **satisfatória, parcialmente satisfatória, equivocada, nula** e **em branco**, baseada na análise exposta em Boemo (2015). Por exemplo, inicialmente, foram analisadas todas as resoluções da atividade 1, estas respostas foram tabuladas e organizadas seguindo as categorias abaixo.

Quadro 7: Categorias de análise

Categoria	Indicadores	O que será analisado
Compreensão dos Sistemas Lineares	- Investigar como os acadêmicos compreendem o conceito de Sistemas de Equações Lineares; - Verificar se eles entendem como identificar esse objeto matemático por meio de suas características.	A compreensão do conceito de Sistemas de Equações Lineares.
Registros de Representação Semiótica	- Identificar quais os Registros de Representação Semiótica são mobilizados pelos acadêmicos (língua natural, algébrico, gráfico, entre outros); - Compreender como esses acadêmicos resolvem atividades que se utilizam das transformações cognitivas de tratamento e conversão.	Os Registros de Representação Semiótica mobilizados pelos discentes no decorrer da resolução das atividades, e como eles são utilizados nas mesmas.
Argumentos	- Analisar como os acadêmicos resolvem atividades que favorecem a argumentação e a prova de enunciados ou proposições matemáticas.	A capacidade de formular argumentos para realizar a argumentação e prova de enunciados ou proposições matemáticas.
Métodos escolhidos para a resolução de Sistemas de Equações Lineares	- Elencar quais os métodos escolhidos para a resolução dos sistemas lineares (escalonamento – eliminação gaussiana; método de Gauss – Jordan; Regra de Cramer; outros).	Os métodos empregados pelos acadêmicos para a resolução das atividades, e o entendimento dos mesmos das limitações de alguns métodos.
Situações-problema	- Verificar se reconhecem e aplicam o conhecimento matemático, Sistemas Lineares, a situações da própria matemática ou de outras áreas do conhecimento.	A capacidade dos discentes em reconhecer e aplicar o conhecimento matemático, Sistemas Lineares, a situações da própria Matemática ou de outras áreas do conhecimento.
Software	- Verificar se já utilizaram *software* que permitam explorar, simultaneamente, as várias representações semióticas do objeto matemático; - Indagar se acreditam ser importante o uso deste tipo de ferramenta nas aulas de Álgebra Linear.	A compreensão da importância em utilizar-se de *software* que permitam explorar, simultaneamente, as várias representações semióticas do objeto matemático.

Fonte: Elaboração da autora, 2019.

Na etapa de tratamento dos resultados e intepretação, “os resultados brutos são tratados de maneira a serem significativos e válidos” (BARDIN, 2004, p. 101), para tanto, foram analisados e discutidos levando em conta os aspectos sobre Sistemas Lineares, como compreensão dos tipos de sistemas e a sua interpretação, métodos de resolução utilizados e da teoria RRS apresentados no referencial teórico.

No próximo capítulo, é exposta a análise dos planos de ensino das disciplinas de Álgebra Linear I e II, nas quais os acadêmicos participantes desta pesquisa estavam matriculados, bem como, os objetivos das atividades propostas e a análise dos protocolos de resolução dos participantes.

4 A análise das atividades realizadas

Neste capítulo, são apresentados e analisados os planos de ensino das disciplinas de Álgebra Linear I e II, nas quais os discentes participantes desta pesquisa estavam matriculados, assim como, um breve relato sobre as respostas obtidas por meio do questionário e a análise das resoluções das atividades propostas realizadas pelos acadêmicos.

4.1 Um olhar para os planos de ensino das disciplinas de Álgebra Linear

O documento elaborado, em abril de 2003, no Seminário Nacional de Licenciaturas em Matemática, pela Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM) para subsidiar as discussões acerca da formação de professores, descreve os conteúdos abordados nas disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral, Análise, Álgebra, Geometria, Estatística, Análise Combinatória e Probabilidade como conteúdos ampliadores do conhecimento matemático. Para tanto, o professor formador[18] precisa analisar o aspecto formal da Matemática e os aspectos teórico-metodológicos. Conforme os autores do documento, os conteúdos dessas disciplinas

> devem [...] possibilitar, [...], conhecimento amplo, consistente e articulado da Matemática, [destacando] aspectos de sua construção histórica, suas aplicações [...], os principais métodos utilizados [...] ao longo dos tempos, os avanços e os desafios atuais dessa área de conhecimento (SBEM, 2003, p. 14).

No documento supracitado, lê-se que os conteúdos/conceitos que serão trabalhados pelo futuro professor, por exemplo, conteúdos relacionados à Álgebra Linear (sistemas lineares, matrizes, determinantes), precisam “ser aprofundados nos seus aspectos epistemológicos e históricos e tratados de modo articulado com conteúdos mais complexos da Matemática e também com suas didáticas específicas” (SBEM, 2003, p. 15). Nesta perspectiva, os conteúdos não devem ser abordados, somente, como revisão do que já foi

[18] Essa expressão “professor formador” está presente no documento da Sociedade Brasileira de Educação Matemática, ao se referirem aos docentes dos cursos de licenciatura.

estudado na Educação Básica, tornando-se essencial (re)construir um conhecimento consistente, destacando as relações com outras áreas do conhecimento e com a própria Matemática (SBEM, 2003).

Este subitem tem por finalidade fazer um paralelo entre o que está proposto nos planos de ensino disponibilizados pelos docentes das disciplinas de Álgebra Linear I e II, nas quais a produção dos dados desta pesquisa foi realizada, e o que propõe o documento supracitado, apresentando, também, os itens descritos nos planos de ensino, à saber: ementa, objetivos das disciplinas e as suas respectivas bibliografias básicas. Estas últimas nos auxiliam a entender como o objeto Sistemas de Equações Lineares está sendo proposto para os discentes, o que pode ser perceptível durante a análise dos protocolos com as resoluções destes acadêmicos.

Dando continuidade, foi construído um quadro para cada componente curricular, contendo os tópicos mencionados acima. O Quadro 8 refere-se a disciplina de Álgebra Linear I e o Quadro 9 a Álgebra Linear II.

Quadro 8: Ementa, objetivo e bibliografia básica da disciplina de Álgebra Linear I da UFPel

Ementa	Solução de sistemas lineares. Matrizes e Determinantes. Espaços vetoriais. Transformações lineares. Matriz de uma transformação. Autovalores e autovetores
Objetivo da disciplina	Desenvolver os conceitos fundamentais da Álgebra Linear, explorando o ganho de maturidade matemática e aplicabilidade que eles propiciam. Habilitar o estudante para a compreensão e utilização de métodos básicos necessários à resolução de problemas técnicos, que podem ser modelados matematicamente.
Bibliografia Básica	BOLDRINI, J. L. *et al*. Álgebra Linear, 3ª ed., Harbra, São Paulo, SP. 1980.

Fonte: Plano de Ensino da disciplina disponibilizado pelo professor regente da turma.

O documento da SBEM (2003) destaca que é necessário (re)construir um conhecimento consistente, destacando as relações com outras áreas do conhecimento e com a própria Matemática (SBEM, 2003). Ao analisar o objetivo da disciplina de Álgebra Linear I pode-se notar uma semelhança com esse discurso quando é dito que o componente curricular pretende "desenvolver os conceitos fundamentais da Álgebra Linear, explorando o ganho de maturidade matemática e aplicabilidade que eles propiciam" (UNIVERSIDADE FEDERAL DE PELOTAS, 2011, p. 85), ou seja, aprofundar a compreensão destes conceitos que são revisitados e ampliados no Ensino

Superior, como Sistemas Lineares, Matrizes , Determinates e Transformações Lineares, e fazer uso da aplicabilidade dos mesmos em outras áreas do conhecimento e na própria Matemática.

Cabe destacar que os conceitos citados, anteriormente, estão previstos para a Educação Básica. Com isso, pode-se aferir que quase 50% da ementa da disciplina de Álgebra Linear I busca retomar e aprofundar conceitos que estão nas propostas curriculares da Educação Básica e que, provavelmente, os acadêmicos tiveram contato.

Estudos realizados pelo grupo liderado por francês Jean-Luc Dorier (1997 *apud* FRANÇA, 2007) realizaram alguns apontamentos referentes as disciplinas de Álgebra Linear, e as dificuldades que acadêmicos de diferentes cursos de graduação tem ao deparar-se com conceitos que são abordados na Educação Básica, como: Matrizes, Sistemas de Equações Lineares e Transformações Lineares. Tais dificuldades para Jean-Luc Dorier (1997 *apud* FRANÇA, 2007) são oriundas de um ensino no qual é privilegiada a representação algébrica nos livros-textos e pelos docentes destas disciplinas. Este privelegiamento, da representação algébrica nos livros-textos também foi encontrada por Karrer (2006) em sua análise com relação as Transformações Lineares

Nesse contexto, com relação ao livro-texto Boldrini *et al.* (1980), presente na bibliografia básica da disciplina de Algebra Linear I, sendo o mesmo que teve os capítulos referentes a Matrizes, Sistemas Linears e Determinantes analisados pela pesquisadora em seu TCC, foi constatado que o registro com maior ênfase foi o registro de representação matricial, presente 82% das atividades, seguido pelo registro de representação algébrica, assim como, o registro menos explorado foi o registro de representação gráfica. Pode-se afirmar, também, que as relações e conexões identificadas neste livro são em sua maioria relações dentro da própria Matemática, precisando do suporte de outra bibliografia que explore conexões com outras áreas do conhecimento.

As situações-problema contabilizam um total de 10 atividades, com contextos variados, como a própria Matemática e a Física. Constatou-se que não é feita nenhuma sugestão para a utilização recursos digitais no decorrer dos capítulos analisados, nem durante a resolução das atividades, tendo em vista que estes possibilitam a visualização dos conceitos por meio de sua representação gráfica e figural. Bem como, o uso de argumentação apareceu em apenas 7% das atividades propostas nos três capítulos. O livro apresenta apenas os seguintes métodos: redução à forma escada, método de Gauss e regra de Cramer.

Uma vez que o livro do Boldrini *et al.* (1980) é o único presente na bibliografia básica da disciplina e a partir dos apontamentos citados acima, nota-se a necessidade da inserção de novas bibliografias que explorem os pontos em que este livro-texto apresenta lacunas. Assim como, em disciplinas como esta também é preciso explorar questões relacionadas ao processo de ensino e aprendizagem de Matemática, por esse motivo, referências sobre ensino de Álgebra Linear, também, devem fazer parte das referências destas disciplinas.

Quadro 9: Ementa, objetivo e bibliografia básica da disciplina de Álgebra Linear II da UFPel

Ementa	Espaços com produto interno. Transformação autoadjunta. Transformações unitárias. Formas Canônicas. Formas bilineares e quadráticas. Identificação de cônicas e quádricas.
Objetivos da disciplina	**Gerais:** Desenvolver o hábito do uso de aplicações lineares de espaços vetoriais de dimensão finita no tratamento de fatos matemáticos de índole linear; Adquirir desembaraço no tratamento de problemas que envolvam os conceitos fundamentais de Álgebra Linear. **Específico:** Oferecer aos alunos noções de Espaço com Produto Interno, Transformações Unitárias, Formas Canônicas, bilineares e quadráticas
Bibliografia Básica	BOLDRINI, J. L. *et al*. Álgebra Linear, 3ª ed., Harbra, São Paulo, SP. 1980. CALLIOLI, C. A. *Álgebra Linear e Aplicações*. 6. ed. São Paulo, Atual, 1990. LAY, D. C. *Álgebra Linear e suas Aplicações*. 2. ed. Rio de Janeiro, LTC- Livros Técnicos e Científicos, 2007. LIPSCHUTZ, S. *Álgebra Linear*. 3ª ed. , Makron Books, São Paulo, SP. 1994. LIMA, E. L., Álgebra Linear, 2. ed. IMPA/CNPq, Rio de Janeiro, RJ, 1996

Fonte: Plano de Ensino da disciplina disponibilizado pelo professor regente da turma.

Inicialmente, destaca-se que os conteúdos propostos na disciplina de Álgebra Linear II não são conceitos que estão nas propostas curriculares da Educação Básica e, portanto, são abordados nessa etapa de ensino. No entanto, o entendimento do conceito de Sistemas Lineares é fundamental para a compreensão destes.

Na ementa da disciplina de Álgebra Linear II, vê-se uma semelhança com o Documento da SBEM (2003) no que diz respeito àa exploração de atividades que envolvam a aplicabilidade dos conceitos trabalhados no componente curricular em outras áreas e na própria Matemática, quando é mencionado “desenvolver o [...] uso de aplicações lineares [...] no tratamento de fatos matemáticos de índole linear; adquirir desembaraço no tratamento de problemas que envolvam os conceitos fundamentais de Álgebra Linear”. (UNIVERSIDADE FEDERAL DE PELOTAS, p. 168, 2011).

Da análise desses dois planos de ensino, disponibilizados pelos docentes das disciplina e, a partir dos itens descritos nas caracterizações das disciplinas do curso de Licenciatura em Matemática, conforme o seu Projeto Pedagógico, conclui-se que existem aproximações do que é indicado pelo Documento da SBEM (2003) com aquilo que está proposto, no entanto, nota-se a falta de destaque para as didáticas específicas para o ensino do conceito de Sistemas Lineares. Ademais, nas disciplinas da área de Educação Matemática, não está explícito no PPC se o tema será discutido em outros componentes curriculares.

4.2 Questionário

Referente ao questionário[19], as questões iniciais abordam algumas informações sobre os participantes da pesquisa, com o intuito de caracterizar os sujeitos que fazem parte dela, conforme já descrito no Quadro 6.

Nas duas perguntas seguintes o objetivo era investigar as dificuldades que os acadêmicos tem ao resolver atividades sobre os conceitos de Sistemas Lineares, além de como tais dificuldades infuenciam na hora de ensinar estes conceitos.

De forma resumida pode-se destacar que na primeira questão alguns relatos apresentados pelos discentes foram: lapso de conhecimentos prévios

[19] Disponível no apêncice B. As respostas dos acadêmicos de ambas as turmas ao questionário encontran-se no apêndice C.

oriundos da Geometria Analítica, a necessidade de conhecimento teórico e aprofundado dos conceitos,carência de prática e estudo destes.

Já na questão referente a considerar-se apto para ensinar, em maioria os acadêmicos ainda não tem segurança para ministrar aulas que envolvam Sistemas Lineares. Alguns dos motivos apontados foram falta de domínio e compreensão do conceito de Sistemas Lineares, como também, destacaram que quando forem atuar como professores e necessitarem ensinar esse conceito irão buscar em bibliografias diversas maneiras de sanar algumas lacunas que possuem referente a este conteúdo.

As últimas três questões referem-se ao uso de recursos tecnológicos digitais nas aulas de Álgebra Linear, a fim de trabalhar com diferentes percepções dos objetos ensinados nesta disciplina. Portanto, as perguntas tratavam sobre a utilização destes recurso enquando acadêmico, quais os recursos tecnológicos que ele indicaria para o ensino de Álgebra Linear e se ele compreende as vantagens se utilizar destes recursos nas aulas de Álgebra Linear como, por exemplo, *softwares* que permitem trabalhar com diferentes registros de representações de um Sistema Linear, simultaneamente.

Sintetizando a fala dos acadêmicos, tem-se que os recursos tecnológicos, quando utilizados, nas aulas de Álgebra Linear foram: projetor multimídia (com apresentação de slides), calculadora e o *software* GeoGebra.

Nessa perspectiva, em maioria, os acadêmicos indicaram o uso do *software* GeoGebra, pois esse permite a manipulação dos objetos de Álgebra Linear em diferentes registros de representação ao mesmo tempo. Bem como, mencionaram o uso da programação de alguns métodos de resolução de Sistemas Linear para a compreensão de tais métodos, e o uso de programas e aplicativos que disponibilizam o passo-a-passo das resoluções de sistemas.

A vantagem do uso de recursos digitais para a compreensão dos conceitos de Álgebra Linear apontada pelos discentes foi a visualização geométrica e gráfica desses conceitos, pois, auxiliam na compreensão desses objetos que, geralmente, só são trabalhados de maneira abstrata, formal e algébrica.

Desta forma, o questionário contribuiu para ter uma visão inicial das percepções dos acadêmicos sobre as atividades propostas pela pesquisadora e referente ao conceito Sistemas Lineares. Assim como, os entendimentos desses sobre o uso de recursos tecnológicos digitais nas aulas de Álgebra Linear.

4.3 A análise das atividades realizadas

Nesta sessão, são apresentadas as atividades realizadas justificando as escolhas da pesquisadora e, na sequência, a análise das resoluções dos acadêmicos. Essas atividades foram escolhidas a partir das pesquisas mapeadas inicialmente, Grande (2006), França (2007), Battaglioli (2008), Pantoja (2008), Andrade (2010), Jordão (2011), Freitas (2013), Boemo (2015), Karrer (2006), Lino (2014), Cardoso(2014) e Kripka (2018), considerando relevante a seguinte estrutura: definição de Sistemas Lineares e sua classificação, generalização da construção de sistemas, representação gráfica e numérica, compreensão de argumentação e prova, métodos de resolução e interpretação de problema vinculado a outra área de conhecimento.

Os dados obtidos por meio dos protocolos dos discentes das turmas foram distribuídos em tabelas (separadas por atividade) e as suas resoluções foram classificadas como **satisfatória, parcialmente satisfatória, equivocada, nula** e **em branco**, baseada na análise exposta em Boemo (2015), conforme descrito na metodologia. Essa classificação permitiu uma análise mais ampla do conjunto de respostas, oportunizando também diferenciar acadêmicos que tentaram resolver determinada questão daqueles que a deixaram em branco.

O objetivo da atividade 1 (Quadro 10) foi investigar como os acadêmicos compreendem Sistemas de Equações Lineares, a fim de verificar se eles entendem como identificar esse objeto matemático por meio de suas representações, como por exemplo, representação gráfica, algébrica, matricial, dentre outras, tendo em vista que a definição de um conceito matemático possui elementos que “permitem reconhecimento, manipulações matemática e entendimento a respeito das características e modos de resoluções/aplicações viáveis ao tema proposto” (BERTOLAZI; SAVIOLI, 2018, p. 39).

Para tanto, os discentes, nesta questão, poderiam recorrer à definição para dar sua resposta, bem como justificar por meio das características gráficas de um Sistema Linear, por exemplo.

Quadro 10: Atividade 1

1. Descreva condições para que um conjunto de equações possa ser considerado um Sistema de Equações Lineares.

Fonte: Elaboração da autora, 2019.

A Tabela 1 apresenta o quantitativo das resoluções dos acadêmicos da turma de Álgebra Linear I quanto ao tipo de resolução, bem como os registros mobilizados, a saber: registro de representação em língua natural (RLN), registro de representação algébrica (RA), registro de representação gráfica (RG), registro de representação matricial (RM), registro de representação simbólica (RS).

Tabela 1: Análise da resolução atividade 1 turma de Álgebra Linear I.

Resolução	Registros Mobilizados	Quantidade	Percentual
Satisfatória	--	--	--
Parcialmente Satisfatória	RLN	4	25,00%
Equivocada	RLN RLN+RA RLN+RM+RA	9	56,25%
Nula	--	2	12,50%
Em branco	--	1	6,25%
Total de respostas		16	100%

Fonte: Elaboração da autora, 2019, com base nos protocolos dos discentes da turma de AL I.

O registro de representação em língua natural foi o mais utilizado para a definição do que seria para os discentes um Sistema de Equações Lineares, sendo complementado, algumas vezes, pelos registros de representação algébrica e matricial.

Considerou-se que as respostas a serem classificadas como **satisfatórias** apresentassem uma aproximação da definição de Sistemas Lineares:

> Um sistema de equações lineares com m equações e n incógnitas é um conjunto de equações do tipo:

$$(*)\begin{cases} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + & \cdots & +a_{1n}x_n = & b_1 \\ a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 + & \ldots & +a_{2n}x_n = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + & a_{m2}x_2 + & \ldots & +a_{mn}x_n = & b_m \end{cases}$$

Com a_{ij}, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, números reais (ou complexos) (BOLDRINI *et al.*, 1980, p. 33).

Ou ainda, como afirmam Anton e Rorres (2012, p. 2, **grifos do autor**), “um conjunto finito de equações lineares é denominado um **sistema de equações lineares** ou, simplesmente, um **sistema linear**. As variáveis são denominadas **incógnitas**”. Para definir um Sistema Linear é preciso que o acadêmico saiba, primeiramente, a definição de Equações Lineares:

$$a_1x_1 + a_2x_3 + \cdots + a_nx_n = b$$

Na qual $a_1, a_2, \cdots a_n,\ b$ são constantes, assim como, todos os a não são iguais a zero. Como, também, as variáveis $x_1, x_2, \cdots x_n$ estão somente na primeira potência e não são, por exemplo, argumentos de funções trigonométricas, logarítmicas ou exponenciais (ANTON ; RORRES, 2012).

Já as resoluções classificadas como **parcialmente satisfatória**, apresentam alguns erros, como por exemplo, que as equações lineares que formam os sistemas são representadas apenas por retas, desconsiderando as equações de ordem 3 que formam planos no espaço. Isso pode-se justificar pela falta de atividades em que há a mobilização do registro de representação gráfica dos Sistemas Lineares de ordem 3, tendo em vista que o livro presente na bibliografia básica é Boldrini *et al.* (1980), que só contém a representação gráfica de Sistemas Lineares representados por retas. A Figura 9 apresentada a resolução do discente L[20] que ilustra esse tipo de erro.

[20] A fim de preservar a identidade de cada um dos participantes desta pesquisa, cada discente está sendo representado por uma letra do alfabeto, das letras A até P tratam-se dos acadêmicos da turma de Álgebra Linear I e de Q ao X os acadêmicos da turma de Álgebra Linear II.

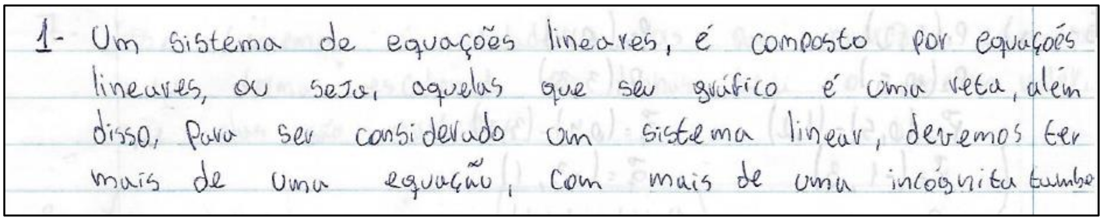
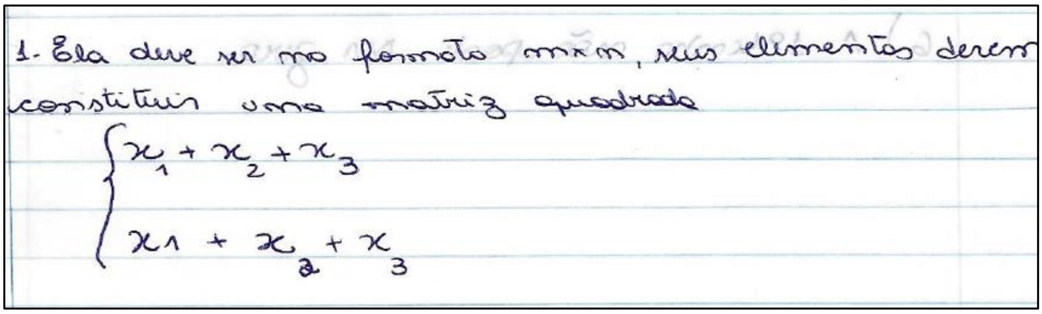

1- Um sistema de equações lineares, é composto por equações lineares, ou seja, aquelas que seu gráfico é uma reta, além disso, para ser considerado um sistema linear, devemos ter mais de uma equação, com mais de uma incógnita tambe

Figura 9: Resolução do discente L para a atividade 1
Fonte: Protocolo do discente L da turma AL I.

