

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PELOTAS
Centro de Desenvolvimento Tecnológico
Programa de Pós-Graduação em Computação



Tese

**Estratégia CDM: Explorando Consenso Fuzzy no Gerenciamento de Memórias
Híbridas**

Lizandro de Souza Oliveira

Pelotas, 2021

Lizandro de Souza Oliveira

**Estratégia CDM: Explorando Consenso Fuzzy no Gerenciamento de Memórias
Híbridas**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Computação do Centro de Desenvolvimento Tecnológico da Universidade Federal de Pelotas, como requisito parcial à obtenção do título de Doutor em Ciência da Computação.

Orientador: Prof. Dr. Adenauer Correa Yamin
Coorientadores: Prof^a. Dra. Renata Hax Sander Reiser
Prof. Dr. Mauricio Lima Pilla

Pelotas, 2021

Universidade Federal de Pelotas / Sistema de Bibliotecas
Catalogação na Publicação

O48e Oliveira, Lizandro de Souza

Estratégia CDM : explorando consenso fuzzy no gerenciamento de memórias híbridas / Lizandro de Souza Oliveira ; Adenauer Correa Yamin, orientador ; Renata Hax Sander Reiser, Mauricio Lima Pilla, coorientadores. — Pelotas, 2021.

172 f. : il.

Tese (Doutorado) — Programa de Pós-Graduação em Computação, Centro de Desenvolvimento Tecnológico, Universidade Federal de Pelotas, 2021.

1. Lógica fuzzy. 2. Medidas de consenso fuzzy. 3. Memórias híbridas. I. Yamin, Adenauer Correa, orient. II. Reiser, Renata Hax Sander, coorient. III. Pilla, Mauricio Lima, coorient. IV. Título.

CDD : 005

Lizandro de Souza Oliveira

Estratégia CDM: Explorando Consenso Fuzzy no Gerenciamento de Memórias Híbridas

Tese aprovada, como requisito parcial, para obtenção do grau de Doutor em Ciência da Computação, Programa de Pós-Graduação em Computação, Centro de Desenvolvimento Tecnológico, Universidade Federal de Pelotas.

Data da Defesa: 20 de agosto de 2021

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Adenauer Corrêa Yamin (orientador)

Doutor em Ciência da Computação pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Prof^a. Dr^a. Renata Hax Sander Reiser (co-orientadora)

Doutora em Ciência da Computação pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Prof. Dr. Maurício Lima Pilla (co-orientador)

Doutor em Ciência da Computação pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Prof. Dr. Benjamín René Callejas Bedregal

Doutor em Ciência da Computação pela Universidade Federal de Pernambuco.

Prof^a. Dr^a. Hélida Salles Santos

Doutora em Ciência da Computação pela Universidade Federal do Rio Grande do Norte.

Prof. Dr. Rafael Iankowski Soares

Doutor em Ciência da Computação pela Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul.

Dedico este trabalho à Bárbara Neves de Britto, minha esposa, por todo amor e apoio durante todos estes anos, e à Sara Britto Oliveira, nossa filha, motivo de grande felicidade e de muita luz em nossas vidas! Amo vocês! ♥

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus orientadores, Adenauer Yamin e Renata Reiser, pelas contribuições e por todo incentivo até aqui, especialmente por terem aceito a orientação e por conduzirem a pesquisa de forma exemplar.

Ao professor Mauricio Pilla, meu primeiro orientador no curso, pela orientação até a qualificação e pelas aulas durante o Doutorado.

Aos colegas Rodrigo Moura, Guilherme Schneider, Renato Dilli, Amanda Argou, Lisandro Silva e Julio Neto pelas contribuições e discussões sobre memórias não voláteis, lógica fuzzy, medidas de consenso e outros.

Aos demais professores do PPGC pelas aulas e atividades propostas durante todo o período de formação.

Persistence is the shortest path to success.

— CHARLES CHAPLIN

RESUMO

OLIVEIRA, Lizandro de Souza. **Estratégia CDM: Explorando Consenso Fuzzy no Gerenciamento de Memórias Híbridas**. Orientador: Adenauer Correa Yamin. 2021. 172 f. Tese (Doutorado em Ciência da Computação) – Centro de Desenvolvimento Tecnológico, Universidade Federal de Pelotas, Pelotas, 2021.

Esta Tese considera a análise consensual nos processos de tomada de decisão baseados em lógica fuzzy (LF) e lógica fuzzy valorada intervalarmente (IVFL), com a proposição de uma estratégia denominada *CDM*. Na sua fundamentação, a *CDM* ao explorar as propriedades axiomáticas das medidas de consenso (CM) fuzzy formaliza dois modelos. Um primeiro, aplicado sobre o reticulado de valores fuzzy, viabiliza a análise das informações fuzzy para os termos de uma variável linguística (VL), obtido pela composição entre relações de equivalência restritas, funções de agregação e implicações fuzzy, incluindo CM-construtores para somas convexas, operadores de conjugação e dualidades. Um segundo modelo aplicado a conjuntos fuzzy, construindo uma nova análise consensual modelando a coesão de vários termos relacionados à mesma VL, e também a coerência entre conjuntos fuzzy referente às projeções de ínfimo e de supremo, caracterizando a mancha de incerteza na extensão intervalar. Tais modelos decidem considerando critérios de relevância ou avaliações qualitativas, via seleção de alternativas na modelagem das funções de pertinência e provêm o suporte para duas estratégias algorítmicas: *FS-FCM*, aplicada nos valores fuzzy; e, *IVFS-FCM*, com sua aplicação abrangendo conjuntos fuzzy. Esta Tese tem como objetivo contribuir com o gerenciamento de memórias híbridas proposto pela abordagem *Intf-HybridMem*, o qual explora a identificação dos padrões de acesso às duas memórias que compõem o sistema híbrido, formado por memórias voláteis e não voláteis. O gerenciamento empregado na abordagem *Intf-HybridMem* contempla o emprego de IVFL. Neste contexto, de modo mais específico, as estratégias algorítmicas propostas nesta Tese auxiliam na tomada de decisões da *Intf-HybridMem* em duas frentes: (i) a estratégia *FS-FCM*, explora medidas de consenso em valores fuzzy a partir das funções de pertinência; e (ii) a estratégia *IVFS-FCM*, que considera a imprecisão inerente às medidas das variáveis de entrada, frequência de leitura/escrita e recência de acesso para exploração das medidas de consenso de conjunto fuzzy, além de incluir a recomendação de migração como saída. As avaliações realizadas apontam para a viabilidade do emprego das estratégias propostas por esta Tese, em particular no gerenciamento de memórias híbridas e, de modo geral, na continuidade das pesquisas do grupo que contemplem modelagem fuzzy nos processos de tomada de decisão.

Palavras-chave: Lógica Fuzzy. Medidas de Consenso Fuzzy. Memórias Híbridas.

ABSTRACT

OLIVEIRA, Lizandro de Souza. **CDM Strategy: Exploring Fuzzy Consensus in Hybrid Memory Management**. Advisor: Adenauer Correa Yamin. 2021. 172 f. Thesis (Doctorate in Computer Science) – Technology Development Center, Federal University of Pelotas, Pelotas, 2021.

This Thesis considers the consensual analysis in decision-making processes based on fuzzy logic (LF) and interval-valued fuzzy logic (IVFL), with the proposition of a strategy called *CDM*. In its foundation, the *CDM*, exploring the axiomatic properties of the fuzzy consensus measures (CM) formalizes two models. The first, applied to the fuzzy values lattice, enables the analysis of fuzzy information for the terms of a linguistic variable (VL), obtained by the composition of restricted equivalence relations, aggregation functions and fuzzy implications, including CM-constructors for convex sums, conjugation operators and dualities. A second model applied to fuzzy sets, building a new consensual analysis modeling the cohesion of several terms related to the same VL, and the coherence between fuzzy sets referring to the lowest and highest projections, characterizing the uncertainty spot interval extension. Such models decide considering relevance criteria or qualitative assessments, via selection of alternatives in the modeling of membership functions and provide support for two algorithmic strategies: *FS-FCM*, applied to fuzzy values; and, *IVFS-FCM*, with its application covering fuzzy sets. This Thesis aims to contribute to the management of hybrid memories proposed by the *Intf-HybridMem* approach, which explores the identification of access patterns to the two memories that make up the hybrid system, formed by volatile and non-volatile memories. The management employed in the *Intf-HybridMem* approach contemplates the use of IVFL. In this context, more specifically, the algorithmic strategies proposed in this Thesis help *Intf-HybridMem* decision-making on two fronts: (i) the *FS-FCM* strategy explores measures of consensus in values fuzzy from membership functions; and (ii) the *IVFS-FCM* strategy, which considers the inaccuracy inherent in the measures of input variables, read/write frequency and access recency to explore the fuzzy set consensus measures, in addition to including the recommendation of migration as output. The evaluations carried out point to the viability of employing the strategies proposed by this Thesis, in particular in the management of hybrid memories and, in general, in the continuity of the group's researches that contemplate fuzzy modeling in decision-making processes.

Keywords: Fuzzy Logic. Fuzzy Consensus Measure. Hybrid Memories.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Fluxo para uma Classificação de Memórias Semicondutoras de Acordo com seus Critérios Funcionais	25
Figura 2	Estrutura Básica da Célula MRAM	25
Figura 3	Estrutura Básica da Célula STT-RAM	27
Figura 4	Estrutura Básica da Célula FeRAM	27
Figura 5	Estrutura Básica da Célula RRAM	28
Figura 6	Estrutura Básica da Célula PCM	29
Figura 7	Diagrama de uma Memória RM	30
Figura 8	Estrutura de um Dispositivo de Memória de Polímero	30
Figura 9	Resumo dos Chips de Teste de PCM, STTRAM, e RRAM	40
Figura 10	Sistemas Baseados em Regras Fuzzy	69
Figura 11	Esquema de Representação das Migrações de Páginas na Memória Híbrida.	94
Figura 12	Visão Geral da Arquitetura para a Abordagem <i>Intf-HybridMem</i>	95
Figura 13	Componente Fuzzificação da Arquitetura <i>Intf-HybridMem</i>	97
Figura 14	Variáveis Linguísticas na Escala Padrão	99
Figura 15	Fluxo da Estratégia CDM.	104
Figura 16	C_{AM} para a Modelagem Fuzzy T1 e Diferentes REF.	109
Figura 17	C_{exp} para a Modelagem Fuzzy T1 e Diferentes REF.	110
Figura 18	C_{AM} para a Modelagem Fuzzy T2 e Diferentes REF.	113
Figura 19	C_{exp} para a Modelagem Fuzzy T2 e Diferentes REF.	114
Figura 20	Consensos entre Conjuntos Fuzzy para a mesma VL e para os Valores Superiores e Inferiores considerando os Agregadores AM (a) e $\exp$ (b) para a $Ref_{f_{ }}(x, y)$	116
Figura 21	Consensos entre Conjuntos Fuzzy para a mesma VL e para os Valores Superiores e Inferiores considerando os Agregadores AM e $\exp$ e a $Ref_{Op, ILK}(x, y)$	117
Figura 22	$\mathcal{C}_{AM}$ para a Modelagem Fuzzy T2 e Diferentes REF.	117
Figura 23	$\mathcal{C}_{exp}$ para a Modelagem Fuzzy T2 e Diferentes REF.	118
Figura 24	Influência da Penalidade no Grau de Consenso para o Agregador AM na Modelagem Fuzzy T1.	120

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	Comparação de Memórias Voláteis e Não Voláteis	32
Tabela 2	Características de Diferentes Tecnologias de Memória	32
Tabela 3	Propriedades Aproximadas de Tecnologias de Memória em Nível de Dispositivo	33
Tabela 4	Classificação de Técnicas que Utilizam NVMs.	33
Tabela 5	Trabalhos em Arquiteturas de Memória Explorando Lógica Fuzzy. .	45
Tabela 6	Geração dos Operadores $\mathcal{L}_{[0,1]}$ -REF a partir do Mínimo das Implicações Fuzzy.	61
Tabela 7	Geração de $\mathcal{L}_{[0,1]}$ -REF a partir de Função de <i>Overlap</i> e Implicações Fuzzy.	61
Tabela 8	Funções t-(co)normas ($\leq_{L([0,1])}$)-Representáveis.	67
Tabela 9	Representabilidade de IVFN em $L([0,1])$	68
Tabela 10	Representação Intervalar de Implicações com respeito a Ordem Usual em $L([0,1])$	68
Tabela 11	Atributos Selecionados para as Variáveis de Entrada, Referentes a T1FS.	98
Tabela 12	Atributos Selecionados para a Variável de Saída Tipo-1.	98
Tabela 13	Atributos Selecionados para as Variáveis de Entrada Referentes a IVFS.	100
Tabela 14	Atributos Selecionados para as Variáveis de Saída Referentes a IVFS.101	
Tabela 15	Base de Regras da Abordagem <i>Intf-HybridMem</i>	102
Tabela 16	Consenso para as Funções de Pertinência Fuzzy Tipo-1.	107
Tabela 17	Consenso para as Funções de Pertinência Fuzzy Tipo 1 - $Ref_{O_p, I_{LK}}(x, y)$	108
Tabela 18	Consenso para as Funções de Pertinência Valoradas Intervalarmente.111	
Tabela 19	Consenso para as Funções de Pertinência Valoradas Intervalarmente para $Ref_{O_p, I_{LK}}(x, y)$ ($p = 0.5$ e $p = 2$).	112
Tabela 20	Consenso sobre as Variáveis de Entrada e de Saída para a Modelagem Fuzzy Tipo-1 ($Ref_{f_{ }}(x, y)$) e Penalidades.	121
Tabela 21	Consenso sobre as Variáveis de Entrada e de Saída para $Ref_{f_{ }}(x, y)$ e $Ref_{I_{LK}}(x, y)$	145
Tabela 22	Consenso sobre as Variáveis de Entrada e de Saída para $Ref_{O_p, I_{LK}}(x, y)$ ($p = 0.5$ e $p = 2$).	146

