

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PELOTAS
Instituto Física e Matemática
Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática

Dissertação



**As Representações Tridimensionais das Superfícies Quádricas na Disciplina
de Cálculo com Realidade Aumentada**

Thaise Thurow Schaun

Pelotas, 2019

Thaise Thurow Schaun

As Representações Tridimensionais das Superfícies Quádricas na Disciplina de Cálculo com Realidade Aumentada

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Pelotas, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

Orientadora: Prof^a Dr^a Rozane da Silveira Alves

Pelotas, 2019

Universidade Federal de Pelotas / Sistema de Bibliotecas
Catalogação na Publicação

S313r Schaun, Thaise Thurow

As representações tridimensionais das superfícies
quádricas na disciplina de cálculo com realidade
aumentada / Thaise Thurow Schaun ; Rozane da Silveira
Alves, orientadora. — Pelotas, 2019.

89 f. : il.

Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós-Graduação
em Educação Matemática, Instituto de Física e Matemática,
Universidade Federal de Pelotas, 2019.

1. Realidade aumentada. 2. Cálculo diferencial e
integral. 3. Superfícies quádricas. 4. Representações
tridimensionais. 5. Pensamento matemático avançado. I.
Alves, Rozane da Silveira, orient. II. Título.

CDD : 510.7

Elaborada por Maria Inez Figueiredo Figas Machado CRB: 10/1612

Thaise Thurow Schaun

**As Representações Tridimensionais das Superfícies Quádricas na Disciplina
de Cálculo com Realidade Aumentada**

**Dissertação aprovada, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em
Educação Matemática, Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática,
Instituto de Física e Matemática, Universidade Federal de Pelotas.**

Data da Defesa: 18 de dezembro de 2019

Banca examinadora:

.....

Prof^aDr^a Rozane da Silveira Alves (Orientadora)

Doutora em Educação pela Universidade Federal de Pelotas

.....

Prof^aDr^a Adriane Borda Almeida da Silva

Doutora em Filosofia e Ciências da Educação pela Universidade de Zaragoza

.....

Prof. Dr. Marilton Sanchotene de Aguiar

Doutor em Computação pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul

.....

Prof. Dr. André Luis Andrejew Ferreira

Doutor em Informática na Educação pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Agradecimentos

Após a trajetória da pesquisa, é imprescindível agradecer:

À minha família, em especial à minha mãe, Iara, por sempre incentivar meus estudos e ao Lucas pelo companheirismo.

À minha orientadora Rozane da Silveira Alves pela atenção e pelas explosões de ideias criativas, indispensáveis para este trabalho.

Às professoras do PPGEMAT, Circe Dynnikov, Daniela Hoffmann e Thaís Grützmann, pelas contribuições ao trabalho a partir das disciplinas.

Aos membros da banca de qualificação, Adriane Borda, André Ferreira e Marilton de Aguiar pelas contribuições diretas ao trabalho.

Aos colegas do PPGEMAT pela convivência e aos colegas de UFPel Philippe Breide e Cauê Duarte pelas longas conversas na secretaria.

Aos estudantes e docentes que participaram como sujeitos da pesquisa.

Às professoras Claudia Turra Magni e Louise Alfonso por compreenderem a importância deste trabalho enquanto coordenadoras, em especial à Louise, cuja relação de amizade ultrapassa as relações de trabalho.

Às colegas de ICH, Fernanda Cunha e Mariuza Pinheiro por assumirem responsabilidades que possibilitaram um período de dedicação exclusiva a este trabalho.

Resumo

SCHAUN, Thaise Thurow. **As Representações Tridimensionais das Superfícies Quádricas na Disciplina de Cálculo com Realidade Aumentada**. Orientadora: Rozane da Silveira Alves. 2019. 89f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Física e Matemática, Universidade Federal de Pelotas, 2019.

A pesquisa investigou como estudantes da Universidade Federal de Pelotas compreendem conceitos de superfícies quádricas a partir do uso da Realidade Aumentada na visualização de objetos nas disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral no Espaço Tridimensional. Utilizou-se as teorias do Pensamento Matemático Avançado de David Tall como embasamento a respeito da importância da visualização na compreensão de conceitos matemáticos, trabalhando mais especificamente Superfícies Quádricas. A metodologia adotada foi de abordagem qualitativa, por meio da Pesquisa-Ação e a coleta de dados foi procedida por meio de observações, questionários e entrevistas. Os resultados foram discutidos à luz da Análise de Conteúdo de Lawrence Bardin, a partir da qual emergiram três categorias: Disciplinas e Currículos; Práticas Docentes nas Disciplinas; Estudantes, Aprendizagem e Contribuições do *Software*. Os resultados mostraram que os estudantes obtiveram melhora ao responder os questionários após a aplicação da atividade com Realidade Aumentada.

Palavras-chave: Realidade Aumentada. Cálculo Diferencial e Integral. Superfícies Quádricas. Representações Tridimensionais. Pensamento Matemático Avançado.

Abstract

SCHAUN, Thaise Thurow. **Three-Dimensional Representations of Quadric Surfaces in Calculus Discipline with Augmented Reality**. Advisor: Rozane da Silveira Alves. 2019. 89f. Master's Thesis (Masters in Mathematics Education) – Instituto de Física e Matemática. Universidade Federal de Pelotas, Pelotas, 2019.

The research investigated how students from the Federal University of Pelotas understand concepts of quadric surfaces from the use of Augmented Reality in the visualization of objects in the disciplines of Differential and Integral Calculus in Three-Dimensional Space. Were used the David Tall's Advanced Mathematical Thinking theories as basis about the importance of visualization in the understanding of mathematical concepts, working specifically quadric surfaces. The methodology adopted was a qualitative approach through Action Research and the data collection was performed through observations, questionnaires and interviews. The results were discussed in the light of Lawrence Bardin's Content Analysis, from which three categories emerged: Disciplines and Curricula; Teaching Practices in Disciplines; Students, Learning, and Software Contributions. The results showed that the students obtained improvement when answering the questionnaires after the application of the Augmented Reality activity.

Keywords: Augmented Reality. Differential and integral calculus. Quadric surfaces. Three-dimensional representations. Advanced Mathematical Thinking.

Lista de Figuras

Figura 1 - Ação publicitária com RA, utilizando a lata como marcador.	24
Figura 2– Exemplo de jogo com RA, utilizando localização GPS.....	25
Figura 3 - Ilustração do ARCore	25
Figura 4 - IKEA Place	26
Figura5 - American Airlines	26
Figura 6 - Complete Anatomy.....	27
Figura 7 - Spacecraft AR	27
Figura 8–Magicplan	28
Figura 9 - Nightenfell AR	28
Figura 10 – Arki	29
Figura 11 – FLARAS	29
Figura 12 – Aumentaty	30
Figura 13 - HP Reveal.....	30
Figura 14 - Elipsoide/Formato da Terra.....	34
Figura 15 - Hiperboloides/Chaminé de usina nuclear.....	35
Figura 16 - Cone elíptico/Ampulheta	36
Figura 17 - Paraboloide elíptico/Antena Parabólica	36
Figura 18 - Paraboloide hiperbólico/Batata Pringles	37
Figura 19 -Marcadores para Superfícies Quádricas.....	41
Figura 20 - questão 1 dos questionários pré e pós atividade	59

Lista de Quadros

Quadro 1 - Resultados de busca por teses e dissertações	16
Quadro 2 - Resultados de busca em periódicos científicos.....	18
Quadro 3 - Resultados de busca em anais de eventos.....	19
Quadro 4 - Correspondência entre cursos e oferta da disciplina de Cálculo.....	39
Quadro 5 - Turmas envolvidas na pesquisa.....	42
Quadro 6 - Turmas observadas.....	43
Quadro 7 - Observações realizadas no primeiro semestre de 2019	43
Quadro 8 - Diversidade de pré-requisitos de Cálculo B	48
Quadro 9 - Disciplinas do CEng que possuem como pré-requisito Cálculo B.....	48
Quadro 10 - Diversidade de requisitos entre os cursos atendidos pelo IFM	49
Quadro 11 - Disciplinas que possuem como pré-requisito Cálculo 3	50
Quadro 12 - Resultados das questões da atividade turma TE2 (CEng).....	55
Quadro 13 - Resultados das questões da atividade da turma TQ2 (IFM)	56

Lista de Tabelas

Tabela 1 – Quantidade de resultados nas buscas	15
Tabela 2 - Respostas da questão 1 antes da atividade e após a atividade.....	59
Tabela 3 - Respostas questão 1 antes da atividade e após a atividade.....	79
Tabela 4 - Respostas questão 2 antes da atividade e após a atividade.....	79
Tabela 5 - Respostas questão 3 antes da atividade e após a atividade.....	79
Tabela 6 - Respostas questão 4 antes da atividade e após a atividade.....	80
Tabela 7 - Respostas questão 5 antes da atividade e após a atividade.....	80
Tabela 8 - Respostas questão 6 questionário 1	80
Tabela 9 - Respostas questão 7 questionário 1	81
Tabela 10 - Respostas questão 8 questionário 1	81
Tabela 11 - Respostas questão 7 questionário 2	81
Tabela 12 - Respostas questão 8 questionário 2	81

Lista de Abreviaturas e Siglas

ALGA	Álgebra Linear e Geometria Analítica
ANPED	Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação
BDTD	Biblioteca Digital de Teses e Dissertações
CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
CEFET-RS	Centro Federal de Educação Tecnológica de Pelotas
CEng	Centro de Engenharias
CIBEM	Congresso Iberoamericano de Educação Matemática
ENEM	Encontro Nacional de Educação Matemática
FLARAS	Flash Augmented Reality Authoring System
GPS	Global Positioning System
IBICT	Instituto Brasileiro de Informação em Ciência e Tecnologia
IFM	Instituto de Física e Matemática
IFSUL	Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Sul-riograndense
PIBID	Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência
QRCode	Quick Response Code
RA	Realidade Aumentada
RCAAP	Repositório Científico de Acesso Aberto de Portugal
SIPEM	Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática
SiSu	Sistema de Seleção Unificada
TD	Tecnologias Digitais
TDIC	Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação
UFJF	Universidade Federal de Juiz de Fora
UFPeI	Universidade Federal de Pelotas

Sumário

1 Introdução	11
1.1 Iniciando a Trajetória.....	12
2 Pesquisas relacionadas.....	15
3 Aporte Teórico: sobre os ombros de gigantes.....	22
3.1 Tecnologias Digitais na Educação Matemática.....	22
3.2 Realidade Aumentada.....	23
3.2.1 Alguns Aplicativos de Realidade Aumentada	25
3.3 Pensamento Matemático Avançado.....	31
3.4 Superfícies Quádricas.....	34
4 Percurso Metodológico.....	38
4.1 Contexto da Pesquisa	38
4.2 A Escolha do <i>Software</i>	40
4.3 O Processo da Pesquisa.....	41
4.3.1 Etapa 1 – observações nas turmas TE1 e TQ1	43
4.3.2 Etapa 2 – Aplicação da atividade na Turma de Química (TQ2)	44
4.3.3 Etapa 2 – Aplicação da atividade na Turma das Engenharias (TE2).....	45
4.4 Coleta de dados	46
5. Dados e Resultados	47
5.1 Disciplinas e Currículos.....	47
5.2 Práticas docentes nas disciplinas	51
5.3 Estudantes, Aprendizados e Contribuições do <i>Software</i>	54
Referências	64
Apêndices.....	68
Anexos	83

1 Introdução

As Tecnologias Digitais (TD) permeiam a realidade atual, nos mais diversos campos e a educação também reflete esta situação. A sala de aula necessita de novas metodologias atreladas às TD, e nesse sentido a utilização da Realidade Aumentada (RA) dentro das aulas de Cálculo apresenta-se como uma estratégia para ampliar a compreensão sobre superfícies quádricas.

Pode-se definir Realidade Aumentada (RA) como a inserção de objetos virtuais no ambiente físico, apresentada em tempo real, com o apoio de algum dispositivo tecnológico, usando a interface do ambiente real, adaptada para visualizar e manipular os objetos reais e virtuais (Kirner e Kirner, 2011).

A Realidade Aumentada sendo a integração entre informações virtuais e o mundo real mostra-se como importante modo de auxílio à compreensão de figuras em três dimensões, que geralmente são representadas de forma planificada em livros ou quadro. Essa planificação torna a compreensão das formas representadas mais complexa.

Como fonte de imaginário a Realidade Aumentada traz à representação gráfica dos sólidos geométricos caráter concreto e contribui para o processo de ensino-aprendizagem, especialmente, como se trata de situação que envolve representações em três dimensões.

Nessa perspectiva é importante observar que além do auxílio para compreensão, o uso do *smartphone* e a Realidade Aumentada propiciam a exposição a outras situações de ensino-aprendizagem.

É necessária a atualização das práticas docentes com a adoção de novas estratégias conforme coloca D'Ambrósio (2009, p. 30) "... a sociedade moderna não será operacional com um instrumental intelectual obsoleto. Necessitamos da matemática de hoje." Os estudantes de hoje já nascem imersos em tecnologia, tornar natural o seu uso em sala de aula é essencial para a Matemática de hoje, inclusive para manter o interesse dos estudantes em aula.

A questão a ser respondida com a presente pesquisa é **Como a Realidade Aumentada pode contribuir para o estudo de superfícies quádricas?**

Partindo da questão norteadora do trabalho, apresenta-se como objetivo desta pesquisa:

- Investigar a utilização da Realidade Aumentada para compreensão das representações gráficas em três dimensões de superfícies quádricas.

Para tanto, são objetivos específicos:

- Identificar práticas docentes concernentes ao cálculo de superfícies;
- Explorar *softwares* de Realidade Aumentada e selecionar o mais pertinente.

1.1 Iniciando a Trajetória

Desde o Ensino Fundamental as tecnologias despertaram meu interesse, embora minha paixão sempre tenha sido Matemática. Na terceira série do ensino fundamental eu fazia os cálculos no meu caderno mais rápido que a própria estagiária que me ensinava a operação de divisão.

Além de cálculos, eu também fazia alguns experimentos científicos com equipamentos eletrônicos. Aos oito anos resolvi ligar um *plug* na tomada e para isso precisei consertar um fio desencapado o que acabou ocasionando um curto circuito e uma chuva de faíscas que achei fascinante...

Da quinta à oitava série tive a mesma professora de Matemática, e ela tinha o hábito de trabalhar a Álgebra, mas sempre reservando um tempo para Geometria. Assim, eu conseguia relacionar essas duas áreas e percebia a presença da Matemática no meu cotidiano, pois com a Geometria eu conseguia visualizar o que os cálculos representavam.

Em 2002, final da oitava série, decidi que faria em paralelo o Ensino Médio e o curso Técnico em Sistemas de Telecomunicações no Centro Federal de Educação Tecnológica de Pelotas (CEFET-RS). Foi nessa ocasião que ganhei meu primeiro computador e a partir daí me tornei uma verdadeira *expert* (ou quase) nesta área.

Quando chegou o vestibular, buscando a área de Ciências Exatas, optei pela Licenciatura em Matemática, tendo ingressado neste curso em 2006 na Universidade Federal de Pelotas (UFPeI).

Sempre tive facilidade em aprender e tinha um ótimo rendimento em todas as provas, mesmo sem estudar muito. Porém, ao ingressar na graduação, principalmente no segundo semestre cursando Cálculo, me senti despreparada para enfrentar as exigências formais de um curso de Matemática. Foi um choque! Levei algum tempo para me conscientizar da necessidade de estabelecer uma rotina diária

de estudos para dar conta das solicitações dos professores e disciplinas. Porém, vencida esta etapa não tive mais problemas.

Durante o curso de Licenciatura, em disciplinas como Programação de *Softwares* Matemáticos e Tecnologias Avançadas para o Ensino da Matemática tive certeza de que as Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação (TDIC) estariam imbricadas em minha prática docente, dada a fascinação que eu tinha por elas.

Já quase no final do curso participei do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID), tendo trabalhado na Escola Técnica Estadual Professora Sylvia Mello. Lá, tive a oportunidade de instalar o *software* GeoGebra nos computadores e ensinar os alunos do ensino médio a trabalhar com este *software*. Nesta atividade, além de ensinar eu desempenhava praticamente o papel de um técnico no laboratório.

Logo após minha formatura, iniciei minha trajetória como professora do Ensino Fundamental da rede municipal de São Lourenço do Sul em um contrato temporário de dois anos. Paralelamente às atividades de docente, viajava semanalmente a Pelotas para cursar a Especialização em Ciências e Tecnologias na Educação no Instituto Federal Sul-Rio-grandense (IFSul). Para a monografia desse curso pesquisei a utilização do *software Algebra Balance Scales* para o ensino de equações para o sétimo ano do Ensino Fundamental. Ao mesmo tempo em minhas práticas em sala de aula buscava sempre atividades que mesclassem a Matemática com o uso da Informática.

Após a experiência docente e ter concluído o curso de especialização, fui aprovada em 2012 em concurso da UFPel, tendo iniciada a carreira como servidora técnico-administrativa em educação. Decidi no mesmo ano ingressar no curso de Ciência da Computação da UFPel, como portadora de diploma. Cursava duas disciplinas por semestre, no intuito de familiarizar-me com a área visando um posterior ingresso no mestrado em Computação.

Em 2016, com a abertura do curso de mestrado em Educação Matemática na UFPel, procurei conhecer a Linha de Pesquisa de Tecnologias e Educação Matemática cursando uma disciplina como aluna especial. Ali encontrei a combinação das minhas preferências Matemática e Tecnologias, e decidi participar no ano seguinte da seleção para aluno regular. Tendo sido aprovada, desisti do

curso de graduação, e iniciei o mestrado em Educação Matemática trazendo na bagagem uma boa experiência com as disciplinas que cursei na Computação.

2 Pesquisas relacionadas

Neste capítulo são apresentados trabalhos já desenvolvidos relacionados a esta dissertação, para tanto foi realizada busca na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD) do Instituto Brasileiro de Informação em Ciência e Tecnologia (IBICT), nos repositórios de duas revistas de importância para Educação Matemática, Bolema e Zetetiké. Também foram pesquisados os anais dos eventos Reunião da Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação (ANPED), Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM), Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (SIPEM), Congresso Iberoamericano de Educação Matemática (CIBEM). Para a seleção dos trabalhos significativos para esta pesquisa, foram lidos o título e o resumo de cada trabalho.

Como a busca pelos termos “Realidade Aumentada” e “Ensino de Cálculo” não obteve resultados, a busca foi realizada pelos termos “Tecnologias” e “Ensino de Cálculo” e também por “Realidade Aumentada” e “Educação”. Considerando os resultados de pesquisa para dissertações e teses publicadas nos últimos cinco anos, de 2013 a 2018, foram encontrados sete teses e 31 dissertações, sendo que apenas seis foram apreciadas como relevantes. A Tabela 1 apresenta os trabalhos encontrados, excluindo aquelas fontes de pesquisa que não retornaram resultados.

Tabela 1 – Quantidade de resultados nas buscas

Local de busca	Palavras-chave	Encontrados	Selecionados
BDTD	Tecnologias e “Ensino de cálculo”	19	3
BDTD	“Realidade Aumentada” e Educação	19	3
Bolema	Tecnologias e “Ensino de cálculo”	4	0
ENEM	Tecnologias e “Ensino de cálculo”	5	1
CIBEM	Tecnologias e “Ensino de cálculo”	1	1
Google	“Realidade Aumentada” e “Ensino de Cálculo”	2	2

Fonte: dados da pesquisadora, 2018

O Quadro 1 apresenta as teses e dissertações selecionadas na pesquisa na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações.