Nota-se que o acadêmico compreende que um Sistema Linear é composto por equações lineares, no entanto, com relação ao registro de representação gráfica destes sistemas, o mesmo afirma que para todo conjunto de equações estas serão representadas por retas, porém isso só é válido no caso de Sistemas Lineares de ordem 2×2, já que os de ordem 3×3 são representados por planos.

As resoluções classificadas como **equivocadas** expõem erros de compreensão do que são Sistemas Lineares, como por exemplo, que a representação matricial dos mesmos são apenas matrizes quadradas, ou seja, o número de equações é igual ao número de incógnitas, que o conjunto de equações deve ser escalonável. Utilizaram, também, a classificação do Sistema Linear e o cálculo do posto de uma matriz, que é visto como forma de aferir se o sistema dado possui solução.

Na sequência, mostra-se a resolução do discente C que ilustra a compreensão apresentada por 44,44% das resoluções classificadas como equivocadas.


1. Ela deve ser no formato m×n, seus elementos devem constituir uma matriz quadrada

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \end{cases}$$

Figura 10: Resolução do discente C para a atividade 1
Fonte: Protocolo do discente C da turma AL I.

Verifica-se na resolução do discente C que esta possuiu uma tentativa de relembrar a definição de um Sistema Linear, com o formato $m \times n$, que é utilizado para referir-se àa quantidade de equações que formam o sistema, assim como, apresenta uma noção da representação algébrica de um Sistema Linear, expondo dois conjuntos iguais de incógnitas somadas, unidos com colchetes, no entanto, não estão igualadas a nenhum valor e todos os seus coeficientes são iguais a um, mostrando a necessidade do entendimento inicial do que seria uma Equação Linear para depois se apronfundar para o que seria um Sistema de Equações Lineares. Além disso, o acadêmico afirma que tais elementos que formam este sistema "devem constituir uma matriz quadrada", sendo que o próprio não fez uso desta afirmação ao escrever sua representação de um sistema.

A afirmação de que um Sistema Linear condiciona-se a ter o número de equações igual ao número de incógnitas pode relacionar-se com um fato apresentado por Pantoja (2008), de que na Educação Básica (em particular no Ensino Médio) o ensino da resolução de Sistemas Lineares se restringe ao uso de estratégias provenientes do estudo introdutório de matrizes. Chiari e Freitas (2018) conjecturam que este estudo prévio de matrizes influencia na afirmação, trazida por Bataglioli (2008), de que o ensino de algoritmos como a Regra de Cramer vem sendo priorizado nesta etapa de ensino, porém, a mesma só pode ser utilizada na resolução de Sistemas Lineares cuja matriz de coeficientes é uma matriz quadrada e o seu determinante diferente de zero, ou seja, aqueles que possuem uma única solução.

Lima[21] (2001 *apud* CHIARI; FREITAS, 2018, p. 22) aponta outra limitação da Regra de Cramer: "[...] se tivéssemos um sistema [linear] 20×20, a Regra de Cramer requereria 2 milhões, 745 mil e 140 anos para obter a solução! O método do escalonamento usaria apenas 6 milésimos de segundo para resolver o sistema".

As respostas consideradas **nulas** não apresentaram uma definição coesa sobre como determinar se um conjunto de equações é um Sistema Linear, eram respostas confusas de difícil compreensão.

A Tabela 2 apresenta o quantitativo das resoluções dos acadêmicos da turma de Álgebra Linear II quanto ao tipo de resolução, bem como os registros mobilizados.

---

[21] LIMA, E. L. (Ed.) *Exames de textos*: análise de livros de matemática para o ensino médio. Rio de Janeiro: VITAE/IMPA/SBEM, 2001.

Tabela 2: Análise da resolução atividade 1 turma de Álgebra Linear II

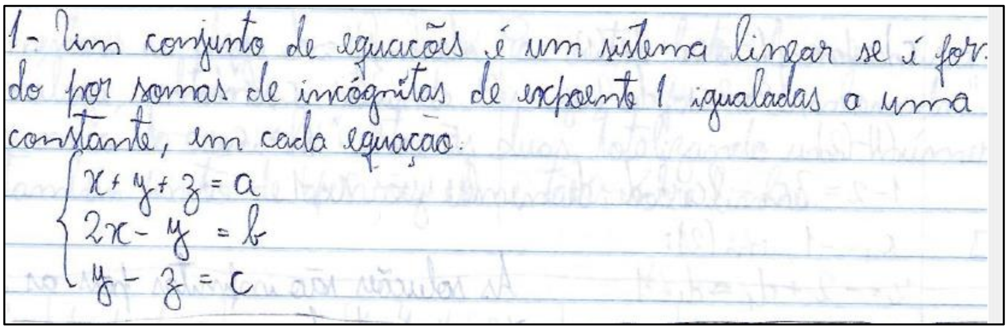
Resolução	Registros Mobilizados	Quantidade	Percentual
Satisfatória	RLN RLN +RA RLN+RS	7	100%
Parcialmente Satisfatória	--	--	--
Equivocada	--	--	--
Nula	--	--	--
Em branco	--	--	--
Total de respostas		7	100%

Fonte: Elaboração da autora, 2019, com base nos protocolos dos discentes da turma de AL II.

Referente à turma de Álgebra Linear II o registro de representação em língua natural está presente na resolução de todos os discentes ao tentarem definir um Sistema de Equações Lineares, sendo este complementado, algumas vezes, pelos registros de representação algébrica e simbólica.

As sete resoluções foram classificadas como **satisfatórias**, pois aproximam-se das definições de Sistemas Lineares apresentadas anteriormente.

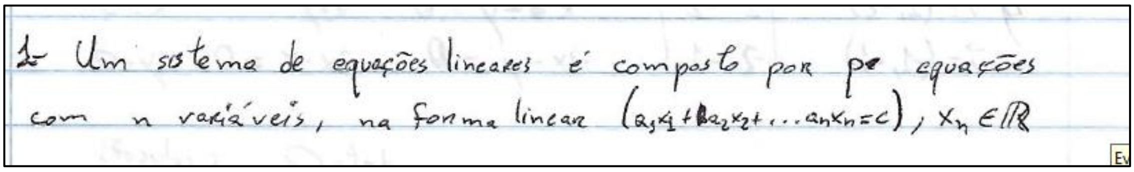
Consta na resolução do acadêmico T a definição em RLN de um Sistema Linear, apresentando a representação algébrica do mesmo, com três equações lineares diferentes, unidas com colchetes, estando igualadas a valores distintos complementando sua resposta.


1- Um conjunto de equacões é um sistema linear se é formado por somas de incógnitas de expoente 1 igualadas a uma constante, em cada equacao.

$$\begin{cases} x+y+z=a \\ 2x-y=b \\ y-z=c \end{cases}$$

Figura 11: Resolução do discente T da atividade 1
Fonte: Protocolo do discente T da turma AL II.

O discente V além de expressar-se na representação em linguagem natural, complementou sua resposta com uma notação em representação simbólica, referindo-se aos elementos que compunham as equações. Este tipo de notação é comum na definição de Sistemas de Equações Lineares apresentada nos livros-texto.



1- Um sistema de equações lineares é composto por p equações com n variáveis, na forma linear $(a_1x_1+a_2x_2+...a_nx_n=c)$, $x_n \in \mathbb{R}$

Figura 12: Resolução do discente V da atividade 1
Fonte: Protocolo do discente V da turma AL II.

Na sequência, na atividade 2, o intuito foi verificar como os acadêmicos identificam os tipos de Sistemas Lineares, ou seja, quais são os elementos que consideram importantes para a identificação de Sistemas Lineares, por exemplo, condições para que determinado tipo de sistema tenha solução única, infinitas ou nenhuma, analisando as características gráficas ou as relações entre os coeficientes das equações. E, se isso ocorre, por meio de qual registro de: representação em língua natural, representação em linguagem formal, representação gráfica, representação algébrica (restrito aos Sistemas Lineares de ordem 2×2 e 3×3) e/ou representação numérica.

Quadro 11: Atividade 2

2. Como você pode verificar, sem utilizar algum método de resolução, se um Sistema de Equações Lineares é: Sistema possível e determinado; Sistema possível e indeterminado; Sistema impossível.

Fonte: Elaboração da autora, 2019.

A Tabela 3 apresenta os dados quantitativos das formas utilizadas pelos acadêmicos da turma de Álgebra Linear I para identificar o tipo de um Sistema Linear (sistema possível e determinado, sistema possível e indeterminado e sistema impossível), destacando o tipo de resolução e quais os registros mobilizados.

Tabela 3: Análise da resolução atividade 2 turma de Álgebra Linear I

Resolução	Registros Mobilizados	Quantidade	Percentual
Satisfatória	RLN RLN+RS	2	12,50%
Parcialmente Satisfatória	RLN RLN+RS	6	37,50%
Equivocada	RLN	1	6,25%
Nula	--	4	25,00%
Em branco	--	3	18,75%
Total de respostas		16	100%

Fonte: Elaboração da autora, 2019, com base nos protocolos dos discentes da turma de AL I.

Concebeu-se como resoluções do tipo **satisfatória** aquelas que apresentassem uma maneira de verificação de qual seria o tipo de Sistema Linear (dado um sistema qualquer) sem fazer uso de algum método de resolução. À exemplo, uso da representação gráfica, análise da existência ou não da proporcionalidade entre as equações, dentre outros.

Dentre as respostas obtidas, a maioria tratou da verificação do posto que "é dado pela maior ordem possível de submatrizes quadradas da matriz **A**, com determinante diferente de zero" (BOLDRINI *et al.*, 1980, p. 80) da matriz ampliada e da matriz de coeficientes[22], no entanto, as resoluções que não apresentavam como utilizar este conceito para identificar os tipos de sistemas foram consideradas **parcialmente satisfatórias**, assim como, as que não estavam completas.

A Figura 13 exibe a resolução do discente L. Esta resolução foi considerada satisfatória, pois explica como identificar os tipos de Sistemas Lineares fazendo o uso do cálculo do posto.

[22] "(i) Um sistema de m equações e n incógnitas admite solução se, e somente se o posto da matriz ampliada é igual ao posto da matriz de coeficientes.
(ii) Se duas matrizes tem o mesmo posto p e $p = n$, a solução será única.
(iii) Se duas matrizes tem o mesmo posto p e $p < n$, podemos escolher $n - p$ incógnitas, e as outras p incógnitas serão dadas em função destas"". (BOLDRINI *et al.*, 1980, p. 45).

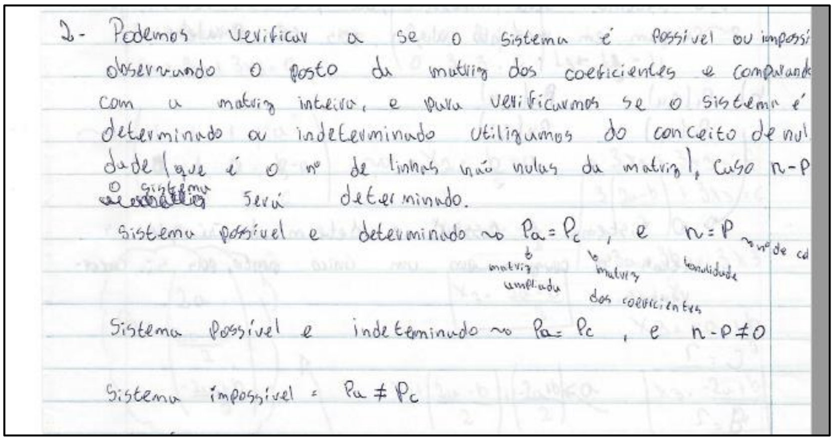

2- Podemos verificar a se o sistema é possível ou impossí
observando o posto da matriz dos coeficientes e comparando
com a matriz inteira, e para verificarmos se o sistema é
determinado ou indeterminado utilizamos do conceito de nul
dade (que é o nº de linhas não nulas da matriz), caso n-p
o sistema será determinado.
Sistema possível e determinado ~ $P_a = P_c$, e $n = P$ ~ nº de col
matriz ampliada — matriz dos coeficientes — nulidade
Sistema possível e indeterminado ~ $P_a = P_c$, e $n - P \neq 0$
Sistema impossível = $P_a \neq P_c$

Figura 13: Resolução do discente L da atividade 2
Fonte: Protocolo do discente L da turma AL I.

Apenas a resolução do discente M foi considerada equivocada (Figura 14), pois foram identificados equívocos como: todo sistema que possui mais incógnitas que equações foi considerado por ele como Sistema Impossível, entretanto, quando isso ocorre, geralmente, o sistema possui uma variável livre tendo então infinitas soluções.

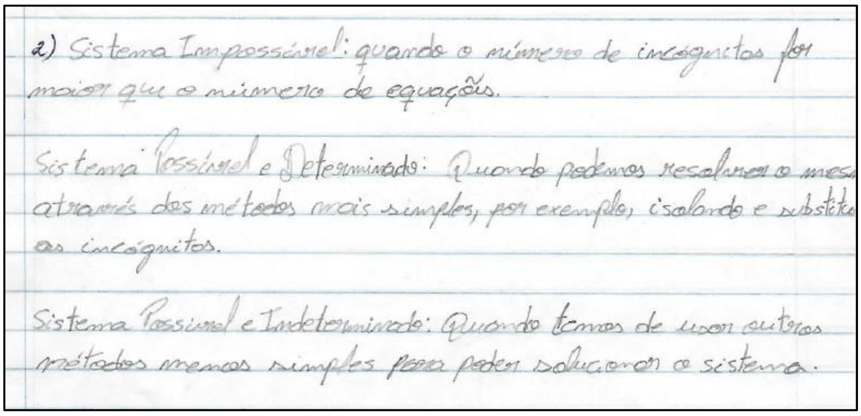
Um contra-exemplo desta afirmação pode ser o sistema descrito abaixo,

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 2 \\ 1x + \frac{1}{2}y + 2z = 1 \end{cases}$$

Este Sistema Linear possui mais incógnitas que equações, no entanto, é um sistema do tipo possível e indeterminado, com o conjunto solução $S = (1 - 2z, 0, z)$.

Outro ponto levantado pelo acadêmico M refere-se à complexidade da resolução de um Sistema Linear, se o mesmo puder ser resolvido por métodos simples, como por exemplo, método de substituição, trata-se de um sistema possível e determinado, e se não, se ele apenas pode ser resolvido com métodos complicados, o Sistema é possível, mas indeterminado.

O que encontra-se na bibliografia é o fato de que “à medida que cresce o número de equações e de incógnitas num Sistema Linear, cresce também a complexidade da álgebra envolvida em sua resolução” (ANTON; RORRES, 2012, p. 6). Em outras palavras, o aumento do número de equações e de incógnitas não altera o número de soluções que o sistema possui.


2) Sistema Impossível: quando o número de incógnitos for maior que o número de equações.

Sistema Possível e Determinado: Quando podemos resolver o mes através dos métodos mais simples, por exemplo, isolando e substitu as incógnitos.

Sistema Possível e Indeterminado: Quando temos de usar outros métodos menos simples para poder solucionar o sistema.

Figura 14: Resolução do discente M da atividade 2
Fonte: Protocolo do discente M da turma AL I.

As resoluções das atividades consideradas **nulas** explicavam o que seriam os tipos de Sistemas Lineares. Por exemplo, Sistema Possível e determinado, uma das respostas foi “sistema com uma única solução”, porém, como a atividade solicitava maneiras de identificar e não o significado, estas resoluções foram desconsideradas.

A Tabela 4 contém resultados quantitativos da análise das resoluções dos acadêmicos da turma de Álgebra Linear II referente a atividade 2.

Tabela 4: Análise da resolução atividade 2 turma de Álgebra Linear II

Resolução	Registros Mobilizados	Quantidade	Percentual
Satisfatória	--	--	--
Parcialmente Satisfatória	RLN	2	28,58%
Equivocada	RLN	4	57,14%
Nula	RLN	1	14,29%
Em branco	--	--	--
Total de respostas		7	100%

Fonte: Elaboração da autora, 2019, com base nos protocolos dos discentes da turma de AL II.

Diferente do desempenho da turma de AL II na atividade 1, nas resoluções da atividade 2, não foram obtidas resoluções do tipo **satisfatória** que seriam aquelas cujos discentes apresentariam uma maneira de verificação de qual seria o tipo de Sistema Linear (dado um sistema qualquer) sem fazer uso de algum método de resolução.

As atividades consideradas **parcialmente satisfatórias** foram aquelas cujos acadêmicos apresentaram meios de verificar qual seria o tipo de Sistema

Linear (dado um sistema qualquer), porém, com alguns equívocos. O discente T (Figura 15) utilizou-se do registro de representação em língua natural para indicar algumas características particulares dos tipos de sistemas, as quais auxiliam na identificação. No entanto, ao se referir ao sistema impossível, afirmou que eles possuem mais equações que incógnitas, o que não é válido podendo existir sistemas do tipo possível e determinado ou indeterminado em que o mesmo ocorre, conforme fica evidente em Boldrini *et al.* (1980, p. 44) ao elencar que

> Um sistema de m equações lineares e n incógnitas $x_1 \dots, x_n$.
>
> $$\begin{cases} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + & \cdots & +a_{1n}x_n = & b_1 \\ a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 + & \dots & +a_{2n}x_n = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + & a_{m2}x_2 + & \dots & +a_{mn}x_n = & b_m \end{cases}$$
>
> Cujos coeficientes a_{ij} e termos constantes b_1, são números reais (ou complexos). Este sistema poderá ter (i) Única solução $\begin{cases} x_1 = k_1 \\ \vdots \quad \vdots \\ x_n = k_n \end{cases}$, (ii) Infinitas soluções; (iii) nenhuma solução.

Nota-se que não há nenhuma afirmação referente à influência da quantidade de equações e de incógnitas interferir na classificação dos Sistemas Lineares de acordo com o número de soluções apresentadas por eles.

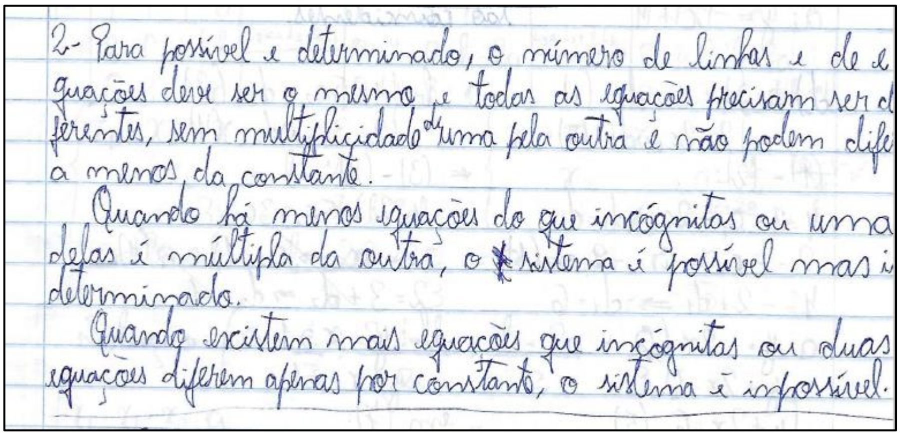

2- Para possível e determinado, o número de linhas e de equações deve ser o mesmo e todas as equações precisam ser diferentes, sem multiplicidade de uma pela outra e não podem diferir a menos da constante.
Quando há menos equações do que incógnitas ou uma delas é múltipla da outra, o sistema é possível mas indeterminado.
Quando excitem mais equações que incógnitas ou duas equações diferem apenas por constante, o sistema é impossível.

Figura 15: Resolução do discente T da atividade 2
Fonte: Protocolo do discente T da turma AL II.

Assim como no caso da turma de AL I, que indicou o uso do cálculo do posto e da nulidade para determinar os tipos do sistema, válido apenas para sistemas com o mesmo número de equações e incógnitas, alguns acadêmicos da turma de AL II indicaram o uso do cálculo do determinante (Figura 16), no qual é necessário o mesmo tipo de sistema (matriz quadrada). Assim como, ao deparar-se com o determinante diferente de zero, pode-se concluir que o sistema é possível e determinado (SPD), possuindo uma única solução, se o determinante for igual a zero, determina-se que ou o sistema é impossível (SI) ou é possível e indeterminado (SPI), não sendo possível através deste método afirmar, exatamente, qual o tipo de sistema (BATAGLIOLLI, 2008).

Na resolução do discente Q (Figura 16) pode-se observar os seguintes equívocos: o mesmo afirma que se o determinante for igual a zero o sistema é possível e indeterminado, bem como faz uso da terminologia sistema nulo para referir-se ao tipo impossível, alegando que se o determinante for um número menor que zero haverá nenhuma solução. Como exposto anteriormente, se o determinante for diferente de zero, o sistema possui uma única solução, e nos casos em que o determinante é zero não se pode afirmar nada com relação ao tipo de sistema.

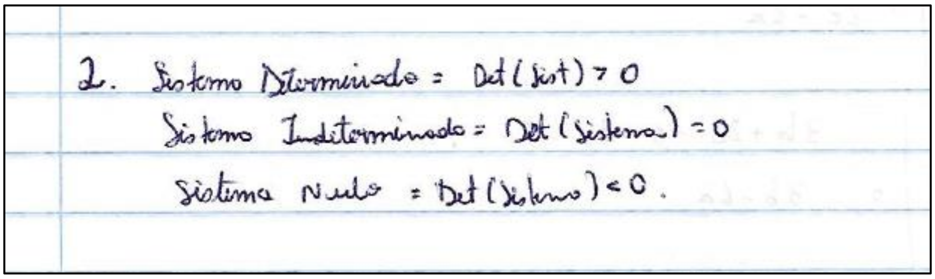


Figura 16: Resolução do discente Q da atividade 2
Fonte: Protocolo do discente Q da turma AL II.

Nesse contexto, também, foram elencadas como **equivocadas** as resoluções que afirmavam que o número de equações e incógnitas determinam o tipo de Sistema Linear, o que não é verídico, conforme dito anteriormente, baseada nas informações identificadas em Boldrini *et al.* (1980). Esse mesmo tipo de discurso foi apresentado pelo acadêmico S (Figura 17).

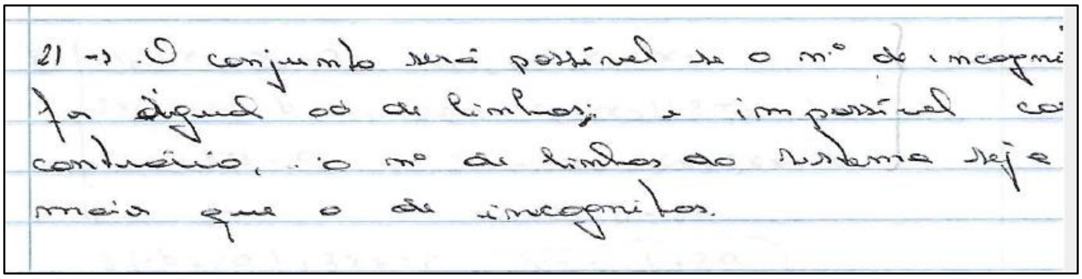

2) → O conjunto será possível se o nº de incogni
for igual ao de linhas; e impossível ca
contrário, o nº de linhas do sistema seja
maior que o de incognitas.

Figura 17: Resolução do discente S da atividade 2
Fonte: Protocolo do discente S da turma AL II.

A resolução da atividade considerada **nula** fez uso do método de escalonamento para realizar a verificação, por isso, foi considerada nula, visto que este não era o objetivo no momento.

Em ambas as turmas, o registro de representação utilizado foi o da língua natural, complementado em alguns momentos com o registro de representação simbólica e o registro de representação algébrica.

Para complementar é preciso mencionar que o registro de representação gráfica, mesmo que restrito aos sistemas de ordem 2×2 e 3×3 não foi mobilizado pelos discentes. Outro fator observado é que mesmo os acadêmicos avançando nas componenentes curriculares alguns erros conceituais permanecem, talvez, porque as representações enfatizadas e suas articulações sejam limitadas, assim como, o uso o método de Crammer, visto na Educação Básica, ainda esteja presente e enraizado no imaginário dos acadêmicos.