Tabela 23	Dissenso sobre as Variáveis de Entrada e de Saída para $Ref_{f }(x,y)$ e $Ref_{I_{LK}}(x,y)$	147
Tabela 24	Dissenso sobre as Variáveis de Entrada e de Saída para $Ref_{O_p, I_{LK}}(x,y)$ ($p = 0.5$ e $p = 2$).	148
Tabela 25	Consenso sobre as Mesmas Variáveis Linguísticas para o Sistema Fuzzy Tipo-1.	149
Tabela 26	Consenso sobre os Valores Superiores e Inferiores do Sistema Fuzzy Tipo-2.	150

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

AF	Função de Agregação
CBRAM	<i>Conductive Bridge RAM</i>
CMOS	<i>Complementary Metal Oxide Semiconductor</i>
CDM	<i>Consensus Decision Making</i>
DWM	<i>Domain Wall Memory</i>
DRAM	<i>Dynamic RAM</i>
eDRAM	<i>Embedded DRAM</i>
FCM	Medida de Consenso Fuzzy
FE	Frequência de Escrita
FIS	Sistema de Inferência Fuzzy
FL	Frequência de Leitura
FRAM	<i>Ferro-magnetic RAM</i>
FS-FCM	<i>Fuzzy Consensus Measures for Fuzzy Set</i>
FOU	<i>Footprint of Uncertainty</i>
IVAF	Função de Agregação Valorada Intervalarmente
IVFI	Implicação Fuzzy Valorada Intervalarmente
IVFL	Lógica Fuzzy Valorada Intervalarmente
IVFN	Negação Fuzzy Valorada Intervalarmente
IVFS	Conjunto Fuzzy Valorado Intervalarmente
IVFS-FCM	<i>Fuzzy Consensus Measures for Interval-valued Fuzzy Set</i>
LF	Lógica Fuzzy
LFT1	Lógica Fuzzy Tipo-1
LFT2	Lógica Fuzzy Tipo-2
MRAM	<i>Magnetoresistive Random-Access Memory</i>
MTJ	<i>Magnetic Tunnel Junction</i>
NVM	<i>Non-Volatile Memory</i>
OxRAM	<i>Oxide RAM</i>
PDA	<i>Personal Digital Assistant</i>

PCM	<i>Phase Change Memory RAM</i>
R	Recomendação
RA	Recência de Acesso
RDF	Função de Dissimilaridade Restrita
REF	Função de Equivalência Restrita
RM	<i>Racetrack Memory</i>
RRAM	<i>Resistive RAM</i>
SBRF	Sistema Baseado em Regras Fuzzy
SBRFT1	Sistemas Baseados em Regras Fuzzy Tipo-1
SBRFT2	Sistemas Baseados em Regras Fuzzy Tipo-2
SPM	<i>Scratchpad Memory</i>
SRAM	<i>Static RAM</i>
STT	<i>Spin-Transfer Torque</i>
TL	Termos Linguísticos
VL	Variável Linguística
Z-RAM	<i>Zero-capacitor RAM</i>

LISTA DE SÍMBOLOS

AM	<i>Função de Agregação Média Aritmética</i>
$Aut(U)$	<i>Conjunto de Todos os Automorfismos sobre U</i>
C	<i>Função de Medida de Consenso</i>
$C_{A,f}$	<i>Medida de Consenso via Função de Equivalência Restrita f e Agregação Estendida A</i>
C_f	<i>Medida de Consenso via Função de Equivalência Restrita f</i>
$\mathcal{C}\phi$	<i>Medida de Consenso Conjugada</i>
$\exp_\alpha$	<i>Função de Agregação Média Exponencial</i>
f	<i>Função</i>
id_U	<i>Função Identidade</i>
$\max(x, y)$	<i>Máximo entre x e y</i>
$\min(x, y)$	<i>Mínimo entre x e y</i>
$\mu_A(u)$	<i>Grau de Pertinência do Elemento u</i>
ϕ	<i>Automorfismo</i>
ϕ^{-1}	<i>Automorfismo Inverso</i>
U	<i>Intervalo $[0, 1]$</i>
$U \rightarrow U$	<i>Função Bijetiva</i>
X	<i>Conjunto Fuzzy</i>
χ	<i>Conjunto Universo</i>

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	18
1.1	Problema de Pesquisa	20
1.2	Objetivos	20
1.3	Estrutura da Tese	21
2	REVISÃO EM ARQUITETURAS DE MEMÓRIA	23
2.1	Características das Arquiteturas de Memória	23
2.1.1	Memórias Voláteis	23
2.1.2	Memórias Não-Voláteis	24
2.2	Tendências em Arquiteturas de Memória	30
2.2.1	Comparação entre Tecnologias de Memórias	30
2.2.2	Arquiteturas de Sistemas Híbridos de Memória	32
2.2.3	Desafios de Pesquisa em Sistemas de Memória	40
2.2.4	Gerenciamento de Dados em Memórias Explorando Sistemas Fuzzy	42
2.3	Considerações sobre o Capítulo	44
3	TEORIA DOS CONJUNTOS FUZZY E EXTENSÕES	46
3.1	Teoria dos Conjuntos Fuzzy	47
3.1.1	Funções Conjugadas	48
3.1.2	Conectivos Fuzzy	48
3.2	Funções de Equivalência Restritas	53
3.2.1	Geração de Operadores $\mathcal{L}_{[0,1]}$ -REF	54
3.3	Funções de Penalidade Fuzzy	62
3.4	Teoria dos Conjuntos Fuzzy Valorados Intervalarmente	63
3.4.1	Conjuntos Fuzzy Valorados Intervalarmente	64
3.4.2	Conectivos Fuzzy Valorados Intervalarmente	65
3.5	Sistemas Baseados em Regras Fuzzy	69
3.5.1	Sistemas Baseados em Regras Fuzzy Tipo-1	69
3.5.2	Sistemas Baseados em Regras Fuzzy Tipo-2	72
3.6	Considerações sobre o Capítulo	73
4	CONCEPÇÃO DA ESTRATÉGIA CDM	74
4.1	FCM-Metodologias: Conceituação formal	75
4.2	FS-FCM Metodologias: Construção de Medidas de Consenso no Retículo de Valores Fuzzy	78
4.2.1	$\mathcal{L}_{[0,1]}$ -FCM via Somas Convexas	78
4.2.2	$\mathcal{L}_{[0,1]}$ -FCM via Automorfismos	79
4.2.3	$\mathcal{L}_{[0,1]}$ -FCM via Agregações de Funções $\mathcal{L}_{[0,1]}$ -REF	81

4.2.4	$\mathcal{L}_{[0,1]}$ -FCM via Funções de Quase-overlap e Implicações Fuzzy	84
4.2.5	$\mathcal{L}_{[0,1]}$ -FCM via Agregação de Funções de Penalidades	85
4.3	IVFS-FCM Metodologias: Construção de Medidas de Consenso sobre o Reticulado de todos os Conjuntos Fuzzy Valorados Intervalarmente	87
4.3.1	$\mathcal{L}_{\mathcal{F}_X}$ -FCM via Somas Convexas	88
4.3.2	$\mathcal{L}_{\mathcal{F}_X}$ -FCM via Funções de Agregação	90
4.4	Considerações sobre o Capítulo	92
5	CONSOLIDAÇÃO DA BASE ARQUITETURAL PARA A ESTRATÉGIA CDM	93
5.1	Descrição da Arquitetura <i>Intf-HybridMem</i>	93
5.2	Modelagem Fuzzy das Abordagens <i>f-HybridMem</i> e <i>Intf-HybridMem</i>	95
5.2.1	Etapa de Fuzzificação	96
5.2.2	Base de Regras	98
5.2.3	Etapa de Inferência	99
5.2.4	Redutor de Tipo-1 e Defuzzificação	101
5.3	Considerações sobre o Capítulo	102
6	AVALIAÇÃO DA ESTRATÉGIA CDM	103
6.1	Abordagem Algorítmica para Estratégia CDM	103
6.2	Avaliação da Estratégia CDM: Análise Consensual para Abordagens <i>f-HybridMem</i> e <i>Intf-HybridMem</i>	106
6.2.1	Estudo de Caso 1: Análise Consensual da Abordagem <i>f-HybridMem</i> via FS-FCM Metodologias	107
6.2.2	Estudo de Caso 2: Análise Consensual da Abordagem <i>Intf-HybridMem</i> via FS-FCM Metodologias	110
6.2.3	Estudo de Caso 3: Análise Consensual das Abordagens <i>f-HybridMem</i> e <i>Intf-HybridMem</i> via FS-FCM Metodologias	115
6.2.4	Estudo de Caso 4: Análise Consensual da Abordagem <i>Intf-HybridMem</i> via IVFS-FCM Metodologias	116
6.2.5	Estudo de Caso 5: Análise Consensual da Abordagem <i>f-HybridMem</i> via Metodologia FS-FCM baseada em Funções de Penalidades	119
6.3	Considerações sobre o Capítulo	119
7	CONSIDERAÇÕES FINAIS	122
7.1	Principais Conclusões	122
7.2	Publicações Realizadas	124
7.3	Trabalhos futuros	125
	REFERÊNCIAS	126
	APÊNDICE A GRAUS DE CONSENSO E DISSENSO SOBRE AS VARIÁVEIS	144
	APÊNDICE B ROTINA CSK_CTASTLE.M	151
	APÊNDICE C ROTINA CC_AM_T1.M	152
	APÊNDICE D ROTINA CC_EXP_T1.M	156
	APÊNDICE E ROTINA CC_AM_INT.M	160
	APÊNDICE F ROTINA CC_EXP_INT.M	166

1 INTRODUÇÃO

“A tarefa não é tanto ver aquilo que ninguém viu, mas pensar o que ninguém ainda pensou sobre aquilo que todo mundo vê.”

Arthur Schopenhauer

A demanda por crescimento das memórias tem constituído significativo desafio para o desenvolvimento de novos sistemas computacionais. Neste sentido, o avanço da computação em nuvem e do processamento e análise de *big data* são exemplos das demandas atuais por arquiteturas de memórias de alta velocidade, com grande capacidade de armazenamento.

Somando-se ao crescimento das memórias os avanços no desempenho dos processadores, além das necessidades de consumo de potência, trouxeram novos desafios para a área de arquitetura de computadores (HENNESSY; PATTERSON, 2014).

O armazenamento de dados, temporário e permanente, é necessário em sistemas de processamento de informações, e tem sido atendido por memórias baseadas em tecnologia *Complementary Metal Oxide Semiconductor* (CMOS), ou seja, *Static RAM* (SRAM), *Dynamic RAM* (DRAM) e memória flash. O *gap* de desempenho existente entre processador e memória tornou-se um gargalo crítico no desempenho de sistemas, sendo conhecido como a "parede de memória" (do inglês, *memory wall*) (CHEN, 2016).

Devido às limitações existentes nas tecnologias de memória tradicionais, são apresentados diversos tipos de otimizações de memória na literatura. Estas abordagens são direcionadas a otimizações de hardware e software ou combinando estas duas abordagens (WOLF; KANDEMIR, 2003). Esta preocupação vem acompanhando a comunidade científica, permanecendo como um desafio de pesquisa significativo à medida que novas tecnologias são desenvolvidas. Neste sentido, várias técnicas utilizam memórias não voláteis (do inglês, *Non-Volatile Memory* (NVM)) como alternativa devido suas vantagens sobre as memórias tradicionais DRAM e SRAM.

A mudança de tendência de mercado impõe diferentes requisitos sobre o hardware como, por exemplo, computação com potência ultrabaixa, novas funções e armazenamento de alta densidade e de baixo custo. NVMs emergentes com alto desempenho, boa escalabilidade, e novas funcionalidades podem tornar-se importantes tecnologias para cumprir tais requisitos (CHEN, 2016). Como exemplos de memórias emergentes podem ser citadas as memórias *Phase Change Memory RAM* (PCM), *Magnetoresistive Random-Access Memory* (MRAM), *Spin-Transfer Torque* (STT), *Resistive RAM* (RRAM), *Ferro-magnetic RAM* (FRAM) e *Domain Wall Memory* (DWM).

Neste contexto, abordagens híbridas para sistemas de memória se apresentam como uma área de pesquisa promissora, visando estratégias para incremento de desempenho e redução de consumo energético.

Apesar das vantagens apresentadas por NVMs, sistemas de memória que utilizem estas tecnologias devem considerar suas limitações, tais como latência das operações de escrita, consumo de potência das operações de escrita e durabilidade.