Quadro 1 - Resultados de busca por teses e dissertações

Título	Autor - Orientador	Programa - IES	Ano	D/T	Palavras - chave
Material para o ensino do Cálculo Diferencial e Integral: referências de Tall, Gueudet e Trouche	Marcio Vieira de Almeida; Sonia Barbosa Camargo Iglori	Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática - PUC/SP	2017	T	Tecnologias e "Ensino de cálculo"
Construção e interpretação de Gráficos com o uso de <i>softwares</i> no ensino de cálculo: trabalhando com imagens conceituais relacionadas a derivadas de funções reais	Márcio Augusto Gama Ricaldoni; Frederico da Silva Reis	Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática-UFOP	2014	D	Tecnologias e "Ensino de cálculo"
Ensino De Derivadas Em Cálculo I: Aprendizagem A Partir Da Visualização Com O Uso Do Geogebra	José Cirqueira Martins Júnior; Frederico da Silva Reis	Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática - UFOP	2015	D	Tecnologias e "Ensino de cálculo"
Possibilidades do Uso da Realidade Aumentada na Visualização de Elementos Matemáticos	Neades Afonso Gomes; Esdras Teixeira Costa	Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - UFG	2015	D	"Realidade Aumentada" e Educação
O uso da realidade aumentada para o ensino de Física	Marcelo Clayton de Jesus e Sousa; Ewout ter Haar	Programa de Pós-Graduação Interunidades em Ensino de Ciências - USP	2015	D	"Realidade Aumentada" e Educação
Utilização de dispositivos móveis e recursos de Realidade Aumentada nas aulas de Matemática para elucidação dos Sólidos de Platão	Fernando Oliveira da Silva; Ronaldo Celso Messias Correia	Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - UNESP	2017	D	"Realidade Aumentada" e Educação

Fonte: dados da pesquisadora, 2018

A seguir apresenta-se os aspectos mais relevantes de cada um dos trabalhos selecionados.

Almeida (2017) em sua tese apresenta um material para que sejam trabalhados conceitos de Cálculo Diferencial e Integral com base em teóricos Tall, Gueudet e Trouche. Partindo desses referenciais teóricos foram elaboradas atividades para o ensino de Cálculo. Ao fim, o autor considera válida a incorporação

do constructo teórico para o desenvolvimento material para trabalhar conceitos de Cálculo.

Ricaldoni (2014) em sua dissertação discute as contribuições da utilização do *software* GeoGebra para a visualização de gráficos, assim como as explorações feitas pelos estudantes a partir da manipulação do *software*. Traz a teoria de Tall para tratar de imagem conceitual e definição conceitual. O autor aponta que a utilização do *software* contribuiu para a construção de imagens conceituais relacionadas ao Cálculo.

Martins (2015) em sua dissertação discorre sobre as contribuições do *software* GeoGebra para conteúdos de Cálculo I a partir de atividades exploratórias. A pesquisa foi desenvolvida com professores do Ensino Superior, que apontaram ressignificação de conceitos e um maior equilíbrio entre processos visuais e processos algébricos nas situações de ensino e aprendizagem. O autor ressalta que a utilização do *software* é importante para diversificar as práticas de ensino e aprendizagem, é necessário sempre rever as estratégias de ensino em relação aos aspectos tecnológicos, numéricos, geométricos, visuais e analíticos dos conceitos matemáticos.

Como contribuição a esta dissertação, os trabalhos de Almeida (2017), Ricaldoni (2014) e Martins (2015) trazem os conceitos teóricos de David Tall para embasar estratégias para o ensino de Cálculo e o uso de tecnologias aplicadas para aprendizagem matemática, além da importância da visualização para a compreensão de conceitos matemáticos e da diversificação de práticas em sala de aula.

Gomes (2015) em sua dissertação traz na perspectiva do avanço tecnológico as implicações deste na educação, vinculando ao avanço a possibilidade de utilização da Realidade Aumentada (RA) no ensino de Matemática. As contribuições da RA à visualização de formas geométricas em três dimensões facilitam a assimilação a partir da interação. O autor afirma que a aplicação da RA em sala de aula pode contribuir positivamente para tornar as aulas mais atrativas e atuais.

Sousa (2015) em sua dissertação trabalha a Realidade Aumentada no ensino de Física, posta a complexidade de abstração necessária para a compreensão de modelos físicos. É investigado se a sobreposição de elementos virtuais e reais em modelos de três dimensões traz aos estudantes melhor compreensão dos conceitos. O autor considera que existe uma barreira entre os professores e o uso da

tecnologia e ressalta a necessidade de formação continuada e atualização de práticas docentes.

Silva (2017) analisou em sua dissertação a disposição de docentes em utilizarem tecnologias em sala de aula e a utilização de Realidade Aumentada por docentes e discentes em conteúdos de Geometria, considerando os resultados positivos. O autor coloca que o professor ao inserir as tecnologias em sua prática, cria um contexto convidativo para a aprendizagem e proporciona interação, ponto forte da Realidade Aumentada.

Gomes (2015), Sousa (2015) e Silva (2017) contribuem com essa dissertação com a perspectiva da utilização de Realidade Aumentada para melhor compreensão de conceitos a partir da visualização de elementos em três dimensões.

Considerando-se periódicos científicos, foi feita busca nas revistas Zetetiké e Bolema, na pesquisa pelos termos “Tecnologias” e “Ensino de Cálculo” nas revistas indicadas foram obtidos quatro resultados, nenhum relevante.

A pesquisa foi estendida ao Google com os termos “Realidade Aumentada” e “Ensino de Cálculo”, que indicou um artigo em periódico, cujo detalhamento é indicado no Quadro2.

Quadro 2 - Resultados de busca em periódicos científicos

Revista	Título	Autor(es)	Ano/Volume/nº
Revista do CCEI	GráficosRA: Um Aplicativo baseado em Realidade Aumentada para Ensino de Cálculo	Ahmad Hassan Mousa, Leandro Hayato Ymai, Sandro da Silva Camargo	2017, v.22, n.37

Fonte: dados da pesquisadora, 2018

Mousa, Ymai e Camargo (2017) relatam a experiência de testes de *software* na utilização de Realidade Aumentada para representação de gráficos tridimensionais. Foi desenvolvido um aplicativo chamado GráficosRA, para o Sistema Operacional Android, que exhibe, a partir de marcadores, as funções matemáticas modeladas. Os resultados apontam bom funcionamento do aplicativo e indicam a posterior utilização do aplicativo em turma da disciplina de Cálculo III.

Considerando-se eventos científicos, a busca efetuada nos anais dos eventos Reunião da Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação (ANPED), Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM), Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (SIPEM), Congresso

Iberoamericano de Educação Matemática (CIBEM), retornou pelos termos Tecnologias e “Ensino de Cálculo” nos eventos indicados oito resultados, dois relevantes. A pesquisa foi estendida ao Google com os termos “Realidade Aumentada” e “Ensino de Cálculo” e houve um resultado relevante.

O Quadro3 apresenta os resultados desta busca.

Quadro 3 - Resultados de busca em anais de eventos

Edição/Evento	Título	Autor(es)	Ano
VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA	Cálculo Diferencial E Integral Asistido Com Ipad Una Experiencia Con Tecnología Móvil En El Aula	Nuria Vanessa Figueroa Flores (Espanha)	2017
XII Encontro Nacional de Educação Matemática	A Utilização Do Smartphone No Ensino De Função: A Visão Dos Alunos	Laís Aparecida Romanello, Marcus Vinícius Maltempi	2016
XXVIII Simpósio Brasileiro de Informática na Educação	Uma Ferramenta de Apoio ao Ensino de Cálculo com Realidade Aumentada	Lidiane T. Pereira, Douglas C. B. Oliveira, Igor F. Couto, Alessandreia M. de Oliveira, Rodrigo L. S. Silva	2017

Fonte: dados da pesquisadora, 2018

Flores (2017) traz em seu artigo a experiência de utilização de *tablets* em sala de aula. Partindo do pressuposto que os dispositivos móveis estão incorporados ao cotidiano dos estudantes, apresenta sua utilização em sala de aula como forma de propiciar a aquisição de competências digitais de ensino e aprendizagem.

Romanello e Maltempi (2016) investigam o uso do *smartphone* para o ensino de funções. Foram abordadas as particularidades do uso dos dispositivos móveis para o ensino e feitos diversos registros, trazendo as perspectivas dos estudantes a respeito da referida prática. Consideram que os *smartphones* são recursos importantes para um ambiente de aprendizagem diferenciado.

Pereira et al (2017) apresentam uma ferramenta de apoio ao ensino de Cálculo baseada em Realidade Aumentada, a partir de um aplicativo para o Sistema Operacional Android. E apontam técnicas para sua utilização na visualização de superfícies quádras. O aplicativo teve grande aceitação entre os estudantes que participaram do experimento e equipe pretende expandir a utilização de RA para outras áreas de graduação.

Após, foi feita busca por resultados internacionais no Portal de Periódicos da CAPES, com os termos “Augmented Reality” e “Calculus”, obtendo 131 resultados e apenas três relevantes, e também, busca no Repositório Científico de Acesso Aberto de Portugal (RCAAP) com os termos “Realidade Aumentada” e “Cálculo”, obtendo 40 resultados e apenas um relevante, todos indicados no Quadro 4.

Quadro 4 – Resultados Internacionais

Título	Autor/es	Tipo	Repositório	Ano
Visualizando problemas de la derivada con aplicaciones en dispositivos móviles	Elena F. R. Ledesma, Juan J. G. García, Laura I. G. Jiménez	Artigo em Periódico	CAPES	2018
Augmented reality and solids of revolution	Patricia Salinas, Eduardo González-Mendivil	Artigo em Periódico	CAPES	2017
Incidencia de la realidad aumentada sobre el estilo cognitivo: caso para el estudio de las matemáticas	Rubén Darío Buitrago-Pulido	Artigo em Periódico	CAPES	2015
Realidade Aumentada no ensino da Matemática: um caso de estudo	Marta Daniela Mendes Noval	Dissertação de Mestrado	RCAAP	2013

Fonte: dados da pesquisadora, 2019

Ruiz Ledesma, Gutierrez García e Garay Jiménez (2018) ao investigar problemas com derivadas para estudantes de Cálculo para Engenharias destacam a melhora de desempenho significativa nos resultados finais e especialmente em problemas conceituais e ressaltam o impacto da utilização de tecnologias educativas. Os estudantes foram divididos em dois grupos, um grupo de controle, que trabalhou com imagens estáticas e um grupo de estudo, que trabalhou com atividades interativas através da Realidade Aumentada. Os autores destacam como marco teórico as teorias de David Tall e Jean Piaget.

Salinas e González-Mendivil (2017) ao trabalhar sólidos de revolução consideram que cenas em Realidade Aumentada podem promover habilidades por causa das propriedades da RA. Através da tecnologia de Realidade Aumentada é possível criar experiências de aprendizagem imersiva e a RA se coloca como uma

ferramenta promissora para a aprendizagem já que pode ser executada via dispositivos móveis. Os autores consideram que não é suficiente repetir o currículo existente com tecnologia, mas sim, é necessário um novo currículo auxiliado pelas tecnologias.

Buitrago-Pulido (2015) fala sobre a experiência com Realidade Aumentada em um ambiente virtual de aprendizagem trabalhando Cálculo Vetorial para estudantes de Engenharia Industrial e seus resultados indicam que o uso de Realidade Aumentada permite obter melhores resultados de aprendizagem, de forma efetiva e significativa, mas não se pode afirmar que a tecnologia por si só leve a estes melhores resultados.

Noval (2013) utiliza a aplicação de Realidade Aumentada *EasyMath*, desenvolvida pela pesquisadora, especificamente para a investigação, para trabalhar sólidos geométricos com 100 estudantes do 7º ano de duas escolas de Vila Real, Portugal, e os resultados indicam progresso na aprendizagem dos jovens que utilizaram a aplicação desenvolvida em relação àqueles que trabalharam os conteúdos somente de forma expositiva, com o método tradicional, indicam também, que uma das áreas da Matemática mais problemáticas em relação ao ensino é a Geometria.

Assim, evidencia-se que, apesar de existirem cada vez mais textos indicando o uso de RA, poucas ações foram feitas no mesmo sentido desta pesquisa, com uso da RA para visualização de conteúdos de Cálculo.

3 Aporte Teórico: sobre os ombros de gigantes

Neste capítulo serão discutidos diferentes referenciais teóricos que embasam esta dissertação, tais como, o uso de Tecnologias Digitais na Educação Matemática, fundamentos de Realidade Aumentada, Pensamento Matemático Avançado e uma breve explanação sobre Superfícies Quádricas.

3.1 Tecnologias Digitais na Educação Matemática

As Tecnologias Digitais (TD) tornaram-se parte integrante do cotidiano dos estudantes, atualmente, utiliza-se dispositivos móveis para as mais diversas tarefas, desde operações bancárias a controle de calorias consumidas e, até mesmo, ligações telefônicas. Utilizar *smartphones* com finalidade educacional é uma realidade para muitos estudantes e o uso de TD em sala de aula necessita ser difundido.

Considerando a utilização de Tecnologias Digitais na Educação Matemática, conforme Borba, Silva e Gadani (2014), podemos atrelar à prática com Realidade Aumentada à quarta fase das Tecnologias Digitais na Educação Matemática, marcada por, entre outras características, Tecnologias Móveis e Novos Designs e Interatividade, com a utilização de aplicativos, interações através do toque na tela, câmeras, etc.

A massiva popularização dos *smartphones* não pode ser ignorada em sala de aula. A presença de tecnologias nas práticas do cotidiano deve extrapolar seu uso mecânico, como coloca Lévy (1993):

Os produtos da técnica moderna, longe de adequarem-se apenas a um uso instrumental e calculável, são importantes fontes de imaginário, entidades que participam plenamente da instituição de mundos percebidos. (LÉVY, 1993, p.9)

Nessa perspectiva, é importante fazer uso da Realidade Aumentada como importante fonte de imaginário, especialmente, se tratando de situações que envolvam representações em três dimensões.

Ainda segundo Borba, Silva e Gadani (2014), com as Tecnologias Digitais as simulações expandiram seus limites devido ao caráter visual e recursos de experimentação, construções matemáticas ganharam dinamicidade.

Com essa dinamicidade e experimentação a Realidade Aumentada pode proporcionar uma melhor compreensão dos objetos representados pela revolução de uma curva em torno de um determinado eixo.

Considerando a quarta fase das Tecnologias Digitais na Educação Matemática em relação às Tecnologias Móveis, Borba, Silva e Gadanidis (2014), colocam que:

Os usos dessas tecnologias já moldam a sala de aula, criando novas dinâmicas, e transformam a inteligência coletiva, as relações de poder (de Matemática) e as normas a serem seguidas nessa mesma sala de aula. (BORBA, SILVA E GADANIDIS, 2014, p.77)

Assim, temos evidenciada a urgência da atualização das práticas docentes em relação a uso de *smartphones*, já que estes se tornaram algo corriqueiro no cotidiano de estudantes e docentes, frente às potencialidades de uso para proporcionar novas situações de ensino-aprendizagem e novas interpretações aos mais diversos conceitos.

3.2 Realidade Aumentada

Com base nas considerações de Kirner e Siscoutto (2007) temos que a Realidade Aumentada (RA) é uma nova geração de interface com o usuário, que facilita e potencializa as interações com o usuário.

RA possui diversas definições, e neste trabalho será considerada a apresentada por Milgram (1994) que diz que Realidade Aumentada é a mistura de mundos reais e virtuais em algum ponto da realidade/virtualidade contínua, que conecta ambientes completamente reais a ambientes completamente virtuais.

Essa mistura se dá a partir de marcadores, que são imagens que ao serem identificadas pelo dispositivo leitor projetam objetos virtuais na tela, ou por localização GPS, ou seja, ao atingir determinada coordenada geográfica, é projetado um objeto virtual na tela.

Para uma melhor compreensão da Realidade Aumentada, que é um caso particular de Realidade Virtual, será apresentada sua evolução histórica.

As bases da realidade aumentada surgiram na década de 1960, com o pesquisador Ivan Sutherland, que escreveu um artigo, vislumbrando a evolução da realidade virtual e seus reflexos no mundo real (Ribeiro e Zorzal, 2011).

Na década de 1980 surgiu o primeiro projeto de realidade aumentada, desenvolvido pela Força Aérea Americana, consistindo em um simulador de *cockpit* de avião, com visão ótica direta, misturando elementos virtuais com o ambiente físico do usuário (Ribeiro e Zorzal, 2011).

Em 1990, o Professor Thomas Caudell, da Universidade do Novo México, em uma visita à empresa Boeing, cunhou o termo “Realidade Aumentada” (Ribeiro e Zorzal, 2011).

A partir de 1995 intensificam-se eventos e publicações científicas abordando Realidade Aumentada, inclusive no Brasil.

Pierre Lévy em *Cibercultura*, de 1999, menciona “Realidade Ampliada” como sendo o ambiente físico rodeado de sensores, câmeras, projetores, entre outros interconectados a nosso serviço.

Com esse apanhado histórico é possível afirmar que a Realidade Aumentada não é uma ideia nova, mas que necessitou dos avanços tecnológicos existentes atualmente para se fixar e ser cada vez mais popularizada.

O seu uso tem sido comum em publicidade (Figura 1) e jogos (Figura 2), o que a torna parte da vida diária das pessoas, assim trazê-la à sala de aula é uma consequência dessa popularização.



Figura 1 - Ação publicitária com RA, utilizando a lata como marcador.
Fonte: dados da pesquisadora, 2019



Figura 2– Exemplo de jogo com RA, utilizando localização GPS
Fonte: www.imore.com, 2019

3.2.1 Alguns Aplicativos de Realidade Aumentada

Google e Apple tem suas plataformas de desenvolvimento de Realidade Aumentada, ARCore da Google (Figura 3) e ARKit da Apple, possibilitam o desenvolvimento de aplicativos que envolvam a RA para os sistemas operacionais de *smartphones* mais usuais, Android e IOS.



Figura 3 - Ilustração do ARCore
Fonte: Divulgação Google/Android, 2019

Com uma gama enorme de aplicações podemos destacar como aplicativos do ARKit exemplos como:

IKEA Place (Figura 4) que possibilita visualizar móveis em casa antes de adquirí-los.



Figura 4 - IKEA Place
Fonte: Apple, 2019

American Airlines (Figura 5) que aponta as direções do setor de embarque nos aeroportos.



Figura5 - American Airlines
Fonte: Apple, 2019

Em questões educacionais há o Complete Anatomy (Figura 6) que possibilita a visualização de detalhes internos do corpo humano.

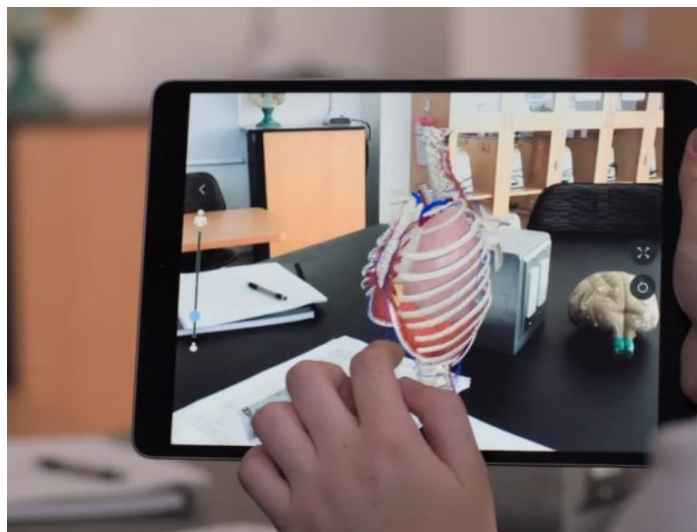


Figura 6 - Complete Anatomy
Fonte: Apple, 2019

Já aplicativos que utilizam o ARCore temos:

Spacecraft AR (Figura 7) que possibilita visualizar as espaçonaves como Curiosity ou Voyager, por exemplo.