As atividades 3 (Quadro 12) e 4 (Quadro 13) visavam investigar as estratégias utilizadas pelos discentes para a escrita de diferentes tipos de Sistema Lineares constituídos por duas equações e duas incógnitas e de três equações e três incógnitas, respectivamente.

Ao indicar as construções dos conjuntos de equações lineares pretendia-se que estivesse explícito ou implícito a compreensão da proporcionalidade dos coeficientes das incógnitas, em caso de nenhuma solução, da proporcionalidade dos coeficientes das incógnitas e do termo independente, no de infinitas soluções, e da não proporcionalidade entre os coeficientes das incógnitas no sistema com uma única solução (FREITAS, 2013). Essas são entendidas aqui como generalizações possíveis para determinar número de soluções de um Sistema Linear.

Quadro 12: Atividade 3

3. Escreva um sistema de equações lineares constituído de duas equações e duas incógnitas com a) Nenhuma solução; b) Exatamente uma solução; c) Uma infinidade de soluções.

Fonte: Elaboração da autora, 2019.

A Tabela 5 evidência as informações quantitativas dos tipos de resolução da turma de Álgebra Linear I sobre a escrita de diferentes tipos de Sistema Linear, com duas equações e duas incógnitas.

Tabela 5: Análise da resolução atividade 3 turma de Álgebra Linear I

Resolução	Registros Mobilizados	Quantidade	Percentual
Satisfatória	RA	1	6,25%
Parcialmente Satisfatória	RA	2	12,50%
Equivocada	RA	8	50,00%
Nula	RA	4	25,00%
Em branco	--	1	6,25%
Total de respostas		16	100%

Fonte: Elaboração da autora, 2019, com base nos protocolos dos discentes da turma de AL I.

No que diz respeito às estratégias mobilizadas pelos acadêmicos, elas não foram descritas por eles, no entanto, ao analisar os Sistemas Lineares escritos tornou-se possível elencar algumas, como, por exemplo, no caso de sistemas com uma única solução, a maioria dos discentes elencou, inicialmente, valores (inteiros) para as incógnitas e após escreveram as equações.

Já no caso do sistema de infinitas soluções, utilizaram a estratégia de escrever equações múltiplas, contudo, neste tipo de sistema houve um número de erros significativo, bem como, de acadêmicos que a deixaram em branco. Pode-se descrever como erros significativos o fato de desconsiderarem os Sistemas Lineares com a solução trivial $[(0,0),(0,0,0)]$, ou com soluções com conjunto de números pertencentes aos reais.

Na última parte, referente aos sistemas com nenhuma solução, ao formar as equações os acadêmicos visaram escrever aquelas que acarretavam em uma inconsistência entre os valores, como por exemplo, o sistema

$\begin{cases} x+y=7 \\ -x-y=9 \end{cases}$. Neste, a segunda equação é o inverso aditivo da primeira, no entanto, o mesmo não ocorre com o termo independente, o que resulta em um Sistema Linear que não possui solução.

Na resolução do acadêmico F (Figura 18) vê-se um exemplo das estratégias citadas acima, sendo que esta resolução foi considerada **satisfatória**. No primeiro Sistema Linear, letra (a), foi solicitado que possuísse nenhuma solução e ao realizar a operação de $L_2 \rightarrow L_2 - 2 \cdot L_1$, tem-se que $0 = 7$, uma incoerência nos valores. No segundo Sistema Linear, letra (b), foi solicitado que possuísse uma única solução, vê-se na resolução do discente M que $y = 7$, portanto $x = -7$, logo a solução do sistema é $(-7,\ 7)$. Por fim, no terceiro Sistema Linear, letra (c), tem-se que as duas equações que compõe o sistema são múltiplas, logo, a solução do sistema são todos os conjuntos de valores do tipo $(x, 1-x)\ \forall\ x \in \mathbb{R}$[23].

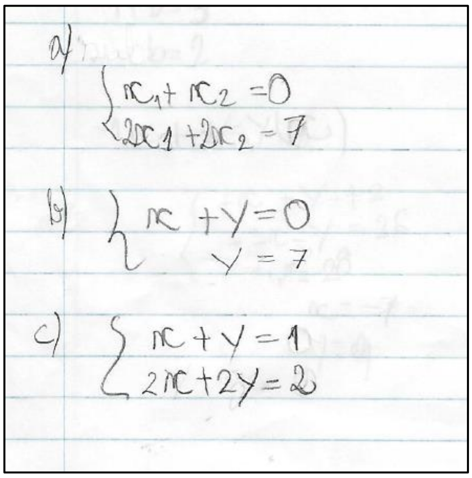
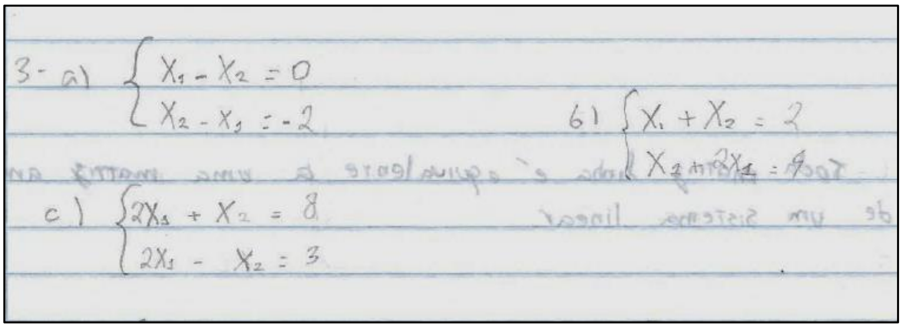


Figura 18: Resolução do discente F da atividade 3
Fonte: Protocolo do discente F da turma AL I.

Considerou-se **parcialmente satisfatória** as resoluções que continham um sistema escrito de forma equivocada. O discente N construiu de forma errada o sistema com infinitas soluções representado pela letra c, como consta na Figura 19, pois este possui uma única solução $\left(\frac{11}{4}, \frac{5}{2}\right)$ e não infinitas. Esse tipo de erro também ocorreu com outros acadêmicos, supostamente por ser uma solução que não é composta por números inteiros.

[23] Lê-se: “para todo x pertencente ao conjunto dos números reais”.



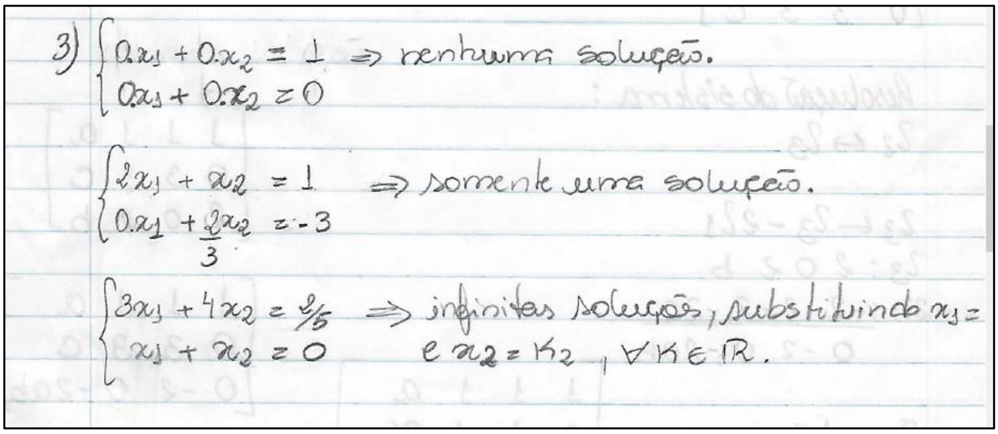
3- a) $\begin{cases} X_1 - X_2 = 0 \\ X_2 - X_1 = -2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} X_1 + X_2 = 2 \\ X_2 + 2X_1 = 4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2X_1 + X_2 = 8 \\ 2X_1 - X_2 = 3 \end{cases}$

Figura 19: Resolução do discente N da atividade 3
Fonte: Protocolo do discente N da turma AL I.

Um equívoco apresentado por alguns acadêmicos relaciona-se com a escrita de Sistemas Lineares com todos os coeficientes iguais a zero, como mostra a Figura 20, resolução do discente H para o sistema sem nenhuma solução.



3) $\begin{cases} 0x_1 + 0x_2 = 1 \\ 0x_1 + 0x_2 = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ nenhuma solução.

$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1 \\ 0x_1 + \frac{2}{3}x_2 = -3 \end{cases}$ $\Rightarrow$ somente uma solução.

$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = \frac{2}{5} \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ infinitas soluções, substituindo $x_1 =$ e $x_2 = K_2$, $\forall K \in \mathbb{R}$.

Figura 20: Resolução do discente H da atividade 3
Fonte: Protocolo do discente H da turma AL I.

Esse equívoco pode estar relacionado a redução de um Sistema Linear para um sistema equivalente, pelo fato de, ao realizar operações elementares entre linhas, método de adição, quando deparados com a situação de $0x + 0y = a, a \neq 0$, são orientados a classificá-lo como sistema impossível.

Os dados quantitativos dos tipos de resolução da turma de Álgebra Linear II sobre a escrita de diferentes tipos de Sistema Linear estão descritos na Tabela 6.

Tabela 6: Análise da resolução atividade 3 turma de Álgebra Linear II

Resolução	Registros Mobilizados	Quantidade	Percentual
Satisfatória	RA RA+RS	2	28,57%
Parcialmente Satisfatória	RA	2	28,57%
Equivocada	RA RA+RLN	3	42,86
Nula	--	--	--
Em branco	--	--	--
Total de respostas		7	100%

Fonte: Elaboração da autora, 2019, com base nos protocolos dos discentes da turma de AL II.

Na turma de Álgebra Linear II, também, não foram descritas as estratégias utilizadas, visto que grande parte dos discentes apresenta dificuldades para estabelecer relações entre a proporcionalidade existente ou não entre os coeficientes das equações e os termos independentes, o que resulta na dificuldade de construção de Sistemas Lineares com número de soluções diferentes.

No entanto, o discente R apresenta a resolução dos sistemas a fim de justificar as suas escolhas como mostra a Figura 21, mostrando assim, a coerência da sua resolução da atividade 3, considerada **satisfatória**.

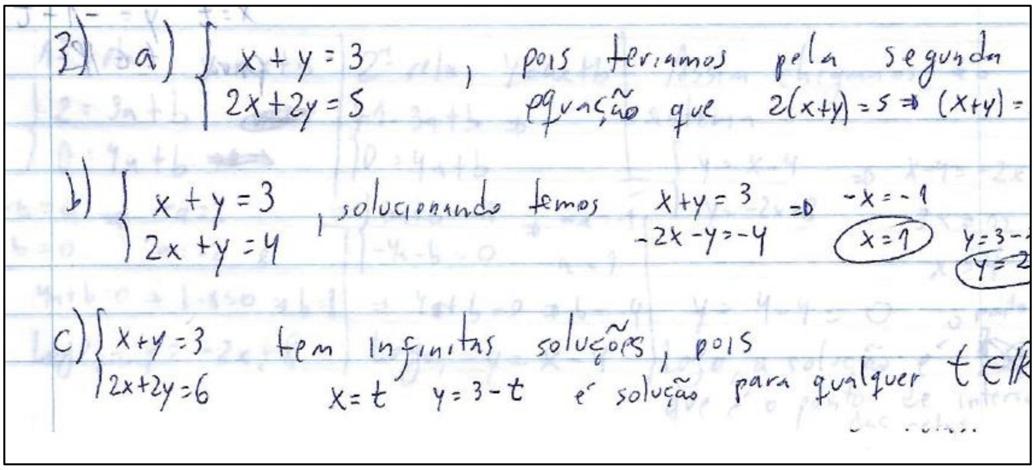


Figura 21: Resolução do discente R da atividade 3
Fonte: Protocolo do discente R da turma AL II.

Conforme visto na análise da turma de AL I, as resoluções **parcialmente satisfatórias** continham um ou dois sistemas escritos de forma equivocada. O discente Q construiu de forma errada o sistema com nenhuma solução representado pela letra a, como consta na Figura 22, sendo que este possui uma única solução (0,0) e não nenhuma.

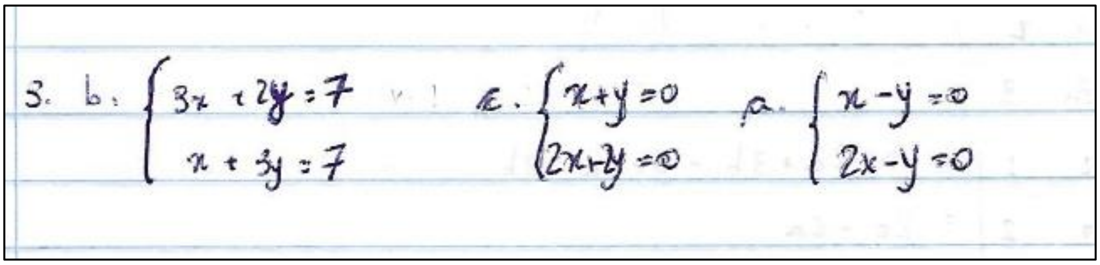
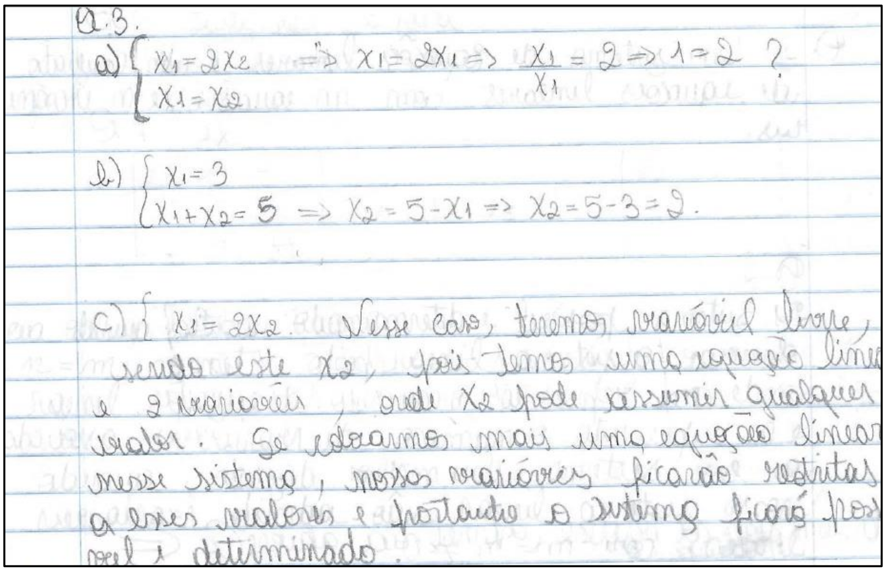

3. b. $\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ x + 3y = 7 \end{cases}$ c. $\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + 2y = 0 \end{cases}$ a. $\begin{cases} x - y = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$

Figura 22: Resolução do discente Q da atividade 3
Fonte: Protocolo do discente Q da turma AL II.

Notou-se alguns tipos de equívocos com relação à escrita dos Sistemas Lineares na turma de AL II como é visto no protocolo do discente X (Figura 23), que ao tentar justificar que o sistema da letra (a) não possui solução desconsidera a solução trivial (0,0). E no caso da letra (c), sistema com infinitas soluções apresenta apenas uma equação linear e não um Sistema de Equações Lineares.

A falta de entendimento da relação entre o registro algébrico e o registro gráfico, pode ocasionar erros na escrita de um sistema impossível, pois se os acadêmicos associassem, por exemplo, retas paralelas e sua representação algébrica a um sitema impossível não teriam tido dificuldade em escrever equações cujos coeficientes das incóginitas fossem proporcionais.


a.3.

a) $\begin{cases} x_1 = 2x_2 \\ x_1 = x_2 \end{cases} \Rightarrow x_1 = 2x_1 \Rightarrow \frac{x_1}{x_1} = 2 \Rightarrow 1 = 2$?

b) $\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_1 + x_2 = 5 \end{cases} \Rightarrow x_2 = 5 - x_1 \Rightarrow x_2 = 5 - 3 = 2.$

c) $\{ x_1 = 2x_2$. Nesse caso, teremos variável livre, sendo este x_2, pois temos uma equação linear e 2 variáveis, onde x_2 pode assumir qualquer valor. Se adicionarmos mais uma equação linear nesse sistema, nossas variáveis ficarão restritas a esses valores e portanto o sistema ficará possível e determinado.

Figura 23: Resolução do discente X da atividade 3
Fonte: Protocolo do discente X da turma AL II.

Esses equívocos podem apresentar alguns pontos de reflexão interessantes: na letra (c), ao escrever somente uma equação, o discente traz para sua explicação o conceito de uma variável livre, porém não percebe que no contexto da questão, para ter um sistema de equações de ordem 2×2 como solicitado na atividade, era necessário apresentar pelo menos duas.

A atividade 4 (Quadro 13) visava investigar as estratégias utilizadas pelos discentes para a escrita de diferentes tipos de Sistema Lineares constituídos três equações e três incógnitas.

Quadro 13: Atividade 4

4. Escreva um sistema de equações lineares constituído de três equações e três incógnitas com a) Nenhuma solução b) Exatamente uma solução c) Uma infinidade de soluções

Fonte: Elaboração da autora, 2019.

Os aspetos quantitativos das resoluções da turma de Álgebra Linear I, sobre a escrita de diferentes tipos de Sistema Lineares de ordem 3×3, três equações e três incógnitas, encontram-se na Tabela 7.

Tabela 7: Análise da resolução atividade 4 turma de Álgebra Linear I

Resolução	Registros Mobilizados	Quantidade	Percentual
Satisfatória	--	--	--
Parcialmente Satisfatória	RA	--	6,25%
Equivocada	RA	6	37,50%
Nula	--	5	31,25%
Em branco	--	4	25,00%
Total de Atividades		16	100%

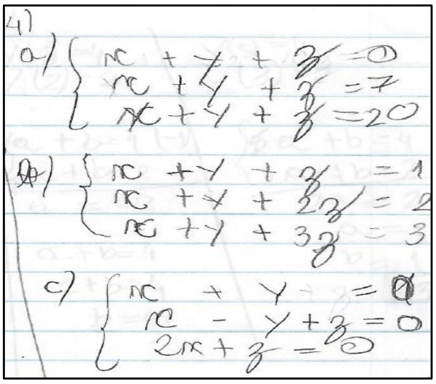
Fonte: Elaboração da autora, 2019, com base nos protocolos dos discentes da turma de AL I.

Relativo às resoluções dos acadêmicos na atividade 4, assim como na atividade anterior, as estratégias mobilizadas não foram descritas. Contudo, ao analisar os Sistemas Lineares formulados por eles foi possível elencar o uso das mesmas estratégias relatadas na análise da atividade 3, ou seja, no sistemas com uma única solução, a maioria dos acadêmicos elencou, inicialmente, valores (inteiros) para as incógnitas e após escreveram as equações.

No que se refere ao Sistema Linear de infinitas soluções, os acadêmicos utilizaram a estratégia de escrever equações múltiplas proporcionais. No último sistema, com nenhuma solução, ao formar as equações os discentes optaram por descrever equações que acarretassem em uma inconsistência entre os valores, como por exemplo, o sistema $\begin{cases} x+y=7 \\ 2x+2y=10 \end{cases}$. Neste sistema, a segunda equação é o dobro da primeira, no entanto, o mesmo não ocorre com o termo independente, o que resulta em um Sistema Linear que não possui solução.

As técnicas de formulação de um conjunto de equações lineares utilizadas pelo acadêmico F na escrita dos sistemas de ordem 2×2 também fizeram-se presentes na atividade 4, no entanto, o mesmo cometeu um equívoco ao montar o Sistema Linear com uma única solução.

Percebe-se que para um sistema que não possui solução o discente optou por escrever todas as equações iguais alterando apenas o valor do termo independente em cada uma delas, de modo que ao realizar operações elementares entre as linhas terá uma equação do tipo $0x+0y+0z=a,\ a\neq 0$. Para o sistema de uma única solução, o acadêmico utilizou-se de equações que variavam apenas o coeficiente da terceira incógnita e o termo independente, porém, o mesmo considerou a solução $S=(0,0,1)$, no entanto, qualquer par ordenado descrito como $S=(x,-x,1)$ é solução para este sistema. Para o sistema com infinitas soluções a combinação entre as duas primeiras equações resulta na terceira, tendo assim duas equações iguais, formando um único plano, sendo assim, possui infinitas soluções.



4)

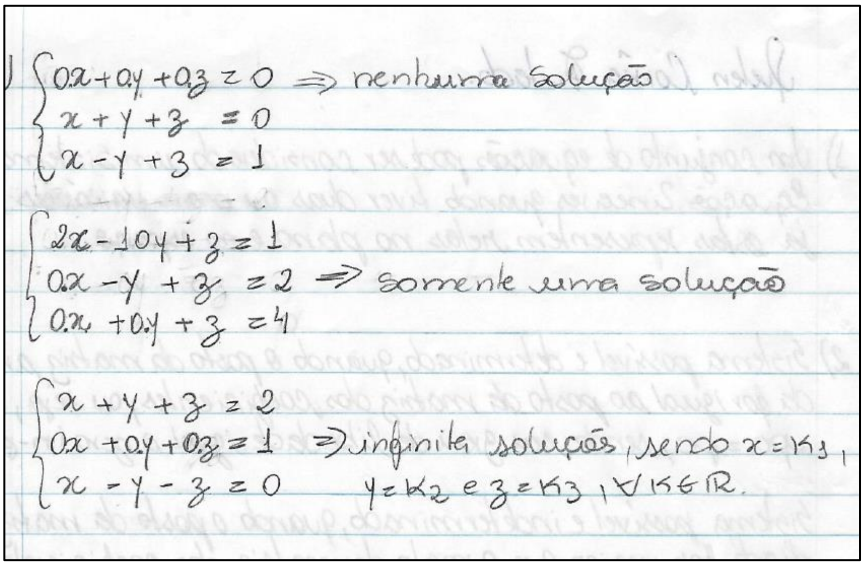
a) $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+y+z=7 \\ x+y+z=20 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+y+2z=2 \\ x+y+3z=3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x+y=0 \\ x-y+z=0 \\ 2x+z=0 \end{cases}$

Figura 24: Resolução do discente F da atividade 4
Fonte: Protocolo do discente F da turma AL I.

A escrita de Sistemas Lineares com os coeficientes iguais a zero, como mostra a Figura 25, foi novamente utilizada na resolução do discente H, só que desta vez para o sistema com infinitas soluções. Salientando o não entendimento de como construir um Sistema Linear que possui variáveis livres, descrevendo, no caso da letra (c), um sistema com nenhuma solução.



$\begin{cases} 0x+0y+0z=0 \\ x+y+z=0 \\ x-y+z=1 \end{cases}$ ⇒ nenhuma solução

$\begin{cases} 2x-10y+z=1 \\ 0x-y+z=2 \\ 0x+0y+z=4 \end{cases}$ ⇒ somente uma solução

$\begin{cases} x+y+z=2 \\ 0x+0y+0z=1 \\ x-y-z=0 \end{cases}$ ⇒ infinita soluções, sendo $x=k_1$, $y=k_2$ e $z=k_3$, $\forall k \in \mathbb{R}$.

Figura 25: Resolução do discente H da atividade 4
Fonte: Protocolo do discente H da turma AL I.

As dificuldades apresentadas pelos acadêmicos na identificação de um sistema que possui variáveis livres podem estar relacionadas a forma como os sitemas possíveis e indeterminados são abordados na Educação Básica, pois, geralmente, as atividades exigem a classificação dos sistemas quanto as soluções, mas se o sistema é possível e indeterminado não é solicidada a identificação da variável livre.