Além destas questões relacionadas à tecnologia de memória adotada, a utilização de memórias híbridas em sistemas de memória amplia os desafios que envolvem a tomada de decisão. Neste sentido, a discussão acerca do gerenciamento de dados em sistemas híbridos de memória aborda questões relacionadas às incertezas destes sistemas como, por exemplo, no processo de definição para escolha do módulo de memória no qual o dado será escrito (ou lido) de modo a explorar as características desejáveis de cada componente de memória.

A teoria de conjuntos fuzzy vem sendo largamente utilizada em processos de tomada de decisão, considerando o tratamento da incerteza nos dados (ZADEH, 1975) e imprecisão dos parâmetros de medidas (BUSTINCE, 2010).

Na revisão da literatura realizada nesta Tese (Capítulo 2) não foram identificados trabalhos que considerem estratégias para o tratamento de incerteza no processo de tomada de decisão quando do gerenciamento de memórias híbridas. Em particular, o emprego de consenso fuzzy configura-se como um tópico de pesquisa em aberto no que se refere ao processo de tomada de decisão em arquiteturas de memória.

Medidas de consenso fuzzy tem sido empregadas para obtenção de uma análise formal de concordância de especialistas para variáveis em processos de tomada de decisão baseados em lógica fuzzy e, em particular, em lógica fuzzy valorada intervalarmente (BELIAKOV; CALVO; JAMES, 2014). E portanto, a fundamentação nos termos destes modelos lógicos formaliza a proposição de nova estratégia para gerenciamento de memórias híbridas que promova uma avaliação global, refletindo o consenso entre um ou mais conjuntos fuzzy e estabelecendo limites de mínimo/máximo consenso na decisão final sobre os principais termos consensuais em memórias híbridas.

Assim, considerando que sistemas fuzzy multivalorados são utilizados para o tra-

tamento destas incertezas, devido à contribuição destes sistemas na descrição de parâmetros incertos, vagos ou passíveis de múltipla interpretação, identifica-se a utilização destes sistemas para o gerenciamento de dados em memórias, considerando os desafios referentes à tomada de decisão em sistemas de memória.

A diversidade de tecnologias de memórias existentes, somada à tendência por utilização de sistemas híbridos de memória com a utilização de memórias não voláteis emergentes, as incertezas encontradas no processo de gerenciamento de dados em memórias e as características de sistemas fuzzy em geral e de consenso fuzzy em específico, motivam o problema de pesquisa considerado nesta Tese.

Esta Tese considera a análise consensual nos processos de tomada de decisão baseados em lógica fuzzy (LF) e lógica fuzzy valorada intervalarmente (IVFL), com a proposição de uma estratégia para gerenciamento de memórias híbridas.

1.1 Problema de Pesquisa

O problema de pesquisa central desta Tese consiste em: Como gerenciar sistemas híbridos de memória, compostos por memórias voláteis e não voláteis, explorando consenso fuzzy no processo de tomada de decisão?

Este problema de pesquisa se desdobra nos seguintes aspectos: (i) como tratar a incerteza no gerenciamento de dados em sistemas híbridos de memória? (ii) como considerar diferentes parâmetros que caracterizam o comportamento do sistema híbrido de memória? e (iii) como são construídas as medidas de consenso de valores e de conjuntos fuzzy?

Importante também registrar que a presente Tese teve como premissa contribuir com os processos de tomada de decisão da arquitetura *Intf-HybridMem* para o gerenciamento de sistemas híbridos de memória. Esta arquitetura vem sendo pesquisada pelo Grupo de Pesquisa em Métodos Formais e Fundamentos Matemáticos para Ciência da Computação (MFFMCC) e pelo *Laboratory of Ubiquitous and Parallel Systems* (LUPS) da Universidade Federal de Pelotas (UFPe).

Considerando o problema de pesquisa apresentado, foram construídos os objetivos desta Tese, apresentados a seguir.

1.2 Objetivos

O objetivo geral desta Tese, considerando o problema de pesquisa elencado, é conceber uma estratégia para o gerenciamento de memórias híbridas denominada *Consensus Decision Making* (CDM). Esta estratégia considera a análise consensual via medidas de consenso fuzzy para auxílio à tomada de decisão no processo de migração de páginas em sistemas híbridos de memória, compostos por memórias

voláteis e não voláteis.

A estratégia proposta é caracterizada pelas metodologias *FCM*, que são estruturadas em dois contextos: (i) *FS-FCM*, que empregam medidas de consenso sobre conjuntos fuzzy; e (ii) *IVFS-FCM*, que empregam medidas de consenso sobre conjuntos fuzzy valorados intervalarmente.

A fim de alcançar este objetivo geral, são elencados, a seguir, os objetivos específicos que deverão ser contemplados:

- revisar as tecnologias de memórias não voláteis descritas na literatura, identificando suas características e princípios de funcionamento;
- identificar trabalhos que utilizam memórias não voláteis em sistemas híbridos de memórias;
- identificar o estado da arte em relação aos desafios de sistemas de memórias e trabalhos que empregam sistemas fuzzy no contexto do gerenciamento de dados em memórias;
- definir as equações que descrevem as funções de pertinência para os sistemas fuzzy da base arquitetural *Intf-HybridMem*;
- conceber uma estratégia para a análise de consenso fuzzy, considerando a base arquitetural adotada;
- sistematizar avaliações para a estratégia proposta;
- divulgar à comunidade científica os resultados atingidos pela pesquisa por meio de publicações em conferências e/ou periódicos especializados da área.

1.3 Estrutura da Tese

Este documento está organizado em sete capítulos, como descrito a seguir. No Capítulo 2 é apresentada uma revisão sobre arquiteturas de memórias, descrevendo suas principais características, além de destacar tendências em arquiteturas de memórias e desafios de pesquisa. Este capítulo também destaca trabalhos que exploram sistemas fuzzy no processo de tomada de decisão no gerenciamento de dados em sistemas de memórias. O Capítulo 3 introduz conceitos sobre a teoria de conjuntos fuzzy, funções de equivalência restritas, funções de penalidade fuzzy, teoria dos conjuntos fuzzy valorados intervalarmente e sistemas baseados em regras fuzzy. No Capítulo 4 é apresentada a concepção da estratégia *CDM*, proposta nesta Tese, para a análise consensual via medidas de consenso fuzzy, sendo apresentadas as conceituações formais para as metodologias que caracterizam a estratégia proposta. Dessa forma, são

introduzidos conceitos acerca da construção de medidas de consenso fuzzy. O Capítulo 5 descreve a base arquitetural (*Intf-HybridMem*) empregada na estratégia *CDM*. Neste capítulo também são apresentadas as expressões que definem as funções de pertinência elaboradas para a análise das medidas de consenso fuzzy utilizadas. No Capítulo 6 é apresentada a avaliação da estratégia *CDM*, explorando uma descrição algorítmica e cinco estudos de caso. No Capítulo 7 são feitas as considerações finais desta Tese, sendo apresentadas as principais conclusões, as publicações realizadas até o momento e as sugestões de trabalhos futuros.

2 REVISÃO EM ARQUITETURAS DE MEMÓRIA

“Don’t judge each day by the harvest
you reap but by the seeds that you
plant.”

Robert Louis Stevenson

Este capítulo discute tecnologias de memórias não voláteis, suas características e princípios de funcionamento. O capítulo também apresenta breve comparação entre diferentes tecnologias de memórias, incluindo memórias voláteis. Além disso, o capítulo destaca trabalhos relacionados às memórias híbridas que utilizam memórias não voláteis emergentes. Por fim, o capítulo destaca desafios de pesquisa para minimizar as limitações de memórias não voláteis em projetos de arquiteturas híbridas.

2.1 Características das Arquiteturas de Memória

Nesta Seção características para diferentes tecnologias utilizadas em arquiteturas de memórias são discutidas, sendo apresentados exemplos de tecnologias voláteis e não voláteis presentes na literatura, sendo realizada uma comparação entre as diferentes tecnologias de memória, além de discutir arquiteturas de sistemas híbridos de memória e elencar desafios de pesquisa existentes em sistemas de memória.

2.1.1 Memórias Voláteis

Memórias voláteis são tecnologias que necessitam consumir energia para que as informações se mantenham armazenadas. Assim, ao se interromper o fornecimento de energia as informações são perdidas. O consumo energético para manter os dados armazenados pode ser constante ou periódico. Essas tecnologias são largamente utilizadas nas arquiteturas de memória de computadores modernos. As duas tecnologias de maior destaque são a DRAM e SRAM, descritas a seguir.

2.1.1.1 Memória DRAM

Uma célula de memória DRAM (JHA; GUPTA, 2002) utiliza um circuito baseado na carga e descarga de capacitores para armazenar as informações. Os capacitores das células de memória tem uma tendência a perder a carga com o passar do tempo. Assim, é necessário que a informação seja reescrita periodicamente para que não se perca a informação armazenada. Essa reescrita periódica de dados é chamada de *refresh cycle*. Assim, para fazer a reescrita é necessário que alguns ciclos de memória sejam utilizados para a operação de *refresh*, o que causa uma perda de desempenho. Além disso, a cada operação de *refresh* é adicionado um novo custo energético.

2.1.1.2 Memória SRAM

Uma célula de memória SRAM é composta, na forma mais comum, por seis transistores MOSFET para o armazenamento de cada bit, sendo chamada de 6T (PAVLOV; SACHDEV, 2008). Porém, é possível encontrar outras configurações de SRAM que utilizam oito ou dez transistores (NOGUCHI et al., 2008). Uma célula SRAM pode assumir três estados: *hold* (para manter o bit armazenado), escrita e leitura. Essa tecnologia tem como característica sua alta velocidade, sendo tradicionalmente empregada na implementação de memória *cache* em processadores.

Por ser formada tradicionalmente por seis transistores, a SRAM é uma célula que ocupa muito espaço. Dessa forma, a SRAM tem baixa densidade quando comparada com a tecnologia DRAM. Além disso, essa tecnologia é também mais cara e de alto consumo energético, pois necessita estar constantemente consumindo energia para manter o estado das células.

2.1.2 Memórias Não-Voláteis

Memórias não voláteis, incluindo PCM, memória Flash e MRAM, possuem muitas vantagens sobre as memórias DRAM quando aplicadas como memória principal em sistemas embarcados devido suas características como economia de potência, baixo-custo, alta densidade, não-volatilidade e *shock-resistivity* (WANG et al., 2012).

Apesar das vantagens, as NVMs apresentam duas desvantagens que precisam ser superadas para utilização em memória principal (WANG et al., 2012): as operações de escrita levam mais tempo que as operações de leitura; NVMs possuem um número máximo de operações de escritas que podem ser executadas.

Memórias não voláteis são classificadas de acordo com suas propriedades funcionais. A Fig. 1 mostra o fluxograma de classificação para memórias semicondutoras, proposto por (MEENA et al., 2014). Existem cinco tipos de tecnologias principais para as NVMs: memória flash, FeRAM, MRAM, PCM, e RRAM (MEENA et al., 2014). Nesta seção serão apresentadas as características e limitações de memórias NVMs emergentes.

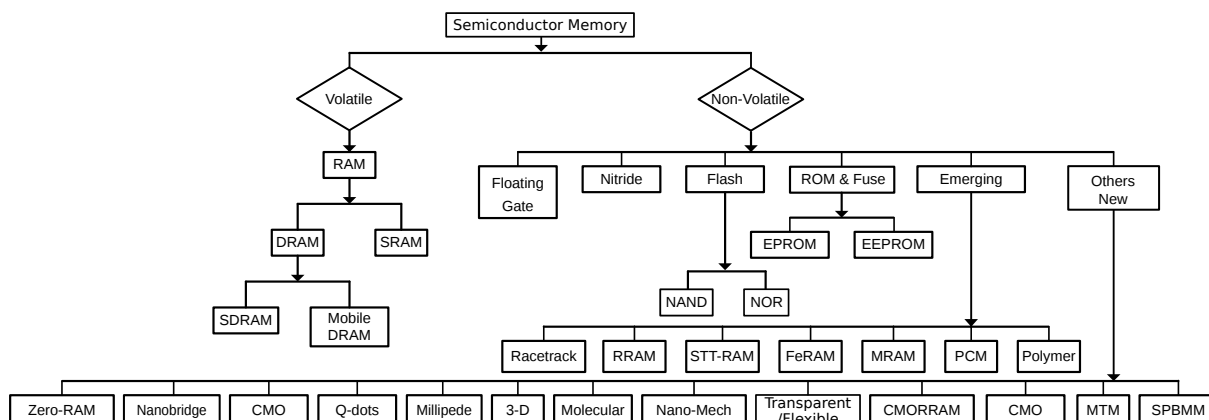


Figura 1 – Fluxo para uma Classificação de Memórias Semicondutoras de acordo com seus Critérios Funcionais. Adaptada de (MEENA et al., 2014).

2.1.2.1 Magnetoresistive Random-Access Memory (MRAM)

Uma memória MRAM é baseada em células de memória com dois elementos de armazenamento magnético, um com uma polaridade fixa e outro com polaridade comutável (MEENA et al., 2014). Esses elementos magnéticos são posicionados um sobre o outro, mas separados por uma fina barreira de túnel isolante, como mostrado na estrutura da célula na Figura 2.