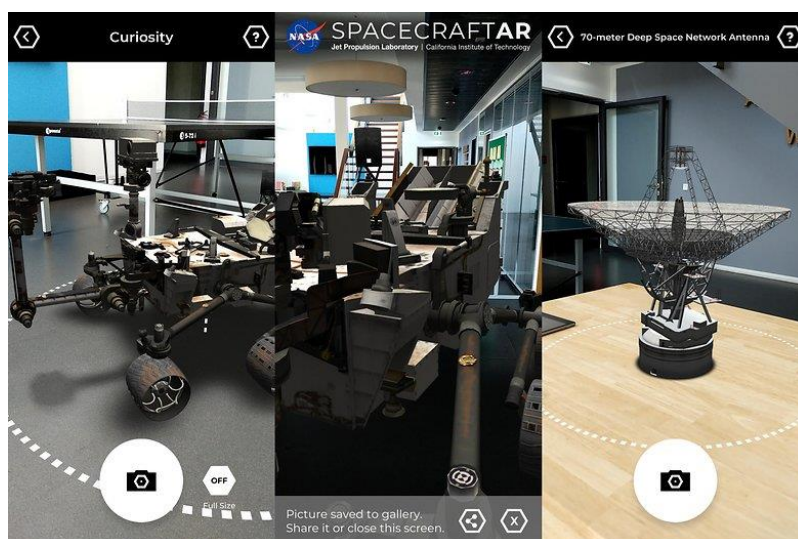


Figura 7 - Spacecraft AR
Fonte: AndroidPIT, 2019

O Magicplan (Figura 8) que auxilia a elaboração de plantas baixas.

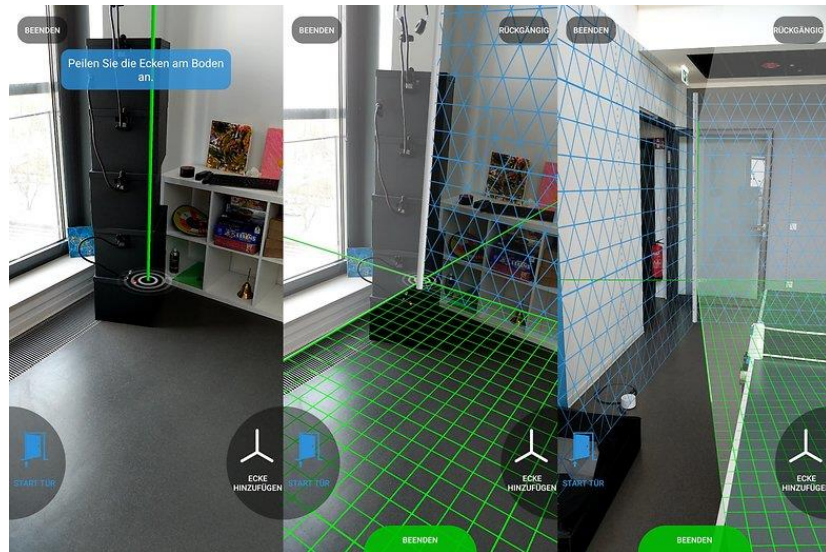


Figura 8–Magicplan
 Fonte: AndroidPIT, 2019

Como opção de lazer o Nightenfell AR (Figura 9) que pode ser jogado em grupo.



Figura 9 - Nightenfell AR
 Fonte: AndroidPIT, 2019

Como um exemplo de aplicação de RA na Arquitetura temos o ARki (Figura 10), que permite experiências instantâneas para visualizar design.

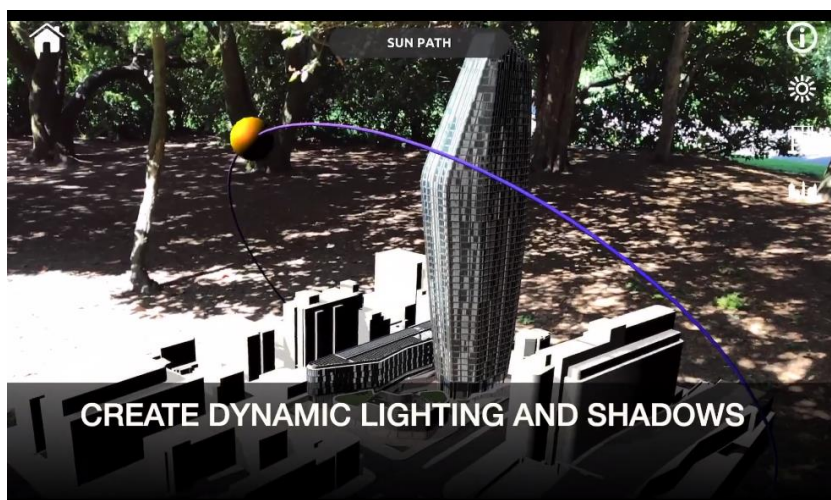


Figura 10 – Arki

Fonte: <https://www.darfdesign.com/arki.html>, 2019

Se considerarmos ferramentas autorais de aplicações em Realidade Aumentada, temos como exemplos usuais o Flash Augmented Reality Authoring System (FLARAS), o Aumentaty e o HP Reveal (Figuras 11, 12 e 13).

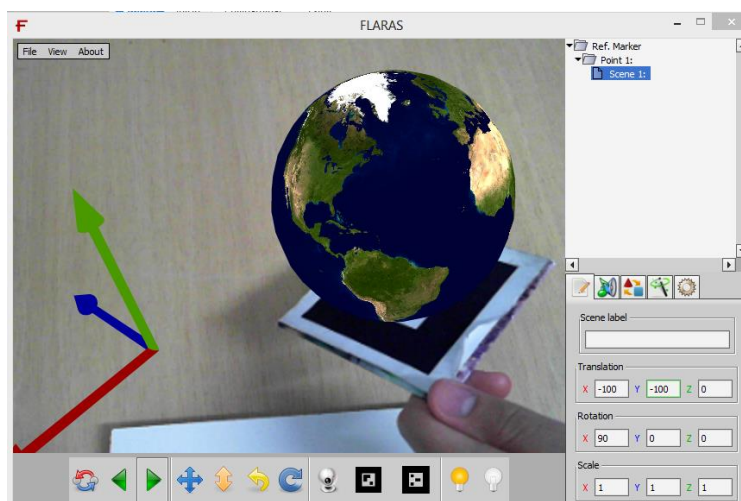


Figura 11 – FLARAS

Fonte: <http://ckirner.com/flaras2/>, 2019



Figura 12 – Aumentaty
 Fonte: <http://www.aumentaty.com>, 2019



Figura 13 - HP Reveal
 Fonte: www.hpreveal.com, 2019

Essas ferramentas permitem a criação de aplicações em Realidade Aumentada a partir de objetos 3D que podem ser gerados em *softwares* de desenho ou obtidos em repositórios on-line.

Com os exemplos apresentados, fica evidente a extensa gama de possibilidades de utilização da Realidade Aumentada e, neste trabalho, é destacada sua importância para visualização de superfícies quádricas.

3.3 Pensamento Matemático Avançado

É relevante destacar a importância da visualização para as representações em três dimensões, sem uma compreensão visual, a compreensão dos conceitos pode ser prejudicada em alguns casos.

David Tall (1991) em *Pensamento Matemático Avançado* detalha a importância da visualização para o entendimento de conceitos matemáticos, ele coloca que a visualização, particularmente através do computador, é um exemplo de aproximação cognitiva mais apropriada, para dar ao estudante uma visão geral dos conceitos e permitir métodos mais versáteis de processar a informação.

Em trabalho anterior, Tall e Vinner (1981) definem *imagem conceitual* e *definição conceitual* trazendo uma diferenciação entre esses termos de grande importância para compreensão de processos cognitivos e para a valorização de diferentes representações para o entendimento de determinados conceitos.

Para os autores, a Imagem conceitual

[...] é a estrutura cognitiva total que está associada ao conceito, a qual inclui todas as figuras mentais, processos e propriedades associadas. Ela é construída ao longo dos anos através de todo tipo de experiência, mudando assim que o indivíduo encontra novos estímulos e amadurece.¹ (TALL e VINNER, 1981, p.152)

Enquanto que a Definição conceitual

[...] é uma forma como as palavras são usadas para especificar aquele conceito. Ela pode ser aprendida por um processo mecânico ou aprendida mais significativamente e estar relacionada em um maior ou menor grau ao conceito por inteiro. Também pode ser uma reconstrução pessoal do estudante. (TALL e VINNER, 1981, p.152)

Partindo desses conceitos, é importante afirmar que o presente trabalho se preocupa em fomentar a construção da *imagem conceitual* relativa às superfícies quádricas em Cálculo de Múltiplas Variáveis. Relacionando a representação imagética projetada nas telas dos *smartphones* aos conceitos aprendidos em aula.

Esse tipo de representação, mostra os gráficos das superfícies quádricas de forma dinâmica, diferente da trabalhada usualmente, através de representações planejadas estáticas. Essas representações planejadas, muitas vezes contribuem para uma *imagem conceitual* equivocada, já que as superfícies não existem em duas, mas sim, três dimensões.

¹ As citações trazidas nesta seção foram traduzidas da língua inglesa pela autora.

É importante salientar que o objetivo da representação simbólica, seja escrita ou falada é, conforme coloca Dreyfus (1991), facilitar a comunicação sobre o conceito. A partir da representação se pretende uma simplificação na abstração do conceito. Destaca-se a facilitação da abstração obtida a partir da representação visual.

Dreyfus (1991) coloca ainda que:

Há uma dificuldade inerente na abstração: como podemos gerar estruturas mentais, que são frequentemente ligadas a imagens visuais, se elas devem representar relações que são separadas dos objetos concretos aos quais são ligadas originalmente? ... Se imagens visuais são encontradas, elas provavelmente serão de grande ajuda a estudantes empenhados na abstração. (DREYFUS, 1991, p. 38)

Ampliando questões do Pensamento Matemático Avançado temos o papel das definições e sua importância na formação dos conceitos. Shlomo Vinner (1991, p. 79) afirma que “Definições ajudam a formar a imagem conceitual, mas no momento em que a imagem está formada a definição se torna dispensável.” Assim, um certo excesso de importância dado às definições pode muitas vezes confundir o estudante e dificultar o trato de conceitos.

Nesse sentido Vinner (1991) considera que:

[...] conceitos matemáticos deveriam ser adquiridos em um modo de formação de conceitos cotidiano e não em um modo técnico. A pessoa deveria começar com vários exemplos e contraexemplos através dos quais a imagem conceitual é formada. (VINNER, 1991, p. 80)

É preciso considerar a construção de conceitos matemáticos através de exemplos concretos, sem abandonar totalmente o formalismo. As notações matemáticas trazem em si a complexidade inerente a este tipo de representação, que pode ser subdividida em representações de menor complexidade, conforme ilustram Harel e Kaput (1991):

Utilizando notações matemáticas, ideias complexas ou processos mentais podem ser divididos em pedaços e, portanto, representados por notações físicas, que por sua vez, podem ser manipuladas ou refletidas em novas ideias. (HAREL e KAPUT, 1991, p.88)

O importante é que ideias complexas possam ser compreendidas sendo por meio de exemplos ou pela fragmentação em ideias menos complexas. A questão fundamental é que o estudante supere a dificuldade do conceito.

Dubinsky ressalta que a dificuldade é mais evidente quando a representação é mais complexa:

Parece que a matemática se torna difícil para estudantes quando diz respeito a tópicos para os quais não existe uma representação simples, física ou visual. Dessa forma, computadores podem ajudar a prover representações concretas para muitos objetos e processos matemáticos importantes. (DUBINSKY, 1991, p.104)

Neste momento é preciso levar em conta a época em que vivemos e considerar que não só computadores provêm representações concretas, mas também outros tipos de recursos computacionais, como *smartphones*. Assim, quando os autores citados colocam os computadores como protagonistas do Pensamento Matemático Avançado, podemos estender esta colocação a recursos computacionais diversos.

Dubinsky e Tall (1991) ressaltam a importância dos recursos computacionais para representações matemáticas:

[...] uma forma de estimular a construção de conceitos é através de um computador ricamente dotado de *software* que dá corpo a poderosas ideias matemáticas para que o estudante possa manipulá-las e refletir a respeito. (DUBINSKY e TALL, 1991, p. 234)

O uso de recursos computacionais suscita novas reflexões sobre os temas estudados, possibilita a “concretização” de conceitos abstratos, ainda, como destacam Dubinsky e Tall (1991):

Quando uma ideia abstrata é implementada ou representada no computador, então ela é concreta na mente, pelo menos em questão de existir. Não só o computador pode ser usado para desempenhar os processos representados pela ideia, mas ele mesmo pode ser manipulado. (DUBINSKY e TALL, 1991, p. 235)

Entre os importantes aspectos do Pensamento Matemático Avançado, o de maior relevância para este trabalho diz respeito às dificuldades associadas à visualização matemática. Eisenberg (1991) ressalta que um certo tipo de matemática elementar não pode ser feito sem uma boa quantidade de habilidades de visualização.

Como coloca Eisenberg:

Autores como Tall, Blackett, Rival e Thomas mostraram que estudantes podem desenvolver uma compreensão profunda de conceitos de funções de maior nível, desenvolvendo-os visualmente. Além disso, mostraram que

quando é dada ênfase no desenvolvimento visual há maior retenção do que se os conceitos fossem desenvolvidos de forma analítica. (EISENBERG, 1991, p. 148)

Dado o exposto, pretende-se enfatizar os processos de visualização com o instrumental tecnológico, baseado nas tecnologias de Realidade Aumentada como meio de simplificar a construção de conceitos de Cálculo Diferencial e Integral.

3.4 Superfícies Quádricas

A seguir apresenta-se o conceito e algumas aplicações de superfícies quádricas, estudadas na disciplina em que foi feita a intervenção. Este conceito está presente nas representações tridimensionais de diversos conteúdos de cursos de Ciências Exatas.

As superfícies quádricas são conjuntos de pontos de representação tridimensional, que apresentam diversas aplicações no cotidiano, tais como refletores de faróis de automóveis, antenas parabólicas, formas usadas em Arquitetura, chaminés de usinas nucleares entre outros. Informalmente, podemos afirmar que as superfícies quádricas são as regiões formadas quando as cônicas se movimentam no espaço.

Serão ilustrados seis tipos comuns de superfícies quádricas: elipsoides, hiperboloides de uma folha, hiperboloides de duas folhas, cones elípticos, paraboloides elípticos e paraboloides hiperbólicos, conforme indicam Anton, Bivens e Davis (2007).

- Elipsoide – figura da qual se aproxima o formato da Terra, um tipo especial de elipsoide é a esfera. Seus traços tanto no plano coordenado como no plano paralelo a este são elipses.

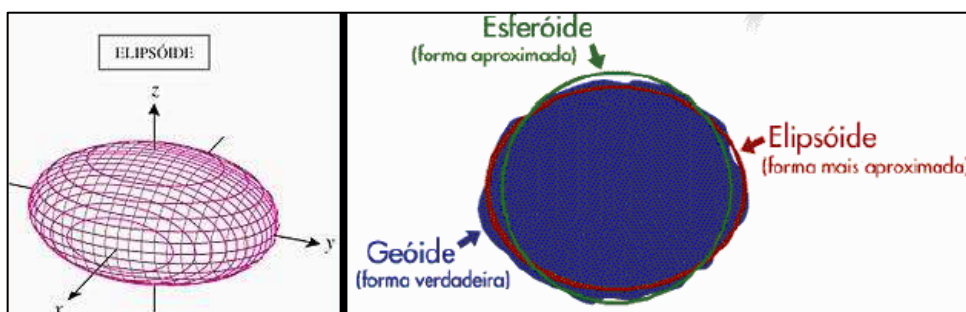


Figura 14 - Elipsoide/Formato da Terra

Fontes: Anton, Bivens e Davis, 2007/ <https://www.mundovestibular.com.br/>, 2019

- Hiperboloides – figura frequentemente utilizada em Arquitetura e Engenharia. No hiperboloide de uma folha os traços nos planos perpendiculares a dois dos eixos coordenados são hipérboles e nos planos perpendiculares ao outro eixo são elipses. No hiperboloide de duas folhas não há traço no plano xy , traços em planos paralelos e acima dele são elipses, os traços nos planos yz e xz e planos paralelos a ele são parábolas.

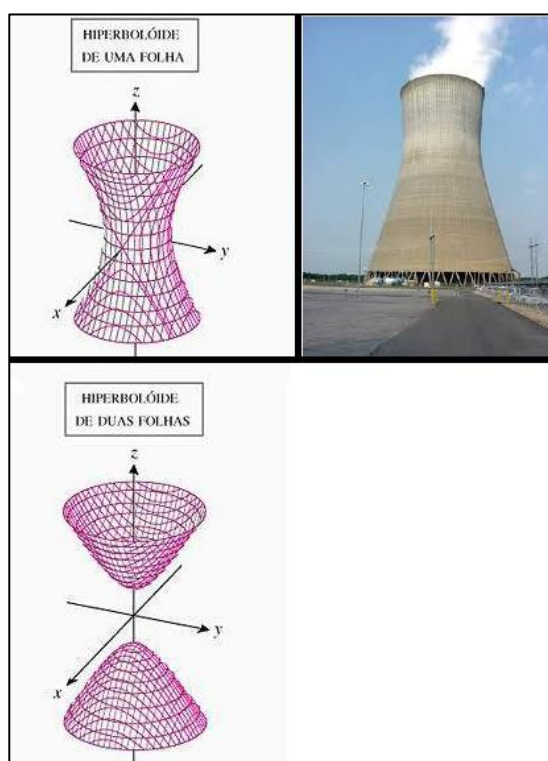


Figura 15 - Hiperboloides/Chaminé de usina nuclear

Fontes: Anton, Bivens e Davis, 2007/ <http://www.matematiques.com.br>, 2019

- Cone elíptico – podemos associar à imagem de uma ampulheta. Seu traço no plano xy é um ponto (a origem) e os traços em planos paralelos são elipses. Os traços nos planos yz e xz são pares de retas que se intersectam na origem e os traços em planos paralelos a estes são hipérboles.

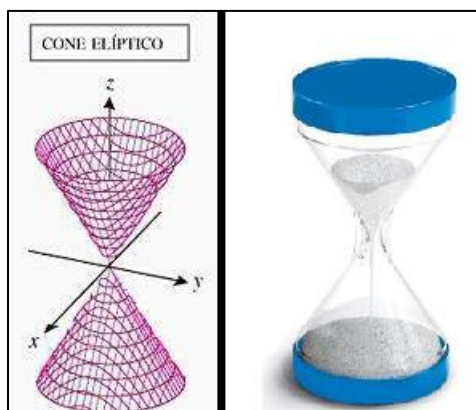


Figura 16 - Cone elíptico/Ampulheta

Fontes: Anton, Bivens e Davis, 2007/ <https://www.lojagrow.com.br/>, 2019

- Paraboloide elíptico – frequentemente utilizado em Engenharia. O traço no plano xy é um ponto (origem) e os traços em planos paralelos e acima dele são elipses. Os traços nos planos yz e xz e nos planos paralelos a eles, são parábolas.

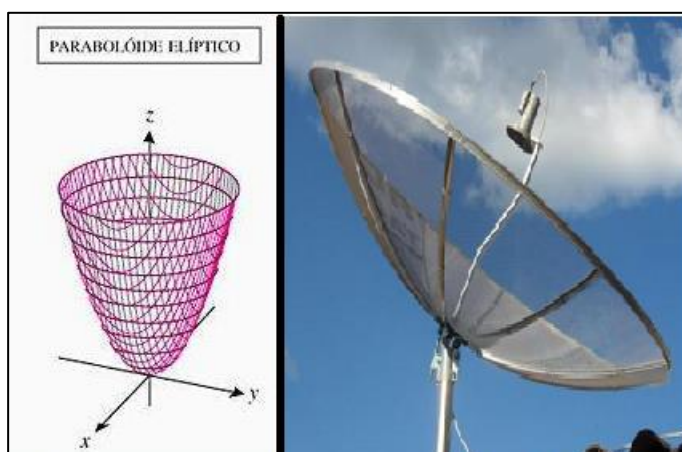


Figura 17 - Paraboloide elíptico/Antena Parabólica

Fontes: Anton, Bivens e Davis, 2007/<https://museudinamicointerdisciplinar.wordpress.com>, 2019

- Paraboloide hiperbólico – tem a forma de uma sela de cavalo. O traço no plano xy é um par de retas que se intersectam na origem. Os traços em planos paralelos à origem são hipérboles. As hipérboles acima do plano xy abrem-se na direção y e as hipérboles abaixo na direção x . Os traços nos planos yz e xz e nos planos paralelos a eles, são parábolas.