As resoluções consideradas **nulas** continham interpretações de como são formados os Sistemas Lineares, como por exemplo, escrita de equações do 2º grau, como por exemplo, $\begin{cases} 3x^2 + 4y^2 + 2z^2 = -20 \\ 4x^2 - z^2 = -1 \\ 5y^2 + 3z^2 = -8 \end{cases}$ que foi como o discente B escreveu como sendo um Sistema Linear de ordem 3, pela definição, tem-se que um sistema é formado por um conjunto de equações lineares (ANTON; RORRES, 2012), por isso essa resolução foi considerada nula, já que a definição do que seriam equações lineares não foi contemplada.

Outro caso foi o apresentado pelo (a) acadêmico C, o qual não escreveu valores para as incógnitas, construindo sistemas do tipo: $\begin{cases} ax + by + cz = 1 \\ ax + by - cz = 1 \end{cases}$, no qual não se pode aferir se possui solução ou não, tendo em vista que o discente não informou os valores para os coeficientes.

E por fim, a resolução do discente D que não descreveu valores para os termos independentes, apresentando um sistema do tipo $\begin{cases} 4x_2 + x_3 = a \\ 2x_1 + 2x_2 = b \\ x_3 = c \end{cases}$.

Na Tabela 8 são expostas as informações quantitativas das resolução dos acadêmicos da turma de Álgebra Linear II para a atividade 4.

Tabela 8: Análise da resolução atividade 4 turma de Álgebra Linear II

Resolução	Registros Mobilizados	Quantidade	Percentual
Satisfatória	RA	3	42,86%
Parcialmente Satisfatória	RA	1	14,28%
Equivocada	RA	3	42,86%
Nula	--	--	--
Em branco	--	--	--
Total de Atividades		7	

Fonte: Elaboração da autora, 2019, com base nos protocolos dos discentes da turma de AL II.

A elaboração de Sistemas Lineares de ordem 3×3 de maneira **satisfatória** foi percebida na resolução do discente T (Figura 26) da turma de AL II, apesar de não apresentar os métodos utilizados para tanto.

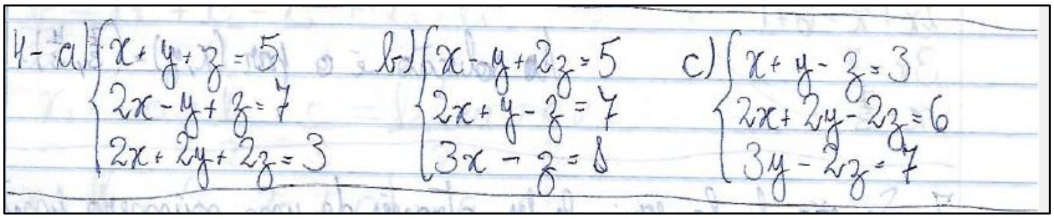


Figura 26: Resolução do discente T da atividade 4
Fonte: Protocolo do discente T da turma AL II.

Os sistemas construídos pelo discente T são coerentes, sendo que o descrito na letra (a) não apresenta solução, pois os coeficientes da primeira equação e da terceira são múltiplos, no entanto, o mesmo não ocorre com os termos independentes destas equações. Nestes casos, há uma inconsistência entre os valores, ocasionando um sistema com nenhuma solução. Na letra (b) tem uma única solução, que é a terna $\left(\frac{10}{3}, \frac{7}{3}, 2\right)$ e o último, letra (c), apresenta infinitas soluções, pois a primeira e a segunda equação são múltiplas, inclusive os termos independentes, possibilitando a existência de uma variável livre.

A resolução considerada **parcialmente satisfatória** é constituída pela escrita dos Sistemas Lineares com nenhuma solução e uma única solução, sendo o sistema de infinitas soluções deixado em branco. No primeiro sistema foi apresentada uma inconsistência de valores, pois existe uma proporcionalidade entre os coeficientes das três equações, no entanto, esta proporcionalidade não ocorre entre os termos independentes. Ou seja, ao realizar algumas operações elementares entre linhas, obtem-se a situação de $0x + 0y + 0z = a, a \neq 0$, e, no segundo, as incógnitas são números inteiros, previamente escolhidos, sendo a solução do sistema a terna (2, 2, 2).

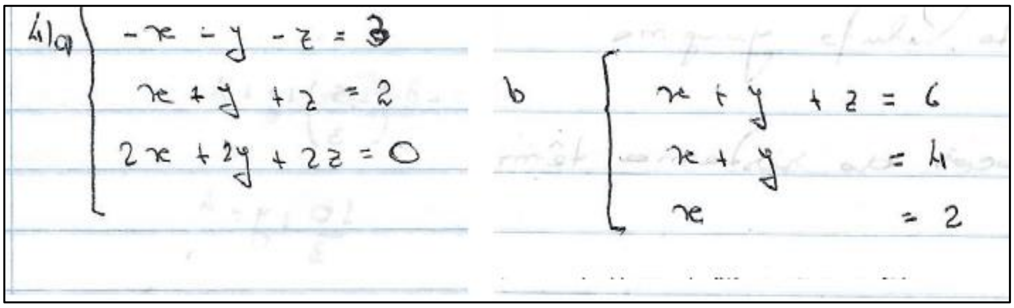


Figura 27: Resolução do discente S da atividade 4
Fonte: Protocolo do discente S da turma AL II

Um erro recorrente nas resoluções dos discentes é o de desconsiderar a solução trivial (0, 0, 0) de um Sistema Linear de ordem 3×3, ao realizar a formulação de um sistema com nenhuma solução, como também, o conjunto solução com valores pertencentes ao conjunto dos números reais. No caso do acadêmico Q, na Figura 28, por exemplo, demonstra o tipo de resolução classificada como **equivocada.**

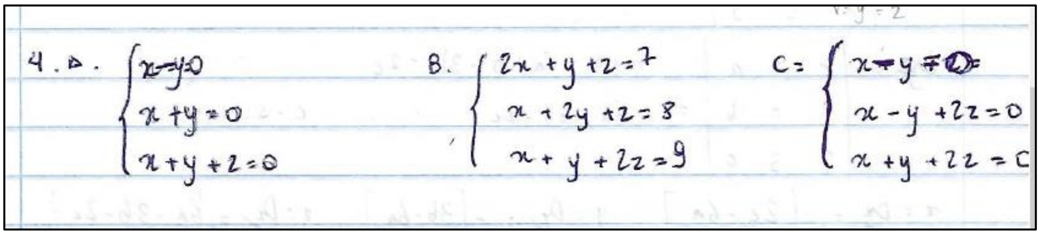


Figura 28: Resolução do discente Q da atividade 4
Fonte: Protocolo do discente Q da turma AL II.

Percebe-se que na letra (a) (Figura 28), no sistema com nenhuma solução, o escrito pelo discente Q possui solução trivial (0, 0, 0), e na letra (c) no que deveria ser um sistema com infinitas soluções o mesmo ocorre.

Foram percebidas no decorrer da análise das resoluções das atividades 3 e 4 algumas dificuldades para estabelecer relações entre a proporcionalidade existente ou não entre os coeficientes das equações e os termos independentes, o que resulta na dificuldade de construção de Sistemas Lineares com número de soluções diferente. Assim como, a ressalva dos discentes em aceitarem a solução trivial para o sistema.

Tais dificuldades podem ser contornadas por meio da proposta apresentada por Freitas (2013), o qual propõe em sua sequência didática atividades mediadas pelo uso de um *software* de Geometria Dinâmica. Este aborda a representação gráfica de Sistemas Lineares, na qual se utiliza da variação dos coeficientes para que os estudantes percebam as alterações que ocorrem por meio da representação gráfica, simultaneamente, com a representação algébrica. E, ainda, quais as influências destas alterações quanto à possibilidade ou não de existência de solução para estes sistemas, propiciando ao discente estabelecer relações entre os coeficientes das equações e os termos independentes, com número de soluções dos Sistemas Lineares. Segundo, Bertolazi (2012) sequências planejadas desta maneira possibilitam a formulação de conjecturas, generalização dessas e, justificativas para essas generalizações por meio da argumentação.

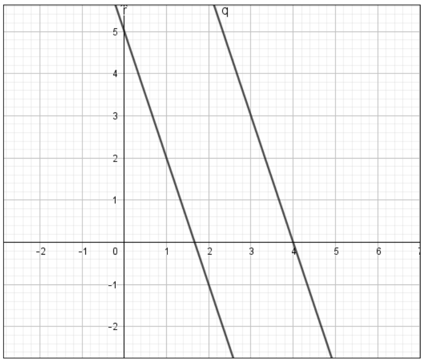
Cabe destacar que, a proposta de Freitas (2013) segue os pressupostos de Duval (2009), o qual afirma que relacionar duas representações auxilia no desenvolvimento de modos de reflexão e análise, necessárias para o desenvolvimento do pensamento matemático.

A atividade 5 (Quadro 14) teve por finalidade verificar como os acadêmicos resolvem atividades que envolvam o registro de representação gráfica e o registro de representação numérica.

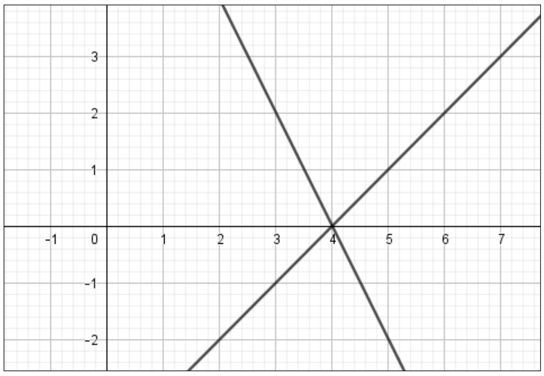
Quadro 14: Atividade 5

5. Determine o sistema linear e encontre a solução quando possível, justifique sua resposta

a)



b)



c) A reta *a*: passa pelos pontos (3, 1) (2, 2) e a reta *b*: passa pelos pontos (0, 4) (5, – 1).

d) A reta *a*: passa pelos pontos (1, 4) (2, 2) e a reta *b*: passa pelos pontos (5, 4) (3, 2).

Fonte: Elaboração da autora, 2019.

A escolha dessa atividade se deu pelo fato de que durante a pesquisa de Trabalho de Conclusão de Curso da pesquisadora (SANTOS, 2017) e nas pesquisas mapeadas Boemo (2015) e Karrer (2006) foram identificadas poucas atividades com este enfoque, tendo por registro de partida o registro de representação gráfica, por exemplo. Entende-se como registro de partida a representação em que a atividade é apresentada, inicialmente, havendo a conversão para uma outra representação (DUVAL, 2009).

A Tabela 9 contém os dados quantitativos das resoluções da atividade 5 dos discentes da turma de Álgebra Linear I.

Tabela 9: Análise da resolução atividade 5 turma de Álgebra Linear I

Resolução	Registros Mobilizados	Quantidade	Percentual
Satisfatória	--	--	--
Parcialmente Satisfatória	RG→RLN RN→RLN	2	12,50%
Equivocada	RG→RA RN→RA RN→RG	4	25,00%
Nula	--	--	--
Em branco	--	10	62,50%
Total de respostas		16	100%

Fonte: Elaboração da autora, 2019, com base nos protocolos dos discentes da turma de AL I.

Para considerar uma resposta como **satisfatória** esta teria que conter para cada Sistema Linear a sua classificação e, para aqueles que possuíssem solução, apresentá-la. Havia a possibilidade dos discentes realizarem a interpretação da representação gráfica, como também, aos que preferissem, realizar a conversão para a representação algébrica e fazer uso de um método conhecido para a resolução de sistemas.

Com isso, esperava-se como possíveis interpretações:

Tabela 10: Resolução da atividade 5

Representação Gráfica	Tipo de sistema	Sistema Linear	Solução do sistema (x,y)
Retas paralelas	Sistema impossível	$\begin{cases} 3x + y = 5 \\ 3x + y = 12 \end{cases}$	
Retas concorrentes	Sistema possível e determinado	$\begin{cases} 2x + y = 8 \\ -x + y = -4 \end{cases}$	$(4,0)$
Retas coincidentes	Sistema possível e indeterminado	$\{-x - y = -4$	$(x, 4 - x)$
Retas concorrentes	Sistema possível e determinado	$\begin{cases} 2x + y = 6 \\ x - 3y = -7 \end{cases}$	$\left(\frac{7}{3}, \frac{4}{3}\right)$

Fonte: Elaboração da autora, 2019.

A resolução do acadêmico L (Figura 29) foi identificada como **parcialmente satisfatória**, tendo em vista que realizou a metade da atividade, pois não lembrou como determinar a equação da reta, sendo conhecidos dois pontos. Dito isso, ao analisar a sua resolução, nota-se que ele optou por realizar a interpretação da atividade seguindo algumas noções referentes ao ensino de vetores (linearmente dependentes ou independentes), com isso, foi possível descrever em linguagem natural o comportamento das retas que representam estes Sistemas Lineares, a fim de aferir se os mesmos possuíam solução ou não.

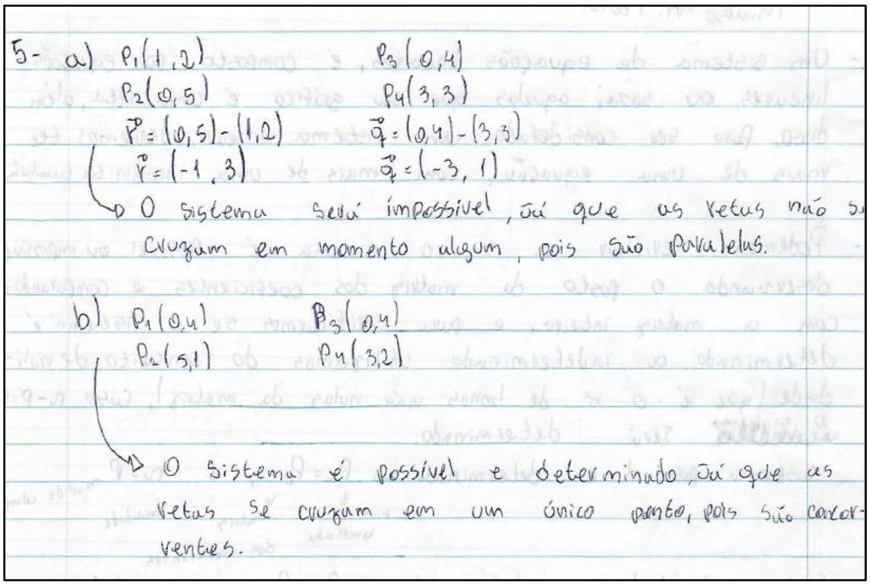

5- a) $P_1(1,2)$ $P_3(0,4)$
$P_2(0,5)$ $P_4(3,3)$
$\vec{p} = (0,5)-(1,2)$ $\vec{q} = (0,4)-(3,3)$
$\vec{p} = (-1,3)$ $\vec{q} = (-3,1)$
O sistema será impossível, já que as retas não se cruzam em momento algum, pois são paralelas.
b) $P_1(0,4)$ $P_3(0,4)$
$P_2(5,1)$ $P_4(3,2)$
O sistema é possível e determinado, já que as retas se cruzam em um único ponto, pois são concorrentes.

Figura 29: Resolução do discente L da atividade 5
Fonte: Protocolo do discente L da turma AL I.

Em contrapartida, o discente P (Figura 30) optou por efetuar a conversão da representação numérica para a representação gráfica, cabe ressaltar que esta foi a única resolução deste tipo.

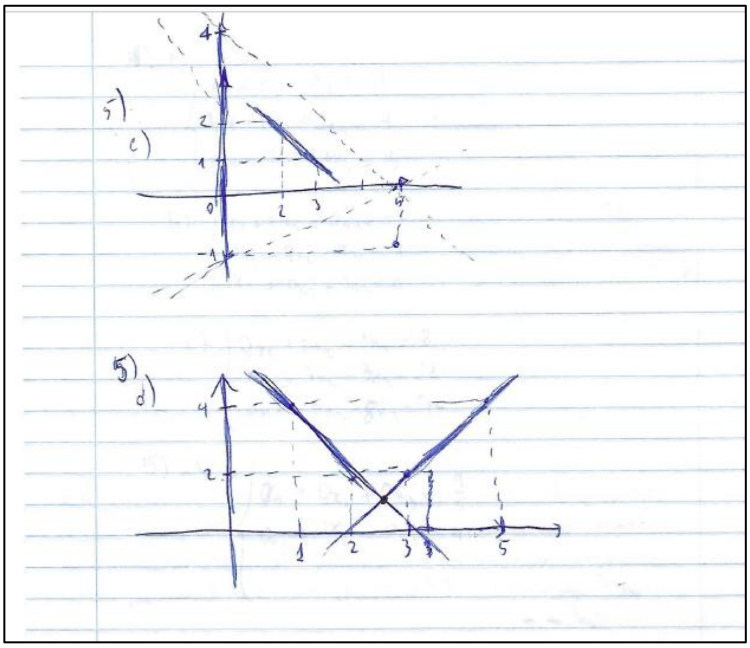


Figura 30: Resolução do discente P da atividade 5
Fonte: Protocolo do discente P da turma AL I.

Esta resolução (Figura 30) foi classificada como **equivocada**, pois, o acadêmico realizou de maneira correta apenas uma parte da atividade. Foi possível perceber que na letra (c) há um equívoco na conversão da representação numérica para a gráfica, nos pontos da segunda reta (a reta b: passa pelos pontos $(0,\ 4),(5,\ -1)$. Note na Figura 30 que o mesmo plotou três retas, sendo uma passando pelos pontos $(0,-1),(5,0)$ e outra pelos pontos $(0,4),(5,0)$. o que revela uma confusão durante a conversão das representações em sistemas semióticos diferentes.

Salienta-se que, por ter sido o único acadêmico a apresentar uma resolução gráfica entre 16 participantes, desta pesquisa, é possível que o número reduzido de atividades existentes nos livros-texto possa ter influenciado nestes resultados, pois conforme afirma Lima[24] (2001 *apud* BERTOLAZI; SAVIOLI, 2018, p. 45), a importância da qualidade dos livros didáticos se deve ao fato de que, dificilmente, a formação adquirida pelo estudante e a qualidade de ensino serão superiores a qualidade média dos livros disponíveis.

Na Tabela 11 estão dispostas as informações quantitativas das resoluções da atividade 5 dos acadêmicos da turma de Álgebra Linear II.

Tabela 11: Análise da resolução atividade 5 turma de Álgebra Linear II

Resolução	Registros Mobilizados	Quantidade	Percentual
Satisfatória	RG→RA RN→RA	2	28,57%
Parcialmente Satisfatória	RG→RA RN→RA	2	28,57%
Equivocada	RG→RM RN→RM RN→RG	2	28,57%
Nula	--	--	--
Em branco	--	1	14,28%
Total de respostas		7	100%

Fonte: Elaboração da autora, 2019, com base nos protocolos dos discentes da turma de AL II.

[24] LIMA, E. L. Análise de livros de matemática para o ensino médio. Revista do professor de Matemática, São Paulo:SBM, n. 46, p. 43-51, 2001.

As resoluções aferidas como **satisfatórias** continham as classificações dos Sistemas Lineares, assim como, as respostas estavam corretas. Neste caso, os discentes optaram por realizar a interpretação da representação gráfica e a conversão para a representação algébrica e fazer uso de um método de resolução nas demais. Um exemplo dos procedimentos escolhidos pelos acadêmicos pode ser observado na Figura 31, a qual apresenta a resolução do acadêmico T.


5- a) A solução será a intersecção das retas. Porém, não existe solução já que as retas são paralelas.

b) A solução será $x=4$ e $y=0$, já que o ponto $(4,0)$ é a intersecção das duas retas.

c) reta a: $\begin{cases} 1=3c_1+d_1 & (1) \\ 2=2c_1+d_1 & (2) \end{cases}$

(1)-(2):

$1-2=3c_1-2c_1+d_1-d_1$

$c_1=-1$, em (2):

$2=-2+d_1 \Rightarrow d_1=4$

$a: y=-x+4$

reta b: $\begin{cases} 4=d_2 \\ 5=-c_2+d_2 \end{cases}$

$5=-c_2+4 \Rightarrow c_2=-1$

$b: y=-x+4$

As soluções são infinitas pois as retas são coincidentes.

d) a: $\begin{cases} 4=c_1+d_1 & (1) \\ 2=2c_1+d_1 & (2) \end{cases}$

(1)-(2):

$4-2=c_1-2c_1+d_1-d_1$

$2=-c_1 \Rightarrow c_1=-2$, em (1)

$4=-2+d_1 \Rightarrow d_1=6$

$a: y=-2x+6$

$y+2x=6$

$\begin{cases} y+2x=6 & (5) \\ y-x=-1 & (6) \end{cases}$

(5)-(6)

$2x+x=6+1$

$3x=7$

$x=\frac{7}{3}$

b: $\begin{cases} 4=5c_2+d_2 & (3) \\ 2=3c_2+d_2 & (4) \end{cases}$

(3)-(4)

$4-2=5c_2-3c_2$

$2=2c_2 \Rightarrow c_2=1$, em (4)

$2=3+d_2 \Rightarrow d_2=-1$

$b: y=x-1$

$y-x=-1$

em (7):

$y-\frac{7}{3}=-1$

$y=\frac{7}{3}-\frac{3}{3} \Rightarrow y=\frac{4}{3}$

A solução é o par $(x,y)=(\frac{7}{3},\frac{4}{3})$.

Figura 31: Resolução do discente T da atividade 5
Fonte: Protocolo do discente T da turma AL II.

As resoluções consideradas **equivocadas** apresentavam erros com relação a conversão entre representações, acarretando na resolução incorreta da atividade, o que foi o caso do discente V, que optou pelo método de Cramer para a realização desta atividade.

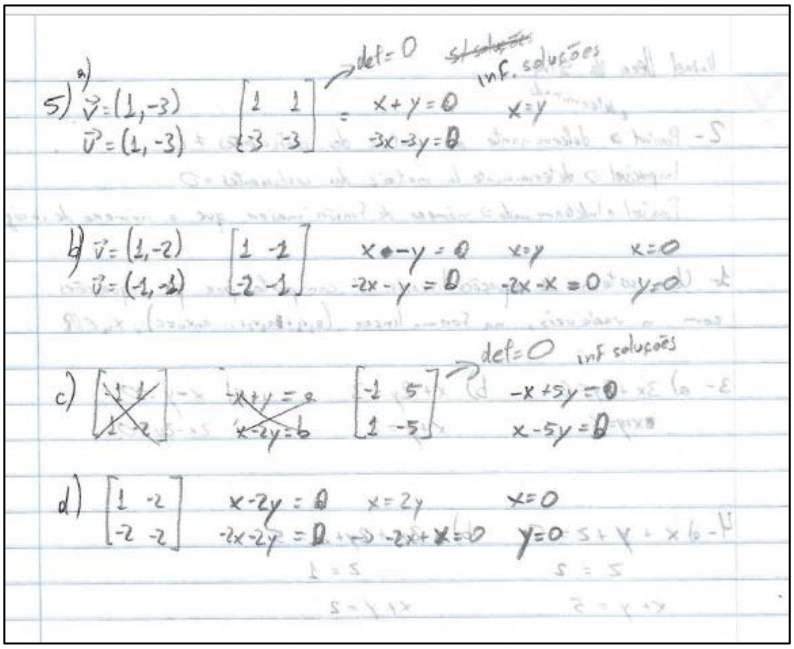


Figura 32: Resolução do discente V da atividade 5
Fonte: Protocolo do discente V da turma AL II.

Na resolução percebe-se as limitações do uso da Regra de Cramer como método de resolução de Sistemas Lineares, já que a mesma só pode determinar a solução nos casos em que o determinante da matriz for diferente de zero, ou seja, possui uma única solução. Se o determinante for igual a zero, determina-se que, ou o sistema é impossível (SI), ou é possível e indeterminado (SPI), não sendo possível através deste método afirmar, exatamente, qual é o seu tipo (BATAGLIOLLI, 2008).

A exemplo, na Figura 32, nas letras (a) e (c) o determinante da matriz de coeficientes é zero, logo o discente classificou-os como sistemas com infinitas soluções. No entanto, na letra (a), o sistema dado não possui solução, o que poderia ter sido contornado se o acadêmico recorre-se a representação gráfica disponível na atividade, verificando que se tratavam de retas paralelas, logo o sistema era impossível.