Nesta memória, um bit é armazenado como orientação magnética da camada livre de uma junção de túnel magnético *Magnetic Tunnel Junction* (MTJ). Como a camada livre não necessita de corrente para manter seu estado, os MTJs não têm corrente de fuga intrínseca. A aplicação de uma pequena tensão fixa no MTJ resulta em uma corrente alta ou baixa, dependendo da orientação magnética da camada livre ser paralela ou antiparalela em relação à camada fixa (SMULLEN et al., 2011).

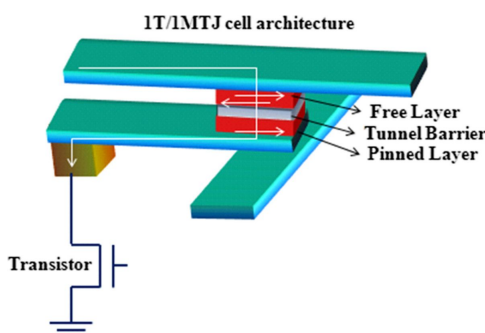


Figura 2 – Estrutura Básica da Célula MRAM. Adaptada de (MEENA et al., 2014).

Esta memória pode ser diretamente acoplada aos processadores e usada como armazenamento volátil e não-volátil. Essa característica diferencia a memória MRAM das memórias RRAM e PCM, as quais são limitadas pela velocidade das operações de escrita e por uma resistência inadequada, características buscadas principalmente para aplicações de armazenamento (KANG; PARK, 2017).

2.1.2.2 Spin-Transfer Torque Magnetic RAM (STT-RAM)

Uma memória STT-RAM usa o MTJ como elemento de armazenamento, o que reduz a energia necessária para escrita na célula. A memória STT-RAM é uma forma de MRAM que usa torque de transferência de rotação para reorientar a camada livre, passando uma elevada corrente de escrita pelo MTJ (SMULLEN et al., 2011).

Esta tecnologia de memória utiliza duas camadas de materiais magnéticos separadas por uma barreira não magnética. O conjunto apresenta baixa resistência quando os materiais magnéticos estão com mesma polaridade e a resistência à passagem de corrente é alta quando estão com polaridades opostas. Na memória MRAM a mudança na polarização dos materiais é realizada pela indução de um campo magnético externo, enquanto na STT-RAM a mudança no campo é realizada pela aplicação de uma corrente polarizada em *spin* (Chen et al. 2010; Thomas luc et al. 2014).

Esses dispositivos não voláteis podem ser diretamente confeccionados sobre o circuito CMOS. Devido à estreita conexão entre o circuito lógico e a memória, em comparação com o circuito lógico convencional com a SRAM, a lógica não volátil baseada em MTJ alcança não somente uma drástica redução de área e de potência de E/S, mas também apresenta melhorias na velocidade de transferência de dados (ENDOH et al., 2016).

Embora as memórias STT-RAM apresentem menor densidade que as memórias PCM e RRAM, e maior latência e energia para operações de escrita quando comparadas às memórias SRAM, essa tecnologia é amplamente utilizada em projetos de cache devido à sua alta resistência. O trabalho de (HUAL, 2008) apresenta uma revisão sobre o progresso na redução da densidade de corrente intrínseca e na demonstração de um protótipo de memória STT-RAM. Segundo o autor, a confiabilidade da barreira isolante no MTJ é a questão principal da memória STT-RAM, pois a corrente está passando pelo elemento MTJ em cada operação de leitura e de escrita.

No trabalho de (SMULLEN et al., 2011), os autores reduziram o tempo de retenção com a redução da área plana da célula, reduzindo assim a corrente de escrita. O tempo de retenção de um MTJ é impactado principalmente pela estabilidade térmica de sua camada livre. Jog et al. (2012) apresenta redução da espessura da camada livre e da magnetização de saturação para obter uma menor barreira térmica.

Para que a memória STT-RAM seja adotada como uma memória semicondutora universal, Meena et al. (2014) afirmam que deve ser resolvido o desafio de obter, simultaneamente, baixa corrente de comutação e alta estabilidade térmica. Esta memória deve ser densa (aproximadamente $10F^2$), rápida (menos de 10 ns para a velocidade de leitura e gravação), e deve operar em baixa potência (APALKOV et al., 2013). A estrutura básica da célula de memória STT-RAM é mostrada na Figura 3.

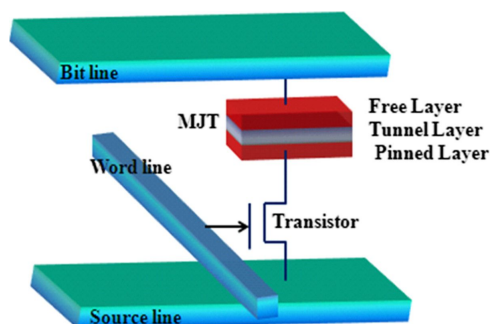


Figura 3 – Estrutura Básica da Célula STT-RAM. Adaptada de (MEENA et al., 2014).

2.1.2.3 Ferro-magnetic RAM (FeRAM)

Essa memória não volátil emergente usa capacitores ferroelétricos como dispositivo não volátil combinado com um circuito CMOS, como mostrado na Figura 4. No entanto, a tecnologia utilizada neste tipo de memória apresenta dificuldades no dimensionamento do tamanho de sua célula de memória. Isto porque não é fácil processar materiais ferroelétricos e os materiais dos eletrodos sem ter uma reação entre eles. Como resultado, as aplicações mais adequadas para a memória FeRAM são limitadas a cartões inteligentes e microcontroladores de pequena escala com pequena capacidade de armazenamento (ENDO et al., 2016).

A memória FeRAM mantém os dados sem nenhuma fonte de alimentação externa utilizando um material ferroelétrico no lugar de um material dielétrico convencional entre as placas do capacitor. Uma desvantagem da FeRAM é que o ciclo de leitura é destrutivo (MEENA et al., 2014). Espera-se que as memórias FeRAM tenham muitas aplicações em pequenos dispositivos de consumo como assistentes pessoais digitais *Personal Digital Assistant* (PDA), *smartphones*, medidores de energia, cartões inteligentes e sistemas de segurança. Mesmo após ter alcançado sucesso comercial, seus chips oferecem desempenho comparável ou superior às memórias flash, mas ainda mais lento que as memórias DRAM (MEENA et al., 2014).

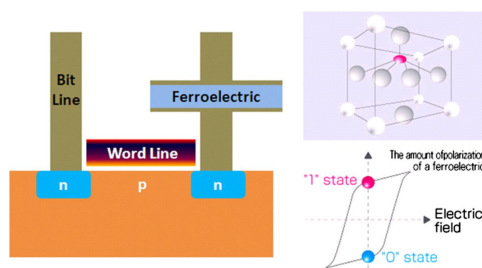


Figura 4 – Estrutura Básica da Célula FeRAM. Adaptada de (MEENA et al., 2014).

2.1.2.4 Resistive RAM (ReRAM)

A memória ReRAM é um dispositivo biestável simples, de dois terminais do tipo metal-isolante-metal (MIM) como mostrado na configuração básica da Figura 5. Po-

dem existir dois estados distintos de condutividade, com cada estado sendo induzido pela aplicação de tensões diferentes nos terminais do dispositivo (MEENA et al., 2014). Uma ReRAM típica de comutação unipolar usa um dielétrico isolante. Um filamento é formado em um dielétrico isolante quando uma tensão suficientemente alta é aplicada. Assim, podem ser definidos os estados de *set/reset*, o que leva a uma resistência baixa/alta a partir da aplicação de tensões apropriadas (LI; CHEN, 2009). Essa memória apresenta a característica de ser potencialmente simples e econômica, características que as tornam possíveis substitutas às tecnologias de memória utilizadas em discos rígidos e em memórias RAM e flash (KIM, 2012).

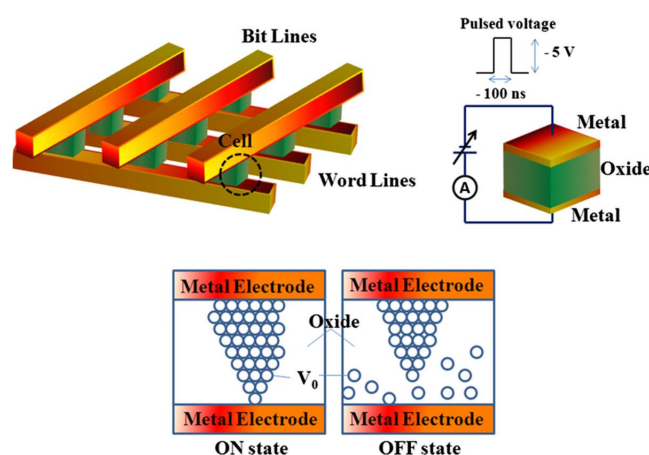


Figura 5 – Estrutura Básica da Célula RRAM. Adaptada de (MEENA et al., 2014).

Xu et al. (2011) enfatizaram que a ReRAM era considerada a mais promissora, pois é mais rápida que a PCM e possui uma estrutura celular mais simples que a memória magnética (MRAM ou STT-RAM). Apesar dessas vantagens, a ReRAM apresenta alguns problemas críticos como retenção de dados, baixa resistência de aproximadamente 10^{11} ciclos (SAWA, 2008; KIM et al., 2011), alta latência e alto consumo de energia para operações de escrita (DONG et al., 2014).

Goux et al. (2012) apresentaram o uso de uma memória RRAM empilhada para melhorar determinadas características destas memórias. Um tempo de retenção de longo prazo (> 10 anos) e a resistência ($> 10^6$ ciclos de escrita/leitura) podem ser alcançados, como mencionado por (SEO et al., 2009).

Segundo Endoh et al. (2016), existem várias opções de princípios de armazenamento para ReRAM, os quais podem ser caracterizados em dois tipos. Uma é a ponte condutora RAM *Conductive Bridge RAM* (CBRAM) e a outra é a RAM óxida *Oxide RAM* (OxRAM). Tanto a CBRAM como a OxRAM usam a reação redox em seu princípio operacional (WONG et al., 2012; WASER et al., 2009). A ReRAM pode cobrir a área de aplicação de armazenamento ocupada pelas memórias flash NAND (KAWAHARA et al., 2013; LIU et al., 2014).

2.1.2.5 Phase Change Memory (PCM)

Dentre as memórias não voláteis, a PCM *Phase Change Memory* (PCM) (LEE et al., 2010), também conhecida como PCRAM, PRAM, OUM ou CRAM (MEENA et al., 2014), recebeu especial atenção dos pesquisadores (FERREIRA et al., 2010; RAMOS; GORBATOV; BIANCHINI, 2011; BURR et al., 2016).

Memórias PCM empregam um material chamado GeSbTe (GST), que é uma liga de germânio, antimônio e telúrio. Este material tem duas fases, sendo uma amorfa e outra cristalina, as quais representam, respectivamente, alta e baixa resistividade elétrica (JOO et al., 2010). Estas fases são utilizadas para representar os bits 0 e 1. Uma célula PCM básica é mostrada na Figura 6.

Comparada à SRAM e à *Embedded DRAM* (eDRAM), essas tecnologias de NVM têm maior densidade, menor potência em *standby* e melhor escalabilidade (WANG et al., 2013). No entanto, memórias PCM têm limitações como latência das operações de escrita, energia das operações de escrita e resistência (JOO et al., 2010).

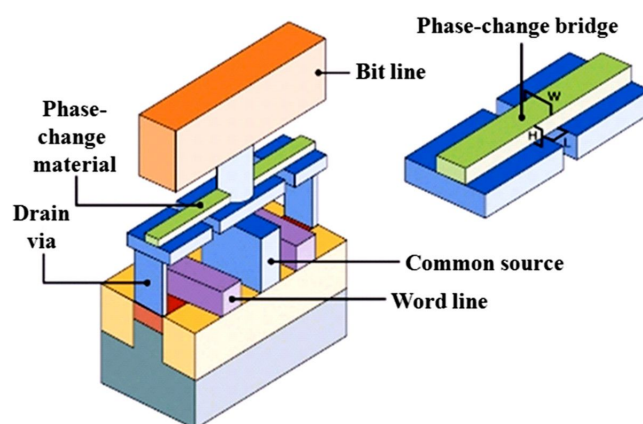


Figura 6 – Estrutura Básica da Célula PCM. Adaptada de (MEENA et al., 2014).

2.1.2.6 Racetrack Memory (RM)

A memória RM, também conhecida como DWM (*Domain Wall Memory*), pode atingir uma densidade de armazenamento ultra-alta, rápida velocidade de acesso e não volatilidade. Pesquisas anteriores demonstraram que esta memória tem potencial para servir como cache *on-chip* ou como memória principal. No entanto, a memória RM tem mais flexibilidade e dificuldade no espaço de projeto de uma memória principal porque possui mais parâmetros de projeto no nível de dispositivo (ZHANG et al., 2018).

Em uma memória RM, as informações são armazenadas em um nanofio em forma de U como um padrão de regiões magnéticas com diferentes polaridades (MEENA et al., 2014). O nanofio magnético em forma de U é um conjunto de chaves dispostas verticalmente como mostrado na Figura 7.