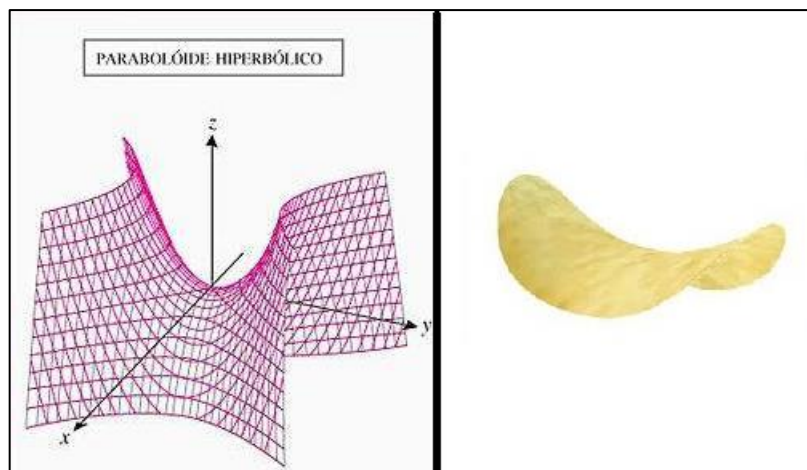


Figura 18 - Paraboloide hiperbólico/Batata Pringles

Fontes: Anton, Bivens e Davis, 2007/<http://www.arrimo.com.br>, 2019

Elas podem ser genericamente definidas a partir da equação de segundo grau em x , y e z (1):

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0 \quad (1)$$

As superfícies quádricas estão inseridas em outros assuntos referentes ao Cálculo em três dimensões, como coordenadas cilíndricas e esféricas, funções de várias variáveis e integração múltipla. Os elipsoides, hiperboloides e paraboloides elípticos podem ser obtidos através de revolução de cônicas, especificamente, elipses, hipérboles e parábolas, em relação aos seus eixos de simetria.

4 Percurso Metodológico

O trabalho utilizou uma metodologia qualitativa propondo a aplicação da Realidade Aumentada para superfícies quádricas e foram investigados os efeitos deste uso em aulas da disciplina de Cálculo.

A pesquisa qualitativa, segundo Minayo (2002):

[...] responde a questões muito particulares. Ela se preocupa, nas ciências sociais, com um nível de realidade que não pode ser quantificado. ...o que corresponde a um espaço mais profundo de relações, dos processos e dos fenômenos, que não podem ser reduzidos à operacionalização de variáveis. (MINAYO, 2002, p. 21-22)

Bicudo (2013) nos traz que o qualitativo engloba a ideia do subjetivo, passível de expor sensações e opiniões. Subjetividade esta, que não pode ser colocada em termos quantitativos, que nos remete à percepção de representações tridimensionais.

Quanto aos procedimentos, a presente pesquisa pode ser qualificada como pesquisa-ação, dado o nível de interação proposto, bem como o acompanhamento de alta proximidade de todas as situações sugeridas. Thiollent (1986) define a pesquisa-ação como:

um tipo de pesquisa social com base empírica que é concebida e realizada em estreita associação com uma ação ou com a resolução de um problema coletivo no qual os pesquisadores e os participantes representativos da situação ou do problema estão envolvidos de modo cooperativo ou participativo. (THIOLLENT, 1986, p. 14).

Como coloca Tripp (2005) o que temos de fato com a pesquisa-ação é uma forma de investigação que utiliza técnicas de pesquisa para melhorar a prática. E para melhorar a prática são necessárias as reflexões trazidas pelo desenvolvimento da pesquisa e o envolvimento de todos os sujeitos participantes da ação.

4.1 Contexto da Pesquisa

A Universidade Federal de Pelotas (UFPel), objeto deste estudo, tem 20.827 estudantes, distribuídos em 96 cursos de Graduação presenciais, sendo 66 bacharelados, 22 licenciaturas, oito tecnólogos e três cursos de graduação a distância, em 117 polos. Na pós-graduação, são 26 doutorados, 50 mestrados, seis cursos de mestrado profissional e 34 cursos de especialização.

Localizada no Sul do Rio Grande do Sul, na cidade de Pelotas, a 250 km de Porto Alegre, capital do Estado, mas atualmente com a adesão ao Sistema de Seleção Unificada (SiSu) os novos estudantes são oriundos de quase todos os estados da Federação. A estrutura da UFPel é um tanto heterogênea, pois parte está organizada em centros, que abarcam câmaras de ensino, pesquisa e extensão e outra parte está estruturada em departamentos que se vinculam a faculdades e a institutos.

As disciplinas de Cálculo são oferecidas por duas unidades distintas: o Centro de Engenharias (CEng) e o Instituto de Física e Matemática (IFM).

O Centro de Engenharias oferece a disciplina de Cálculo B (código 15000346), na qual é trabalhado o conteúdo de Cálculo em três dimensões para nove cursos de Engenharia vinculados a esse centro como mostrado no Quadro 4.

O Instituto de Física e Matemática trabalha este mesmo conteúdo nas disciplinas de Cálculo III (código 11100071) para as Licenciaturas em Matemática presenciais (diurno e noturno), e Cálculo 3 (código 11100060) para os demais cursos de graduação que não estão vinculados ao Centro de Engenharias, também apresentados no Quadro 4.

Quadro 4 - Correspondência entre cursos e oferta da disciplina de Cálculo

Disciplina	Unidade que oferece a disciplina	Cursos
Cálculo B	CEng	Engenharia Agrícola, Engenharia Ambiental e Sanitária, Engenharia Civil, Engenharia de Controle e Automação, Engenharia de Produção, Engenharia Eletrônica, Engenharia Industrial Madeireira, Engenharia de Petróleo, Engenharia Geológica
Cálculo 3	IFM	Meteorologia, Química Bacharelado, Química Industrial, Química Licenciatura, Química Forense, Ciência da Computação, Engenharia da Computação, Engenharia de Materiais, Engenharia Hídrica, Física Bacharelado, Física Licenciatura
Cálculo III	IFM	Matemática Licenciatura Diurno, Matemática Licenciatura Noturno

Fonte: <http://institucional.ufpel.edu.br>, 2019

4.2 A Escolha do Software

Inicialmente, considerou-se diversos *softwares* de Realidade Aumentada com a finalidade de selecionar aquele que melhor atendesse às necessidades da pesquisa. Alguns dos softwares analisados foram: *EducAR – Quadrics*, desenvolvido na UFJF, cuja finalidade específica é trabalhar as superfícies quádricas; *Aumentaty* e *HP Reveal*, plataformas autorais que permitem ao usuário elaborar suas próprias atividades em Realidade Aumentada. Outra possibilidade considerada foi o desenvolvimento de software pela pesquisadora.

Entre as opções consideradas foi escolhido momentaneamente o *HP Reveal*, pelo fato deste ser utilizado tanto por dispositivos Android como por dispositivos IOS. Outro ponto positivo é que neste *software* os marcadores podem ser estabelecidos através de imagens corriqueiras, não necessariamente *QRCode*, código de barras bidimensional que escaneado pela câmera do *smartphone* é convertido em informações pré-estabelecidas.

Ao intensificar as pesquisas, foi descoberto o *software* de Realidade Aumentada *MateAR*², desenvolvido no Instituto Tecnológico e de Estudos Superiores de Monterrey no México, que se adequava melhor ao trabalho do que o *HP Reveal*. A mudança na escolha se justifica pelo fato de o *software* ser especialmente desenvolvido para utilização em disciplinas de Cálculo de Múltiplas Variáveis e propiciar a experiência em RA desejada pela pesquisadora, mesmo não tendo versão em Português, somente em Espanhol. Apesar de o *MateAR* operar somente em sistema *Android*, a escolha foi mantida pela pesquisadora por serem esses dispositivos os mais comumente utilizados, nas turmas observadas.

No aplicativo citado a projeção dos objetos tridimensionais se dá a partir de marcadores, seis deles específicos para cada uma das superfícies quádricas como mostrado na Figura 19: elipsoides, hiperboloides de uma folha, hiperboloides de duas folhas, cones elípticos, paraboloides elípticos e paraboloides hiperbólicos e um sétimo marcador, que necessita da descrição algébrica da quádrica que se deseja projetar, possibilitando, por exemplo, a variação de eixos.

²<http://ingenieria.csf.itesm.mx/html/matear.html>

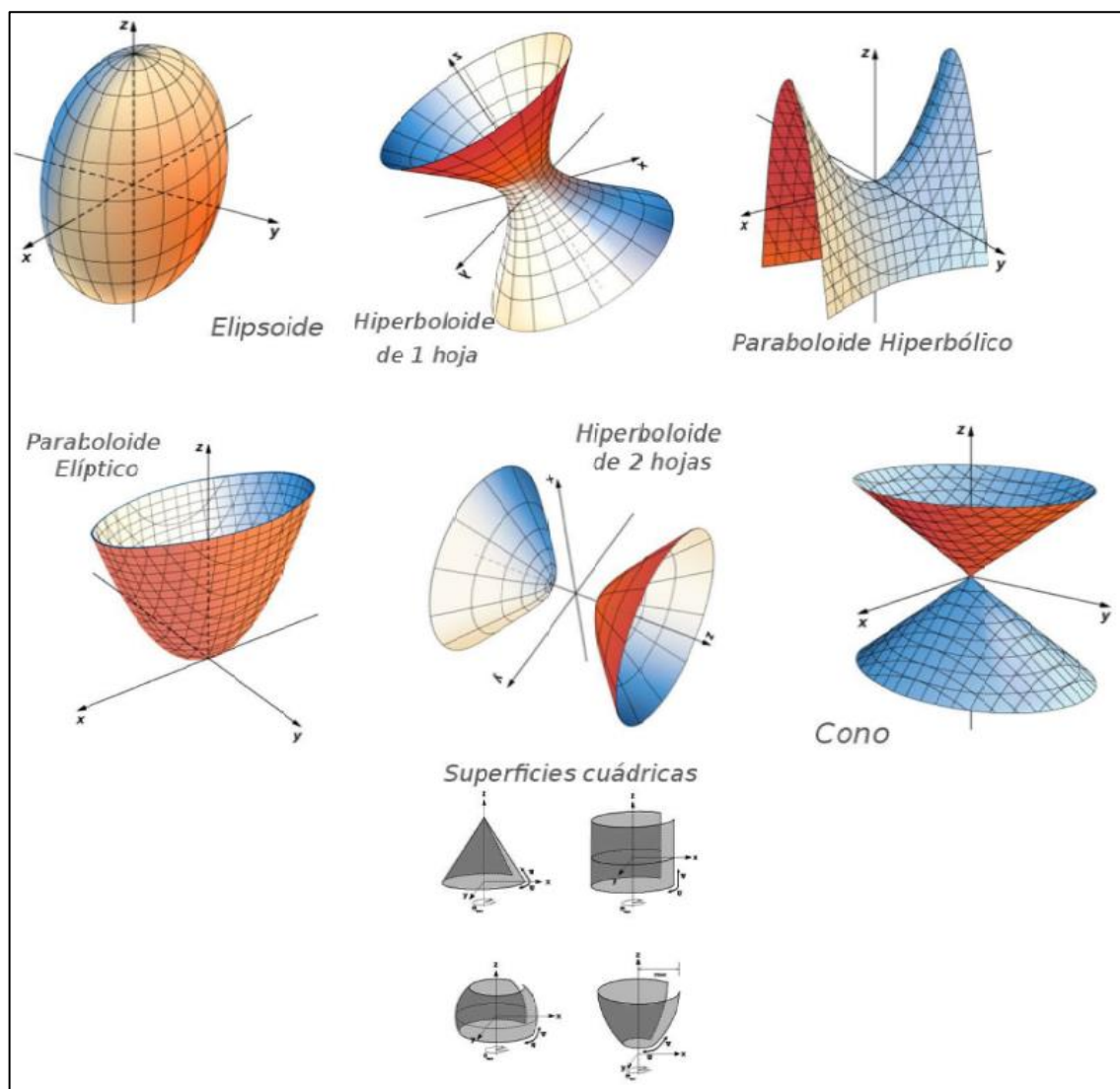


Figura 19 - Marcadores para Superfícies Quádricas
 Fonte: <http://ingenieria.csf.itesm.mx/html/matear.html>, 2019

4. 3 O Processo da Pesquisa

O processo da pesquisa foi dividido em duas etapas, a primeira consistiu em observações em turmas de Cálculo e a segunda consistiu na aplicação da atividade com o *software*.

As observações foram realizadas em um semestre e a aplicação das atividades no semestre seguinte. Desta forma, foi possível à pesquisadora conhecer duas situações: a percepção dos alunos ao tratar com objetos tridimensionais no ensino tradicional e com a aplicação do *software*.

O Quadro 5 apresenta as turmas envolvidas na pesquisa e suas identificações.

Quadro 5 - Turmas envolvidas na pesquisa

Disciplina	Origem da Oferta	Atuação	Período	Código da Turma	Código identificação dos alunos
Cálculo B	CEng	Observações	2019/1	TE1	E1 a E16
Cálculo 3	IFM		2019/1	TQ1	Q1 a Q13
Cálculo B	CEng	Aplicação da atividade com RA	2019/2	TE2	2E1 a 2E27
Cálculo 3	IFM		2019/2	TQ2	2Q1 a 2Q18

Fonte: dados da pesquisadora, 2019

Como indicado no Quadro 5 duas turmas foram observadas no primeiro semestre de 2019. Uma das turmas cursou Cálculo B, oferecida pelo CEng e foi constituída por 60 alunos dos cursos de Engenharia (TE1). A outra turma cursou a disciplina Cálculo 3, oferecida pelo IFM, e foi constituída de 20 alunos dos cursos de Licenciatura em Química e Química Forense (TQ1).

A observação ocorreu ao longo de todo semestre pois a pesquisadora pensou ser importante acompanhar o processo de aprendizagem dos alunos durante as respectivas disciplinas para que a atividade proposta correspondesse às necessidades dos alunos. A partir destas observações a pesquisadora preparou então a atividade a ser aplicada e a execução ocorreu no semestre seguinte.

A escolha das turmas para a aplicação da atividade, no segundo semestre de 2019, foi definida de modo a dar continuidade ao que foi observado no primeiro semestre. Assim, utilizou-se a turma de Cálculo B, identificada como TE2 (turma de Engenharia 2), que foi ministrada pelo mesmo professor da turma observada.

Já para a turma de Cálculo 3, identificada como TQ2 (turma de Química 2), não foi possível manter o docente, mas buscou-se a turma que foi ofertada para os cursos da área de Química. Durante a atividade a pesquisadora constatou a presença nesta turma de matriculados dos cursos de Química Industrial (5 alunos), Bacharelado em Química (4 alunos), Licenciatura em Matemática (1 aluno), Engenharia Hídrica (1 aluno) e Bacharelado em Física (2 alunos).

Os alunos observados e que participaram da atividade proposta pela pesquisadora foram identificados sequencialmente dentro de um prefixo: alunos da turma TQ1 foram identificados de Q1 a Q13, alunos da turma TE1 foram identificados de E1 a E16, alunos da TQ2 foram identificados de 2Q1 a 2Q18 e alunos da turma TE2 foram identificados de 2E1 a 2E27.

Antes da aplicação da atividade com o *software* no segundo semestre foram feitas observações e acompanhamento das turmas apenas para definir quando seria proveitoso aplicar a atividade.

4.3.1 Etapa 1 – observações nas turmas TE1 e TQ1

As observações das turmas de Cálculo no primeiro semestre de 2019 foram feitas com o objetivo de conhecer as práticas docentes e as metodologias utilizadas para trabalhar os conteúdos relativos à representação tridimensional, principalmente, as superfícies quádricas.

A escolha das turmas foi definida a partir de contatos com professores ministrantes da disciplina no primeiro semestre de 2019, na Universidade Federal de Pelotas, dada a disponibilidade oferecida pelo docente.

No Quadro 6 podemos verificar as características destas turmas.

Quadro 6 - Turmas observadas

Disciplina	Cursos atendidos	Estudantes matriculados
Cálculo B	Engenharia Agrícola, Engenharia de Petróleo, Engenharia de Controle e Automação, Engenharia Eletrônica, Engenharia Industrial Madeireira, Engenharia Geológica, Engenharia de Produção	60
Cálculo 3	Química Forense, Química Licenciatura	20

Fonte: dados da pesquisadora, 2019

Como pode-se observar no Quadro 6, a turma de Cálculo B oferecida pelo CEng aos cursos de Engenharias tinha o triplo de estudantes da turma de Cálculo 3 oferecida pelo IFM aos cursos de Química.

As observações foram desenvolvidas conforme detalha o Quadro 7, que apresenta os conteúdos trabalhados em cada aula.

Quadro 7 - Observações realizadas no primeiro semestre de 2019

Data	Observação	Turma	Conteúdos da aula	Horas aula	Disciplina
05/04/2019	1	TQ1	Limites em Mais de uma Variável e Derivadas Parciais	2	

10/04/2019	2	TQ1	Exercícios dados em aulas anteriores	2	Cálculo 3 IFM
12/04/2019	3	TQ1	Revisão para prova	2	
17/04/2019	4	TQ1	Resolução dos exercícios da prova e Derivadas de Ordem Superior	2	
10/05/2019	5	TQ1	Integrais Duplas	2	
17/05/2019	6	TQ1	Integrais Duplas e Coordenadas Polares	2	
22/05/2019	7	TQ1	Coordenadas Polares	2	
05/06/2019	8	TQ1	Integrais de linha, Campos vetoriais e integrais de linha de campos vetoriais.	2	
16/05/2019	1	TE1	Introdução ao Cálculo Diferencial e Integral no Espaço	3	Cálculo B CEng
23/05/2019	2	TE1	Derivadas Parciais e Equação do Plano Tangente	3	
06/06/2019	3	TE1	Teste da Segunda Derivada	3	
13/06/2019	4	TE1	Integrais Duplas e Coordenadas Polares	3	
27/06/2019	5	TE1	Integrais Triplas	3	

Fonte: dados da pesquisadora, 2019

No final desta etapa de observações foi aplicado aos estudantes de cada turma um questionário (Apêndice A) com questões sobre a percepção de superfícies quádricas e o possível uso de aplicativos sobre o conteúdo. Note-se que embora as turmas tenham um número diferenciado de alunos, aproximadamente o mesmo número de questionários (16 na TE1 e 13 na TQ1) foram respondidos em ambas as turmas.

Nesta etapa também foi feita uma entrevista com os docentes (Apêndice D) para que estes apontassem suas percepções em relação a utilização de tecnologias.

4. 3. 2 Etapa 2 – Aplicação da atividade na Turma de Química (TQ2)

Para a aplicação da atividade na turma de Química foi combinado com a docente, que o *link* para o aplicativo seria enviado aos estudantes com antecedência, para que no dia da atividade já estivessem com o aplicativo instalado em seus dispositivos móveis.

Antes da utilização do aplicativo, os estudantes responderam ao mesmo questionário-diagnóstico (Apêndice A) aplicado na turma observada no primeiro semestre de 2019 (TQ1).

Como o aplicativo funciona somente em dispositivos *Android*, os estudantes realizaram a atividade em grupos de dois ou três.

Os exercícios propostos na atividade (Apêndice B) priorizaram as relações entre Cônicas e Quádricas e a avaliação da percepção espacial dos estudantes.