Em maioria, os acadêmicos optaram por utilizarem o registro de representação algébrica e matricial para a resolução desta atividade, tratam-se dos registros aos quais eles estão mais habituados em mobilizar quando o assunto é Sistemas Lineares, pois eles recorrem a regras predefinidas para a resolução de sistemas, no entanto, o tratamento nesses dois registros gera um custo cognitivo desnecessário que poderia ser facilitado pelo uso do registro gráfico.

Relacionado à atividade 5, que explorava diretamente a representação gráfica, sete dentre os 16 acadêmicos da turma de AL I e três dentre os sete discentes AL II indicaram no questionário o uso, explicitamente, do *software* GeoGebra para melhorar a visualização e entendimento da representação gráfica no estudo de Sistemas Lineares.

Porém, dos 23 discentes participantes da pesquisa apenas dois relataram ter utilizado o *software* GeoGebra[25] na disciplina de Álgebra Linear I, o que pode ser uma das razões da dificuldade de interpretação dos gráficos da questão 5, além da falta de exploração desta representação, no que tange ao ensino de Sistemas Lineares nos livros-texto. Para Abrantes, Morais e Barros (2018, p. 5), "saber converter um Sistema de Equações Lineares representado no registro algébrico para uma representação num sistema cartesiano, e vice-versa, é fundamental para compreensão desse conceito", por isso, a importância de atividades que envolvam a conversão entre essas duas representações.

O objetivo das atividades 6 (Quadro 15) e 7 (Quadro 16) era analisar como os acadêmicos resolvem atividades que necessitam da interpretação e do uso de argumentação para analisar e realizar demonstrações, prova dos enunciados ou proposições matemáticas.

A importância de atividades deste tipo em Matemática se deve ao fato de que a necessidade de provar a veracidade de preposições é intrínseca a atividade matemática, tendo em vista que as mesmas "não podem ser provadas através de experiências, com exceção de situações em que há apenas um número finito de casos que precisam ser verificados" (VISEU *et al.*, 2017, p. 432).

Nesta pesquisa, entende-se argumentação como Boavida *et al.* (2008 *apud* VISEU *et al.*, 2017), um tratamento de carácter explicativo para a formulação, teste e validação de conjeturas e a resolução destas por meio de

---

[25] O GeoGebra, citado acima, é um *software* de geometria dinâmica, em que há a possibilidade de manipular um mesmo objeto, utilizando as representações gráfica, geométrica, algébrica, tabular etc., simultaneamente. Ele possui comandos intuitivos, que facilitam a manipulação por parte do usuário. Ademais, é um *software* disponibilizado online e para *download* gratuito sendo atualizado constantemente. Destaca-se que, os gráficos da atividade 5 foram feitos com esse *software*, assim como as figuras com as representações gráficas de Sistemas Lineares de ordem 2×2 e 3×3, já que no mesmo, também, há possibilidade de plotagem de gráficos e figuras geométricas no plano tridimensional (3D).

explicações e justificativas evidentes e válidas do ponto de vista matemático. Já prova é definida como “uma sequência de transformações de frases formais, realizadas de acordo com as regras do cálculo de predicados” (HERSH, 1993 *apud* VISEU *et al.*, 2017, p. 433) composta por um conjunto de afirmações verdadeiras e aceitas, se utilizando de uma forma de raciocínio válida e recorrendo a formas de representação dos argumentos apropriadas. Sendo assim, provar a veracidade de uma afirmação é um processo e tem como uma de suas etapas a argumentação.

Quadro 15: Atividade 6

6. O teorema abaixo se refere à forma escada de uma matriz ampliada de um Sistema Linear. Encontre os erros na demonstração, justifique e reescreva.

Teorema: Toda a matriz linha é equivalente a uma única matriz-linha reduzida à forma escada

Demonstração:[26]

1° Parte: Seja **A** uma matriz *m* x *n* qualquer. Se todo elemento da primeira linha de **A** é zero então a condição (a)[27] é satisfeita, no que diz respeito a esta linha. Se a primeira linha tem algum elemento não nulo, seja *k* o menor inteiro *j* tal que $a_{ij} \neq 0$. Multiplicamos a primeira linha por a_{ij} e a condição (a) ficará satisfeita. Agora para cada $i \geq 2$ somemos (a_{ik}) vezes a primeira linha à i-ésima linha. Como resultado, teremos uma matriz cujo primeiro elemento da primeira linha é 1 e ocorre na coluna *k.* Além disto, todos os outros elementos da coluna *k* são nulos.

Consideremos agora a matriz **B** obtida acima. Se a segunda linha desta matriz for nula nada fazemos. Se houver elementos não nulos nesta linha, seja a coluna *k’* a primeira a conter um destes. 0Multiplicamos a segunda linha por b_{2k}, e a seguir, somando os múltiplos adequados desta nova segunda linha às demais linhas, obtemos uma matriz cujo primeiro elemento não nulo da segunda linha é 1 e todos os elementos da coluna em que este elemento (1) se encontra são nulos. O importante é que neste processo não foram alterados os elementos b_{11}, b_{1k}, e nem a k-ésima coluna da matriz **B.**

Repetindo o procedimento acima às demais linhas, obteremos ao final a matriz **M** que é linha equivalente a inicial **A**, e que satisfaz as condições (a) e (b)[28]. da definição.

As condições (c)[29] e (d)[30] serão satisfeitas através de um número finito de permutações de linhas da matriz **M.**

2° Parte: Para mostrarmos que só existe uma única matriz-linha reduzida à forma escada linha equivalente a **A**, observamos primeiramente que duas matrizes-linhas reduzidas à forma escada que são linhas equivalentes só podem ser iguais.

De fato, você pode observar que nenhuma das três operações com linhas pode ser efetuada numa matriz-linha à forma escada, sem que ela perca esta condição

Agora, suponhamos que por operações com linhas, partimos de uma matriz **M** e podemos

[26] Demonstração retirada de BOLDRINI *et al.*, 1980, p. 60.
[27] O primeiro elemento não nulo de uma linha não nula é 1.
[28] Cada coluna que contém o primeiro elemento não nulo de alguma linha tem todos os seus outros elementos iguais à zero.
[29] Toda Linha nula ocorre abaixo de todas as linhas não nulas (isto e, daquelas que possuem pelo menos um elemento não nulo).
[30] Se as linhas 1...,*r* são linhas não nulas, e se o primeiro elemento não nulo da linha *i ocorre na coluna* k_i, então $k_1 < k_2 < ... < k_r$.

chegar a duas matrizes-linha reduzidas à forma escada, **N** e **P**. Teremos então **M ~ N** e **M ~ P**. Como as operações com linhas são reversíveis, isto significará que **N** será linha-equivalente a **P**, e , portanto, da afirmação destacada acima, **N** = **P.**

Fonte: Elaboração da autora, 2019.

A Tabela 12 apresenta dados quantitativos referente à resolução da atividade 6 da turma de Álgebra Linear I.

Tabela 12: Análise da resolução atividade 6 turma de Álgebra Linear I

Resolução	Registros Mobilizados	Quantidade	Percentual
Satisfatória	--	--	--
Parcialmente Satisfatória	--	--	--
Equivocada	RLN	2	12,50%
Nula	--	1	6,25%
Em branco	--	13	81,25%
Total de Atividades		16	100%

Fonte: Elaboração da autora, 2019, com base nos protocolos dos discentes da turma de AL I.

Nota-se que a maioria dos discentes optou por não realizar esta atividade. Quando perguntados se ao realizar as atividades propostas pela pesquisadora encontraram alguma dificuldade, apenas o acadêmico A relatou ter tido, principalmente, dificuldade para responder as questões com teoremas, destacando a falta de conhecimento téorico sobre o conteúdo.

A atividade 6 consistia na demonstração do teorema “Toda a matriz linha é equivalente a uma única matriz-linha reduzida à forma escada”, estando o mesmo dividido em duas partes, a primeira referente ao tratamento realizado com operações elementares entre as linhas, a fim de reduzir uma matriz linha qualquer dada a uma matriz linha equivalente na forma escada, e na segunda parte, a contrapartida.

A versão da demonstração do teorema, disponibilizada aos acadêmicos, continha, na primeira parte, três erros referentes às operações elementares, usualmente realizadas para obter a matriz linha equivalente na forma escada. A saber, [...] Multiplicamos a primeira linha por a_{ij} e a condição (a) ficará satisfeita. Agora para cada $i \geq 2$ somemos (a_{ik}) vezes a primeira linha à i-ésima linha [...] Multiplicamos a segunda linha por b_{2k}. O correto seria “[...] Multiplicamos a primeira linha por $1/a_{ij}$ e a condição (a) ficará satisfeita. Agora para cada $i \geq 2$ somemos $(-a_{ik})$ vezes a primeira linha à i-ésima linha. [...] Multiplicamos a segunda linha por $1/b_{2k}$" (BOLDRINI *et al.*, 1980, p. 60).

Para que a resolução apresentada pelos discentes fosse classificada como **satisfatória** era necessário que os mesmos apontassem os três erros citados acima, justificassem as suas escolhas e, por fim, reescrevessem da maneira corretada a parte da demonstração que estava errada. No entanto, resoluções deste tipo não foram identificadas nos protocolos da turma de AL I.

As resoluções consideradas **equivocadas** indicavam nenhum dos erros da demonstração listados acima, porém, citavam partes da demonstração que os acadêmicos consideraram como erradas. À exemplo, a resolução do discente L, (Figura 33), que afirma que há um equívoco na demonstração no segundo parágrafo, pois o primeiro elemento da segunda linha será nulo, se a mesma estiver em sua forma escada.

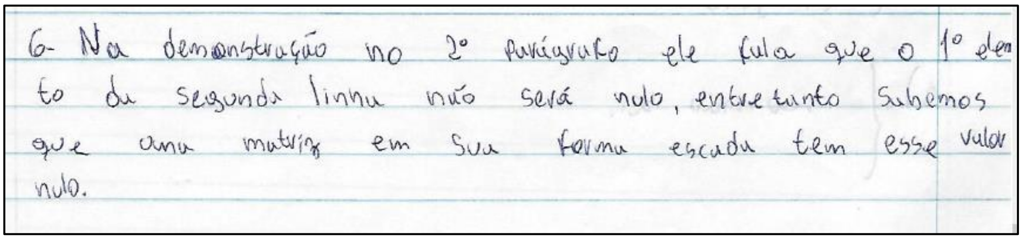

6- Na demonstração no 2º parágrafo ele fala que o 1º elemto da segunda linha não será nulo, entretanto sabemos que uma matriz em sua forma escada tem esse valor nulo.

Figura 33: Resolução do discente L da atividade 6
Fonte: Protocolo do discente L da turma AL I.

Relembrando o que consta no segundo parágrafo, tem-se que "obtemos uma matriz cujo primeiro elemento não nulo da segunda linha é 1 e todos os elementos da coluna em que este elemento (1) se encontra são nulos" (BOLDRINI *et al.*, 1980, p. 61). Note que não há uma afirmação de que o primeiro elemento da segunda linha não é nulo, mas sim, que primeiro elemento não nulo da segunda linha é 1, não citando qual seria esse elemento.

Referente à resolução considerada **nula**, esta limitou-se a realizar uma afirmação de "toda matriz linha é equivalente a uma matriz ampliada de um Sistema Linear", porém tal afirmativa não condiz com a proposta de atividade por este motivo a sua classificação.

Por meio destas resoluções pode-se verificar a dificuldade que os discentes tem para justificar, utilizar de argumentos para aferir a veracidade de um teorema e compreender a linguagem formal presente neste tipo de atividade.

A Tabela 13 contém os dados quantitativos referentes as resoluções dos acadêmicos da turma de Álgebra Linear II.

Tabela 13: Análise da resolução atividade 6 turma de Álgebra Linear II

Resolução	Registros Mobilizados	Quantidade	Percentual
Satisfatória	--	--	--
Parcialmente Satisfatória	--	1	14,29%
Equivocada	--	1	14,29%
Nula	--	1	14,29%
Em branco	--	4	57,14%
Total de Atividades		7	100%

Fonte: Elaboração da autora, 2019, com base nos protocolos dos discentes da turma de AL II.

As resoluções a serem classificadas como **satisfatórias** deveriam conter a indicação dos três erros citados anteriormente, justificando as suas escolhas e por fim, reescrevendo da maneira correta. Porém, este tipo de resoluções, também, não foram encontradas na turma de AL II.

Relativo à resolução considerada **parcialmente satisfatória**, indicou ao menos dois dos erros que haviam na demonstração da atividade. Este foi o caso do discente V (Figura 34). Após realizar a leitura da questão proposta, atenta-se a dois pontos importantes, primeiro, "[...] multiplicamos a primeira linha por a_{ij} e a condição (a), O primeiro elemento não nulo de uma linha não nula é 1, ficará satisfeita" está condição só será satisfeita, segundo ele se o elemento a_{ij} for igual a um, o que é verdade, pois para qualquer outro valor de a_{ij} o elemento não nulo será diferente de um.

O segundo ponto, mencionado pelo acadêmico V, refere-se ao fato que se realizar a multiplicação da segunda linha por b_{2k}, todos os elementos desta linha serão múltiplos do mesmo, e não zero como é citado na demonstração. Nesta resolução, pode-se identificar a formulação de argumentos empíricos, em que a veracidade dos argumentos apresentados "é influenciada por evidências numéricas a partir da verificação de um ou mais exemplos ou através da percepção" (NASSER; CALDATO, 2019, p. 83).

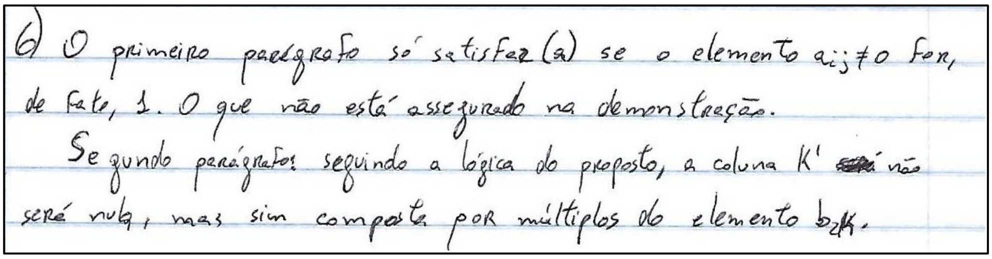

6) O primeiro parágrafo só satisfaz (a) se o elemento $a_{ij} \neq 0$ for, de fato, 1. O que não está assegurado na demonstração.
Segundo parágrafo: seguindo a lógica do proposto, a coluna K' não será nula, mas sim composta por múltiplos do elemento b_{2k}.

Figura 34: Resolução do discente V da atividade 6
Fonte: Protocolo do discente V da turma AL II.

Alusivo à resolução considerada **equivocada,** esta continha uma afirmação incoerente sobre o fato de só ser possível escalonar uma matriz de coeficientes se esta for uma matriz quadrada (Figura 35).

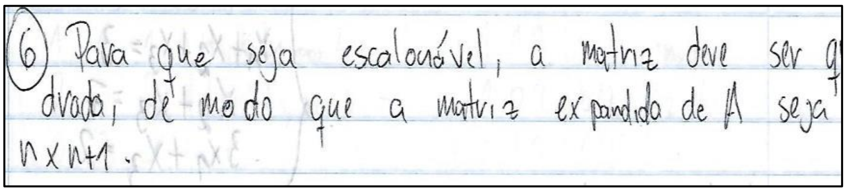

(6) Para que seja escalonável, a matriz deve ser quadrada, de modo que a matriz expandida de A seja n x n+1.

Figura 35: Resolução do discente U da atividade 6
Fonte: Protocolo do discente U da turma AL II.

Ao realizar a análise da atividade 6 foi possível identificar e realizar alguns apontamentos referente à dificuldade dos discentes em compreender a linguagem formal utilizada em demonstrações, como por exemplo, a não realização da atividade pela maioria dos acadêmicos, falta do uso da verificação empírica dos passos dados na demonstração, visando encontrar os erros mencionados e argumentos válidos. Estes fatos corroboram com os relatos de alguns professores do Ensino Superior que, segundo Nasser e Caldato (2019) tem destacado a ineficiência dos discentes em formação com relação as suas habilidades de argumentar e produzir provas para afirmativas matemáticas.

Quadro 16: Atividade 7

7. Justifique a veracidade do teorema a seguir. Teorema: Duas matrizes são linhas-equivalentes se, e somente se ambas podem ser reduzidas à mesma forma escalonada por linhas.

Fonte: Elaboração da autora, 2019.

A Tabela 14 contém informações quantitativas das resoluções dos acadêmicos da turma de ALI da atividade 7.

Tabela 14: Análise da resolução atividade 7 turma de Álgebra Linear I

Resolução	Registros Mobilizados	Quantidade	Percentual
Satisfatória	--	--	--
Parcialmente Satisfatória	--	--	--
Equivocada	RLN	3	18,75%
Nula	--	--	--
Em branco	--	13	81,25%
Total de Atividades		16	

Fonte: Elaboração da autora, 2019, com base nos protocolos dos discentes da turma de AL I.

Esperava-se que a resolução feita pelos discentes na atividade 7, a ser considerada como **satisfatória**, se aproxima ou se utiliza dos mesmo passos da demonstração proposta por Rufato (2014, p. 33)

> **Demonstração:** Sejam A e B duas matrizes. Se A e B são linhas-equivalentes, então é imediato que, utilizando operações elementares por linhas ambas podem ser convertidas à mesma matriz escalonada por linhas.
> Reciprocamente, se A e B tem a mesma forma escalonada por linhas C, então existem finitas operações elementares por linhas que convertem A em C e B em C.
> Aplicando em A as operações que convertem C e depois as operações reversas que convertem B em C, obtemos um numero finito de operações elementares por linhas que convertem A em B, ou seja, A e B são linhas-equivalentes.

No entanto, os acadêmicos, da turma de AL I, não realizaram a justificativa da veracidade do teorema de maneira coerente ou próxima a uma demonstração da veracidade do teorema. Por esse motivo, ambas as resoluções foram classificadas como **equivocadas**. A exemplo, tem-se a resolução do acadêmico N (Figura 36) que apresenta, como condição, para que as matrizes possam ser reduzidas a forma escada, o fato delas serem matrizes-linha equivalentes.

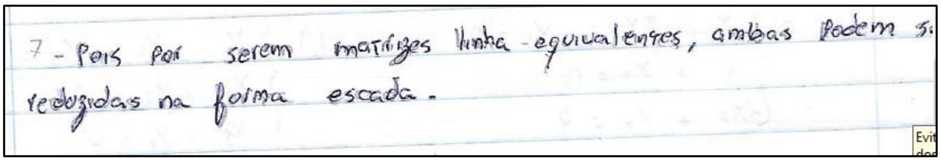

7 - Pois por serem matrizes linha-equivalentes, ambas podem s
reduzidas na forma escada.

Figura 36: Resolução do discente N da atividade 7
Fonte: Protocolo do discente N da turma AL I.

Os aspetos quantitativos das resoluções da turma de Álgebra Linear II referente a atividade 7, encontram-se na Tabela 15.

Tabela 15: Análise da resolução atividade 7 turma de Álgebra Linear II

Resolução	Registros Mobilizados	Quantidade	Percentual
Satisfatória		1	14,28%
Parcialmente Satisfatória	--	--	--
Equivocada	---	--	--
Nula	RM RLN	3	42,86
Em branco	--	3	42,86%
Total de Atividades		7	100%

Fonte: Elaboração da autora, 2019, com base nos protocolos dos discentes da turma de ALII.

A resolução realizada pelo acadêmico da turma de Álgebra Linear II da atividade 7, considerada como **satisfatória**, teria de se aproximar ou se utilizar dos mesmo passos da demonstração proposta por Rufato (2014), apresentada anteriormente.

Este tipo de resolução foi identificado no protocolo do discente T (Figura 37). Para tanto, iniciou sua justificativa pelo fato de ambas as matrizes possuírem a mesma forma escalonada, considerando que ambas as matrizes são invertíveis (determinante diferente de zero), portanto, com um determinado número de operações elementares entre linhas ambas podem ser reduzidas a uma matriz identidade. Após, realizou a recíproca, que com as matrizes possuindo a mesma forma escalonada, depois da realização de um número finito de operações elementares entre linhas pode-se obter as matrizes iniciais.

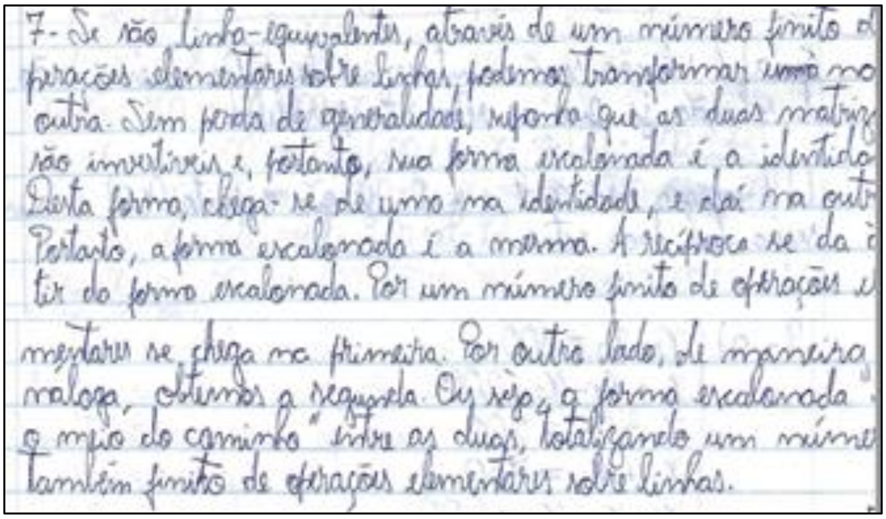

7- Se são linha-equivalentes, através de um número finito d
perações elementares sobre linhas, podemos transformar uma na
outra. Sem perda de generalidade, suponha que as duas matriz
são invertíveis e, portanto, sua forma escalonada é a identida
Desta forma, chega-se de uma na identidade, e daí na outr
Portanto, a forma escalonada é a mesma. A recíproca se dá
tir da forma escalonada. Por um número finito de operações e
mentares se chega na primeira. Por outro lado, de maneira
náloga, obtemos a segunda. Ou seja, a forma escalonada
"o meio do caminho" entre as duas, totalizando um núme
também finito de operações elementares sobre linhas.

Figura 37: Resolução do discente T da atividade 7
Fonte: Protocolo do discente T da turma AL II.

Repare que na resolução do acadêmico T pode-se identificar o uso de argumentos válidos para justificar as afirmações realizadas por ele, bem como atentou-se na necessidade de que para produzir uma demonstração é preciso resolvê-la em dois momentos, o desenvolvimento da afirmação inicial e da sua recíproca. No entanto, nota-se um equívoco na afirmação utilizada pelo discente ao elencar a necessidade de que ambas as matrizes sejam invertíveis com determinante diferente de zero, restringindo a sua demonstração a apenas este tipo de matrizes.

As resoluções classificadas como **nulas** tratam-se de uma afirmação referente à veracidade do teorema dado, sem justificativa ou argumentação, e à reescrita do teorema sem desenvolvimento da resolução da atividade. E por fim, a utilização de um exemplo numérico (Figura 38), que iniciou a sua justificativa por um exemplo, no entanto, não finalizou, argumentou ou justificou a sua resolução.

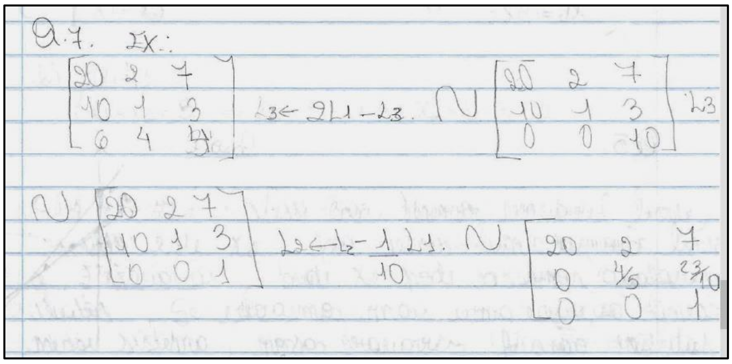


Figura 38: Resolução do discente X da atividade 7
Fonte: Protocolo do discente X da turma AL II.