Venkatesan et al. (2012) mencionam que esta tecnologia é baseada em *spin*, na qual vários bits de dados são compactados densamente nos domínios de um fio fer-

romagnético. Este fio pode ter vários domínios separados por paredes. Cada um destes domínios pode ser programado separadamente para uma determinada direção de magnetização e, portanto, armazenar um único bit. Consequentemente, uma macro célula deste tipo de memória é capaz de armazenar vários bits de dados.

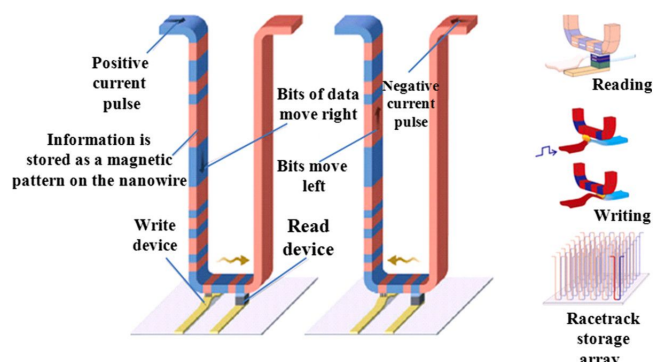


Figura 7 – Diagrama de uma Memória RM mostrando uma Matriz de Nanofios Magnéticos em Forma de U. Fonte: (MEENA et al., 2014).

2.1.2.7 Polymer Memory

Em uma memória de polímero, uma camada de moléculas e/ou nanopartículas em uma matriz de polímero orgânico é colocada entre uma matriz de eletrodos superior e inferior como ilustrado na Figura 8. Esta memória tem a vantagem de processo de fabricação simples e boa controlabilidade dos materiais (MEENA et al., 2014).

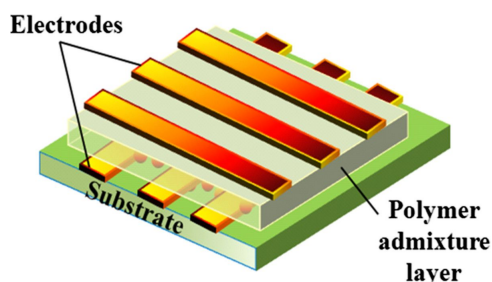


Figura 8 – Estrutura de um Dispositivo de Memória de Polímero. Fonte: (MEENA et al., 2014).

2.2 Tendências em Arquiteturas de Memória

Nesta seção, é feita uma discussão a respeito das tecnologias de memória, e contempla a seguinte organização: (i) uma parte dedicada à comparação entre as diferentes tecnologias; (ii) outra para discutir sistemas híbridos; e por fim uma última seção (iii) para elencar os principais desafios de pesquisa em sistemas de memória.

2.2.1 Comparação entre Tecnologias de Memórias

A potência consumida pela corrente de fuga (*leakage*) em memórias SRAM aumentou com o dimensionamento dos circuitos CMOS e se tornou parte importante da

potência consumida em vários circuitos semicondutores (FUJITA et al., 2015). Memórias emergentes como a STT-RAM e a PCM fornecem baixo consumo de potência de *leakage* e alta densidade quando comparadas às memórias tradicionais SRAM.

Como destacado por Banakar et al. (2002), memórias cache SRAM *on-chip* necessitam potência na faixa de 25% a 45% do total de potência do circuito. Neste trabalho foi proposta uma memória SPM¹ em substituição à cache. Os resultados mostraram uma redução média de energia de 40% e uma redução média do produto área-tempo de 46%. Além disso, a memória SPM pode fornecer uma melhor previsibilidade de tempo, característica desejável em sistemas embarcados de tempo real (LI; GAO; XUE, 2005).

As operações de escrita em NVMs, por envolverem alteração de seu estado físico, consomem mais tempo e energia quando comparadas às operações de leitura, o que ocasiona assimetria entre as operações de leitura e escrita (BISHNOI et al., 2014). Outra característica refere-se à latência de gravação e à energia da transição lógica de $1 \rightarrow 0$ que são maiores que as de $0 \rightarrow 1$, o que leva a uma assimetria durante a operação de escrita (BISHNOI et al., 2014).

A memória STT-RAM é amplamente utilizada nas memórias de último nível (WU et al., 2009; SUN et al., 2009), enquanto a memória PCM é uma alternativa à memória DRAM (LEE et al., 2009).

Novos modelos de STT-RAM têm sido propostos para reduzir problemas referentes às operações de escrita (TADISINA et al., 2010; AMIRI et al., 2011; XU et al., 2011; FUJITA et al., 2015). No trabalho de (XU et al., 2011) é proposta uma metodologia para projetar uma memória STT-RAM para diferentes objetivos de otimização, como desempenho de leitura/escrita e energia das operações de escrita. Os resultados indicam que esta memória STT-RAM otimizada pode competir com as memórias SRAM e DRAM a fim de substituí-las como memória universal em sistemas embarcados de baixa potência.

Na literatura são apresentados, portanto, trabalhos que visam minimizar os desafios existentes em operações de escrita em memórias não voláteis. Como exposto por (MITTAL; VETTER, 2016), a latência e a energia de operações de escrita em NVMs são significativamente maiores do que nas operações de leitura. Esta propriedade é comum a todas as NVMs.

Diferentes estratégias a fim de superar as limitações impostas pelas operações de escrita em memórias não voláteis são apresentadas na literatura. Existem, no entanto, diferentes tecnologias não voláteis, as quais apresentam diferentes características. Neste contexto, são identificados trabalhos que apresentam tais características.

Torres (2018) realiza uma comparação das características das tecnologias não voláteis mais promissoras com as tecnologias voláteis utilizadas atualmente, apresen-

¹ *Scratchpad Memory* (SPM)

tada na Tabela 1. É possível observar que todas as memórias não voláteis possuem durabilidade inferior às tradicionais voláteis. Por outro lado, as tecnologias NVM apresentadas possuem tamanho de célula menor ou igual às tecnologias DRAM e SRAM. Além disso, em comparação com a DRAM, todas NVMs possuem menor tempo de leitura. Quanto ao consumo de escrita, apenas a STT-RAM consegue se igualar as tecnologias voláteis, já as outras NVMs possuem consumo superior.

Tabela 1 – Comparação de Memórias Voláteis e Não Voláteis (OLIVEIRA TORRES, 2018).

Caracterizações	PCRAM	STT-RAM	RRAM	DRAM	SRAM
Menor Tamanho de Célula (F^2)	4	6	6	6	160
Latência de Escrita (ns)	≈ 100	< 10	≈ 50	20 – 50	≤ 2
Latência de Leitura (ns)	5	5	5	20 – 50	≤ 2
Tensão de Operação (V)	1.5 – 1.8	0.8 – 1.8	3.3 – 6.5	1.35 – 1.65	0.6 – 1.1
Corrente de Escrita (A)	10^{-4}	10^{-5}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-5}
Conservação (anos)	> 10	> 10	> 10	-	-
Durabilidade (nº. de escritas)	$\leq 10^9$	$\leq 10^{12}$	$\leq 10^6$	10^{15}	10^{15}

As Tabelas 2 e 3 mostram características de tecnologias de memória. É possível observar características desejáveis e os desafios nas operações de escrita para as memórias não voláteis. Na Tabela 4 é mostrada uma proposta para classificar trabalhos anteriores que usam algum tipo de NVM. São observados trabalhos que utilizam memórias não voláteis em diferentes níveis da hierarquia de memória e diferentes abordagens, como foco em desempenho ou eficiência energética.

Tabela 2 – Características de Diferentes Tecnologias de Memória (MITTAL; VETTER; LI, 2015), (SUN et al., 2016) e (MITTAL, 2016).

Tecnologia	eDRAM	SRAM	ReRAM	PCM	STT-RAM	DWM
Cell size (F^2)	20-100	50-200	4-10	4-12	6-50	1-50
Speed (R/W)	Fast	Very fast	Fast/slow	Fast/very slow	Fast/slow	Fast
Energy (R/W)	Medium	Low	Medium/high	Medium/very high	Medium/high	Medium
Leakage power	Low	High	~ 0	~ 0	~ 0	~ 0
Retention period	30-100 μs	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A
Endurance	$> 10^{15}$	$> 10^{15}$	$10^8 - 10^{12}$	$10^8 - 10^9$	$> 10^{15}$	$> 10^{15}$
Maturity	Product	Product	Prototype	Prototype	Product	Prototype
Main challenge	Refresh	Leakage	Writes	Writes	Writes	Shifts

2.2.2 Arquiteturas de Sistemas Híbridos de Memória

Memórias não voláteis têm sido investigadas na literatura para diferentes níveis de hierarquia de memória. Mittal et al. (MITTAL; VETTER; LI, 2015; MITTAL; VETTER, 2016) apresentam várias técnicas para explorar as vantagens e mitigar as desvantagens de memórias não voláteis emergentes. Estes trabalhos não abordam, no entanto, o uso de memórias não voláteis em SPMs. Nesta seção, serão apresentados trabalhos que apresentam melhorias no uso de NVMs em memórias principais, SPMs e caches. Estes trabalhos foram escolhidos a partir do domínio de pesquisa.

Tabela 3 – Propriedades Aproximadas de Tecnologias de Memória em Nível de Dispositivo. Adaptada de Mittal e Vetter (2016), e Cargnini et al. (2014).

Tecnologia	MCS (F^2)	End (Cycles)	RL	WL	EL	AG	SP
HDD	N/A	10^{15}	5 ms	5 ms	-	512 B	1W
SLC Flash	4-6	$10^4 - 10^5$	25 μ s	500 μ s	2 ms	4 KB	0
DRAM	4-10	10^{15}	50 ns	50 ns	-	64 B	Refresh power
NAND	4	10^4	10^4 ns	10^6 ns	-	-	-
NOR	10	10^5	15 ns	10^3 ns	-	-	-
SRAM	150	-	2 ns	2 ns	-	-	-
FeRAM	22	10^{12}	40 ns	65 ns	-	-	-
ReRAM	30	10^5	100 ns	100 ns	-	64 B	0
PCM	4	10^{12}	12 ns	100 ns	-	64 B	0
STT-MRAM	20	10^{16}	5 ns	5-30 ns	-	64 B	0
pSTT-MRAM	-	-	3 ns	3 ns	-	-	-
TAS-MRAM	-	10^{12}	30 ns	30 ns	-	-	-

Tabela 4 – Classificação de Técnicas que Utilizam NVMs.

Classificação	Referências
SPM	(WANG et al., 2013), (HU et al., 2013), (QIU; CHEN; LIU, 2014), (RODRÍGUEZ; TOURINO; KANDEMIR, 2015), (WANG et al., 2015)
Cache	(LI et al., 2013), (LI et al., 2014), (QIU et al., 2014), (KOMALAN et al., 2014), (KOMALAN et al., 2015), (LI et al., 2015), (LIN; CHIOU, 2015), (AHN; YOO; CHOI, 2016), (ZHAO et al., 2013)
Memória principal	(ZHAO et al., 2013), (KIM et al., 2013), (MORARU et al., 2013), (GAO et al., 2013), (KANNAN et al., 2013), (JUNG; CHO, 2013), (SAMPSON et al., 2014), (LI et al., 2014), (ZHANG et al., 2016), (HU et al., 2016), (WANG et al., 2016)
Eficiência Energética	(WANG et al., 2013), (HU et al., 2013), (QIU; CHEN; LIU, 2014), (RODRÍGUEZ; TOURINO; KANDEMIR, 2015), (QIU et al., 2014), (KOMALAN et al., 2014), (LI et al., 2015), (LIN; CHIOU, 2015), (AHN; YOO; CHOI, 2016), (MITTAL; VETTER; LI, 2014), (AGRAWAL; ANSARI; TORRELLAS, 2014), (AHN; CHOI, 2014), (WANG et al., 2016)
Melhoria de desempenho	(WANG et al., 2013), (HU et al., 2013), (RODRÍGUEZ; TOURINO; KANDEMIR, 2015), (LIN; CHIOU, 2015), (AHN; YOO; CHOI, 2016)
STT-RAM	(WANG et al., 2013), (RODRÍGUEZ; TOURINO; KANDEMIR, 2015), (WANG et al., 2015), (QIU et al., 2014), (KOMALAN et al., 2014), (KOMALAN et al., 2015), (LI et al., 2015), (LIN; CHIOU, 2015), (AHN; YOO; CHOI, 2016), (ZHAO et al., 2013)
PCM	(HU et al., 2013), (MORARU et al., 2013), (GAO et al., 2013), (KANNAN et al., 2013), (JUNG; CHO, 2013), (SAMPSON et al., 2014), (LI et al., 2014), (ZHANG et al., 2016)
MRAM	(QIU; CHEN; LIU, 2014)
Z-RAM	(QIU; CHEN; LIU, 2014)
Algoritmos propostos	(WANG et al., 2013), (HU et al., 2013), (QIU; CHEN; LIU, 2014), (RODRÍGUEZ; TOURINO; KANDEMIR, 2015), (WANG et al., 2015), (QIU et al., 2014), (LI et al., 2015), (LIN; CHIOU, 2015)

2.2.2.1 Memória Principal

Zhao et al. (2013) propuseram um sistema de memória persistente com desempenho muito próximo ao de um sistema nativo. Este sistema de memória persistente, chamado *Kiln*, adota uma cache não volátil e uma memória principal também não volátil, formando uma hierarquia de memória persistente de várias versões. Os experimentos utilizaram a ferramenta de simulação McSim (AHN et al., 2013).