Para a aplicação do questionário e da atividade com o aplicativo foram utilizadas duas horas/aula.

Duas semanas após a atividade foi aplicado outro questionário (Apêndice C) com as mesmas questões sobre superfícies quádricas em que foram acrescentados questionamentos sobre a utilização do aplicativo. Os estudantes que informaram no questionário que se disponibilizariam a responderem suas impressões sobre o aplicativo, foram posteriormente entrevistados pela pesquisadora no *WhatsApp* (Apêndice E).

Durante a aplicação do questionário, foi feita entrevista (Apêndice D) com a docente da turma sobre sua formação, sua percepção em relação a utilização de tecnologias em geral e do aplicativo *MateAR* em específico.

4. 3. 3 Etapa 2 – Aplicação da atividade na Turma das Engenharias (TE2)

Nesta turma a aplicação da atividade ocorreu diferentemente da turma de Química. Por ser o conteúdo de Cálculo B muito extenso, a pesquisadora aguardava o momento adequado para aplicar a atividade e enquanto isso fazia acompanhamento da turma. Foi combinado com o professor que a aplicação da atividade seria realizada na aula seguinte a primeira avaliação. Porém, a pesquisadora foi surpreendida pelo professor que anunciou a sua aposentadoria e informou à turma que sua última atividade seria a aplicação da prova.

O docente que assumiu a turma logo após a avaliação considerou que o conteúdo extenso estava atrasado e, portanto, não seria oportuno liberar duas aulas para a pesquisadora trabalhar com os alunos. Com isso o planejamento inicial precisou ser refeito e foi necessário buscar uma nova turma do Centro de Engenharias para desenvolver a atividade com o aplicativo.

Foram enviados e-mails para as demais docentes da disciplina de Cálculo B, e apenas uma professora se mostrou disponível e a realização da atividade se deu de forma análoga à aplicação na TQ2. A docente enviou o *link* para o aplicativo aos estudantes com antecedência, para que no dia da atividade já estivessem com o aplicativo instalado em seus dispositivos móveis.

Antes da utilização do aplicativo, os estudantes responderam ao mesmo questionário-diagnóstico (Apêndice A) aplicado na turma observada no primeiro semestre de 2019 (TE1).

Como o aplicativo funciona somente em dispositivos *Android*, os estudantes realizaram a atividade em grupos, sendo que, dois estudantes, que possuíam *smartphones* com o sistema *IOS* optaram por não realizar a atividade.

Os exercícios propostos na atividade (Apêndice B) priorizaram as relações entre Cônicas e Quádricas e a avaliação da percepção espacial dos estudantes.

Para a aplicação do questionário e da atividade com o aplicativo foram utilizadas pouco menos de duas horas/aula.

Uma semana após a atividade foi aplicado outro questionário (Apêndice C) com as mesmas questões sobre superfícies quádricas acrescidos de questionamentos sobre a utilização do aplicativo.

Durante a aplicação do questionário, foi feita entrevista com a docente (Apêndice D) da turma sobre sua formação, sua percepção em relação a utilização de tecnologias em geral e do aplicativo *MateAR* em específico.

4.4 Coleta de dados

Além dos questionários respondidos no final das observações e imediatamente antes da aplicação da atividade (Apêndice A), do questionário aplicado após a atividade (Apêndice C), foram utilizados também:

- Diário de Campo da pesquisadora;
- Respostas dos estudantes na folha de atividades (Apêndice B);
- Entrevistas com os docentes envolvidos (Apêndice D) versando sobre suas formações, uso de tecnologias em sala de aula, materiais didáticos e gráficos tridimensionais;
- Entrevistas com os estudantes sobre a atividade aplicada (Apêndice E).

5. Dados e Resultados

Nesta seção são apresentados os dados obtidos nas observações das turmas e nas respostas de questionários anteriores e posteriores às aplicações das atividades com Realidade Aumentada e entrevistas com docentes e alunos.

Para a discussão dos resultados foi utilizada a Análise de Conteúdo, definida por Bardin (2011) como:

um conjunto de técnicas de análise das comunicações visando obter por procedimentos sistemáticos e objetivos de descrição do conteúdo das mensagens indicadores (quantitativos ou não) que permitam a inferência de conhecimentos relativos às condições de produção/recepção (variáveis inferidas) dessas mensagens. (BARDIN, 2011, p. 48)

Ainda segundo Bardin (2011, p. 147), as categorias são rubricas ou classes, as quais reúnem um grupo de elementos sob um título genérico, agrupamento esse efetuado em razão das características comuns desses elementos.

Assim, para este trabalho, foram definidas as seguintes categorias Disciplinas e Currículos, Práticas Docentes nas Disciplinas, Estudantes, Aprendizados e Contribuições do Software e a seguir os seus detalhamentos.

5.1 Disciplinas e Currículos

Ao decorrer da pesquisa foram identificadas pela pesquisadora algumas diferenças entre as disciplinas de Cálculo B e Cálculo 3, ainda que ambas tenham muitos conteúdos coincidentes, elas não são equivalentes exatos, como apontado nos conteúdos programáticos (Anexos A e B).

Esta categoria emergiu da necessidade de pontuar tal multiplicidade e ressaltar os diferentes caminhos percorridos pelos estudantes dos cursos envolvidos na pesquisa até chegarem às disciplinas e para onde irão após cursarem as mesmas.

Para os cursos do CEng, a disciplina de Cálculo B é, segundo a matriz curricular dos cursos, do segundo semestre e para esses cursos os pré-requisitos são distintos como pode-se observar no Quadro 8.

Quadro 8 - Diversidade de pré-requisitos de Cálculo B

Curso	Pré-requisito de Cálculo B
Eng. Agrícola Eng. Geológica	Cálculo A
Eng. Civil Eng. Controle e Automação Eng. Petróleo Eng. Produção Eng. Eletrônica Eng. Industrial Madeireira	Cálculo A Álgebra Linear

Fonte: <http://institucional.ufpel.edu.br>, 2019

Para Engenharia Agrícola e Engenharia Geológica, o pré-requisito de Cálculo B é somente a disciplina de Cálculo A; para os demais cursos os pré-requisitos são Cálculo A e Álgebra Linear.

Diferentemente dos cursos atendidos pelo IFM, os cursos de Engenharia atendidos pelo CEng não possuem em seus currículos a disciplina de ALGA que reúne os conteúdos de Álgebra Linear e Geometria Analítica. Alguns desses cursos têm em seus currículos somente a disciplina de Álgebra Linear, por isso os conteúdos de Geometria Analítica, importantes para um bom entendimento matemático estão inseridos no CEng na disciplina de Cálculo B.

Na questão relativa a disciplinas que têm Cálculo B como pré-requisito, temos Equações Diferenciais A, para todos os cursos do CEng envolvidos na pesquisa. Alguns desses cursos têm ainda outras disciplinas que dependem de Cálculo B e que estão elencadas no Quadro 9.

Quadro 9 - Disciplinas do CEng que possuem como pré-requisito Cálculo B

Cursos que têm a disciplina de Cálculo B no currículo	Disciplinas que têm Cálculo B como pré-requisito
Eng. Agrícola	Equações Diferenciais A Estatística Básica Mecânica I Isostática e Economia Agrícola
Eng. Civil Eng. Controle e Automação	Equações Diferenciais A
Eng. Eletrônica	Equações Diferenciais A Teoria Eletromagnética

Eng. Geológica	Equações Diferenciais A Física para Engenharia II
Eng. Industrial Madeireira	Equações Diferenciais A Física Básica III
Eng. Petróleo	Equações Diferenciais A Termodinâmica Aplicada
Eng. Produção	Equações Diferenciais A Estatística Básica

Fonte: <http://institucional.ufpel.edu.br>, 2019

Esta análise de pré-requisitos da disciplina de Cálculo B e das disciplinas que têm Cálculo B como pré-requisito foi apresentada para que se considere a complexidade de uma sala de aula com alunos estudando os mesmos conteúdos que serão ao longo de seus cursos exigidos de forma diferente de acordo com seus respectivos currículos.

A disciplina de Cálculo 3, ofertada pelo IFM, é uma disciplina do terceiro semestre para os cursos de Química Industrial, Bacharelado em Química, Bacharelado em Física e Engenharia Hídrica e do quarto semestre para Química Forense e Licenciatura em Química.

Em relação aos pré-requisitos, o Quadro 10 apresenta os pré-requisitos necessários para que os alunos cursem a disciplina de Cálculo 3.

Diferentemente dos demais, no curso de Química Forense os pré-requisitos são Geometria Analítica e Cálculo 2, visto que o curso não tem como disciplina obrigatória Álgebra Linear.

Quadro 10 - Diversidade de requisitos entre os cursos atendidos pelo IFM

Cursos que têm Cálculo 3 em seus currículos	Pré-requisitos de Cálculo 3
Química Industrial Química Bacharelado Química Licenciatura Eng. Hídrica	Álgebra Linear e Geometria Analítica (ALGA) Cálculo 2
Física Bacharelado	Álgebra Linear I Cálculo 2
Química Forense	Geometria Analítica Cálculo 2

Fonte: <http://institucional.ufpel.edu.br>, 2019

Mesmo sendo disciplinas do começo dos cursos, a maioria dos estudantes participantes da pesquisa não cursou a disciplina regularmente no semestre indicado em sua matriz curricular, havendo, inclusive, casos de estudantes no nono semestre ou mesmo além do tempo regular de curso. Essas observações foram constatadas pela pesquisadora verificando o número de matrícula dos alunos em que consta o ano e semestre de ingresso no curso.

O Quadro 11 indica as disciplinas do currículo de cada um dos cursos citados que têm como pré-requisito a disciplina Cálculo 3 oferecida pelo IFM.

Quadro 11 - Disciplinas que possuem como pré-requisito Cálculo 3

Cursos que têm Cálculo 3 em seu currículo	Disciplinas que têm Cálculo 3 como pré-requisito
Bacharelado em Química Química Industrial	Equações Diferenciais
Bacharelado em Física	Equações Diferenciais Termodinâmica
Eng. Hídrica	Mecânica dos Flúidos

Fonte: <http://institucional.ufpel.edu.br>, 2019

É pertinente destacar a ausência da disciplina de Equações Diferenciais na matriz curricular do curso de Química Forense, haja vista as aplicações diretas do conteúdo da disciplina na área forense, como, por exemplo, Decaimento radioativo e Lei do resfriamento de Newton.

Comparando os conteúdos das disciplinas de Cálculo 3 (IFM) e Cálculo B (CEng), esta última tem mais conteúdos a serem trabalhados, porém os seis créditos da disciplina parecem não ser suficientes para que estes sejam desempenhados da melhor forma, como apontam falas de estudantes e dos docentes da disciplina.

Um dos estudantes quando questionado sobre como a disciplina poderia ser trabalhada para facilitar o aprendizado, declarou:

Dividida em dois semestres, ou criando uma disciplina de geometria analítica causando menos conteúdos [...] O excesso de conteúdo prejudica no desenvolver de exercícios (aluno 2E19, Engenharia de Petróleo, Cálculo B).

Esta fala realça o reconhecimento que o estudante tem da importância dos conteúdos para o seu curso e de sua necessidade em aprendê-los. Nesse sentido

uma menor quantidade de conteúdos poderia facilitar a fragmentação dos conceitos em representações de menor complexidade, que, como afirmam Harel e Kaput (1991, p. 88):

Utilizando notações matemáticas, ideias complexas ou processos mentais podem ser divididos em pedaços e, portanto, representados por notações físicas, que por sua vez, podem ser manipuladas ou refletidas em novas ideias.

A distinção entre as disciplinas leva a uma consequente distinção entre as práticas docentes e discentes em relação às disciplinas, os quais serão analisados nas próximas categorias.

5. 2 Práticas docentes nas disciplinas

Observações, relatos de estudantes e as entrevistas com os próprios docentes deram origem a esta categoria. Foram observados os docentes D1 (Cálculo 3, IFM) e D2 (Cálculo B, CEng) no primeiro semestre de 2019 e a forma de trabalho de ambos se diferencia bastante quanto à abordagem dos conteúdos, mas há similaridades quanto ao uso do método tradicional de ensino. No segundo semestre, a pesquisadora aplicou as atividades nas aulas das docentes D3 (Cálculo 3, IFM) e D4 (Cálculo B, CEng).

D1 (Cálculo 3, IFM) trabalha os conteúdos a partir de definições e listas de exercícios. As dúvidas dos estudantes são resolvidas em aulas dedicadas a exercícios. O professor informou à pesquisadora que o conteúdo de superfícies quádricas foi trabalhado na turma de forma superficial, apesar de ter implicações em outros assuntos e aparecer em exercícios durante a disciplina. O docente D1 (Cálculo 3, IFM), para melhor explicar um gráfico tridimensional, dividiu este em três gráficos bidimensionais e depois os uniu, para possibilitar melhor visualização e em nenhum momento utilizou recursos tecnológicos.

Já D2 (Cálculo B, CEng), utiliza *slides* em algumas aulas para ilustrar exemplos, assim como desenha no quadro. Trabalha poucos exemplos e exercícios, porém de forma extremamente detalhada. Em diversas ocasiões utilizou superfícies quádricas em seus exemplos e algumas vezes as representou utilizando o *software Maple*. Em uma aula iniciou o desenho de um parabolóide elíptico, porém desistiu ao

encontrar dificuldade na representação, nisso um estudante representou a superfície em seu *smartphone* e mostrou ao professor.

As observações das práticas de D1 (Cálculo 3, IFM) e D2 (Cálculo B, CEng) evidenciaram a importância das superfícies quádricas para as disciplinas e a facilitação para a representação gráfica a partir de recursos tecnológicos. Mostrou também a iniciativa de D2 (Cálculo B, CEng) de resolver algumas situações com o uso do *smartphone* demonstrando novas dinâmicas em sala de aula, como colocam Borba, Silva e Gadanidis (2014).

Nas entrevistas os docentes relataram alguns aspectos de suas práticas, como a utilização de tecnologias, recomendação de material complementar, algumas percepções sobre a aprendizagem dos estudantes e, ainda, D3 (Cálculo 3, IFM) e D4 (Cálculo B, CEng) falaram sobre a atividade com o *MateAR*.

Como relata D1,

não que eu seja desfavorável ao uso da tecnologia. Se existisse uma que eu dominasse, que deixasse bem claro pra eles como é que se comportam esses objetos no espaço, seria bastante proveitoso (professor D1, Cálculo 3, IFM).

D2 foi bastante breve em sua resposta, mas a utilização de tecnologias foi observada em sua prática pela pesquisadora. Comentando sobre tecnologias em sala de aula, o professor informou:

Eu sou a favor, totalmente a favor, desde que seja como ferramentas, complementação (professor D2, Cálculo B, CEng).

A professora D3 afirma a importância da utilização apesar de não ter essa prática para a disciplina de Cálculo em questão:

Muito necessário, os alunos, eles visualizam bem melhor, aplicam bem melhor os conceitos. Até a gente tenta representar graficamente no quadro, mas não é a mesma coisa. Tendo uma tecnologia é muito importante. Recomendo sempre um software de visualização, nessa disciplina do Cálculo 3 não tanto, mas quando trabalho com Geometria Analítica e ALGA sim (professora D3, Cálculo 3, IFM).

A professora D3 complementa ainda que:

no plano lá, a gente desenhando não dá pra ver, bom seria se a gente trabalhasse essa parte no laboratório, que a gente pudesse aplicar as atividades, mas a gente não tem essa estrutura pra todas as turmas (professora D3, Cálculo 3, IFM).

A professora D4 detalha sua prática permeada pela tecnologia,

Eu utilizo slides para mostrar os desenhos mesmo. Já usei alguma coisa de mostrar contas no Scilab, quando tem uma conta que na verdade não é tão interessante ver ela em si, só ver o resultado e incentivar os alunos usarem como auxílio na hora de fazer as listas para conferir a resposta. Usei já Maple também, Scilab, alguma coisa, eu já dei trabalhos para eles fazerem em Scilab, GeoGebra também incentivei a usar (professora D4, Cálculo B, CEng).

Em relação ao uso de tecnologias, é consenso entre os docentes a importância da utilização, principalmente para representação gráfica, porém, nem todos adotam o uso regular de recursos tecnológicos em suas práticas.

Quando os estudantes foram questionados sobre como a disciplina poderia ser trabalhada para facilitar o aprendizado, fizeram algumas afirmações a respeito das práticas docentes e como estas refletem na disciplina cursada.

Na disciplina de Cálculo 3, oferecida pelo IFM, os estudantes informaram:

Usar mais recursos visuais durante as aulas para facilitar a visualização em 3D (aluno 2Q6, Química Industrial, Cálculo 3)

Mesmo que com auxílio de um datashow ou outro equipamento para visualização, acredito que objetos sólidos, físicos remetem mais facilmente à memória principalmente quando associado a um objeto do dia-a-dia ou coisas que carregamos conosco corriqueiramente (aluno Q6, Química Forense).

A fala do estudante Q6 pode ser associada à dificuldade suscitada por Dubinsky (1991, p. 104) “Parece que a matemática se torna difícil para estudantes quando diz respeito a tópicos para os quais não existe uma representação simples, física ou visual.” Nesta afirmação, o autor aponta a necessidade de uma maior relação dos conteúdos trabalhados em sala de aula, com objetos reais ou mesmo projeções feitas em tela.

Em relação a prática dos professores da disciplina Cálculo B, os alunos do CEng comentaram:

Com mais exemplos e maneiras de montar essas superfícies (2E3, Eng. Produção, Cálculo B).

Resoluções em vídeos de exercícios mais complexos, pois a maioria ensina apenas o básico (2E5, Eng. Petróleo, Cálculo B).

No mesmo sentido da afirmação de 2E5, Moran (2007, p. 48) coloca que “Quando o vídeo serve para confirmar uma teoria, uma síntese, um olhar específico com o qual já estamos trabalhando, é que ele ilustra, amplia, exemplifica.” Neste contexto os vídeos e os aplicativos constituem um importante material de apoio para atividades fora da sala de aula.

5. 3 Estudantes, Aprendizados e Contribuições do Software

Por meio das respostas dos questionários, das observações e dos relatos dos docentes emergiu a presente categoria, na qual são evidenciadas necessidades e estratégias dos estudantes para facilitar o aprendizado.

Ao fazer uma comparação entre as duas turmas observadas TQ1 (Cálculo 3, IFM) e TE1 (Cálculo B, CEng) temos diferentes posturas da turma em aula. Os estudantes da TQ1 (IFM) em geral faziam questionamentos sobre suas dúvidas, discutiam exercícios entre si e com o professor, já na TE1 (CEng) a turma tinha poucos estudantes que interagiam com o professor, mesmo sendo uma turma mais numerosa, o protagonismo da disciplina estava totalmente no docente.

Ao mesmo tempo a alta participação dos estudantes da turma TQ1 (IFM) deixava evidente as dificuldades dos mesmos, por exemplo, na terceira aula observada na turma, foi perceptível a falta de compreensão de representações tridimensionais por parte dos estudantes, com dúvidas até mesmo em exercícios de simples resolução.

As dificuldades dos estudantes em compreender representações tridimensionais também é relatada pelos docentes. A professora D3 (Cálculo 3, IFM) afirma que no plano, desenhando os estudantes não entendem e que seria melhor trabalhar esta parte no laboratório de informática, enquanto D1 (Cálculo 3, IFM) e D4 (Cálculo B, CEng) afirmam que os estudantes não compreendem os gráficos em duas dimensões e que as dificuldades para três dimensões só se intensificam.

A partir das falas dos estudantes, foi possível perceber a vontade de utilizar recursos tecnológicos para visualização de gráficos tridimensionais. Um número expressivo de estudantes, 41,1%, indicou que gostaria que houvesse um aplicativo ou outro recurso tecnológico para facilitar o entendimento dos conteúdos das respectivas disciplinas, principalmente para representação gráfica.