Contudo, destaca-se a importância de que os docentes do Ensino Superior incluam em suas aulas momentos de argumentação e prova tendo em vista o desenvolvimento do processo dedutivo, pois os discentes

> [...] devem estar cientes de que a prova tem outras funções além da verificação/convicção da validade de um argumento. A prova pode, por exemplo, assumir o papel de explicar porque o resultado é verdadeiro, facilitando a compreensão dos alunos (DE VILLIERS, 1990 *apud* NASSER; CALDATO, 2019, p. 94).

Caso isso não ocorra, possivelmente, depois de formados, os acadêmicos “não incluirão em suas aulas atividades argumentativas e/ou dedutivas que, em geral, não aparecem nos livros didáticos” (NASSER; CALDATO, 2019, p. 81), limitando os seus futuros alunos a acreditarem na veracidade das afirmativas ditas pelo professor sem a explicação de o porque as mesmas são verdadeiras e válidas.

O propósito da atividade 8 (Quadro 17) foi verificar quais os métodos escolhidos para a resolução dos Sistemas Lineares: escalonamento ou eliminação gaussiana; método de Gauss-Jordan; Regra de Cramer; outros).

Quadro 17: Atividade 8

8. Resolva o seguinte Sistema de Equações Lineares, utilizando dois métodos de resolução.
$\boldsymbol{x_1 + x_2 + x_3 = a}$ $\boldsymbol{2x_1 + 2x_3 = b}$ $\boldsymbol{3x_2 + 3x_3 = c}$

Fonte: Elaboração da autora, 2019.

Apresenta-se, no quadro a seguir, as definições dos métodos de resolução de Sistemas Lineares utilizados pelos participantes desta pesquisa.

Quadro 18: Métodos de resolução de Sistemas Lineares

Método	**Definição**
Escalonamento ou Eliminação Gaussiana	Consiste em reduzir o Sistema Linear inicial para um sistema equivalente a esse (com a mesma solução), porém em forma de escada ou escalonado, ou seja, sistema cujo os elementos abaixo dos pivôs (primeiro elemento não nulo da linha) são iguais a zero, como mostra o exemplo abaixo. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 12 \\ 0 & 1 & 4 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ Para escalonar um Sistema Linear as seguintes operações elementares entre linhas podem ser realizadas no sistema S: (a) transpor ou permutar as linhas; (b) multiplicar as linhas por um escalar não nulo; (c) substituir uma das linhas por sua adição com um múltiplo de outra linha. (BOLDRINI *et al.*, 1980).
Gauss-Jordan	Segue os mesmos passos da Eliminação Gaussiana, no entanto, é necessários realizar operações elementares entre linhas com o intuito de zerar os elementos abaixo e acima dos pivôs (ANTON; RORRES, 2012). Como exemplo, $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$
Regra de Cramer	Consiste em determinar a solução do Sistema Linear utilizando o determinante da matriz de coeficientes. Sendo assim, para $\det(A) \neq 0$ o sitema linear dado $AX = b$ tem uma única solução e a mesma pode ser determinada por $x = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} \quad y = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} \quad z = \frac{\det(A_3)}{\det(A)}$ Onde A_1 é a matriz obtida substituindo as entradas da primeira coluna de A, A_2 é a matriz obtida substituindo as entradas da segunda coluna de A e A_3 é a matriz obtida subistituindo as entradas da terceira coluna de A pelas da matriz b (BOLDRINI *et al.*,1980).

Fonte: Elaboração da autora, 2019.

Na Tabela 16 estão expostas as informações quantitativas das classificações das resoluções dos acadêmicos da turma de Álgebra Linear I, assim como, os registros de representação mobilizados. A simbologia (→) indica que houve uma conversão da representação do objeto em questão.

Tabela 16: Análise da resolução atividade 8 turma de Álgebra Linear I

Resolução	Registros Mobilizados	Quantidade	Percentual
Satisfatória	--	--	--
Parcialmente Satisfatória	RA RA→RM RM→RA	1	6,25%
Equivocada	RA RA→RM RM→RA	9	56,25%
Nula	--	2	12,50%
Em branco	--	4	25,00%
Total de respostas		16	100%

Fonte: Elaboração da autora, 2019, com base nos protocolos dos discentes da turma de AL I.

Para ser classificada como **satisfatória** a resolução deveria fazer uso de dois métodos distintos de resolução, conforme apresentados anteriormente, e conter a solução correta do Sistema Linear, em ambos os casos, o que não ocorreu na turma de Álgebra Linear I.

Já a considerada **parcialmente satisfatória** utilizou dois métodos distintos para a resolução do sistema, porém não encontrou as soluções corretas, por erros cometidos na finalização da atividade, nos quais o discente realizou a simplificação das respostas de forma errada, como mostra a resolução do acadêmico B (Figura 39).

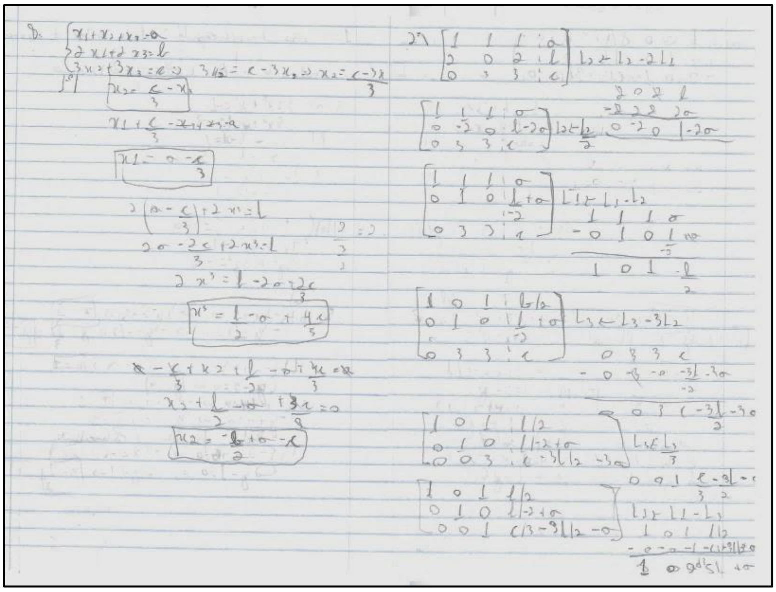


Figura 39: Resolução do discente B da atividade 8
Fonte: Protocolo do discente B da turma AL I.

As resoluções realizadas de maneiras **equivocadas** consistiam em realizar a solução do Sistema Linear proposto utilizando apenas um método e, também, encontrando a solução errada.

Além disso, outro tipo de equívoco foi percebido, como no caso do discente D (Figura 40), no qual realizou operações entre linhas na matriz de coeficientes do sistema, não realizando estas operações também na coluna de termos independentes.

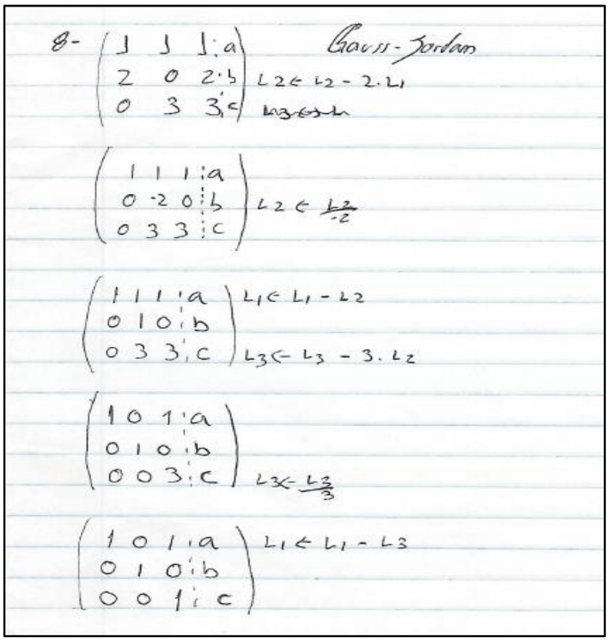


Figura 40: Resolução do discente D da atividade 8
Fonte: Protocolo do discente D da turma AL I.

O tipo de resolução considerada **nula**, nesta turma, são os casos do discente J, que apenas reescreveu o sistema apresentado e não realizou a atividade, e do acadêmico N, o qual reescreveu o Sistema Linear substituindo as letras que representavam os valores independentes, por números inteiros, não realizando o solicitado na atividade.

Os métodos escolhidos pelos discentes da turma de Álgebra Linear I (levando em consideração os acadêmicos que realizaram a atividades, somente dez, somando resoluções parcialmente satisfatórias e equivocadas) para realizar a atividade foram: Substituição, Escalonamento e Gauss-Jordan, dos quais dois dos discentes recorreram como um dos métodos a Substituição, seis ao Escalonamento, um aos métodos de Substituição e Escalonamento e um acadêmico ao método de Gauss-Jordan.

Na Tabela 17 estão descritos os dados quantitativos das classificações das resoluções dos acadêmicos da turma de Álgebra Linear II, assim como, os registros de representação mobilizados.

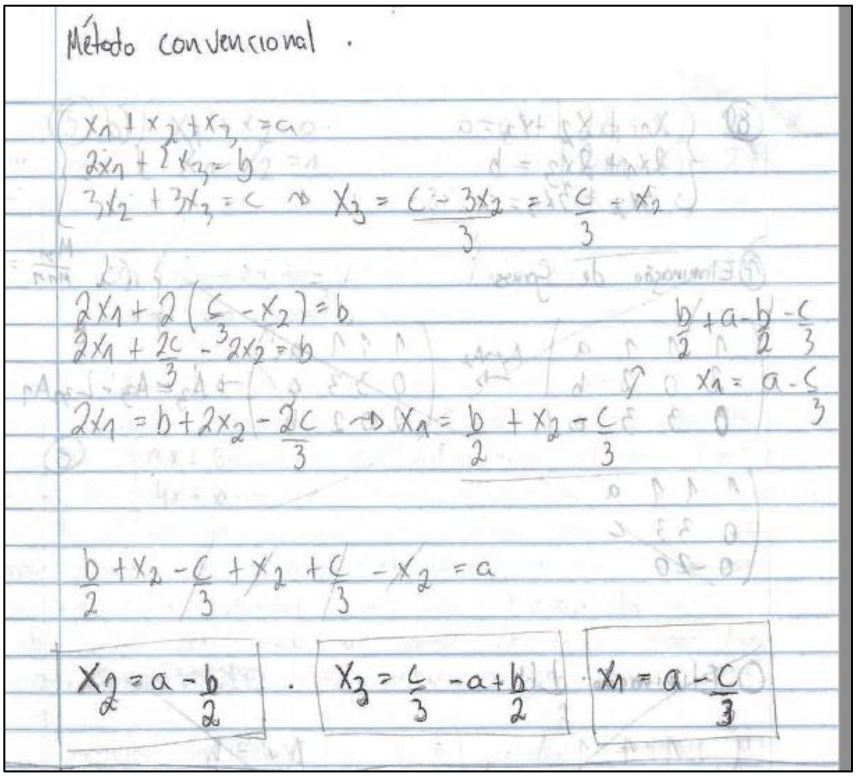
Tabela 17: Análise da resolução atividade 8 turma de Álgebra Linear II

Resolução	Registros Mobilizados	Quantidade	Percentual
Satisfatória	--	--	
Parcialmente Satisfatória	RA→RM RM→RA RLN	4	57,14%
Equivocada	RA→RM RM→RA RLN	2	28,57%
Nula	RA→RM RM→RA RLN	1	14,29%
Em branco	--	--	--
Total de respostas		7	100%

Fonte: Elaboração da autora, 2019, com base nos protocolos dos discentes da turma de AL II.

Para que as resoluções fossem classificadas como **satisfatórias** deveriam apresentar solução correta do Sistema Linear por meio de dois métodos distintos de resolução, em ambos os casos, o que também não ocorreu na turma de Álgebra Linear II.

Já as consideradas **parcialmente satisfatórias** utilizaram dois métodos distintos para a resolução do sistema, conforme solicitado, porém não encontraram as soluções corretas, apresentando erros na finalização, realizando a simplificação das respostas de forma errada. Um exemplo pode ser visto na resolução do discente U (Figura 41).



Método convencional.

$x_1+x_2+x_3=a$

$2x_1+2x_3=b$

$3x_2+3x_3=c \Rightarrow x_3=\frac{c-3x_2}{3}=\frac{c}{3}-x_2$

$2x_1+2\left(\frac{c}{3}-x_2\right)=b$

$2x_1+\frac{2c}{3}-2x_2=b$

$2x_1=b+2x_2-\frac{2c}{3} \Rightarrow x_1=\frac{b}{2}+x_2-\frac{c}{3}$

$\frac{b}{2}+a-\frac{b}{2}-\frac{c}{3}$

$x_1=a-\frac{c}{3}$

$\frac{b}{2}+x_2-\frac{c}{3}+x_2+\frac{c}{3}-x_2=a$

$\boxed{x_2=a-\frac{b}{2}}$. $\boxed{x_3=\frac{c}{3}-a+\frac{b}{2}}$. $\boxed{x_1=a-\frac{c}{3}}$

Figura 41: Resolução do discente U da atividade 8
Fonte: Protocolo do discente U da turma AL II.

Para resolução correta da atividade, os valores de x_1, x_2, e x_3 são respectivamente, $\frac{3a-c}{3}$, $\frac{2a-b}{2}$, $\frac{-6a+3b+2c}{6}$, no entanto, a maioria dos discentes, equivocadamente, realizou a simplificação das frações. Cabe ressaltar que, a simplificação de uma fração pode ser realizada se houver uma multiplicação de fatores no numerador e não uma adição ou subtração, como era o caso.

As resoluções classificadas como **equivocadas** consistiam na realização da atividade utilizando apenas um método e, também, encontrando a solução incompleta e com alguns erros, como no caso do acadêmico S (Figura 42), que não escreveu o valor de x_1, e cometeu um erro de sinais no x_3.

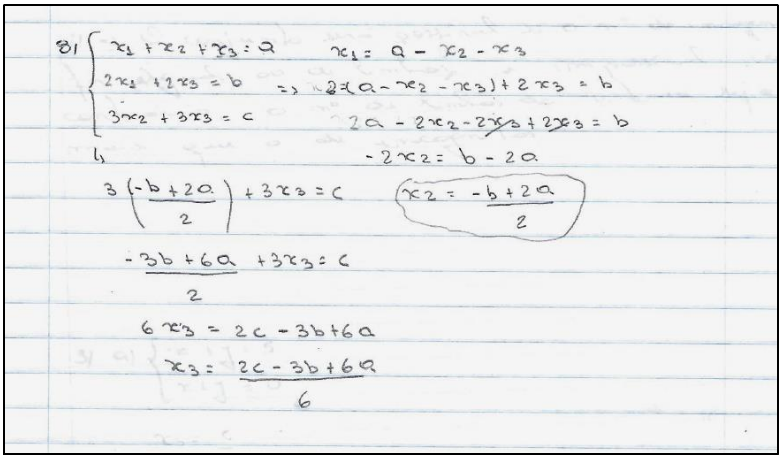


Figura 42: Resolução do discente S da atividade 8
Fonte: Protocolo do discente S da turma AL II.

Na resolução classificada como **nula,** o discente X escreveu os métodos que utilizaria, substituição e escalonamento, mas não realizou a atividade.

Quanto aos métodos escolhidos pelos discentes da turma de Álgebra Linear II (levando em consideração os acadêmicos que realizaram a atividades, somente seis, somando resoluções parcialmente satisfatórias, e equivocadas) para realizar a atividade, estes foram: Substituição, Regra de Cramer e Escalonamento/Eliminação Gaussiana, dos quais um dos discentes recorreu apenas a Substituição como método, um somente a Regra de Cramer, um a Substituição e a Regra de Cramer, três a Substituição e ao Escalonamento/Eliminação Gaussiana.

Considerando os métodos escolhidos, pelos discentes de ambas as turmas, evidencia-se que entre os métodos utilizados de maneira expressiva estão o de Substituição e Escalonamento/Eliminação Gaussiana. O primeiro envolvendo tratamento no registro de representação algébrica e o segundo podendo ser realizado o tratamento também no registro de representação algébrica e no registro de representação matricial, sendo este último o utilizado pelos discentes participantes desta pesquisa.

Para Prado e Bianchini (2018), no que tange a resolução de Sistemas Lineares, prioriza-se o ensino

> [...] por meio de operações elementares, escalonamento, que deve ser justificado! E, quando possível fazer o uso de representações geométricas e software de geometria dinâmica para visualizar o efeito de cada operação sobre a solução do sistema (PRADO; BIANCHINI, 2018, p. 87).

Assim, o ensino de Sistemas Lineares não estaria restrito apenas a mera aplicação e reprodução de métodos de resolução sem justificativa. Bem como, é importante a realização da discussão das limitações de cada método, como já apontado anteriormente, por Lima (2001 *apud* CHIARI; FREITAS, 2018) que se fosse necessário a resolução de um Sistema Linear composto por vinte equações e vinte incógnitas, por exemplo, o uso da Regra de Cramer demandaria mais tempo que o uso do método do escalonamento para obter a solução desse sistema.

Corroborando com essas ideias alguns discentes da turma de Álgebra Linear II, sugeriram, no questionário aplicado pela pesquisadora, o uso da programação dos métodos numéricos para a resolução de Sistemas Lineares, sendo uma maneira de verificar as potencialidades e limitações dos métodos, assim como, analisar as ligações entre os métodos estudados em Álgebra Linear e revisitados no Cálculo Numérico, relacionando as discussões elaboradas nestes dois componentes curriculares, integrando a Álgebra Linear e a programação.

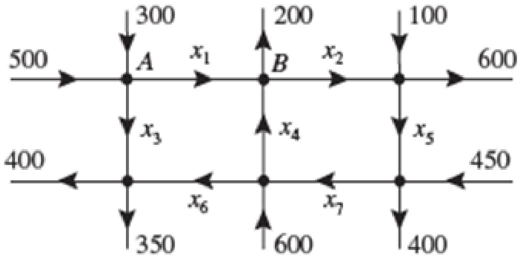
Os *softwares*, por exemplo, podem ser utilizados para facilitar a resolução de sistemas, pois através da programação, pode-se organizar um algoritmo para sua resolução, agilizando o processo e potencializando o trabalho com as várias representações matemáticas (numérica, algébrica e gráfica).

A última atividade engloba uma situação-problema que exige dos discentes a sua interpretação do problema vinculado à outra área de conhecimento, bem como a conversão do registro de representação gráfica para outra representação em que será realizado o tratamento do Sistema Linear, com o intuito de resolvê-lo. Cabe destacar que, para Ponte (2005), um problema é uma tarefa fechada, com uma única solução possível, no entanto, possui um grau elevado de desafio, como também, no caso desta atividade, utiliza-se de um contexto semi-real da área da Física, o fluxo de tráfego.

Por isso, esta atividade tem por finalidade verificar se os acadêmicos reconhecem e aplicam o conhecimento matemático a situações de outras áreas do conhecimento. Junior (2010) considera que atividades deste tipo, talvez, façam com que o estudante compreenda a importância do tema estudado, Sistemas Lineares, e aprenda como utilizá-lo em outras situações.

Quadro 19: Atividade 9

9. A figura dada mostra uma rede viária de ruas de mão única com fluxo de tráfego nos sentidos indicados. As taxas de fluxo ao longo das ruas são medidas pelo número médio de veículos por hora.
(a) Monte um sistema linear cuja solução forneça as taxas de fluxo desconhecidas.
(b) Resolva o sistema para as taxas de fluxo desconhecidas.



Fonte: Elaboração da autora, 2019.

Na Tabela 18 consta as informações quantitativas referente a resolução dessa atividade.

Tabela 18: Análise da resolução atividade 9 turma de Álgebra Linear I

Resolução	Registros Mobilizados	Quantidade	Percentual
Satisfatória	--	--	--
Parcialmente Satisfatória	--	--	--
Equivocada	--	--	--
Nula	RF→RA	1	6,25%
Em branco	--	15	93,75%
Total de respostas		16	100%

Fonte: Elaboração da autora, 2019, com base nos protocolos dos discentes da turma de AL I.

As resoluções consideradas **satisfatórias** precisariam que os acadêmicos realizassem a conversão da representação de partida, a figural, para outra representação, a fim de realizar um tratamento, visando a realização da atividade por meio de algum método de resolução e obtivessem a resposta correta da atividade. Como solução desta atividade tinha-se os valores para $x_1 = 50 + s$, $x_2 = 450 + t$, $x_3 = 750 - s$, $x_4 = 600 - s + t$, $x_5 = t - 50$, $x_6 = s$ e $x_7 = t$. O Sistema Linear proposto possui infinitas soluções havendo duas variáveis livres.

O discente G iniciou a conversão de duas equações da atividade, entretanto, não deu continuidade, por esse motivo a sua resolução foi considerada **nula**, como pode ser observado na Figura 43.

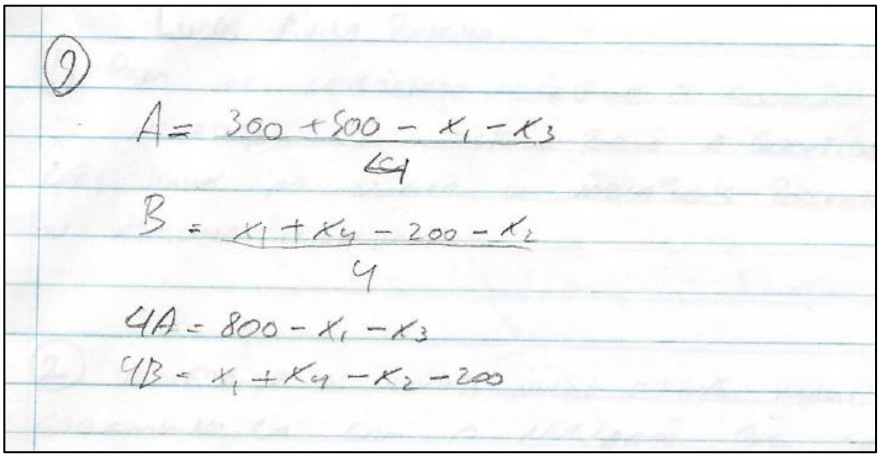


Figura 43: Resolução do discente G da atividade 9
Fonte: Protocolo do discente G da turma AL I.

Na turma de Álgebra Linear I somente um acadêmico tentou realizar a atividade 9, os demais discentes a deixaram em branco. Talvez esse fato esteja relacionado à pouca utilização de problemas de outras áreas do conhecimento durante as aulas, de forma que antes da aplicação de um determinado método de resolução o discente precise interpretar os dados fornecidos. Assim como, a realização da conversão da representação figural, do sistema de tráfego, para outra representação, algébrica e/ou matricial, para a realização do tratamento com intuito de obter a solução do sistema proposto.

A Tabela 19 contém dos dados quantitativos referente a resolução dos acadêmicos da turma de Álgebra Linear II.

Tabela 19: Análise da resolução atividade 9 turma de Álgebra Linear II

Resolução	Registros Mobilizados	Quantidade	Percentual
Satisfatória	RF→RA→RM	2	28,57%
Parcialmente Satisfatória	RF→RA→RM	1	14,29%
Equivocada	--	--	--
Nula	--	1	14,29%
Em branco	--	3	42,86%
Total de respostas		7	100%

Fonte: Elaboração da autora, 2019, com base nos protocolos dos discentes da turma de AL II.