A fim de adotar uma nova tecnologia de memória, Kim et al. (2013) discutiram um novo sistema de arquivo baseado em *tmpfs* com três aspectos que necessitam ser incluídos, e avaliaram seu desempenho em relação a sistemas de arquivos populares como o *ext4*. Neste trabalho, eles avaliaram um sistema de arquivos construído principalmente na memória principal não volátil. A fim de avaliar o sistema de arquivos na memória NVM foram utilizadas execuções do *sysbench* em três ambientes diferentes do sistema de arquivos.

Moraru et al. (2013) introduziram técnicas para alocação de memória resistente ao desgaste, impedindo escritas incorretas. Os autores mostram que essas técnicas são implementáveis e eficazes.

Gao et al. (2013) propuseram suporte de hardware que agrupa linhas com falha em uma extremidade da região de memória para reduzir a fragmentação e melhorar o desempenho sobre falhas. Resultados experimentais mostraram que a cooperação de hardware e software pode prolongar significativamente a vida útil das memórias.

Kannan et al. (2013) exploram o uso de NVMs nos nós locais para fornecer pontos de verificação frequentes e de baixo custo. Ao adaptar técnicas de verificação de vários níveis, os autores criaram novos métodos denominados de pontos de verificação NVM que armazenam pontos de verificação com eficiência em NVMs locais e remotas.

Jung et al. (2013) propõem *Memorage*, uma arquitetura de sistema que gerencia virtualmente todos os recursos físicos disponíveis para memória e armazenamento de forma integrada.

O trabalho de (KHOUZANI; HOSSEINI; YANG, 2017) propõe melhorar o desempenho e durabilidade de uma memória principal híbrida DRAM-PCM explorando as interações entre DRAM e PCM. Especificamente, as autoras exploram a flexibilidade de mapear páginas virtuais em páginas físicas e desenvolvem uma estratégia proativa para alocação de páginas que distribui páginas com excessiva quantidade de operações de escrita em diferentes conjuntos de DRAM.

Vários outros trabalhos aproveitam as novas tecnologias de memória para substituir a DRAM como memória principal e melhorar a vida útil (SAMPSON et al., 2014), o desempenho (LI et al., 2014), energia e desempenho (ZHANG et al., 2016; HU et al., 2016), e outros trabalhos possuem especial atenção para a otimização de energia (WANG et al., 2016).

2.2.2.2 Scratchpad Memory (SPM)

Memórias SPM que empregam NVMs são investigadas nos trabalhos de (WANG et al., 2013) e (WANG et al., 2015), comparando-as com tecnologias de memória tradicionais.

Wang et al. (2013) avaliaram uma arquitetura SPM de baixa potência que consiste em STT-RAM. Eles também conduziram uma análise de sensibilidade em função da área de uma arquitetura SPM híbrida (SRAM+STT-RAM). Nesta arquitetura híbrida foi utilizado um esquema de alocação dinâmica de dados para alocar os dados com maior número de escritas na memória SRAM enquanto os dados com maior número de leituras foram alocados na STT-RAM. Resultados experimentais foram obtidos com utilização do ambiente de simulação Simics (MAGNUSSON et al., 2002) com o GEMS (MARTIN et al., 2005). Os autores usaram o algoritmo de Udayakumaran (UDAYAKUMARAN; BARUA, 2003) para gerenciar a alocação de dados em memória SRAM SPM pura. Resultados experimentais mostram que a SPM híbrida, com razão de área de 2:1 (SRAM:STT-RAM) obtém o melhor desempenho e o melhor produto energia-atraso, enquanto a configuração com STT-RAM pura supera as demais em energia.

Hu et al. (2013) propõem um novo sistema híbrido SPM que consiste de uma SRAM e uma NVM a fim de obter vantagem da potência de *leakage* ultrabaixa e da alta densidade desta última. Além disso, eles propõem um algoritmo de gerenciamento dinâmico de dados. Eles comparam o algoritmo de Udayakumaran com os algoritmos propostos. Resultados experimentais mostraram que a arquitetura SPM híbrida pode reduzir o tempo de acesso à memória, a energia dinâmica e a potência de *leakage* em comparação com uma SRAM SPM pura com mesma área.

Nos trabalhos de (WANG et al., 2013; HU et al., 2013), os autores utilizaram NVsim (DONG et al., 2014) para estimar as latências de leitura e de escrita e o consumo para um determinado tamanho de PCM, SRAM e STT-RAM. Nestes trabalhos, os benchmarks foram selecionados do MiBench (GUTHAUS et al., 2001).

Qiu et al. (QIU; CHEN; LIU, 2014) propõem uma arquitetura SPM heterogênea que é configurada com SRAM, MRAM, e Z-RAM² para sistemas embarcados multicore. Os autores propõem dois algoritmos: um algoritmo de programação dinâmica (MDPDA) e um algoritmo genético (AGADA) para alocar dados em diferentes bancos de memória, reduzindo, assim, o custo de acesso à memória no que diz respeito ao consumo e latência. Os algoritmos foram avaliados em uma série de benchmarks selecionados do PARSEC³. As cargas de trabalho foram executadas no simulador M5⁴ para obter os traços de memória. Além disso, para obter os parâmetros de memória, foi utilizada

²Zero-capacitor RAM (Z-RAM)

³(BIENIA, 2011)

⁴(BINKERT et al., 2006)

uma versão modificada do CACTI⁵. Resultados experimentais mostram que o algoritmo MDPDA pode reduzir o consumo de energia dinâmica para o sistema quad-core em 24,18%, em comparação com o algoritmo guloso (Udayakumaran). De outros resultados, pode-se observar que a redução no consumo de energia é proporcional à redução na latência de acesso à memória. O algoritmo AGADA consome, em média, 2,21% mais potência dinâmica do que o MDPDA. No entanto, o algoritmo AGADA é mais competitivo em desempenho geral.

Rodríguez et al. (RODRÍGUEZ; TOURINO; KANDEMIR, 2015) exploram o uso de uma SPM baseada em STT-RAM. Eles propõem a implementação de SPMs usando STT-RAMs com volatilidade relaxada como um meio de aproveitar ainda mais as características de área e energia dessa tecnologia. Neste trabalho é proposto um projeto com diversas regiões de SPM, cada uma com diferentes características de desempenho, potência e retenção. A avaliação experimental mostra que o projeto proposto oferece economia potencial no consumo de energia acima de 60% quando comparado com diferentes projetos de memória *on-chip*. Para o projeto de memória foi utilizado o sistema de simulação e modelagem STeTSiMS⁶. A arquitetura de memória de dados deste sistema consiste de três componentes: uma memória cache, uma SPM e a memória principal. A cache e a SPM estão localizadas no chip, enquanto a memória principal pode ser considerada como uma DRAM fora do chip. Os experimentos foram realizados utilizando o simulador GEM5⁷ no modo SE (*System-call Emulation*). As aplicações de teste foram extraídas dos *benchmarks* SPEC CPU2006⁸, Mantevo⁹, Mediabench¹⁰, e PARSEC. As avaliações experimentais mostram que o sistema proposto por (RODRÍGUEZ; TOURINO; KANDEMIR, 2015) apresenta benefícios significativos para aplicações embarcadas, com economia de 63% no consumo de potência dinâmica em comparação com uma SPM baseada em uma memória não volátil STT-RAM. Além disso, o sistema executa 28.5% mais rápido, economizando 53% de potência consumida por um sistema com uma cache SRAM gerenciado por hardware de mesma área.

Wang et al. (WANG et al., 2015) usaram uma SPM baseada em STT-RAM para sistemas embarcados de tempo real. Eles apresentaram algoritmos para alocar variáveis de dados para a SPM e distribuir a atividade de escritas de maneira uniforme nos endereços da SPM a fim de obter nivelamento de desgaste e prolongar a vida útil da NVM. Neste trabalho são utilizados dois algoritmos de otimização: um algoritmo ótimo baseado em ILP e um algoritmo heurístico eficiente que pode obter soluções próximas

⁵(MURALIMANO HAR; BALASUBRAMONIAN; JOUPPI, 2007)

⁶(SMULLEN et al., 2011)

⁷(BINKERT et al., 2011)

⁸(HENNING, 2006)

⁹(HEROUX et al., 2009)

¹⁰(LEE; POTKONJAK; MANGIONE-SMITH, 1997)

do ótimo. Os parâmetros do sistema de memória foram obtidos de Monazzah et al. (MONAZZAH et al., 2013). Como a STT-RAM pode ser muito mais densa que a SRAM, eles comparam os sistemas de destino com SPM baseada em STT-RAM de 2 KB e SPM baseada em SRAM de 1 KB. Os programas de benchmarks foram selecionados de Mälardalen WCET (GUSTAFSSON et al., 2010). A ferramenta Chronos WCET tool (LI et al., 2007) foi usada para obter o WCET (*Worst-Case Execution Time*) de cada programa e obter o número de acessos à memória de leitura/escrita de cada variável a partir do traço de acesso à memória. Os resultados experimentais mostram que a utilização total da CPU aumenta com cada WCET do programa, variando de 0,22 para 1 ano de vida útil e 0,38 para uma vida útil de 32 anos. Mesmo que os algoritmos obtenham resultados semelhantes para a utilização total de CPU, eles podem produzir valores diferentes de WCET para diferentes programas individuais.

2.2.2.3 Cache

Memórias STT-RAM são candidatas promissoras à substituição das memórias SRAM devido seus excelentes recursos. Apesar disso, a ampla adoção de memórias STT-RAM como memórias cache é impedida por sua longa latência e alta potência em operações de escrita. Neste sentido, esta seção apresenta trabalhos que abordam propostas de memórias híbridas com utilização de memórias não voláteis em memórias cache.

Li et al. (2013) propõem uma estratégia chamada CCear (*Cache-Coherence-Enabled Adaptive Refresh*) para minimizar o número de operações de atualização para memórias voláteis STT-RAM. Para os experimentos, foi simulado um conjunto de aplicações PARSEC com diferentes intensidades de operações de leitura/escrita e a estratégia proposta pelos autores teve um desempenho próximo a uma política de atualização ideal com baixo *overhead*.

Li et al. (2014) desenvolveram duas abordagens baseadas em compilação para aumentar a eficiência energética e de desempenho de memórias cache híbridas baseadas em STT-RAM com a finalidade de reduzir *overhead* de migrações: MDL e MCL. A primeira abordagem reduziu as migrações reorganizando o leiaute de dados, enquanto a segunda abordagem foi proposta para reduzir as migrações bloqueando blocos de memória com intensiva migração na SRAM da cache híbrida. A técnica de compilação proposta é implementada em LLVM¹¹ e os benchmarks foram selecionados da suíte de testes LLVM. Resultados experimentais mostram que com a combinação destes métodos, em média, reduz o número de operações de escritas na STT-RAM em 17,6%, enquanto o número de migrações é reduzido em 38,9%, a energia dinâmica total é reduzida em 15,6% e a latência total de acesso é reduzida em 13,8%.

No trabalho de Qiu et al. (2014) é proposto um *framework* para reduzir o *overhead*

¹¹(LATTNER; ADVE, 2004)

de migração alterando o padrão de acesso à memória. O trabalho adota a política de migração apresentada em (LI; XUE; XU, 2011) e os *benchmarks* selecionados a partir dos conjuntos de *benchmarks* Livermore, BLITZ++, e programas DSP. Para avaliação, foi projetado um simulador de cache híbrida baseada em STT-RAM com política de migração¹². Com a técnica proposta, os acessos à memória podem ser reduzidos de modo que o *overhead* de migração seja mitigado e a eficiência energética da cache híbrida seja melhorada. Resultados experimentais mostraram que, com os métodos propostos, o número de migrações é reduzido em até 27.1% e a energia dinâmica da cache é reduzida em até 14%.

Komalan et al. (2014) apresentam uma modificação da organização tradicional MSHR (*Miss Status Handling Register*) para a exploração eficaz de I-caches L1 (IL1) baseadas em STT-RAM. Este trabalho utiliza uma versão modificada da organização MSHR descrita no trabalho de (KROFT, 1981), onde um pequeno buffer intermediário é utilizado para manter as instruções provenientes da L2 antes de realmente atualizarem a IL1. Esta versão é chamada de *enhanced* MSHR (EMSHR). Para as simulações os autores incluíram uma ampla variedade de benchmarks representativos das suítes DSPstone, MediaBench e SPEC CPU2006. Com a finalidade de avaliar a eficácia das modificações propostas foi utilizado o simulador GEM5 no modo SE. A partir das simulações, foi verificado que o ajuste apropriado dos parâmetros seletivos da arquitetura pode reduzir a penalidade de desempenho introduzida pela NVM ($\sim 45\%$) para níveis toleráveis ($\sim 1\%$) e mostrar ganhos de potência de até 35%. Além disso, ao configurar o sistema baseado em NVM modificada para ocupar uma área comparável à configuração baseada em SRAM original, ele superar a SRAM e economiza ainda mais energia.