Os estudantes de Cálculo 3 (IFM) comentaram:

Com acesso a algum aplicativo para facilitar o entendimento dos gráficos dos exercícios, exemplos em aulas, ou deveres para fazer em casa (aluno 2Q14, Química Industrial, Cálculo 3).

O uso de aplicativos vem pra somar no estudo e trabalho, principalmente na visualização gráfica, onde nos pouparia tempo e tiraria dúvidas quanto a sua execução (aluno 2Q17, Eng. Hídrica, Cálculo 3).

Os estudantes da disciplina de Cálculo B (CEng) também afirmaram a necessidade do uso de tecnologias:

Um aplicativo que auxilie, nos estudos de cálculo (seja A ou B), seria de uma ótima ideia para todos os estudantes e exatas (aluno 2E1, Eng. Petróleo, Cálculo B).

Acredito que o uso de app e métodos computacionais ajudaria muito, acho perda de tempo em pleno 2019 com tantas tecnologias disponíveis, ter que fazer estes gráficos à mão livre (aluno 2E26, Eng. Produção, Cálculo B).

Borba, Silva e Gadaniadis (2014, p. 128) têm encontrado evidências sobre como o uso das tecnologias digitais móveis podem trazer possibilidades diferenciadas para a produção coletiva de conhecimentos, reforçando o posicionamento dos estudantes.

Esse entendimento corrobora com o que Pierre Lévy (1993) fala sobre os produtos da técnica moderna, como importante fonte de imaginário. Mesmo aqueles que não indicaram o uso de aplicativos, apontaram a necessidade de outros métodos de representação, inclusive o uso de impressoras 3D ou maquetes.

Nos Quadros 12 e 13 são apresentados os resultados das atividades aplicadas (Apêndice B) respectivamente nas turmas TE2 (Cálculo B, CEng) e TQ2 (Cálculo 3, IFM). Os quadros mostram os resultados obtidos em cada uma das questões pelos estudantes. A pesquisadora adotou a seguinte convenção na correção das atividades:

- A (acerto total): quando o aluno acertou integralmente a questão;
- S (satisfatório): quando o aluno acertou 75% ou mais, porém menos de 100% da questão;
- R (razoável): quando o aluno acertou 50% ou mais, porém menos de 75% da questão;
- E (erro): quando o aluno não acertou pelo menos 50% da questão;
- B (em branco): quando o aluno não respondeu.

Quadro 12 - Resultados das questões da atividade turma TE2 (CEng)

Código	Q1	Q2	Q3A	Q3B	Q3C	Q3D	Q4A	Q4B	Q4C	Q5
2E1	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B
2E2	A	S	A	A	A	A	S	A	A	A
2E3	A	S	A	A	A	A	A	S	E	A
2E4	A	S	A	A	A	A	S	A	A	A
2E6	A	A	S	S	A	A	S	S	E	A

2E7	A	S	A	A	A	A	S	A	A	A
2E8	A	S	B	S	A	E	R	S	A	B
2E9	E	S	R	S	A	E	R	S	B	B
2E10	A	S	B	S	A	E	R	S	E	B
2E11	A	S	B	S	A	E	R	S	B	B
2E13	A	S	R	A	A	E	S	A	A	A
2E14	A	A	S	S	E	E	S	S	B	A
2E15	A	A	S	S	A	A	S	S	A	A
2E16	A	S	R	S	E	E	R	A	A	A
2E17	A	S	R	A	A	E	S	A	A	R
2E18	A	A	E	S	B	B	R	A	E	B
2E19	R	S	R	S	A	A	R	S	B	B
2E20	A	S	R	S	A	A	R	S	A	A
2E21	A	S	B	S	E	E	S	A	E	A
2E22	A	S	B	S	E	E	R	A	A	A
2E23	A	S	R	A	A	E	S	A	A	R
2E24	E	S	B	S	E	E	R	S	E	E
2E25	A	S	B	S	E	E	R	A	A	A
2E26	A	A	E	S	B	B	R	A	B	B
2E27	A	S	R	A	A	E	S	A	A	R

Fonte: Dados da pesquisadora, 2019

Quadro 13 - Resultados das questões da atividade da turma TQ2 (IFM)

Código	Q1	Q2	Q3A	Q3B	Q3C	Q3D	Q4A	Q4B	Q4C	Q5
2Q1	A	S	S	S	A	A	S	S	B	B
2Q2	S	S	B	S	R	B	B	B	E	B
2Q3	S	S	B	S	R	B	B	B	E	B
2Q5	S	A	A	E	E	E	R	A	A	S
2Q6	S	B	B	A	E	B	R	R	B	B
2Q7	A	A	R	A	A	E	R	S	B	B
2Q8	S	A	S	S	A	E	E	E	R	B
2Q9	S	E	S	E	E	E	R	A	A	S
2Q10	S	E	S	S	E	E	R	A	R	S
2Q11	E	E	B	R	E	E	R	E	B	B
2Q12	E	E	B	R	E	E	R	E	B	B
2Q13	E	E	B	R	E	E	R	E	B	B
2Q14	A	A	R	A	A	E	R	S	B	B
2Q15	S	E	S	E	E	E	R	A	A	S
2Q16	S	A	B	S	A	E	E	E	R	B
2Q17	S	E	S	S	E	E	R	A	R	S
2Q18	A	S	S	S	A	A	S	S	E	B

Fonte: Dados da pesquisadora, 2019

Durante a atividade com o *MateAR*, foi notável a motivação de ambas as turmas. Especialmente na TE2 (Cálculo B, CEng) as atividades propostas para a

utilização do *software* foram muito bem resolvidas pela turma, que atingiu a porcentagem de 74,4% de boas respostas, embora os alunos 2E5 e 2E12 não quisessem participar. São consideradas boas respostas pela pesquisadora quando o estudante acertou pelo menos 50% da questão.

Na TQ2 (disciplina Cálculo 3, IFM) a porcentagem de boas respostas é menor, 54,12%, um dos aspectos relacionados é o fato de a atividade ter transcorrido de forma mais lenta na TQ2 e muitos estudantes tiveram que deixar respostas em branco, 20%, devido à falta de tempo.

Nos questionários aplicados após a atividade, os estudantes puderam apontar pontos positivos e negativos do *software*, assim como indicar se pretendem seguir utilizando o *MateAR* na disciplina.

São destacados os seguintes relatos sobre os pontos positivos:

Aumenta a precisão na visualização de figuras 3D e, com isso, aprimora a capacidade de visão espacial do aluno (aluno 2Q4, Bacharelado em Física, Cálculo 3).

Com o aplicativo é possível obter uma imagem espacial com maior facilidade e entendimento (aluno 2Q5, Química Forense, Cálculo 3).

Observar a forma em 3D facilita muito no entendimento dos planos a das próprias equações. O leque de opções que são abertas com a introdução de um ambiente 3D (aluno 2E25, Eng. Controle e Automação, Cálculo B).

Concordando com a perspectiva dos estudantes, Borba, Silva e Gadaniadis (2014, p. 53), ressaltam a importância da visualização para os conhecimentos matemáticos:

É um processo de formação de imagens que torna possível a entrada em cena das representações dos objetos matemáticos para que possamos pensar matematicamente. [...] Assim, a visualização é protagonista na produção de sentidos e na aprendizagem matemática.

Nos questionários, os estudantes informaram se estariam disponíveis para responder a uma entrevista sobre a atividade. Apenas as estudantes 2Q2, 2Q6 e 2Q7 (Cálculo 3, IFM) responderam à entrevista, apesar de outros estudantes da turma terem se disponibilizado a respondê-la. Nenhum estudante da TE2 (Cálculo B, CEng) aceitou participar da entrevista, alguns justificaram falta de tempo devido a estarem no final de semestre.

Nas entrevistas com discentes estes apontaram suas impressões sobre a atividade:

Eu gostei bastante de utilizar o aplicativo ele me auxiliou tanto nas atividades realizadas em sala de aula, como nas atividades que eu realizei em casa depois de conhecê-lo. Ele permitiu que eu visualizasse graficamente uma função e isso auxiliou no momento de desenhar os gráficos (aluno 2Q2, Química Forense, Cálculo 3).

Ver desenhos em 2D as vezes dificulta o entendimento. Eu sempre tive muita dificuldade nessas partes. Por exemplo, um cubo ou um cilindro tem como você saber como ele se comportaria no espaço, porque são figuras que estão associadas a objetos do seu dia a dia. Mas uma hipérbole não é algo do nosso cotidiano e eu não fazia ideia de como ela seria no espaço com o aplicativo você consegue vencer essa barreira (aluno 2Q6, Química Industrial, Cálculo 3).

A enxergar de fato o que acontece com a superfície caso mude um coeficiente ou outro. Dependendo do problema que eu for resolver pode ser mais específico. Acho que a melhor mudança que eu percebi foi conseguir relacionar a superfície com a curva de nível de acordo com os coeficientes, agora eu olhando pra equação já tenho uma ideia do que acontece (aluno 2Q7, Bacharelado em Física, Cálculo 3).

Retomando a definição de *imagem conceitual* de Tall e Vinner, fica evidenciada nas falas das estudantes que a experiência com o aplicativo levou a novos estímulos relacionados aos conceitos:

[...] é a estrutura cognitiva total que está associada ao conceito, a qual inclui todas as figuras mentais, processos e propriedades associadas. Ela é construída ao longo dos anos através de todo tipo de experiência, mudando assim que o indivíduo encontra novos estímulos e amadurece. (TALL e VINNER, 1981, p.152)

Outro resultado obtido pela pesquisadora foi a comparação entre as respostas dos estudantes ao Questionário 1 (Apêndice A) e o Questionário 2 (Apêndice C). As cinco primeiras questões destes questionários eram idênticas e tinham por objetivo verificar o conhecimento pré-atividade e pós-atividade. Apresenta-se na Figura 20 a questão 1 destes questionários, cuja resposta correta é a letra b).

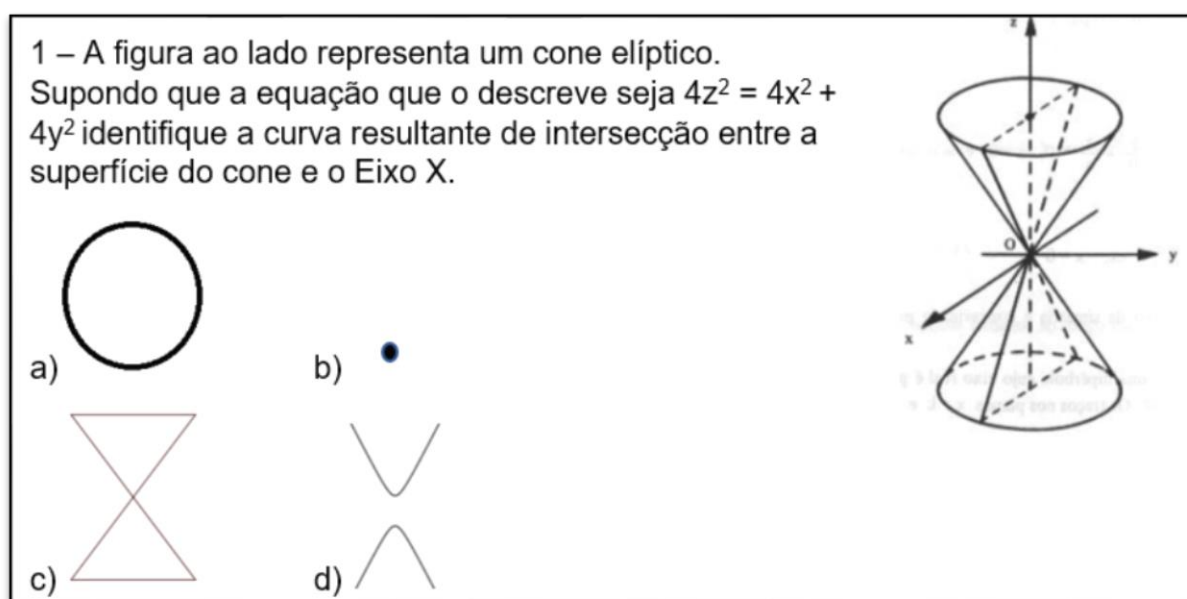


Figura 20 - questão 1 dos questionários pré e pós atividade
Fonte: dados da pesquisadora, 2019

A Tabela 2 mostra o índice de acertos dos estudantes das turmas TE1 (Cálculo B, CEng) e TQ1 (Cálculo 3, IFM) que foram observadas no primeiro semestre de 2019. A tabela mostra também o índice de acertos dos estudantes das turmas TE2 (Cálculo B, CEng) e TQ2 (Cálculo 3, IFM) nas quais as atividades foram realizadas.

Considerando as respostas fornecidas para esta questão, é possível afirmar que os melhores resultados em geral, são aqueles obtidos após a realização da atividade com Realidade Aumentada.

A análise completa das cinco questões encontra-se no Apêndice F.

Tabela 2 - Respostas da questão 1 antes da atividade e após a atividade

Turma	A		B		C		D		Em branco	
	Pré	Pós	Pré	Pós	Pré	Pós	Pré	Pós	Pré	Pós
TE1	6,25	-	56,25	-	0,00		37,50		0,00	
TQ1	7,69	-	53,86	-	15,38		15,38		7,69	
TE2	11,11	4,76	44,44	61,80	18,52	28,68	25,93	4,76	0,00	0,00
TQ2	5,88	0,00	41,17	71,43	29,41	28,57	17,64	0,00	0,00	0,00

Fonte: dados da pesquisadora, 2019

Analisando o total das respostas fornecidas nos testes antes e depois da atividade com o *MateAR*, temos na TQ2 (IFM) a evolução do percentual de acertos

de 42,68% no Questionário 1, para 55,71% no Questionário 2. Já na TE2 (CEng) o percentual de acertos variou de 55,56% no Questionário 1, para 64,76% no Questionário 2.

Os estudantes detalham a alteração da compreensão das superfícies quádricas e representações tridimensionais após a interação com o aplicativo, de forma positiva, inclusive relatam continuar com a utilização do aplicativo no restante da disciplina.

Um dos alunos afirmou

Eu continuo usando, achei muito legal a visualização dele, e ajudou muito e tenho dificuldade de me localizar em 3 dimensões e ele me ajuda. Na física muito é análise gráfica né, eu sinto que consigo avaliar mais profundamente o comportamento de uma variável (2Q7, Bacharelado em Física, Cálculo 3).

Os estudantes puderam relatar os pontos negativos do aplicativo, e esses foram elencados em três quesitos, a falta da versão em português, a não compatibilidade com o sistema IOS e, ainda, alguns relataram que o aplicativo travou em algumas execuções.

As docentes D3 (Cálculo 3, IFM) e D4 (Cálculo B, CEng) expuseram suas impressões sobre o aplicativo e a atividade com a turma.

Eu vi que eles se interessaram muito, eu particularmente, não consegui baixar no meu celular, mas percebendo assim, o interesse deles, eles estavam compreendendo (professora D3, Cálculo 3, IFM).

Eu achei que despertou bastante o interesse deles, até quando tu falou da atividade, achei que eles não iriam se envolver tanto, mas eu achei que eles ficaram bem motivados. Eu mesma acabei não participando diretamente da atividade, mas o que eu percebi é que eles gostaram, depois que eu perguntei para eles, foi bem positivo (professora D4, Cálculo B, CEng).

Falaram ainda sobre a possível utilização em turmas futuras:

pela praticidade, eu gostei dele, porque como a gente não tem essa estrutura de estar em laboratório e como nessa disciplina de Cálculo 3 é uma coisa que eles precisam pontualmente, é bem prático (professora D3, Cálculo 3, IFM).

A única dificuldade é a questão que as turmas são muito grandes, isso dificulta um pouco e como a gente mesmo observou, tem gente que não se envolve na atividade, infelizmente, mas quando eles se relacionam bem, tem uma proximidade, eles mesmos se ajudam, então a gente teria que trazer esses que ficam um pouco isolados, de repente, acho que é bem válido, toda aula quando é muitos períodos, acho que chega um ponto que eles tem que fazer uma atividade, colocar eles em ação, porque não tem aprendizado ficar tanto tempo olhando uma aula ali, eles tem que fazer alguma atividade, nesse sentido é interessante trazer esse tipo de coisa para eles fazerem, colocar eles em ação mesmo (professora D4, Cálculo B, CEng).

Diante dos resultados obtidos com estudantes as docentes se mostraram interessadas em usar o aplicativo futuramente. Para tanto a pesquisadora forneceu os links para o aplicativo e para os marcadores necessários para a visualização, não só referentes às superfícies quádricas, mas também a todos os tópicos disponíveis no aplicativo.

6 Considerações Finais

Acreditando que as Tecnologias Digitais devem fazer parte das rotinas de sala de aula inseridas nas práticas docentes, o intuito desta pesquisa foi levar a experiência em Realidade Aumentada às turmas de Cálculo para trabalhar Superfícies Quádricas.

Com as observações nas diferentes disciplinas foram ressaltadas a pertinência do conteúdo de superfícies quádricas tanto para Cálculo B como para Cálculo 3, assim como a diversidade de abordagem nas práticas docentes, identificadas pela pesquisadora.

Antes das atividades com Realidade Aumentada, na busca em diferentes plataformas e diferentes *softwares* a pesquisadora se deparou com prós e contras em vários aplicativos. As desvantagens se tratavam principalmente de problemas de compatibilidade com o sistema IOS, aplicativo desatualizado ou a necessidade de desenvolver modelos tridimensionais para as superfícies quádricas como no *HP Reveal*.

A escolha final recaiu no MateAR, pois este teve os prós superando os contras; mesmo com pontos negativos apontados pelos estudantes, os pontos positivos tornaram a atividade e a manipulação do aplicativo uma importante contribuição para a disciplina.

A elaboração das atividades aplicadas nas turmas priorizou as relações entre seções cônicas e superfícies quádricas com a intenção de propiciar aos estudantes uma reflexão sobre o objeto espacial em questão. A aplicação da atividade, organizando os estudantes em grupos, fomentou as discussões entre eles e possibilitou uma construção coletiva sobre o entendimento de objetos tridimensionais.

Os apontamentos feitos pelos estudantes indicam a urgência na utilização de aplicativos para trabalhar com representação gráfica, especialmente a tridimensional, que sejam em português, com possibilidade de editar equações e que funcionem tanto para o sistema *Android*, como para o sistema *IOS*.

Em geral, pode-se afirmar que a utilização do aplicativo com a tecnologia de Realidade Aumentada, *MateAR*, auxiliou os estudantes na compreensão de gráficos tridimensionais, assim como a aplicação da atividade na turma gerou uma dinâmica

diferente em relação à motivação dos alunos, motivação essa percebida pela pesquisadora e, também, apontada pelas docentes das turmas envolvidas.

Pode-se afirmar também, que o trabalho contribuiu para a área de Educação Matemática através da mudança nas práticas das docentes das turmas envolvidas, ao despertar o interesse na tecnologia utilizada, o que poderá refletir em turmas futuras.