Para a realização da atividade 9 ser considerada **satisfatória**, precisaria que o discente realizasse a conversão da representação de partida, a figural, para outra representação, a fim de realizar a resolução da atividade com o auxílio de algum método de resolução e obtivesse a resposta correta da atividade.

O discente R foi capaz de efetuar a conversão de maneira correta e obter a resposta certa, como mostra a Figura 44, na sequência, vê-se a conversão RF→RA→RM. A finalização da atividade 9 contendo os valores específicos para $x_1 = 50 + s$, $x_2 = 450 + t$, $x_3 = 750 - s$, $x_4 = 600 - s + t$, $x_5 = t - 50$, $x_6 = s$ e $x_7 = t$.

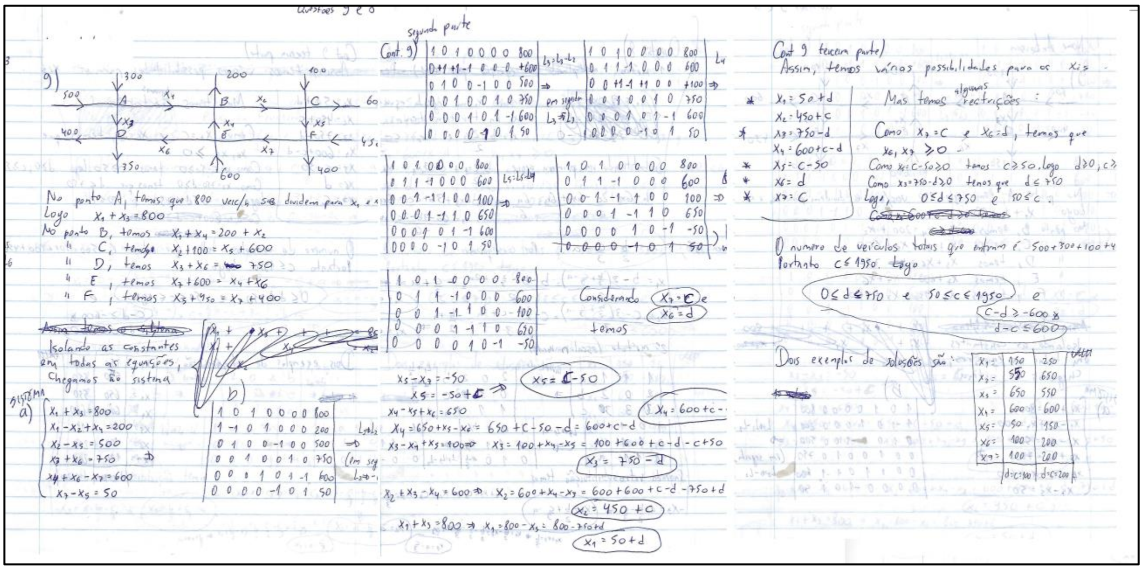


Figura 44: Resolução do discente R da atividade 9
Fonte: Protocolo do discente R da turma AL II.

O mesmo aconteceu com o acadêmico T, conforme a Figura 45. Percebe-se que realizou as operações elementares entre linhas corretamente, no entanto, não elencou como as suas variáveis livres x_6 e x_7, optando por escrever todos os seus elementos em função de x_5 e x_6, obtendo, também a resposta correta da atividade.

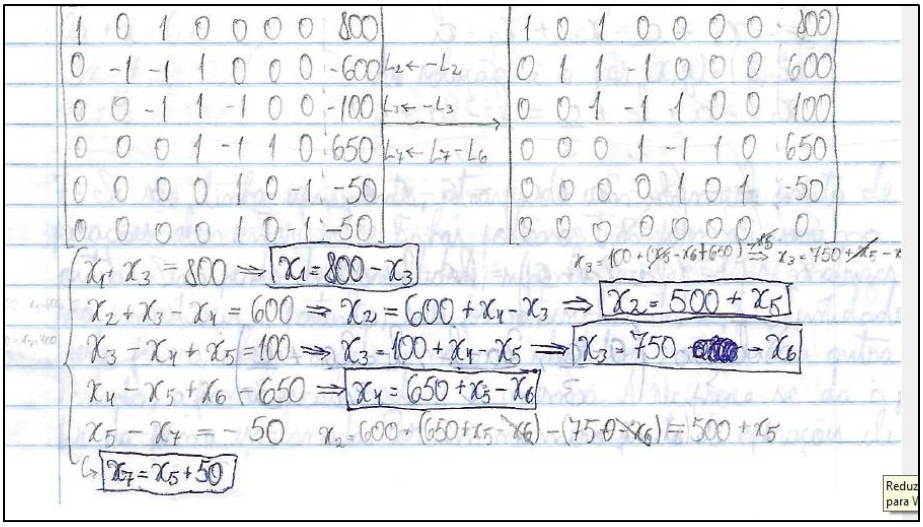


Figura 45: Resolução do discente T da atividade 9
Fonte: Protocolo do discente T da turma AL II.

As resoluções classificadas como **parcialmente satisfatórias** continham a realização da conversão da representação de partida, a figural, para outra representação, a fim de realizar a resolução da atividade com o auxílio de algum método de resolução, porém não finalizou a atividade. Considera-se como possível justificativa deste fato, a falta de tempo disponível para a finalização desta atividade, assim como, a quantidade de operações elementares entre linhas para obter-se um sistema equivalente.

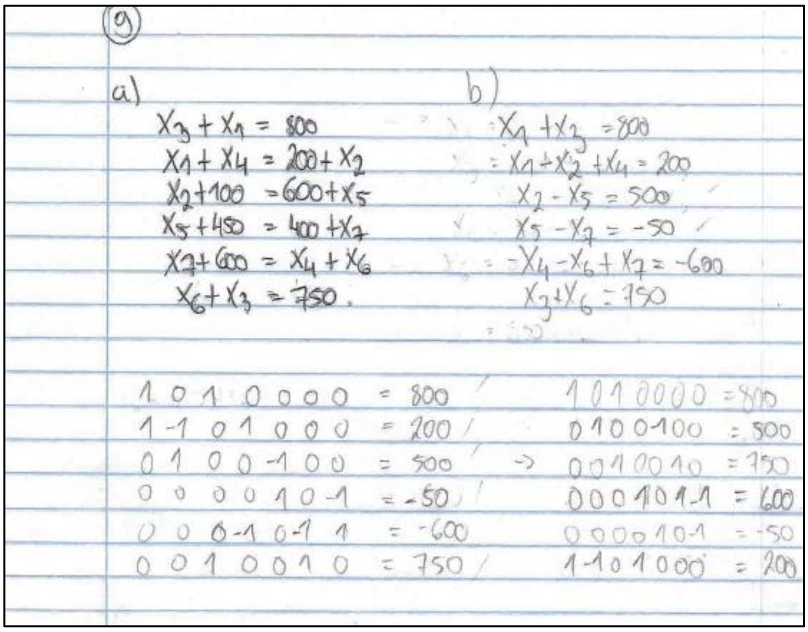
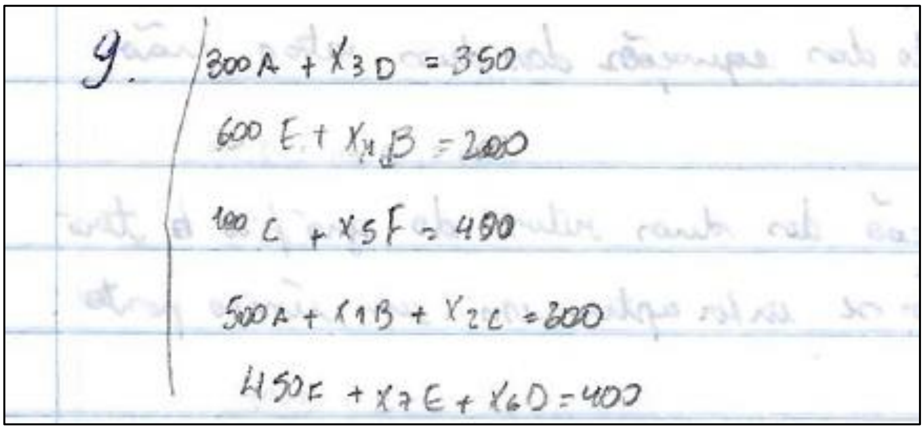


Figura 46: Resolução do discente U da atividade 9
Fonte: Protocolo do discente U da turma AL II.

Já o discente Q realizou a conversão de maneira **equivocada**, bem como não deu continuidade a sua realização, por esse motivo a sua resolução foi considerada **nula**.


9. $300A + X_3D = 350$

$600E + X_4B = 200$

$100C + X_5F = 400$

$500A + X_1B + X_2C = 800$

$450F + X_7E + X_6D = 400$

Figura 47: Resolução do discente Q da atividade 9.
Fonte: Protocolo do discente Q da turma AL II.

As aplicabilidades dos Sistemas Lineares são diversas, como por exemplo, Química – balanceamento de equações, Informática – análise de métodos numéricos, Física – estudo do fluxo de redes elétricas e tráfego de veículos, Nutrição – planejamento de cardápios personalizados e Economia – construção de modelos econômicos (BERTOLAZI; SAVIOLI, 2018). No entanto, as atividades que buscam explorar relações dos conteúdos de Sistemas Lineares com outros conceitos matemáticos e/ou com outras áreas do conhecimento, conforme defende o documento elaborado por integrantes da SBEM, em 2003, ainda são pouco exploradas, o que pode justificar a dificuldade dos acadêmicos em realizá-las, reafirmando a necessidade da exploração deste tipo atividades, assim como, de atividades que propiciem a conversão entre as representações de um mesmo objeto.

Considerações Finais

A ideia da pesquisa emergiu da inquietação da autora referente a "*Quais são os entendimentos dos acadêmicos do Ensino Superior sobre Sistemas Lineares sob a ótica dos Registros de Representação Semiótica?*". Sendo assim, esta pesquisa teve por objetivo *mapear os entendimentos dos acadêmicos do Ensino Superior sobre Sistemas Lineares sob a ótica dos Registros de Representação Semiótica*.

Para tanto, foi realizado um estudo referente a teoria dos Registros de Representação Semiótica, com o intuito de compreender a importância das representações para os objetos matemáticos, especificamente, os Sistemas Lineares, assim como, a relevância destas representações para a compreensão e aprendizagem desses objetos.

Realizou-se também o mapeamento das pesquisas, dissertações e teses, que abordam a teoria dos RRS atrelada a objetos da Álgebra Linear, para obter-se um panorama dos estudos sobre esses temas, auxiliando na escolha e análise das atividades trabalhadas com os acadêmicos.

A pesquisa seguiu uma abordagem qualitativa, segundo Borba (2004), assim como, trata-se de um estudo de caso, conforme Yin (2010) e a análise dos dados foi realizada seguindo pressupostos da Análise de Conteúdo., proposta por Bardin (2004).

Esta investigação possibilitou verificar que com relação à compreensão dos acadêmicos referente ao conceito de Sistemas de Equações Lineares, na turma de Álgebra Linear I, a mesma possui alguns equívocos como o fato de que todo Sistema Linear é representado por uma matriz quadrada. No que diz respeito à turma de Álgebra Linear II, as resoluções dos acadêmicos demonstram conhecimento da definição de Sistemas Lineares presentes nos livros-texto, trazendo em algum momento traços destas em suas resoluções.

No que tange a análise referente aos registros de representação semiótica as resoluções dos acadêmicos da turma de Álgebra Linear I focaram-se nos registros de representação, primeiro, registro de representação em língua natural, segundo, registro de representação algébrica, terceiro, registro de representação matricial e por último, registro de representação gráfica.

Com relação aos movimentos de tratamento e conversão, notou-se afinidade e escolha por tratamentos nos registros de representação algébrica e matricial, sobre as conversões estas foram realizadas nos sentidos RG→RLN, RN→RLN, RG→RA, RN→RA, RN→RG.

Na turma de Álgebra Linear II as resoluções dos discentes mobilizavam os registros de representação, em língua natural, algébrica, matricial e gráfica, nessa ordem de intensidade. Referente aos gestos de tratamento e conversão, os tratamentos foram efetuados nos registros de representação algébrica e matricial, já as conversões foram realizadas nos sentidos RG→RA, RN→RA, RG→RM, RN→RM, RN→RG, RF→RA→RM.

Como foi visto na análise das resoluções das atividades referentes aos registros de representação semiótica, em ambas as turmas o registro de representação gráfica é o menos mobilizado pelos acadêmicos. Para Abrantes, Morais e Barros (2018), é importante que no ensino de Sistemas Lineares haja enfoque no registro de representação algébrica e no registro de representação gráfica. Assim como, é necessário que se saiba realizar a conversão de um Sistema de Equações Lineares no registro de representação algébrica para o registro de representação gráfica, assim como, a recíproca e, por isso, é importante para compreensão dos desse conteúdo (ABRANTES; MORAIS; BARROS, 2018).

Para que isso ocorra, é preciso que os discentes tenham sido apresentados a essas diferentes representações do objeto Sistemas Lineares, além de serem capazes de reconhecer que elas representam o mesmo. É importante que na realização de uma atividade matemática que o discente possa e consiga mobilizar diferentes registros de representação semiótica (figuras, gráficos, escrituras simbólicas, língua natural, ...) (DUVAL, 2012), o que não foi visto de maneira significativa em ambas as turmas.

Por meio das resoluções apresentadas por ambas as turmas pode-se destacar a dificuldade que os discentes tem para justificar, argumentar, utilizando-se da argumentação e prova para aferir a veracidade de um teorema, assim como, a falta de compreensão a linguagem formal presente neste tipo de atividade. Para isso, é preciso que o acadêmico compreenda "noções de conjectura, teorema, demonstração, examinar consequências do uso de diferentes definições, analisar erros cometidos e ensaiar estratégias alternativas" (SBEM, 2003, p. 15). Por isso, a importância de explorar mais atividades deste tipo.

Ao analisar os métodos apresentados para a resolução de Sistemas Lineares, identificou-se que em ambas as turmas os métodos escolhidos em maioria foram Substituição e Escalonamento/Eliminação Gaussiana. O que corrobora com as indicações de Prado e Bianchini (2018), no que tange a resolução de Sistemas Lineares, pois prioriza-se o ensino da mesma através de operações elementares entre linhas, o escalonamento.

Com relação à capacidade dos discentes em reconhecer e aplicar o conhecimento matemático a situações da própria Matemática ou de outras áreas do conhecimento, na turma de Álgebra Linear I somente um acadêmico tentou realizar a atividade 9, os demais discentes a deixaram em branco. Talvez esse fato esteja relacionado a pouca utilização de problemas de outras áreas do conhecimento durante as aulas, e a dificuldade de interpretação da representação figural do Sistema Linear. Já na turma de Álgebra Linear II os discentes apresentaram certos entendimentos sobre como reconhecer o objeto Sistemas Lineares da maneira como ele foi exposto e alguns acadêmicos conseguiram realizar a atividade.

Quanto ao uso de *software*, houve duas indicações principais dos participantes, a primeira relacionada ao uso do *software* GeoGebra para melhorar a visualização e entendimento da representação gráfica no estudo de Sistemas Lineares. Pois, este é um *software* de Geometria Dinâmica, onde há a possibilidade de manipular um mesmo objeto utilizando a representação, gráfica, geométrica, algébrica, tabular etc., simultaneamente.

A segunda indicação refere-se ao uso da programação dos métodos numéricos para a resolução de Sistemas Lineares, sendo uma maneira de verificar as potencialidades e limitações do métodos, assim como, analisar as ligações entre os métodos estudados em Álgebra Linear e revisitados no Cálculo Numérico atrelando estes dois componentes curriculares, integrando a Álgebra Linear e a programação.

Diante desse contexto, destaca-se a importância da realização de pesquisas voltadas para o processo de ensino e aprendizagem de Álgebra Linear, no âmbito do Ensino Superior, sejam em pesquisas com acadêmicos de cursos que contém em sua matriz curricular a disciplina. Mas, principalmente, pesquisas realizadas com futuros professores para que seja possível estabelecer relações entre aquilo que está sendo abordado na universidade e os conceitos de Álgebra Linear com os quais o professor trabalhará em sala de aula da Educação Básica. Assim como, explorar o uso de Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação nas disciplinas de Álgebra Linear, visando explorar os diferentes registros de representação semióticas. O campo de pesquisa relacionado à Álgebra Linear é vasto, com isso, ainda existem muitas lacunas a serem exploradas.

Referências

ABRANTES, W. G. B.; MORAIS,T. M. R.; BARROS,L. G. C. de. **Um olhar sobre a face oculta dos Registros de Representação Semiótica envolvendo Sistemas Lineares**. In: VII Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática – Foz do Iguaçu, Paraná, 2018. Disponivel em: http://www.sbemparana.com.br/eventos/index.php/SIPEM/VII_SIPEM/paper/view/654/455. Acesso em: 15 Mar. 2019.

ANDRADE, J. P. G. **Vetores**: Interações à distância para a aprendizagem de Álgebra Linear. 2010. 125 f. Dissertação (Mestrado Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2010.

ANTON, H.; RORRES, C. **Álgebra linear com aplicações.** 10. ed. Porto Alegre: Bookman, 2012.

BARDIN, L. **Análise de Conteúdo.** São Paulo: Edições 70, 2004.

BATTAGLIOLI, C. S. M. **Sistemas Lineares na segunda série do Ensino Médio: Um olhar sobre os livros didáticos**. 113 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2008.

BERTOLAZI, K. S. **Conhecimentos e compreensões revelados por estudantes de licenciaturas em Matemática sobre Sistemas de Equações Lineares**. 2012. 227 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2012.

BERTOLAZI; K. S.; SAVIOLI, A. M. Sistemas de Equações Lineares: perspectivas conceituais e didáticas In: BIANCHINI, B. L.; MACHADO, S. D. A. **Álgebra Linear sob o ponto de vista da Educação Matemática**. São Paulo: Livraria da Física, 2018.

BOEMO, M. S. **Registros de Representação Semiótica mobilizados no estudo de Sistemas Lineares no ensino médio**. 2015. 165 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2015.

BOLDRINI, J. L.; COSTA, S. I. R.; FIGUEIREDO, V. L.; WETZLER, H.G., **Álgebra Linear**. 3. ed. São Paulo: Harper e Row do Brasil, 1980.

BORBA, M. de C. **Pesquisa qualitativa em Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2004.

BRANDT, C. F.; MORETTI, M. T. O Cenário da Pesquisa no Campo da Educação Matemática à Luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica. In: **Perspectivas da Educação Matemática**. Campo Grande: UFMS, v. 7, n. 13, p. 22-37, 2014. Disponível em:

http://seer.ufms.br/index.php/pedmat/article/view/488/361. Acesso em: 06 fev. 2019.

BRASIL. **Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio**. Brasília: SEB, 2006. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/component/content/article?id=13558. Acesso em: 20 mar. 2017.

CARDOSO, V. C. **Ensino e Aprendizagem de Álgebra Linear**: uma discussão acerca de aulas Tradicionais, Reversas e de Vídeos Digitais. 2014. Tese (Doutorado Multiunidades em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2014.

CHIARI, A. S. de S.; FREITAS, J. L. M. de. O uso do escalonamento como ferramenta para resolução de Sistemas Lineares no Ensino Médio. In: BIANCHINI, B. L.; MACHADO, S. D. A. **Álgebra Linear sob o ponto de vista da Educação Matemática**. São Paulo: Livraria da Física, 2018.

DAMM, R. F. Registros de Representação. In: MACHADO, S. D. A. **Educação Matemática**: uma introdução. São Paulo. EDUC, p. 167-188, 2012.

DUVAL, R. **Semióses e pensamento humano**: registro semiótico e aprendizagens intelectuais. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

DUVAL, R . **Ver e ensinar a matemática de outra forma**: entrar no modo matemático de pensar: os registros de representação semióticas. São Paulo: PROEM, 2011.

DUVAL, R. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. **Revemat**: Florianópolis (SC), v. 07, n. 2, p. 266-297, 2012. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2012v7n2p266. Acesso em: 12 abr. 2018.

DUVAL, R. Entrevista: Raymond Duval e a Teoria dos Registros de Representação Semiótica. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, Campo Mourão, v. 2, n. 3, jul./dez. 2013. Disponível em: http://www.fecilcam.br/revista/index.php/rpem/article/view/963. Acesso em: 15 maio 2017.

FRANÇA, M. V. D. de. **Conceitos fundamentais de Álgebra Linear**: uma abordagem integrando Geometria Dinâmica. 2007. 140 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

FREITAS, N. A. de. **Sistemas de Equações Lineares**: uma proposta de atividades de diferentes abordagens de Registros de Representação Semiótica. 2013. 180 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2013.

GRANDE, A. L. **O conceito de Independência e Dependência e os Registros de Representação Semiótica nos Livros didáticos de Álgebra Linear**. 2006. 208 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2006.

HENRIQUES, A.; ALMOULOUD, S. A. Teoria dos registros de representação semiótica em pesquisas na Educação Matemática no Ensino Superior: uma análise de superfícies e funções de duas variáveis com intervenção do software Maple. **Ciência & Educação**, Bauru, vol. 22, n. 2, p. 465-487, 2016.

JORDÃO, A. L. I. **Um estudo sobra a Resolução Algébrica e Gráfica de Sistemas Lineares 3×3 no 2° ano do Ensino Médio**. 2011. 193 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2011.

JÚNIOR, L. de C. **Um estudo sobre a abordagem de matrizes no caderno do professor do programa “São Paulo faz Escola”**. 2010. 95 p. Dissertação (Mestrado em Mestrado Em Educação em Ciências e Matemática) – Pontíficia Universidade Católica de São Paulo, 2010.

KARRER, M. **Articulação entre Álgebra Linear e Geometria**: Um estudo sobre as Transformações Lineares na perspectiva dos Registros de Representação Semiótica. 2006. 435 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2006.

KRIPKA, R. M. L. **Uso de Tecnologias Digitais no ensino e na aprendizagem de Álgebra Linear na perspectiva das teorias da Aprendizagem Significativa e dos Registros de Representação Semiótica**. 2018. Tese (Doutorado em Ciências e Matemática) – Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2018.

LINO, E. P. **As Transformações Geométricas em um jogo interativo entre quadros**: Um estudo teórico. 2014. 114 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2014.

MORAN, M.; FRANCO, V. S. Tratamentos Figurais e Mobilizações de Registros para a Resolução de Problemas de Geometria. **Revemat**. Florianópolis (SC), v.10, n. 2, p. 61-75, 2015. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2015v10n2p61. Acesso em: 02 jun. 2017.

NASSER,L.; CALDATO, J. Investigaçâo sobre o desenvolvimento do processo dedutivo nos cursos de Licenciatura em Matemática. **REnCiMa**, v. 10, n.2, p. 80-96, 2019 Disponível em : http://revistapos.cruzeirodosul.edu.br/index.php/rencima/article/viewFile/2333/1115. Acesso em: 11 ago. 2019.

PANTOJA, L. F. L. **A conversão de Registros de Representação Semiótica no Estudo de Sistemas de Equações Algébricas Lineares**. 2008. 102 f.

Dissertação (Mestrado de Educação em Ciências e Matemática) – Universidade Federal do Pará, Belém, 2008.

PONTE, J. P. **Gestão curricular em Matemática**. In: GTI (Ed.) O professor e o desenvolvimento curricular. Lisboa: APM, 2005. p. 11-34.

PONTE, J. P. da. Estudos de Caso em Educação Matemática. In: **Bolema**, Ano 19, n. 25, p. 105-132, 2006.

PRADO, E. de A.; BIANCHINI, B. L. A Álgebra Linear na Licenciatura em Matemática. In: BIANCHINI, B. L.; MACHADO, S. D. A. **Álgebra Linear sob o ponto de vista da Educação Matemática**. São Paulo: Livraria da Física, 2018.

RUFATO, S. A. C. **Sistemas Lineares, aplicações e uma sequência didática**. 2014. 53 p. Dissertação (Mestrado Programa de Pós Graduação Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e Computação Universidade de São Paulo, São Carlos, 2014.