Komalan et al. (2015) exploram as questões de penalidade de leitura em uma cache de dados L1 baseada em memória NVM (D-cache) para um sistema de propósito geral tipo ARM. Os autores propõem, para esta plataforma, um método de projeto para a D-cache baseada em STT-RAM. Este projeto aborda os efeitos adversos devido aos problemas de penalidade de leitura na memória STT-MRAM por meio de modificações microarquiteturais em conjunto com transformações de código. Para as simulações, foi utilizado o simulador de microarquitetura GEM5 e um subconjunto de aplicações do *benchmark* PolyBench. A partir das simulações foi possível concluir que o ajuste apropriado de parâmetros seletivos da arquitetura e otimizações adequadas podem reduzir a penalidade de desempenho introduzida pela NVM (inicialmente $\sim 54\%$) para níveis extremamente toleráveis ($\sim 8\%$).

Li et al. (LI et al., 2015) propôs significativa redução do número de operações de *refresh* por meio da reorganização do *layout* dos dados de programa em tempo de compilação. Um esquema N-refresh também é proposto para reduzir ainda mais o

¹²(BERKOWITS, 2012)

número de atualizações. A fim de avaliar os métodos propostos, foi desenvolvido um simulador de cache. Os parâmetros da arquitetura são baseados na arquitetura TI DM3x Video SOC. Os experimentos que contêm benchmarks típicos para sistemas embarcados foram avaliados com o pacote de benchmarks Powerstone , enquanto os métodos baseados em ILP foram implementados usando a ferramenta comercial LINGO¹³. Resultados experimentais mostram que, em média, os métodos propostos podem reduzir o número de operações de *refresh* em 84.2%, além de reduzir o consumo de potência dinâmica em 38.0% para caches STT-RAM voláteis¹⁴ e somente 4.1% de degradação de desempenho.

Lin et al. (2015) propõem um projeto de cache híbrida que inclui cache SRAM, cache STT-RAM e bancos de cache híbrida STT-RAM / SRAM. Neste trabalho foi utilizado o simulador GEM5 para simular um processador de 2 GHz com quatro núcleos. O modelo de memória clássico no GEM5 é modificado para implementar a cache L2 híbrida. A fim de avaliar o esquema proposto, foi utilizado o pacote de benchmark PAR-SEC (BIENIA et al., 2008). Os valores de latência e energia da cache SRAM usados neste trabalho foram obtidos com o CACTI, enquanto para a cache STT-RAM é utilizado uma versão modificada do NVSim (DONG et al., 2014) e o modelo relatado em (SUN et al., 2009) para obter os parâmetros na tecnologia de 65 nm. Os resultados experimentais mostram que o esquema e as políticas propostas podem alcançar uma melhoria média de 89 vezes no tempo de vida da cache e pode reduzir o consumo de energia em 58 % em comparação com uma cache SRAM.

Ahn et al. (2016) propõem uma arquitetura de cache híbrida STT-RAM chamada *prediction hybrid cache*. O conceito chave desta arquitetura é a previsão de intensidade de escrita que prevê a intensidade de escrita de blocos de cache na ocorrência de falhas (*misses*) e determina o posicionamento do bloco baseado nesta previsão. As caches híbridas são configuradas para ter 4 vias de SRAM e 12 vias de STT-RAM. As características de energia e atraso da cache L2 em uma tecnologia de 45 nm foram modeladas com o uso do CACTI 6.5¹⁵ e NVSim¹⁶. Neste trabalho, são utilizados 16 benchmarks do SPEC CPU2006. Resultados experimentais mostram que a arquitetura atinge 28% (31%) de redução de consumo em caches híbridas, 3% (4%) de redução de consumo em memórias principais, e 1.4% (4.7%) de aumento de velocidade para o sistema *single-core* (*quad-core*) com comparação com a arquitetura de cache híbrida existente.

¹³<https://www.lindo.com/>

¹⁴Apesar de não voláteis, pesquisadores propuseram melhorar o desempenho de escrita em memórias STT-RAM a partir do relaxamento de sua propriedade de não volatilidade.

¹⁵(MURALIMANO HAR; BALASUBRAMONIAN; JOUPPI, 2009)

¹⁶(DONG et al., 2014)

2.2.3 Desafios de Pesquisa em Sistemas de Memória

esquemas de leitura bem projetados. Os autores também destacam a necessidade de inovações de dispositivo e material para redução do tamanho do MTJ e da corrente de comutação a fim de aumentar a variabilidade do MTJ com escalabilidade. Além destes exemplos, os autores mencionam os desafios referentes às memórias RRAM, tais como confiabilidade, variabilidade e mecanismos de falha.

A Figura 9 resume os principais chips de teste da indústria de PCM, STT-RAM e RRAM relatados em conferências, como descrito no trabalho de (CHEN, 2016). Estes chips são totalmente funcionais com circuitos periféricos. O tamanho dos símbolos é proporcional ao nó de tecnologia do processo CMOS usado para a fabricação. O nome da empresa, a capacidade e a tecnologia de cada chip estão rotulados próximo a cada símbolo da figura. Entre as três tecnologias de NVM mencionadas, os chips de teste PCM (símbolos azuis) foram demonstrados mais cedo e variam em capacidade de dezenas de Mb a vários Gb. A capacidade de chips de STT-RAM (símbolos vermelhos) é geralmente menor porque estas memórias são utilizadas para aplicações orientadas a desempenho em vez de armazenamento de dados de alta densidade. Por fim, a RRAM varia na mais ampla faixa em termos de capacidade do chip de teste e nós de tecnologia porque diferentes empresas têm como alvo diferentes aplicações para esta tecnologia como, por exemplo, eNVM para unidades de microcontrolador (MCUs), armazenamento de dados autônomo, dentre outros.

Considerando o exposto, para que as NVMs possam substituir as tecnologias atuais, é observada uma tendência de adoção de abordagens híbridas. Assim, a utilização de memórias híbridas exige diferentes mecanismos a fim de explorar as características desejáveis de cada memória. Segundo (ZHANG et al., 2016), as duas principais formas de explorar memórias híbridas são: (i) colocando a NVM como memória principal e a DRAM como *buffer* para auxiliar a NVM; ou (ii) colocando as duas memórias no mesmo nível. Ao utilizar a abordagem de colocar as memórias no mesmo nível, a maioria dos trabalhos adota a estratégia de migração de páginas baseando-se em seus perfis de acesso. Ao utilizar migração de páginas, é adicionado um novo custo a cada migração, além de sobrecarregar o mecanismo de coerência de *cache* (ZHANG et al., 2016). No trabalho de Huang et al. (2016) é mencionado que, ao ocorrer migrações de páginas, dois comportamentos poderão ocorrer: (i) muitas migrações, o que causa *overhead* de comunicação e diminui o desempenho; ou (ii) poucas migrações, o que causa uma má exploração das características das memórias, levando ao aumento na degradação das NVMs e a um maior consumo energético para escrita.

Dessa forma, é possível observar desafios como gerência de dados e seu impacto no desempenho geral da arquitetura.

2.2.4 Gerenciamento de Dados em Memórias Explorando Sistemas Fuzzy

A tendência de adoção de memórias híbridas em sistemas de memória amplia os desafios que envolvem a tomada de decisão como, por exemplo, as novas formas para decidir em quais componentes de memória os dados serão escritos de modo a explorar as melhores características de cada memória.

Considerando as incertezas inerentes aos sistemas híbridos de memória, além da tendência de utilização destes sistemas, são verificados, na literatura de arquitetura de computadores, trabalhos que propuseram aplicar sistemas fuzzy para a tomada de decisão quando os parâmetros de entrada são incertos ou passíveis de múltipla interpretação. Arquiteturas de memória apresentam diversos algoritmos e políticas para escrita de dados, pois são formadas por vários níveis como, por exemplo, por registradores, *cache*, memória principal e armazenamento em massa.

No trabalho de (DIAB; KASHANI; NASRI, 2009) é proposta uma política de substituição de blocos para memória *cache* utilizando um Sistema de Inferência Fuzzy (FIS). O FIS proposto busca definir quais blocos em *cache* terão mais chances de serem substituídos. Para a tomada de decisão, o FIS considera três variáveis linguísticas de cada bloco em *cache* como valores de entrada: (i) *Access Frequency* - Representa a frequência com que o bloco é acessado; (ii) *Access Recency* - Refere-se ao tempo decorrido desde o último acesso ao bloco e (iii) *Access Distance* - Distância, em tempo, entre dois acessos consecutivos.

Para que os parâmetros sejam utilizados pelo FIS, para cada um deles são definidos três termos linguísticos: baixa, média e alta. Baseando-se nesses parâmetros e em suas intensidades, após o processamento do FIS, para cada bloco é definido um valor denominado *Dismissal Index*.

Esse valor representa a intensidade com a qual o bloco deve ser removido da *cache*. Para esse valor de saída de cada bloco, são também definidas três termos linguísticos: Baixa, média e alta. Quando o *Dismissal Index* de um bloco é considerado baixo, significa que esse bloco deverá permanecer na *cache*, enquanto que um bloco com *Dismissal Index* alto tem mais chances de ser removido da *cache*.

O mecanismo de inferência é formado por um conjunto de 27 regras lógicas no formato IF-THEN. O processo de defuzzificação é feito através do cálculo do centroide, que corresponde ao centro da área abaixo da curva gerada pela agregação de todas saídas fuzzy. Para a implementação do FIS foi utilizado o Matlab 7 com o Fuzzy Logic Toolbox. Para gerar os dados de entrada foi utilizado o CS V0.9.71 Cache Simulator. O simulador CS fornece as informações de frequência e recência de acesso aos blocos. O parâmetro *Reuse Distance* é calculado a partir do *timestamp* dos acessos, fornecido também pelo simulador CS. Os testes consideraram a combinação de três tamanhos de *cache* (512B, 16KB e 64KB) com cinco diferentes tamanhos de blocos (4, 8, 16, 32 e 64 bytes).

Com os testes, embora não tenham sido apresentadas informações sobre desempenho, o trabalho conclui que com pequenas modificações no controlador de *cache* é possível implementar um mecanismo para gerenciamento de dados utilizando Lógica Fuzzy (LF).

O trabalho apresentado por (CHUNG; HALIM, 2014) propõe uma política para gerenciamento de dados em *cache* de nível 2 utilizando um *Adaptive Neuro-Fuzzy Inference System* (ANFIS). Partindo do princípio de que o desempenho da política LRU para gerenciamento de *cache* depende dos *workloads* utilizados, o método proposto combina as características das políticas LRU e LFU em um sistema Fuzzy, além de utilizar *Neural Networks* (NN) para tornar a política adaptativa aos *workloads*.

A política ANFIS proposta consiste em um híbrido entre NN e FIS. Em geral, o modelo consiste majoritariamente em um FIS que utiliza NN para prover regras adaptativas. O uso de NN dispensa a necessidade de um especialista para definir a base de regras do FIS.

O treinamento do NN é feito de forma *offline* com o uso do simulador SimpleScalar para a coleta de dados. O simulador foi modificado para coletar os dados de recência e frequência dos blocos. Como *workload*, foi utilizado o *benchmark* SPEC CPU2006. As informações coletadas foram armazenadas em estruturas adicionais de memória, compostas por dois *bits* para recência e quatro *bits* para frequência de cada bloco. Com os dados coletados, o treinamento foi feito com Matlab para determinar os parâmetros das funções de pertinência do FIS. O modelo ANFIS treinado foi então utilizado nos testes de desempenho. Para os testes foram comparadas as políticas ANFIS, LRU e LFU.

Para avaliação de desempenho, foi observada a taxa de *miss*. Com a realização dos testes foi observado que para *cache* L1, a política LRU tem menores taxas de *miss*, enquanto para *cache* L2 a política ANFIS é superior.

O trabalho de (QADRI; MAIER, 2010) propõe uma arquitetura de multiprocessadores adaptativa e reconfigurável baseada na utilização de sistemas de decisão fuzzy. A arquitetura busca atingir um equilíbrio entre consumo de energia e *throughput*. Para atingir esse objetivo, a arquitetura permite que quatro componentes sejam ajustados: (i) Associatividade da *cache* L1; (ii) Tamanho da *cache* L1; (iii) Frequência de operação dos processadores; e (iv) Número de processadores ativos.

O sistema de reconfiguração fuzzy considera como parâmetros para tomada de decisão a taxa de *miss* na *cache* L1, a utilização dos processadores e o consumo energético da memória *cache* e dos processadores. O mecanismo fuzzy utilizou para sua implementação o Fuzzy Logic API (RABIN, 2002).

A arquitetura proposta é baseada em um sistema x86 *octa-core*, onde cada *core* possui sua *cache* L1 privada de tamanho variável. A *cache* L2 é compartilhada entre os oito *cores* e possui tamanho fixo em 128KB. As informações sobre consumo de

energia e tempo de execução foram obtidos utilizando a ferramenta Cacti. Para os testes foi utilizado o Simics Simulator (MAGNUSSON et al., 2002) e como *workload* foi aplicado o NAS Parallel Benchmarks (JIN et al., 1999) baseado em OpenMP. O ajuste da arquitetura foi realizado em cinco iterações. Em cada iteração, as aplicações foram executadas pelos primeiros cinco segundos, seguida da reconfiguração da arquitetura baseando-se nas decisões do sistema fuzzy.