Referências

- ALMEIDA, M. V. de. **Material para o ensino do cálculo diferencial e integral: referências de Tall, Gueudet e Trouche**. 2017. Disponível em: <<https://tede2.pucsp.br/bitstream/handle/20263/2/Marcio%20Vieira%20de%20Almeida.pdf>> Acesso em: 26 jun. 2018.
- ANTON, H. BIVENS, I. DAVIS, S. **Cálculo**, vol 2. 8ª ed. Porto Alegre: Bookman. 2007.
- BARDIN, L. **Análise de Conteúdo**. São Paulo: Edições 70, 2011.
- BICUDO, M. A. V. Pesquisa qualitativa e pesquisa qualitativa segundo a abordagem fenomenológica. *In*. BORBA, M. de C.; ARAÚJO, J. de L. (Org.). **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**. 5ª ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2013. p. 111-124
- BORBA, M. C. SILVA, R. S. R. da. GADANIDIS, G. **Fases das tecnologias digitais em Educação Matemática: sala de aula e internet em movimento**. 1. ed. Belo Horizonte. Autêntica Editora, 2014.
- BITRAGO-PULIDO, R. D. (2015). Incidencia de la realidad aumentada sobre el estilo cognitivo: caso para el estudio de las matemáticas. **Educ. Educ.** Chía, Vol. 18, N. 1, 27-41. 2015. Disponível em: <<https://educacionyeducadores.unisabana.edu.co/index.php/eye/article/view/4372/3964>> Acesso em: 19 ago. 2019.
- D'AMBRÓSIO, U. **Educação matemática: da teoria à prática**. Campinas: Papirus, (1ª ed 1996), 2009.
- DREYFUS, T. Advanced Mathematical Thinking Processes. *In*: TALL, D (Org.). **Advanced Mathematical Thinking**. Dordrecht: Kluwer, 1991. Cap. 2.
- DUBINSKY, E. Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking. *In*: TALL, D (Org.). **Advanced Mathematical Thinking**. Dordrecht: Kluwer, 1991. Cap. 7.
- DUBINSKY, E. TALL, D. Advanced Mathematical Thinking and the Computer. *In*: TALL, D (Org.). **Advanced Mathematical Thinking**. Dordrecht: Kluwer, 1991. Cap. 14.
- EISENBERG, T. Functions and associated learning difficulties. *In*: TALL, D (Org.). **Advanced Mathematical Thinking**. Dordrecht: Kluwer, 1991. Cap. 9.
- FLORES, N. V. F. Cálculo Diferencial E Integral Asistido Con Ipad Una Experiencia Con Tecnología Móvil En El Aula. *In*.: Congreso Iberoamericano De Educación Matemática, 8, 2017, Madri. **Libro de Actas del Congreso Iberoamericano De Educación Matemática**, Madri, 2017. Disponível em <http://www.cibem.org/images/site/LibroActasCIBEM/ComunicacionesLibroActas_CB1-100.pdf> Acesso em 30 jun. 2018.

GOMES, N. A. **Possibilidades do Uso da Realidade Aumentada na Visualização de Elementos Matemáticos**. 2015. Disponível em: <<https://repositorio.bc.ufg.br/tede/bitstream/tede/5465/5/Disserta%C3%A7%C3%A3o%20-%20Neades%20Afonso%20Gomes%20-%202015.pdf>> Acesso em: 09 out. 2018.

HAREL, G. KAPUT, J. The role of conceptual entities and their symbols in building advanced mathematical concepts. In: TALL, D (Org.). **Advanced Mathematical Thinking**. Dordrecht: Kluwer, 1991. Cap. 6.

KIRNER, C. SISCOOTTO, R. **Realidade Virtual e Aumentada: Conceitos, Projeto e Aplicações**. Porto Alegre. Editora da SBC, 2007.

KIRNER, C. KIRNER, T.G. Evolução e Tendências da Realidade Virtual e da Realidade Aumentada. In: RIBEIRO, M. W. S. ZORZAL, E. R. **Realidade Virtual e Aumentada: Aplicações e Tendências**. Uberlândia. Editora da SBC, 2011.

LÉVY, P. **As Tecnologias da Inteligência – o futuro do pensamento na era da informática**. Rio de Janeiro: Editora 34, (1ª ed 1990), 1993.

LÉVY, P. **Cibercultura**. São Paulo: Editora 34. 1999.

MARTINS JR, J. C. **Ensino De Derivadas Em Cálculo I: Aprendizagem A Partir Da Visualização Com O Uso Do Geogebra**. 2015. Disponível em: <https://www.ppgedmat.ufop.br/arquivos/dissertacoes_2015/Jose%20Cirqueira%20Martins%20Junior.pdf> Acesso em: 26 jun. 2018.

MILGRAM, P. et. al. Augmented Reality: A Class of Displays on the Reality-Virtuality Continuum. **Telemanipulator and Telepresence Technologies**, SPIE, V.2351, p. 282-292, 1994.

MINAYO, M. C. S. **Pesquisa Social: Teoria, Método e Criatividade**. Petrópolis. Editora Vozes, 2002.

MORAN, J.M. **A educação que desejamos: Novos desafios e como chegar lá**. Campinas, SP: Papirus, 2007.

MOUSA, A. H., YMAI, L. H., CAMARGO, S. da S. GráficosRA: Um Aplicativo baseado em Realidade Aumentada para Ensino de Cálculo. **Revista do CCEI**, Bagé, v. 22, n. 37, p. 52-62, 2017. Disponível em: <http://revista.urcamp.tche.br/index.php/Revista_CCEI/article/view/239> Acesso em: 06 jul. 2018.

NOVAL, M. D. M. **Realidade Aumentada no ensino da Matemática: um caso de estudo**. 2013. Disponível em: <<https://repositorio.utad.pt/handle/10348/3029>> Acesso em: 19 ago. 2019

PEREIRA, L. T., OLIVEIRA, D. C. B., COUTO, I. F., OLIVEIRA, A. M. de, SILVA, R. L. S. Uma Ferramenta de Apoio ao Ensino de Cálculo com Realidade Aumentada. In.: Simpósio Brasileiro de Informática na Educação, 28. 2017, Recife. **Anais do**

XXVIII Simpósio Brasileiro de Informática na Educação, Recife, 2017. Disponível em: <<http://www.br-ie.org/pub/index.php/sbie/article/view/7588>> Acesso em: 06 jul. 2018.

RIBEIRO, M. W. S. ZORZAL, E. R. **Realidade Virtual e Aumentada: Aplicações e Tendências**. Uberlândia. Editora da SBC, 2011.

RICALDONI, M. A. G. **Construção e interpretação de Gráficos com o uso de softwares no ensino de cálculo: trabalhando com imagens conceituais Relacionadas a derivadas de funções reais**. 2014. Disponível em: <<http://www.repositorio.ufop.br/bitstream/123456789/3563/1/DISSETA%C3%87%C3%83O.pdf>> Acesso em 26 jun. 2018.

ROMANELLO, L. A, MALTEMPI, M. V. A Utilização Do Smartphone No Ensino De Função: A Visão Dos Alunos. In.: Encontro Nacional de Educação Matemática, 12. São Paulo, 2016. **Anais do XII Encontro Nacional de Educação Matemática**. São Paulo, 2016. Disponível em: <http://sinop.unemat.br/site_antigo/prof/foto_p_downloads/fot_15336uso_de_smaytp_hones_pdf_USO_DE_SMARTPHONES.pdf> Acesso em: 29 jun. 2018.

RUIZ LEDESMA, E. F, GUTIERREZ GARCIA, J. J, GARAY JIMENEZ, L. I. Visualizando problemas de la derivada con aplicaciones en dispositivos móviles. **Innov. educ. (Méx. DF)**, México, v. 18, n. 76, p. 39-67, abr. 2018. Disponível em: <http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-26732018000100039&lng=es&nrm=iso>. Acesso em: 19 ago. 2019.

SALINAS, P, GONZÁLEZ-MENDÍVIL, Augmented reality and solids of revolution. **E. Int J Interact Des Manuf** Paris: v. 11 p. 829-837, 2017. Disponível em: <<https://link.springer.com/article/10.1007/s12008-017-0390-3>>. Acesso em: 20 ago. 2019.

SILVA, F. O. da. **Utilização de dispositivos móveis e recursos de Realidade Aumentada nas aulas de Matemática para elucidação dos Sólidos de Platão**. 2017. Disponível em: <https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/151423/silva_f_me_prud.pdf?sequence=3&isAllowed=y>. Acesso em: 01 out. 2018.

SOUSA, M. C. J. **O uso da realidade aumentada para o ensino de Física**. 2015. Disponível em: <http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/81/81131/tde-21082015-170850/publico/Marcelo_Clayton_de_Jesus_e_Sousa.pdf> Acesso em: 14 out. 2018.

TALL, D. **Advanced Mathematical Thinking**. Dordrecht: Kluwer, 1991.

TALL, D. VINNER, S. Concept Image and Concept Definition in Mathematics, with Special Reference to Limits and Continuity. **Educational Studies in Mathematics**, v. 12, p. 151 – 169, 1981. Disponível em: <<http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1981a-concept-image.pdf>>. Acesso em 10 dez. 2018.

THIOLLENT, M. **Metodologia da Pesquisa-Ação**. São Paulo. Cortez Editora, 1986.

TRIPP, D. Pesquisa-ação: uma introdução metodológica. **Educação e Pesquisa**. São Paulo, v. 31, n. 3, p. 443-466, 2005. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php?pid=S1517-97022005000300009&script=sci_abstract&tlng=pt> Acesso em: 11 nov. 19

VINNER, S. The Role of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics In: TALL, D (Org.). **Advanced Mathematical Thinking**. Dordrecht: Kluwer, 1991. Cap. 5.

Apêndices

Apêndice A - Questionário diagnóstico - Visualização de Superfícies Quádricas

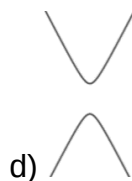
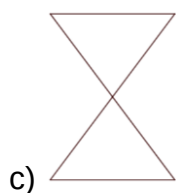
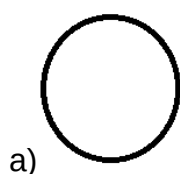
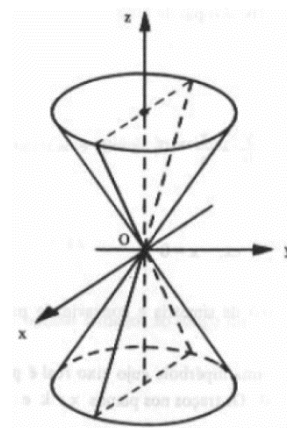
Nome:

E-mail:

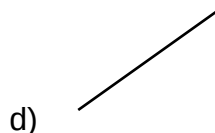
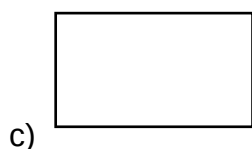
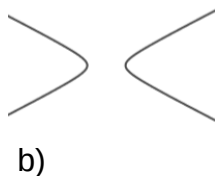
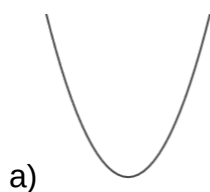
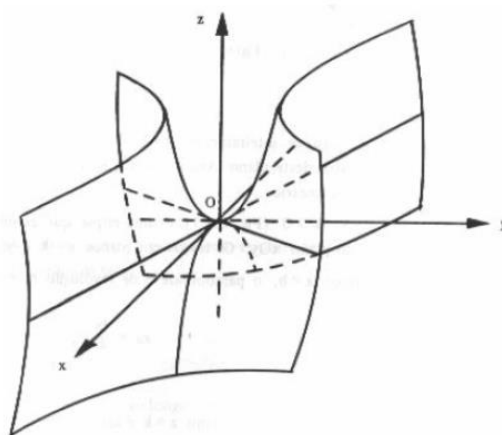
Responda às questões abaixo sobre superfícies quádricas, se não souber a resposta deixe a questão em branco.

1 – A figura ao lado representa um cone elíptico.

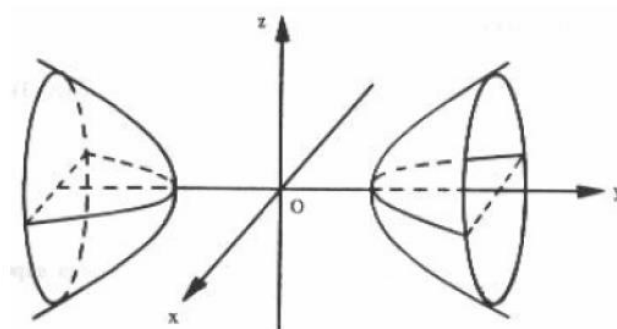
Supondo que a equação que o descreve seja $4z^2 = 4x^2 + 4y^2$ identifique a curva resultante de intersecção entre a superfície do cone e o Eixo X.



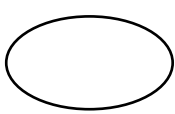
2 – Considerando o parabolóide hiperbólico ao lado, identifique a curva que o intersecta em um plano paralelo ao plano xy, quando $y > 0$.



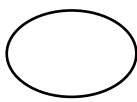
3 – No hiperboloide de duas folhas ao lado, de equação $-4x^2 + y^2 - 4z^2 = 9$ considerando um plano paralelo ao

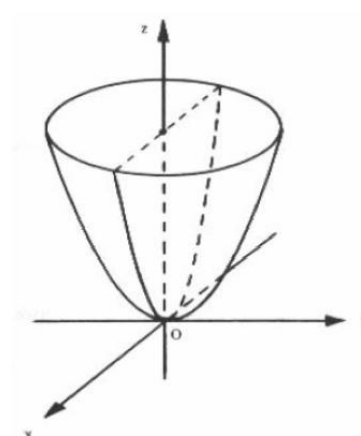


plano xz , a secção que intersecta a superfície é:

- a)  b)  c)  d) 

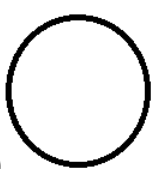
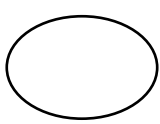
4 – No paraboloide elíptico ao lado teremos intersecção no plano $z=-5$:

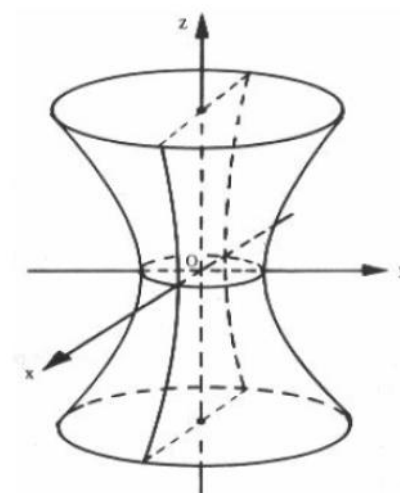
- a)  b)  c)  d) 



qual

5 – Considere o hiperboloide de uma folha ao lado, de equação $x^2 + y^2 - z^2 = 4$, a intersecção no plano xz é:

- a)  b)  c)  d) 



Responda agora sobre suas impressões:

6 – Você considera que o conhecimento sobre superfícies quádricas é importante para a disciplina de Cálculo que está cursando:

() Sim () Não () Indiferente () Outro, explique.

7 – Você utiliza seu *smartphone* para estudos:

() Sim () Não () Não tenho *smartphone*.

8 – Você acredita que seria importante um aplicativo que auxiliasse na visualização dos conteúdos de sua disciplina de Cálculo.

() Sim () Não () Indiferente () Outro, explique.

9 - Deixe comentários ou sugestões de como esta disciplina poderia ser trabalhada para facilitar o seu aprendizado.

Apêndice B - Atividades sobre Superfícies Quádricas

Nome:

Manipule os marcadores das diversas superfícies quádricas, altere coeficientes, projete planos que interseccionem as figuras e observe as formas, em seguida responda:

1) Qual curva intersecta um parabolóide hiperbólico no plano yz?

2) Qual curva intersecta um hiperboloide de uma folha no plano xy?

3) Para o elipsoide definido abaixo:

a) responda quais são os pontos de interseção com os eixos:

Elipsoide

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1$$

b) Informe a curva de interseção dessa superfície com os seguintes planos:

x =1	
x =-2	
y =2	
y =-1	
z =3	
z =-3	

c) Qual a equação da maior esfera inscrita no elipsoide?

d) Qual a equação da menor esfera circunscrita no elipsoide?

4) Para o parabolóide elíptico definido genericamente como:

PARABOLOIDE ELIPTICO

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

a) Altere os coeficientes gerando dois parabolóides, um elíptico e um circular. Anote as equações.

Equação	Pontos de intersecção com os eixos
1.	
2.	

b) Para o parabolóide descrito no número 2, descreva a curva de intersecção com os seguintes planos:

x = 0	
y = 1	
z = -2	

c) Com o marcador genérico, represente

$$z = -\left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}\right). \text{ Qual o efeito produzido no gráfico?}$$

5) Com base nas equações representadas no aplicativo informe as respectivas equações e após represente-as com o marcador genérico.

Superfície	Equação
Hiperbolóide de uma folha simétrico ao eixo x.	
Hiperbolóide de uma folha simétrico ao eixo y	
Hiperbolóide de duas folhas simétrico ao eixo x	
Hiperbolóide de duas folhas simétrico ao eixo y	

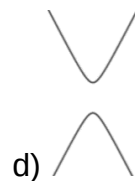
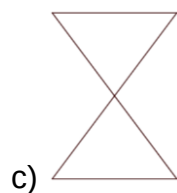
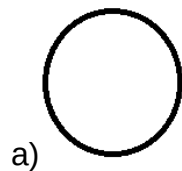
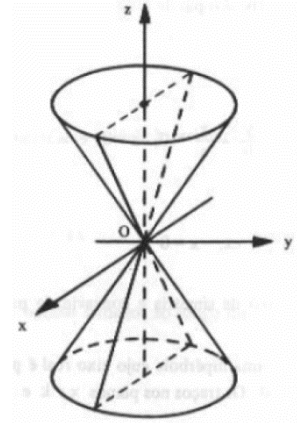
Apêndice C - Questionário diagnóstico 2 - Visualização de Superfícies Quádricas

Nome:

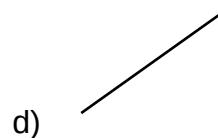
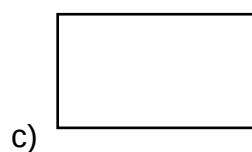
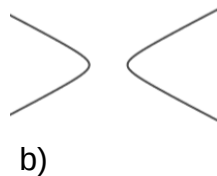
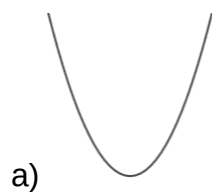
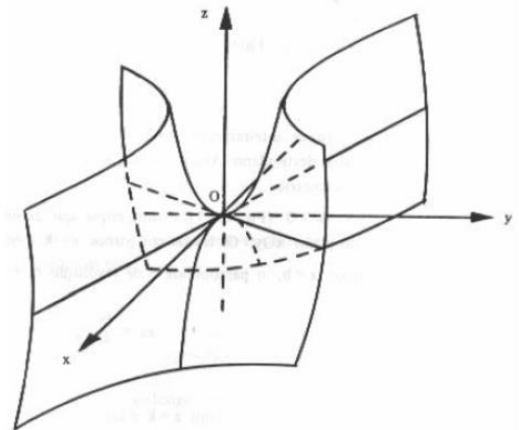
E-mail:

Responda às questões abaixo sobre superfícies quádricas, se não souber a resposta deixe a questão em branco.

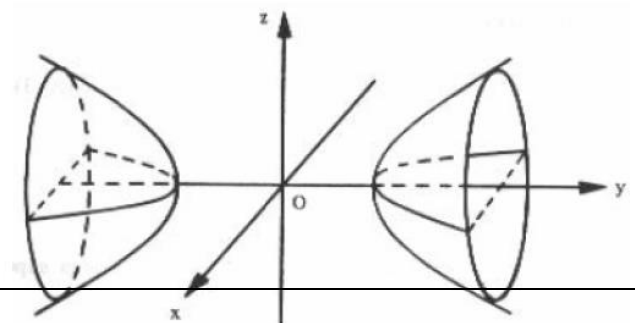
1 – A figura ao lado representa um cone elíptico. Supondo que a equação que o descreve seja $4z^2 = 4x^2 + 4y^2$ identifique a curva resultante de intersecção entre a superfície do cone e o Eixo X.



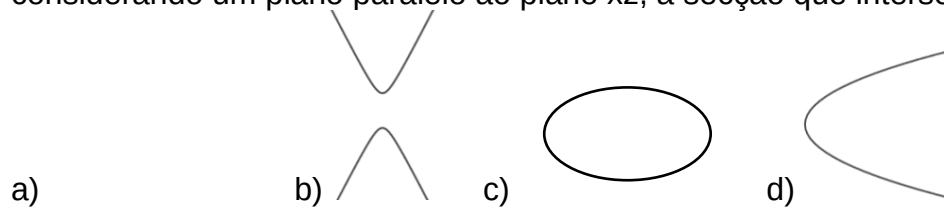
2 – Considerando o parabolóide hiperbólico ao lado, identifique a curva que o intersecta em um plano paralelo ao plano xy, quando $y > 0$.