SANTOS, G. N. dos. **Conteúdos de Álgebra Linear ensinados na Educação Básica**: Uma análise de livros do Ensino Superior, 2017. 61 p. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) -- Universidade Federal do Pampa, Itaqui, 2017.

SOCIEDADE BRASILEIRA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA (SBEM). **Subsídios para a Discussão de Propostas para os Cursos de Licenciatura em Matemática:** Uma contribuição da Sociedade Brasileira de Matemática. São Paulo, 2003, 43 p. Disponível em: https://www.academia.edu/4256113/SUBS%C3%8DDIOS_PARA_A_DISCUSS%C3%83O_DE_PROPOSTAS_PARA_OS_CURSOS_DE_LICENCIATURA?auto=download. Acesso em: 06 set. 2019.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PELOTAS. **Projeto Pedagógico – Licenciatura em Matemática**. Pelotas, 2011.

VISEU, F.; MENEZES, L.; FERNANDES, J. A.; GOMES, A.; MENDES MARTINS, P. Concepções de Professores do Ensino Básico sobre a Prova Matemática: influência da experiência profissional. In: **BOLEMA**, vol. 31, N. 57, jan/abr, 2017, pp. 430-453. 2017. Disponível em: http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=291250692021. Acesso em: 01 ago. 2019.

YIN, R. K. **Estudo de caso**: planejamento e métodos. 4. ed. Porto Alegre: Bookman, 2010.

Anexos

Anexo A

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO – TCLE

Pesquisador responsável: Thaís Philipsen Grützmann
Instituição: Universidade Federal de Pelotas- Instituto de Matemática e Física
Endereço: Rua Gomes Carneiro, 01. 96010-610. Pelotas/RS. Campus Anglo. Sala 303.
Telefone: (53) 98465-1201.

Concordo em participar do estudo, com o título provisório, “As concepções sobre Sistemas Lineares dos acadêmicos de um curso de Licenciatura em Matemática” que ocorrerá em 2018/2. Realizado pela pesquisadora Gabrielle Nunes dos Santos sob orientação da Dra. Thaís Philipsen Grützmann, esta pesquisa está vinculada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Pelotas - Instituto de Matemática e Física. Estou ciente de que estou sendo convidado a participar voluntariamente do mesmo.

PROCEDIMENTOS: Fui informado de que o objetivo geral desta pesquisa será “investigar quais são as concepções dos acadêmicos de um curso de Licenciatura em Matemática sobre o conceito de Sistemas Lineares e como esses acadêmicos resolvem atividades que se utilizam das transformações cognitivas de tratamento e conversão”, cujos resultados serão mantidos em sigilo e somente serão usadas para fins de pesquisa. Estou ciente de que a minha participação envolverá o desenvolvimento das atividades pedagógicas propostas pela pesquisadora e a realização de um questionário.

RISCOS E POSSÍVEIS REAÇÕES: Fui informado que os riscos são mínimos.

BENEFÍCIOS: "O benefício de participar da pesquisa relaciona-se ao fato que os resultados serão incorporados ao conhecimento científico e posteriormente a situações de ensino-aprendizagem voltadas especialmente à Educação Matemática e a Ensino de Álgebra Linear".
PARTICIPAÇÃO VOLUNTÁRIA: Como já me foi dito, minha participação neste estudo será voluntária e poderei interrompê-la a qualquer momento.
DESPESAS: Eu não terei que pagar por nenhum dos procedimentos, nem receberei compensações financeiras.
CONFIDENCIALIDADE: Estou ciente que a minha identidade permanecerá confidencial durante todas as etapas do estudo.

CONSENTIMENTO: Recebi claras explicações sobre o estudo, todas registradas neste formulário de consentimento. Os investigadores do estudo responderam e responderão, em qualquer etapa do estudo, a todas as minhas perguntas, até a minha completa satisfação. Portanto, estou de acordo em participar do estudo, bem como, autorizo o uso da imagem dos procedimentos de resolução das atividades e das respostas, dadas por mim, no questionário. Este Formulário de Consentimento Pré-Informado será assinado por mim e arquivado na instituição responsável pela pesquisa.

Nome do participante:____

ASSINATURA:____________________________________ DATA: ____ / ____ / ______

DECLARAÇÃO DE RESPONSABILIDADE DO INVESTIGADOR: Expliquei a natureza, objetivos, riscos e benefícios deste estudo. Coloquei-me à disposição para perguntas e as respondi em sua totalidade. O participante compreendeu minha explicação e aceitou, sem imposições, assinar este consentimento. Tenho como compromisso utilizar os dados e o material coletado para a publicação de relatórios e artigos científicos referentes a essa pesquisa. Se o participante tiver alguma dúvida ou preocupação sobre o estudo pode entrar em contato através do meu endereço acima.

ASSINATURA DO PESQUISADOR RESPONSÁVEL: __________________________________

ASSINATURA DA PESQUISADORA-MESTRANDA: __________________________________

Apêndices

Apêndice A

ATIVIDADES

1. Descreva condições para que um conjunto de equações possa ser considerado um Sistema de Equações Lineares?

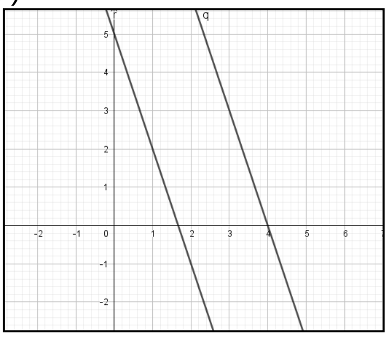
2. Como você pode verificar, sem utilizar algum método de resolução, se um Sistema de Equações Lineares é:
Sistema possível e determinado
Sistema possível e indeterminado
Sistema impossível

3. Escreva um sistema de equações lineares constituído de duas equações e duas incógnitas com
a) Nenhuma solução
b) Exatamente uma solução
c) Uma infinidade de soluções

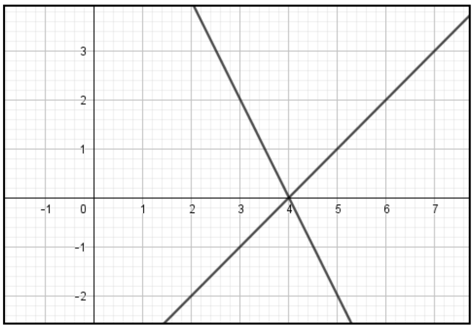
4. Escreva[31] um sistema de equações lineares constituído de três equações e três incógnitas com
a) Nenhuma solução
b) Exatamente uma solução
c) Uma infinidade de soluções

5. Determine o sistema linear e encontre a solução quando possível, justifique sua resposta.

a)



b)



c) A reta *a*: passa pelos pontos (3, 1) (2, 2) e a reta *b*: passa pelos pontos (0, 4) (5, –1).
d) A reta *a*: passa pelos pontos (1, 4) (2, 2) e a reta *b*: passa pelos pontos (5, 4) (3, 2).

6. O teorema abaixo se refere à forma escada de uma matriz ampliada de um Sistema Linear. Encontre os erros na demonstração, justifique e reescreva.
Teorema: Toda a matriz linha é equivalente a uma única matriz-linha reduzida à forma escada.

Demonstração: 1° Parte: Seja **A** uma matriz *m x n* qualquer. Se todo elemento da primeira linha de **A** é zero então a condição (a)[32] é satisfeita, no que diz respeito a esta linha. Se a primeira linha tem algum elemento não nulo, seja *k* o menor inteiro *j* tal que

[31] Extraído de Anton (2012, p. 9).
[32] O primeiro elemento não nulo de uma linha não nula é 1.

$a_{ij} \neq 0$. Multiplicamos a primeira linha por a_{ij} e a condição (a) ficará satisfeita. Agora para cada $i \geq 2$ somemos (a_{ik}) vezes a primeira linha à i-ésima linha. Como resultado, teremos uma matriz cujo primeiro elemento da primeira linha é 1 e ocorre na coluna *k*. Além disto, todos os outros elementos da coluna *k* são nulos.
Consideremos agora a matriz **B** obtida acima. Se a segunda linha desta matriz for nula nada fazemos. Se houver elementos não nulos nesta linha, seja a coluna *k'* a primeira a conter um destes. Multiplicamos a segunda linha por b_{2k}, e a seguir, somando os múltiplos adequados desta nova segunda linha às demais linhas, obtemos uma matriz cujo primeiro elemento não nulo da segunda linha é 1 e todos os elementos da coluna em que este elemento (1) se encontra são nulos. O importante é que neste processo não foram alterados os elementos b_{11}, b_{1k}, e nem a k-ésima coluna da matriz **B**.
Repetindo o procedimento acima às demais linhas, obteremos ao final a matriz **M** que é linha equivalente a inicial **A**, e que satisfaz as condições (a) e (b)[33]. da definição.
As condições (c)[34] e (d)[35] serão satisfeitas através de um número finito de permutações de linhas da matriz **M**.

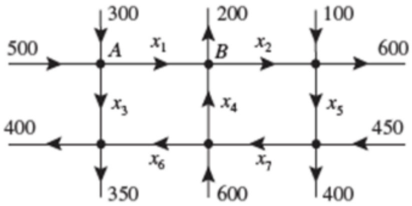
2° Parte: Para mostrarmos que só existe uma única matriz-linha reduzida à forma escada linha equivalente a **A**, observamos primeiramente que duas matrizes-linhas reduzidas à forma escada que são linhas equivalentes só podem ser iguais.
De fato, você pode observar que nenhuma das três operações com linhas pode ser efetuada numa matriz-linha à forma escada, sem que ela perca esta condição.
Agora, suponhamos que por operações com linhas, partimos de uma matriz **M** e podemos chegar a duas matrizes-linha reduzidas à forma escada, **N** e **P**. Teremos então **M ~ N** e **M ~ P**. Como as operações com linhas são reversíveis, isto significará que **N** será linha-equivalente a **P**, e , portanto, da afirmação destacada acima, **N** = **P**.

7. Justifique a veracidade do teorema a seguir.
Teorema: Duas matrizes são linhas-equivalentes se, e somente se ambas podem ser reduzidas à mesma forma escalonada por linhas.

8. Resolva o seguinte Sistema de Equações Lineares, utilizando dois métodos de resolução.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = a \\ 2x_1 + 2x_3 = b \\ 3x_2 + 3x_3 = c \end{cases}$$

9. A figura dada mostra uma rede viária de ruas de mão única com fluxo de tráfego nos sentidos indicados. As taxas de fluxo ao longo das ruas são medidas pelo número médio de veículos por hora.
(c) Monte um sistema linear cuja solução forneça as taxas de fluxo desconhecidas
(d) Resolva o sistema para as taxas de fluxo desconhecidas.



[33] Cada coluna que contém o primeiro elemento não nulo de alguma linha tem todos os seus outros elementos iguais à zero.
[34] Toda Linha nula ocorre abaixo de todas as linhas não nulas (isto e, daquelas que possuem pelo menos um elemento não nulo).
[35] Se as linhas 1...,*r* são linhas não nulas, e se o primeiro elemento não nulo da linha *i ocorre na coluna* k_i, então $k_1 < k_2 < \cdots < k_r$.

Apêndice B

QUESTIONÁRIO

INFORMAÇÕES SOBRE O PARTICIPANTE

Ano de nascimento:________
Ano/semestre de ingresso no curso:________
Já cursou a disciplina de Álgebra Linear I? (   ) Sim. Qual ano? _____ (   ) Estou cursando (   ) Não

É formando em 2018/2? (   ) Sim (   ) Não

Já fez ou está fazendo alguma disciplina optativa na área de Álgebra Linear?
(   ) Sim. Qual?______________________ (   ) Não

Ao realizar as atividades propostas pela pesquisadora encontrou alguma dificuldade? Cite-as
____
____
____

Considera-se apto a ensinar esse conceito na Educação Básica a partir do que aprendeu ao cursar a disciplina de Álgebra Linear I? Justifique.
____
____
____

Ao cursar a disciplina de Álgebra Linear I algum recurso tecnológico foi utilizado durante as aulas?
(   ) Sim. Qual(is)?__________________________________ (   ) Não

Qual(is) recursos tecnológicos (*software,* objeto virtual de aprendizagem,..) você indicaria para ser utilizado no ensino de Álgebra Linear? Por quê?
____
____
____

Cite algumas vantagens de empregar o uso de um *software* de geometria dinâmica nas aulas de Álgebra Linear?
____
____
____

Apêndice C

Quadro 20: Respostas dos questionários da turma de Álgebra Linear I

Acadêmicos ALI	**Questões**				
	Ao realizar as atividades propostas pela pesquisadora encontrou alguma dificuldade? Cite-as	**Considera-se apto a ensinar esse conceito na Educação Básica a partir do que aprendeu ao cursar a disciplina de Álgebra Linear I? Justifique.**	**Ao cursar a disciplina de Álgebra Linear I algum recurso tecnológico foi utilizado durante as aulas?**	**Qual(is) recursos tecnológicos (*software,* objeto virtual de aprendizagem,..) você indicaria para ser utilizado no ensino de Álgebra Linear? Por quê?**	**Cite algumas vantagens de empregar o uso de um *software* de geometria dinâmica nas aulas de Álgebra Linear?**
A	Sim, acredito que faltou um conhecimento teórico, principalmente, para responder as questões com teoremas.	Acredito que não, para isso é preciso dominar o conteúdo e, somenteapós, ser apto à repassá-los.	Sim, slides.	Poderia ser usado "programas" que resolvem o sistema de escalonamento para verificar os metodos em sala de aula , bem como, utilização de calculadoras.	Facilitaria em questões de escalonamento, obtendo o resultado rapidamente e tiraria as duvidas mais facilmente.
B	Sim, falta de conhecimento.	Ainda não, necessito de mais conhecimento.	Não.	Moodle e GeoGebra, moodle para atividade e GeoGebra para a izualização de conceitos.	Vizualização para ver sentido no que estamos fazendo.
C	Sim, muitos eu não fiz ensino médio fiz magistério isso me dificulta muito, não consegui realizar as .atividades	Não, nem um pouco tenho muito a aprender!	Sim, slides.	Acho que talvez o GeoGebra, mas não parei ainda para refletir essa matéria.	Tudo que é visto e observado é melhor compreendido, minha opinião.
D	Sim. Na parte teórica encontro dificuldades, como por exemplo, explicar o que foi proposto.	Não, porque não compreendo o conteúdo, logo não tenho o domínio da matéria, o que não me torna apta a ensinar sobre.	Sim, Datashow.	Software, pois facilita o entendimento.	Fica mais fácl de compreender como se obteve tal resultado, além de tornar à aula mais prática.
E	Sim, pois é a primeira vez que vejo esta matéria, não tive Álgebra Linear no ensino médio.	Ainda não, pois estou recém começando a compreender o conteúdo.	Sim, multimídia.	Não diria um recurso tecnológico, mas acredito que trazer para os alunos aplicações deÁlgebra Linear no cotidiano.	Facilidade de compreensão.
F	Não.	Ainda não, pois preciso revisar alguns conteúdos.	Sim, projetor e calculadora.	GeoGebra é possível colocar as equações e comparar as respostas.	Facilitar o entendimento da matéria, conferir os resultados.
G	Sim, muita dficuldade, não sei dizer especificamente, pois não tenho estudado álgebra Linear, mas creio que com um pouco de estudo as dificuldades	Possivel que sim, mas somente com estudo, coisa que no momento não estou fazendo.	Sim, slides.	Como mostrado pela professora o GeoGebra é um bom software para a visualização.	Melhor visualização da aplixação, não se prendendo somente ao livro.

	dimiuiram. Problema de aplicaçõa dos teoremas nos exercícios.				
H	Não encontrei dificuldades, mas percebi falta de estudo da minha parte.	Não ne considero apta, pois tenho dificuldades de estudo.	Não.	No momento desconheço. Muitos professores não usam tecnologia, somente citam.	Pelo que ouvi, tem vários, mas no momento desconheço.
I	Sim, mas acreedito que as mesmas tinham mais a ver com ser um pouco específica para a matemática.	Não, não me dediquei a disciplina para chegar ao nivel de saber o suficiente para lecionar.	Sim, GeoGebra.	Desconheço de ferramentas digitais para o ensino de Álgebra Linear.	Melhor visualização e mais contato com o conteúdo.
J	Sim, em resolver os problemas propostos por falta de estudo na matéria.	Ao final do curso de Álgebra Linear.	Sim, projetor.	GeoGebra para G. A.	Não sei.
K	Encontrei dificuldades pois ainda não consegui aprender a matéria direito.	Ainda não me considero apta, mas quem sabe até o final da disciplina.	Não.	Não conheço ainda aplicativos que possam ajudar.	Acredito que com o uso de software seja mais fácil de aprender e sai da mesmice que é a sala de aula.
L	A maior dificuldade encontrada na resolução dos exercícios foi a retomada dos conteúdos de geometria analítica, como por exemplo, as equações de retas.	Acredito que no momento de agora não, porém ao final da disciplina sim, visto que ainda caio no esquecimento de alguns conceitos importantes.	Sim, datashow e slides.	Existem sites e aplicativos que nos ajudem na visualização de problemas como o GeoGebra , e também sites que resolvem sistemas lineares passo a passo, acho importante apresentar isso aos alunos, já que é um método de fazer uma aproximação da disciplina com o aluno.	Além de facilitar a visualização e interpretação dos problemas, o uso de softwares de geometria dinâmica irão facilitar o entendimento do aluno.
M	Sim, pois ainda não tinha visto o conteúdo.	Ainda não, pois ainda não estudei o mesmo.	Sim, slides.	Algum software que auxiliasse na resolução, seja mostrando o passo a passo, ou outro meios.	Melhor visualização do conteúdo.
N	Sim, nas propriedades básicas das equações lineares , poi, isso foi ensinado no inicio do curso, e não foi permitido dar uma revisada no conteúdo.	Não, pois ainda não conheço todos os conceitos e propriedades na disciplina em questão.	Sim, GeoGebra, ava.	Ava-ambiente virtual de aprendizagem, pois com ele podemos fazer exercícios e tirar dúvidas.	Maior compreensão das atividades propostas.
O	Muitas. São questões mais aprofundadas ao conteúdo que estudamos em aula, na cadeira. Não estudei o suficiente para entender o conteúdo de forma tão clara e abrangente . As	Jamais. Preciso de , pelo menos, 24 horas de estudo intensivo antes.	Não.	GeoGebra para gráficos muito detalhados r complexos.	Acredito que a utilização de softwares não interfere tanto na qualidade do ensino. Já tive aula com a utilização do GeoGebra , para a plotagem de gráficos , mas estes podem ser

	questões dadas são ótimas para a compreensão do conteúdo como um todo.				esboçado manualmente. Como não vemos muitos gráficos em aula, acredito que o uso dessse software se faz dispensável . Já tivemos aulas de Álgebra Linear com uso de projetor para visualização de um livro de em PDF. Se for um recurso bem utilizado é possivel ver mais materias em mesmo tempo, porem tal velocidade não facilita a compreensão.
P	Construção de sistemas, soluções de problemas, interpretação.	Não, acredito que tenho muito o que aprender, e opções para os alunos seja oficinas ou minicursos sobre esse assunto para sanar dúvidas frequentes em álgebra Linear I.	Sim, slides.	Plataformas digitais de solucionar sistemas fugindo do modelo arcaico/tradicional.	melhoraria o ensino e aprendizagem dessa disciplina.

Fonte: Elaboração da autora em 2019 com base nas respostas dos partcicipantes das pesquisa ao questionário.

Quadro 21: Respostas dos questionários da turma de Álgebra Linear II

Acadêmicos ALII	**Questões**				
	Ao realizar as atividades propostas pela pesquisadora encontrou alguma dificuldade? Cite-as	**Considera-se apto a ensinar esse conceito na Educação Básica a partir do que aprendeu ao cursar a disciplina de Álgebra Linear I? Justifique.**	**Ao cursar a disciplina de Álgebra Linear I algum recurso tecnológico foi utilizado durante as aulas?**	**Qual(is) recursos tecnológicos (*software,* objeto virtual de aprendizagem,..) você indicaria para ser utilizado no ensino de Álgebra Linear? Por quê?**	**Cite algumas vantagens de empregar o uso de um *software* de geometria dinâmica nas aulas de Álgebra Linear?**
Q	Sim, relabrar alguns conceitos referentes à materia. Tive mais facilidade nas questões algébricas.	Apesar de não lembrar alguns pontos da disciplina, acredito que com alguma revisão de conteúdo estaria apta a lecionar a disciplina.	Não.	Indicaria a representação geométrica em tópicos que tal recurs poderia auxiliar na compreensão.	Melhor visualização de conceitos, maipular informações e ver no que resuta determinada alteração na perspectiva geométrica.
R	Apenas não lembrava o que significava matriz linha.	Acredito que sim, pois a maioria dos conceitos eu conheço. E também esaria mais preparado ao preparar as aulas.	Não.	GeoGebra, pois permite realizar interpretações geométricas(intersecção de retascomo resolução de sistemas de duas a três variáveis).	Compreensão do significad geométrico e tempo economizado na construção de gráficos (pois não necessariamente é necessario o uso do GeoGebra para verificar o significado geométrico, mas o software torna tudo mais rápido).
S	Sim. Como o teste foi surpresa, e o curso exige dedicação às discilinas que estão sendo cursadas no semestre, nãofizemos uma revisão do conteúdo para a realização do trabalho.	Sim, pois todo o professor se prepara antes de ministrar o conteúdo aos seus alunos, e certamnete não irei ministrar um conteúdo aos meus aestudantes sem me preparar antes.	Não .	Computador, GeoGebra, Octave, Matlab, entre outros.	Melhor visualização do conteúdo apresentado aos estudantes, torna a aula mais interessante.
T	Encontrei dificuldades em apontar os erros e reescrever a demosntração da qestão 6, já que esqueci os conceitos de matriz linha relacionado com a matriz ampliada de um sistema linear (provável pela falta de uso).	Sim, a disciplina me deu base necessária. Ao longo da preparação da aula iria consultar a bibliografia e, com certeza, poderia organizar um cronograa coeso e rico resgatando o domínio completo do conteúdo através do estudo.	Não.	Utilizar computador para programação, já que as estruturas da Álgebra Linear tem aplicação direta em programação.	Relacionar estruturas algébricas com suas contrapartes geométricas, facilitando o entendimento dos conceitos.
U	Sim. Pelo fato de me preocupar apenas com a aplicação, tive muita dificuldade nas partes teóricas, e pela falta de	Acredito que a nivel de resolução de sistemas, sim, pois senti que me falta apenas prática. Já na parte em que a teoria passa a ser extremamente necessário,	Não.	Eu aprendi o método de eliminação de gauss e LU em uma disciplina de programação, e me parece muito eficiente a lógica da programação para ensino dessa área específica.	Visualização do que se discute é sempre importante. Para mim na maior parte do curso, AL foi muito abstrata, e um software que torna-se as coisas mais "palpáveis"

	prática, os exercícios mais extensos foram bem difíceis, já que não tenho intimidade com os métodos.	certamente não.			seria muito bom.
V	Falta de prática. Esqueci conceitos simples, porém chave. Não aprendi propriamente a aplicação prática (questão 9). Faz mais de um ano que fiz linear I.	No momento não, mas tenho interesse em me aprofundar. Com mais preparo com certeza sim.	Não.	Representações gráficas.	Para muita gente (me ncluo) a apacidade de visualizar geometricamente o que acontece é de muita ajuda. Um exemplo de conceito que ficaria mais fácil é o de transformações lineares.
X	Sim, pelo tempo que fiz a cadeira, acabei esquecendo de alguns conceitos de linear I.	Acho que se for para lecionar esse conteúdo somente tendo como base a cadeira, ficaria um pouco complicado, teria que rever alguns tópicos da álgebra.	Não.	Recomendaria o software GeoGeba, para que os alunos saiam da teoria e tenham uma visão geometrica e dinâmica do conteúdo.	Visão geométrica, facilitar a aprendzagem do conceito, tornar a aula dinâmica.

Fonte: Elaboração da autora em 2019 com base nas respostas dos partcicipantes das pesquisa ao questionário.