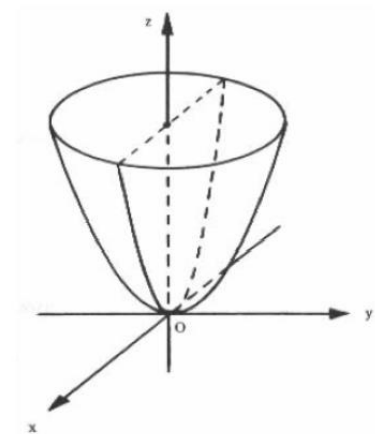
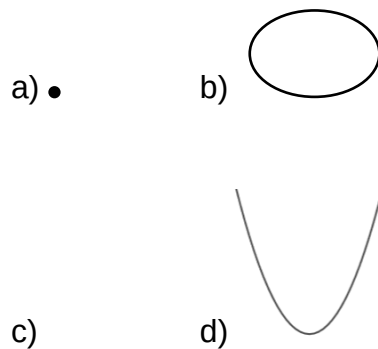
3 – No hiperboloide de duas folhas ao lado, de equação $-4x^2 + y^2 - 4z^2 = 9$



considerando um plano paralelo ao plano xz , a secção que intersecta a superfície é:

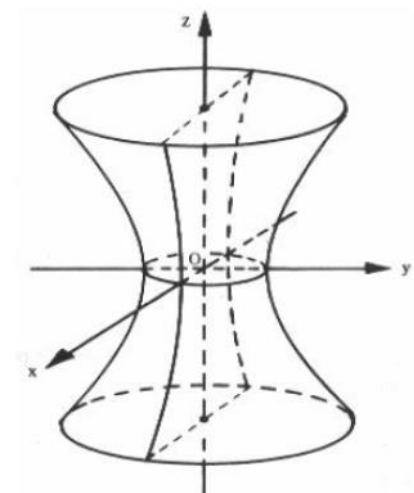
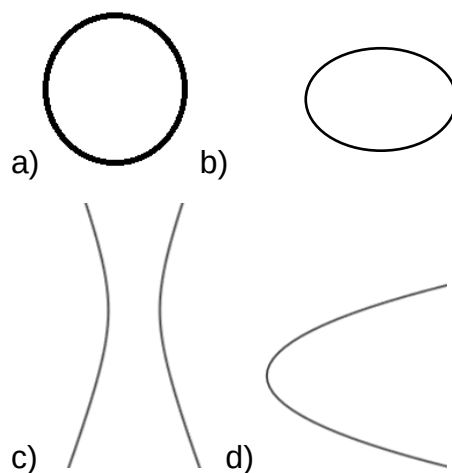


4 – No parabolóide elíptico ao lado teremos intersecção no plano $z=-5$:



qual

5 – Considere o hiperbolóide de uma folha ao lado, de equação $x^2 + y^2 - z^2 = 4$, a intersecção no plano xz é:



Responda agora sobre suas impressões:

6 – Você acredita que a utilização do aplicativo com Realidade Aumentada foi/é importante para a disciplina de Cálculo que está cursando? Comente.

7 – Ao visualizar objetos tridimensionais em Realidade Aumentada, você percebeu elementos de forma diferente de como percebia antes?

() Muito melhor () Melhor () Indiferente () Pior () Muito Pior Comente.

8 – Você pretende utilizar o aplicativo como apoio para seus estudos no restante da disciplina.

() Sim () Não Explique.

9 - Deixe comentários apontando pontos positivos e negativos do aplicativo.

10 – Você se dispõe a responder a uma entrevista sobre a atividade?

Apêndice D - Entrevista Semiestruturada Docentes

1 – Qual sua formação? Como é sua experiência com Cálculo? Há quanto tempo trabalha com Cálculo 3/B?

2 – Você acredita que os estudantes compreendem gráficos em três dimensões? Quais as implicações para a disciplina?

3 – Qual a sua opinião sobre o uso das tecnologias digitais em sala de aula? Utiliza alguma?

4 – Você recomenda algum material complementar para que os estudantes utilizem em casa, como livros, *softwares*, ...?

Após aplicação da atividade:

5 – Qual a sua opinião sobre o aplicativo em Realidade Aumentada?

6 - Você acredita que é um bom aplicativo para utilizar em turmas futuras?

Apêndice E - Entrevista Semiestruturada Estudantes

1 – Conte um pouco sobre sua trajetória acadêmica? Qual o seu curso? Como foram as disciplinas de Cálculo até chegar no Cálculo 3?

2 – Diga o quanto você gostou de utilizar o aplicativo.

3 – Você respondeu no questionário que percebeu os elementos de objetos tridimensionais de forma [Resposta do estudante] que antes. Explique como o aplicativo ajudou.

4 – Você considera que a atividade aplicada e o uso posterior do aplicativo foram/são importantes para a disciplina de Cálculo que está cursando? E para o seu curso?

5 – Você tem alguma outra consideração sobre a atividade desenvolvida, o aplicativo ou a tecnologia de Realidade Aumentada?

Apêndice F - Questão a questão

Aqui serão mostradas as respostas fornecidas pelos estudantes às questões de múltipla escolha dos questionários, em ambos as questões relativas às Superfícies Quádricas se repetem, assim as questões de 1 a 5 terão duas respostas das turmas TE2 e TQ2, identificadas como TE2 – pré e TQ2 – pré para as respostas fornecidas antes da atividade com Realidade Aumentada e TE2 – pós e TQ2 – pós para as respostas fornecidas após a atividade com Realidade Aumentada.

Questão 1

A resposta correta é alternativa B, os estudantes a responderam conforme tabela 3:

Tabela 3 - Respostas questão 1 antes da atividade e após a atividade

Turma	A		B		C		D		Em branco	
	Pré	Pós	Pré	Pós	Pré	Pós	Pré	Pós	Pré	Pós
TE1	6,25	-	56,25	-	0,00		37,50		0,00	
TQ1	7,69	-	53,86	-	15,38		15,38		7,69	
TE2	11,11	4,76	44,44	61,80	18,52	28,68	25,93	4,76	0,00	0,00
TQ2	5,88	0,00	41,17	71,43	29,41	28,57	17,64	0,00	0,00	0,00

Fonte: dados da pesquisadora, 2019

Questão 2

A resposta correta é alternativa A, os estudantes a responderam conforme tabela 4:

Tabela 4 - Respostas questão 2 antes da atividade e após a atividade

Turma	A		B		C		D		Em branco	
	Pré	Pós	Pré	Pós	Pré	Pós	Pré	Pós	Pré	Pós
TE1	37,50	-	18,75	-	6,25	-	31,25	-	6,25	-
TQ1	69,24	-	15,38	-	0,00	-	15,38	-	0,00	-
TE2	44,44	57,14	44,44	19,04	0,00	0,00	11,12	23,82	0,00	0,00
TQ2	11,76	21,43	29,41	28,57	23,52	0,00	29,41	50,00	5,90	0,00

Fonte: dados da pesquisadora, 2019

Questão 3

A resposta correta é alternativa C, os estudantes a responderam conforme tabela 5:

Tabela 5 - Respostas questão 3 antes da atividade e após a atividade

Turma	A		B		C		D		Em branco	
	Pré	Pós	Pré	Pós	Pré	Pós	Pré	Pós	Pré	Pós

TE1	50,00	-	12,50	-	18,75	-	12,50	-	6,25	-
TQ1	23,08	-	0,00	-	7,69	-	61,54	-	7,69	-
TE2	29,63	14,29	11,11	9,53	33,33	33,33	25,93	42,85	0,00	0,00
TQ2	47,05	71,43	17,65	0,00	17,65	0,00	11,77	28,57	5,88	0,00

Fonte: dados da pesquisadora, 2019

Questão 4

A resposta correta é alternativa C, os estudantes a responderam conforme tabela 6:

Tabela 6 - Respostas questão 4 antes da atividade e após a atividade

Turma	A		B		C		D		Em branco	
	Pré	Pós	Pré	Pós	Pré	Pós	Pré	Pós	Pré	Pós
TE1	31,25	-	12,50	-	50,00	-	6,25	-	0,00	-
TQ1	0,00	-	15,38	-	69,24	-	15,38	-	0,00	-
TE2	3,70	9,52	3,70	0,00	74,08	80,96	14,82	9,52	3,70	0,00
TQ2	11,76	14,28	5,88	0,00	70,60	78,58	5,88	7,14	5,88	0,00

Fonte: dados da pesquisadora, 2019

Questão 5

A resposta correta é alternativa C, os estudantes a responderam conforme tabela 7:

Tabela 7 - Respostas questão 5 antes da atividade e após a atividade

Turma	A		B		C		D		Em branco	
	Pré	Pós	Pré	Pós	Pré	Pós	Pré	Pós	Pré	Pós
TE1	6,25	-	31,25	-	37,50	-	18,75	-	6,25	-
TQ1	0,00	-	23,07	-	69,24	-	7,69	-	0,00	-
TE2	0,00	0,00	11,11	4,76	81,48	90,48	7,40	4,76	0,00	0,00
TQ2	0,00	0,00	29,47	14,29	64,71	85,71	5,82	0,00	0,00	0,00

Fonte: dados da pesquisadora, 2019

A partir da questão 6, as perguntas são sobre impressões dos estudantes, no primeiro questionário aplicado.

Questão 6- Você considera que o conhecimento sobre superfícies quádricas é importante para a disciplina de Cálculo que está cursando, respostas na Tabela 7:

Tabela 8 - Respostas questão 6 questionário 1

Turma	Sim	Não	Indiferente	Outro	Em branco
TE1	81,25%	6,25%	0%	6,25%	6,25%
TQ1	84,62%	0%	7,69%	7,69%	0%
TE2	96,3%	0%	3,7%	0%	0%
TQ2	100%	0%	0%	0%	0%

Fonte: dados da pesquisadora, 2019

Questão 7- Você utiliza seu *smartphone* para estudos, respostas na Tabela 8:

Tabela 9 - Respostas questão 7 questionário 1

Turma	Sim	Não	Não tenho <i>smartphone</i>	Em branco
TE1	93,75%	6,25%	0%	0%
TQ1	84,62%	15,38%	0%	0%
TE2	88,89%	11,11%	0%	0%
TQ2	100%	0%	0%	0%

Fonte: dados da pesquisadora, 2019

Questão 8- Você acredita que seria importante um aplicativo que auxiliasse na visualização dos conteúdos de sua disciplina de Cálculo, respostas na Tabela 9:

Tabela 10 - Respostas questão 8 questionário 1

Turma	Sim	Não	Indiferente	Outro	Em branco
TE1	81,25%	0%	12,5%	6,25%	0%
TQ1	92,31%	0%	7,69%	0%	0%
TE2	100%	0%	0%	0%	0%
TQ2	100%	0%	0%	0%	0%

Fonte: dados da pesquisadora, 2019

As próximas questões foram aplicadas no segundo questionário, sobre a atividade com Realidade Aumentada.

Questão 7 - Ao visualizar objetos tridimensionais em Realidade Aumentada, você percebeu elementos de forma diferente de como percebia antes? Respostas na Tabela 10.

Tabela 11 - Respostas questão 7 questionário 2

Turma	Muito melhor	Melhor	Indiferente	Pior	Muito Pior
TE2	23,81%	66,66%	9,53%	0%	0%
TQ2	35,71%	57,14%	7,15%	0%	0%

Fonte: dados da pesquisadora, 2019

Questão 8 - Você pretende utilizar o aplicativo como apoio para seus estudos no restante da disciplina. Respostas na Tabela 11.

Tabela 12 - Respostas questão 8 questionário 2

Turma	Sim	Não	Em branco
TE2	66,67%	33,33%	0%

TQ2	85,72%	14,28%	0%
-----	--------	--------	----

Fonte: dados da pesquisadora, 2019

Anexos

Anexo A – Programa Cálculo B

Ementa:

Séries infinitas. Geometria analítica: coordenadas polares, cilíndricas e esféricas. Vetores tridimensionais. Funções vetoriais de uma variável. Funções reais de várias variáveis. Derivadas parciais. Regra da cadeia. Derivadas direcionais e gradiente. Máximos e mínimos de funções de várias variáveis. Integrais duplas. Integrais triplas. Tópicos de cálculo vetorial. Aplicações da integração múltipla. Aplicabilidade do Cálculo de várias variáveis.

Objetivos:

Objetivo geral: Levar o aluno à compreender o conceito de convergência das séries de potências e a possibilidade da aproximação de funções por essas séries.

Habilitar o estudante para a compreensão da base conceitual e metodológica do cálculo diferencial e integral de funções de várias variáveis, visando a resolução de problemas e interpretação de resultados nas engenharias.

Objetivos específicos: Estudo das séries de potências e sua aplicação a definição de funções elementares. Compreender os conceitos, as propriedades de continuidade e diferenciabilidade, das funções reais (escalares) de várias variáveis reais e das funções vetoriais de uma e várias variáveis reais. Estudar o conceito de derivada direcional e gradiente e aplicá-lo à construção do plano tangente e ao encontro de extremos locais. Estudar integrais duplas e triplas e seus métodos de cálculo. Estudar integrais de linha e superfície e suas aplicações geométricas e físicas. Estudar os teoremas de Green, Gauss e Stokes e seus significados físicos.

Conteúdo programático:

Unidade 1 – Séries.

Unidade 2 – Geometria analítica.

Unidade 3 – Vetores.

Unidade 4 – Funções vetoriais de uma variável.

Unidade 5 – Funções reais de várias variáveis.

Unidade 6 – Derivadas parciais.

Unidade 7 – Integrais múltiplas.

Unidade 8 – Aplicações da integração múltipla.

Unidade 9 – Tópicos de Cálculo Vetorial: Campos vetoriais, integrais de linha, Teorema de Green, integrais de superfície, Integrais de Fluxo, Teorema da divergência, Teorema de Stokes.

Unidade 10 – Casos de estudo na Engenharia.

Bibliografia:

Bibliografia Básica:

1. Anton. H., Bivens, I. e Davis, S., Cálculo, Volume 2. Bookman, 2007.
2. Stewart, J., Cálculo, Volume 2. Thomson Learning, 2008.
3. Thomas, G., Cálculo, Volume 2. Pearson, 2007.

Bibliografia Complementar:

2. Edwards, C. H., Penney, D., Cálculo e Geometria Analítica, Volume 2. Prentice-Hall, 2005.
3. Larson, R. Cálculo Aplicado - Curso Rápido, Cengage, 2011.
4. Burden, R. L. e Fayres, J. D., Análise Numérica. Thomson Learning, 2008.
5. Anton, H. e Rorres, C., Álgebra Linear com Aplicações. Bookman, 2001.
1. Leithold, L., O Cálculo com Geometria Analítica, Volume 2. Harbra, 2003.

Anexo B – Programa Cálculo 3

Ementa:

Funções reais de várias variáveis reais. Limite e continuidade. Derivadas parciais e diferenciabilidade. Derivada direcional e gradiente. Fórmula de Taylor. Extremos locais e globais. Funções vetoriais de várias variáveis. Divergência e rotacional. Integrais múltiplas e suas aplicações. Integral de Linha e de superfície e suas aplicações. Teoremas integrais.

Objetivos:

Gerais:

As habilidades que, espera-se, o aluno virá a desenvolver ao longo do curso, podem ser colocadas em três níveis:

1. Compreensão dos conceitos fundamentais do Cálculo Diferencial e Integral de funções reais e vetoriais de várias variáveis.
2. Habilidade em aplicá-los a alguns problemas dentro e fora da Matemática.
3. Refinamento matemático suficiente para compreender a importância e a necessidade das demonstrações, assim como a cadeia de definições e passos intermediários que as compõem, criando a base para o estudo de disciplinas posteriores.

Específicos:

- Compreender os conceitos, as propriedades de continuidade e diferenciabilidade, das funções reais (escalares) de várias variáveis reais e das funções vetoriais de uma e várias variáveis reais.
- Estudar o conceito de derivada direcional e gradiente e aplicá-los à construção do plano tangente e ao encontro de extremos locais.
- Estudar integrais duplas e triplas e seus métodos de cálculo.
- Estudar integrais de linha e superfície e suas aplicações geométricas e físicas.
- Estudar os teoremas de Green, Gauss e Stokes e seus significados físicos.

Conteúdo programático:

Unidade 1- Funções vetoriais de uma variável:

- 1.1. Definição, Curvas em $\mathbb{R}^n$;
- 1.2. Coordenadas cartesianas, esféricas e cilíndricas;
- 1.3. Limite, Continuidade e Diferenciabilidade de funções vetoriais de uma variável;

1.4. Comprimento de arco;

1.5. Aplicações à Física;

1.6. Superfícies quádricas.

Unidade 2 – Funções reais (escalares) de várias variáveis (ou Campos Escalares):

2.1. Funções reais de várias variáveis: definição, exemplos e representação gráfica;

2.2. Limite e continuidade: local e global (topologia elementar do $\mathbb{R}^n$);

2.3. Derivadas parciais, diferenciais e diferenciabilidade, interpretação geométrica;

2.4. Relação entre continuidade e diferenciabilidade;

2.5. A regra da cadeia e o teorema do valor médio;

2.6. A Derivada Direcional e o Gradiente, interpretação Geométrica;

2.7. Derivadas parciais e diferenciais de ordem superior;

2.8. A Classificação de pontos críticos para funções de duas variáveis e os Multiplicadores de Lagrange;

2.9. Fórmula de Taylor.

Unidade 3 – Integração Múltipla

3.1. Integral Dupla e o seu cálculo através de Integrais Iteradas (Teorema de Fubini);

3.2. Mudança de variáveis na Integral Dupla;

3.3. Integral Tripla e o seu cálculo através de Integrais Iteradas;

3.4. Mudança de variáveis na Integral Tripla;

3.5. Aplicações geométricas e físicas das Integrais Múltiplas; Integrais de funções dependentes de um parâmetro e Integrais múltiplas impróprias;

Unidade 4 – Funções Vetoriais de Várias Variáveis (ou Campos Vetoriais).

4.1. Definição, exemplos;

4.2. Limites e Continuidade;

4.3. Divergência e Rotacional;

4.4. Integrais de Linha e independência do Caminho;

4.5. O Teorema de Green;

4.6. Campos Conservativos;

- 4.7. Superfícies Parametrizadas;
- 4.8. Área de uma Superfície;
- 4.9. Integral de Superfície de um Campo Escalar e de um Campo Vetorial;
- 4.10. O Teorema da Divergência de Gauss;
- 4.11. O Teorema de Stokes.

Bibliografia:

Bibliografia Básica:

- ANTON, H. et. al. Cálculo, vol. 2. 8ª ed. Bookman. 2007;
- ÁVILA, Geraldo S. Cálculo 2 e 3 . Livros Técnicos e Científicos. 1992;
- EDWARDS, B., Hostetler, R.& Larson, R. Cálculo com Geometria Analítica, vol. 2. LTC. 1994;
- EDWARDS, C. H., Penney, D. E. Cálculo com Geometria Analítica, vol. 2 – Prentice Hall do Brasil – 1997;
- LEITHOLD, Louis. O cálculo com Geometria Analítica, vol. 2. Harbra. 1976;
- STEWART, James. Cálculo, vol.2. Pioneira. 2001.

Bibliografia Complementar:

- APOSTOL, T. M. Calculus, vol. 2. John Wiley & Sons Inc. 1967;
- COURANT, R. Cálculo Diferencial e Integral, vol. 2. Editora Globo. 1970;
- JR. EDWARDS, C. H. Advanced Calculus of Several Variables. Dover. 1995;
- LIMA, Elon L. Curso de Análise, vol. 2. Projeto Euclides, Impa. 1976.