Os resultados obtidos mostraram que a utilização média dos *cores* teve um aumento de duas vezes, devido a desativação de *cores* sem utilização. O consumo energético teve uma redução de 3,7 vezes, porém, o *throughput* teve uma redução de 40%. Além disso, a taxa de *miss* teve um aumento de quase duas vezes em relação à configuração original.

A Tabela 5 sumariza trabalhos que exploram sistemas fuzzy em arquiteturas de memória. Para cada trabalho são apresentados os simuladores e ferramentas utilizados, o nível de memória adotado e os parâmetros de tomada de decisão. Percebe-se, a partir dos trabalhos em questão, que a maior parte propõe estratégias para memória *cache*, sejam políticas para gerenciamento de dados (KHAJOUINEJAD; SABEGHI; SADEGHZADEH, 2006; DIAB; KASHANI; NASRI, 2009; CHUNG; HALIM, 2014), ou ajuste do tamanho da memória (QADRI; MAIER, 2010).

Ao aplicar sistemas fuzzy para tomada de decisão em arquiteturas de memória, os dois principais parâmetros de entrada do sistema são frequência de acesso ao dado ou à unidade de memória e recência do acesso. Entre outros parâmetros utilizados estão distância entre acessos (DIAB; KASHANI; NASRI, 2009), taxa de *miss* (QADRI; MAIER, 2010) e custo para movimentação de dados (VIJAYAKUMAR; SRINIVASAGAN; SABARIMUTHUKUMAR, 2015).

2.3 Considerações sobre o Capítulo

Com o desenvolvimento e utilização de memórias não voláteis emergentes em substituição às tecnologias de memórias atuais, é apresentada uma tendência e adoção de arquiteturas híbridas.

A adoção de memórias híbridas apresenta desafios adicionais em relação ao gerenciamento de dados nestes sistemas de memória. Este gerenciamento envolve processos de tomada de decisão, para o qual tem sido apontadas soluções para abordar as incertezas provenientes destes sistemas de memória com a aplicação de sistemas baseados em lógica fuzzy.

O gerenciamento de memórias híbridas se baseia em migrações de páginas entre os módulos de memória que as compõem. Este gerenciamento tem por base a coleta e o armazenamento das estatísticas de acessos à memória, empregando para isto heurísticas que se desdobram em componentes de hardware e software.

Tabela 5 – Trabalhos em Arquiteturas de Memória Explorando Lógica Fuzzy.

Trabalhos	Simuladores e ferramentas	Nível de memória	Parâmetros
Diab et al. (2009)	- Matlab 7 - CS V0.9.71 - Cache Simulator - Fuzzy Logic Toolbox	Cache, genericamente	- Frequência de acesso - Recência do acesso - Distância entre acessos consecutivos
Chung and Halim (2014)	- SimpleScalar - Matlab	Cache L2	- Frequência de acesso - Recência do acesso
Quadri and Maier (2010)	- Fuzzy Logic API - Cacti - Simics	Cache L1	- Miss na cache L1 - Utilização dos processadores - Consumo energético da cache e processadores
Vijayakumar et al (2015)	- Cloud-Stack	não se aplica	- Número de acesso aos dados - Custo de replicação - Tempo do último acesso
Khajoueinejad et al. (2006)	sem informações	Cache, genericamente	- Frequência de acesso - Recência do acesso - Número de requisições - Taxa de leitura/escrita - Tempo entre requisições
Niu et al. (2016)	- Disksim	Storage	- Tamanho de leituras/escritas - Número de leituras/escritas sequenciais - Taxa de leituras locais - Distância entre leituras locais

Estes componentes tem limite no que diz respeito às particularidades de frequência de leitura e/ou tamanho dos *buffers* empregados para os registros. Os aspectos de incerteza associados a estes dados empregados no gerenciamento foram introduzidos nas publicações (OLIVEIRA et al., 2021; MOURA et al., 2020). Estas publicações do grupo de pesquisa utilizam lógica fuzzy para o tratamento da incerteza inerente aos sistemas de memória discutidos neste capítulo.

A revisão de literatura realizada também apontou que o emprego de consenso fuzzy não vem sendo explorado no gerenciamento de arquiteturas de memória. Considerando que medidas de consenso vem se mostrando relevantes no processo de tomada de decisões, decorre daí uma das motivações para o desenvolvimento da pesquisa realizada nesta Tese, a qual culminou com a concepção da estratégia CDM.

3 TEORIA DOS CONJUNTOS FUZZY E EXTENSÕES

Este capítulo introduz conceitos fundamentais sobre a teoria de conjuntos fuzzy, discutindo construções duais e conjugadas, as quais também incluem as principais propriedades dos conjuntos fuzzy.

A palavra *fuzzy*, de origem inglesa, pode ter diferentes significados, os quais variam de acordo com o contexto de interesse (CABRERA, 2014). Como destacado por (BARROS; BASSANEZI, 2006), dentre os significados estão os termos incerto, vago, impreciso, subjetivo, nebuloso, difuso, hesitante dentre outros. Essas traduções, no entanto, não contemplam com fidelidade o sentido mais amplo dado ao termo e justificam seu uso neste texto.

Os primeiros conceitos formais para estruturação de uma lógica fuzzy multivalorada foram introduzidos em 1930 por Jan Łukasiewicz. Ele propôs, a partir de termos linguísticos como alto, velho e quente, a utilização do intervalo unitário $U = [0, 1]$ para indicar o grau de veracidade de uma proposição (CABRERA, 2014), onde 1 indica a veracidade absoluta e o 0 a falsidade absoluta. Valores entre 0 e 1 indicam incerteza da veracidade/falsidade da proposição.

A teoria de conjuntos fuzzy, no entanto, foi introduzida em 1965 por Lotfi Asker Zadeh (ZADEH, 1965) com o principal objetivo de dar um tratamento matemático a certos termos linguísticos subjetivos como “aproximadamente”, “em torno de”, dentre outras tantas variáveis linguísticas. A formalização proposta por Zadeh consolidou-se como o primeiro passo no sentido de se programar e armazenar conceitos vagos em computadores, tornando possível a produção de cálculos com informações imprecisas, a exemplo do que faz o ser humano (BARROS; BASSANEZI, 2006).

A fundamentação matemática e lógica para sistemas computacionais complexos baseada na teoria dos conjuntos fuzzy tem-se integrado em várias áreas de tomada de decisão, com significativo aporte no contexto da ciência da computação (DUBOIS; OSTASIEWICZ; PRADE, 2000).

Os conjuntos fuzzy e as correspondentes possibilidades de combinações da lógica tem sido amplamente aplicados para modelar incertezas nas informações disponíveis, contribuindo para a tomada de decisão baseada em múltiplos critérios que são avali-

ados em termos de valores linguísticos representados por valores fuzzy no intervalo unitário $[0, 1]$ (ALABOOL; MAHMOOD, 2013).

3.1 Teoria dos Conjuntos Fuzzy

Seja χ um conjunto de referência não vazio. Formalmente, um conjunto fuzzy X é descrito por um conjunto de pares de elementos, onde $u \in \chi$ é associado a um grau de pertinência $\mu_A(u)$:

$$A = \{(u, \mu_A(u)) : \mu_A(u) \in [0, 1], u \in \chi\} \in \mathcal{F}_\chi, \quad (1)$$

tal que $\mu_A : \chi \rightarrow [0, 1]$.

O conjunto de todos os conjuntos fuzzy em χ é representado como $\mathcal{F}_\chi$. Em particular, para $\emptyset, \chi \in \mathcal{F}_\chi$, tem-se que $\mu_\emptyset(u) = 0$ e $\mu_\chi(u) = 1$, para cada $u \in \chi$, respectivamente.

Frequentemente, a representação gráfica de uma função de pertinência (MF¹) é dada por uma composição de funções lineares como, por exemplo, triangular ou trapezoidal (BEZDEK et al., 1999). Além disso, quando χ é finito, é indicado como $\chi_m = \{u_1, \dots, u_m\}$ e tem-se $\mu_X(u_i) = x_i \in [0, 1]$, para $i \in \mathbb{N}_m = \{1, 2, \dots, m\}$.

Seja $\mathcal{L} \equiv (\mathcal{L}, \leq_{\mathcal{L}})$ um reticulado completo (limitado), induzido pela ordem parcial $\leq_{\mathcal{L}}$ com as operações supremo e ínfimo $\vee_{\mathcal{L}}, \wedge_{\mathcal{L}} : \mathcal{L} \times \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$ e limitado pelos elementos $\top_{\mathcal{L}}$ e $\perp_{\mathcal{L}}$ (FAN; ZHANG; XU, 2006; GIERZ et al., 2003). A seguir, são apresentados os reticulados considerados neste trabalho:

1. Considerando a ordem natural $\leq$ sobre o intervalo unitário $[0, 1]$, o reticulado completo (limitado) dos valores fuzzy é representado como $\mathcal{L}_{[0,1]} = ([0, 1], \leq, \vee, \wedge, 1, 0)$, tomando os operadores $\vee, \wedge : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$, onde $x \vee y = \max(x, y)$ e $x \wedge y = \min(x, y)$, para todo $x, y \in [0, 1]$, com 0 e 1 como o menor e maior elemento, respectivamente.
2. Seja $\mathcal{L}_{[0,1]}^n = ([0, 1]^n, \leq_{\mathcal{L}_{[0,1]}^n}, \vee_{\mathcal{L}_{[0,1]}^n}, \wedge_{\mathcal{L}_{[0,1]}^n}, \vec{1}, \vec{0})$ o reticulado de vetores n -dimensional de valores fuzzy sobre $[0, 1]^n$. Para $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n), \vec{y} = (y_1, \dots, y_n) \in [0, 1]^n$, tem-se que:
 - (i) a ordem pontual $\vec{x} \leq_{\mathcal{L}_{[0,1]}^n} \vec{y} \Leftrightarrow x_i \leq y_i, \forall i \in \mathbb{N}_n$;
 - (ii) $\vee_{\mathcal{L}_{[0,1]}^n}(\vec{x}, \vec{y}) = (x_1 \vee y_1, \dots, x_n \vee y_n)$, e sua construção dual $\wedge_{\mathcal{L}_{[0,1]}^n}(\vec{x}, \vec{y}) = (x_1 \wedge y_1, \dots, x_n \wedge y_n)$;
 - (iii) $\vec{1} = (1, \dots, 1)$ e $\vec{0} = (0, \dots, 0) \in [0, 1]^n$ como seus maiores e menores elementos.
3. Seja o reticulado $\mathcal{L}_{\mathcal{F}_\chi} = (\mathcal{F}_\chi, \leq_{\mathcal{F}_\chi}, \vee_{\mathcal{F}_\chi}, \wedge_{\mathcal{F}_\chi}, \emptyset, \chi)$ de todos os conjuntos fuzzy dados por funções de pertinência definidas do universo χ no intervalo $[0, 1]$:

¹A sigla MF referente às funções de pertinência será utilizada, neste trabalho, como uma abreviação do termo original da língua inglesa ("*membership function*").

- (i) $A \leq_{\mathcal{F}_\chi} B \Leftrightarrow$ para todo $\mu_A(u) \leq \mu_B(u)$ para cada $u \in \chi$;
(ii) $\vee_{\mathcal{F}_\chi}, \wedge_{\mathcal{F}_\chi} : \mathcal{F}_\chi^2 \rightarrow \mathcal{F}_\chi$ tal que, para todo $X, Y \in \mathcal{F}_\chi$, e $u \in \chi$, resulta o que segue:

$$A \vee_{\mathcal{F}_\chi} B = \{(u, \mu_{A \cup B}(u)) \in \chi \times [0, 1] : \mu_{A \cup B}(u) = \max(\mu_A(u), \mu_B(u))\},$$

$$A \wedge_{\mathcal{F}_\chi} B = \{(u, \mu_{A \cap B}(u)) \in \chi \times [0, 1] : \mu_{A \cap B}(u) = \min(\mu_A(u), \mu_B(u))\};$$

- (iii) $\emptyset$ e χ são o menor e maior elemento do reticulado, respectivamente;
(iv) $\sup F = \{(u, \max_{X \in F} \mu_A(u)) : u \in \chi\}$ e $\inf F = \{(u, \min_{X \in F} \mu_A(u)) : u \in \chi\}$ para todo $F \subseteq \mathcal{F}_\chi$.

3.1.1 Funções Conjugadas

Um automorfismo $\phi : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$ é uma função bijetiva que verifica a condição:

$$\Phi 1: a \leq_{\mathcal{L}} b \Leftrightarrow \phi(a) \leq_{\mathcal{L}} \phi(b), \forall a, b \in \mathcal{L}.$$

O conjunto de todos os automorfismos em $\mathcal{L}$ é representado por $Aut(\mathcal{L})$.

Em Bustince et al (2003), apresenta-se uma definição alternativa no reticulado $[0, 1]$, considerando um automorfismo $\phi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ como uma função contínua e estrita, onde para $\perp_{[0,1]} = 0$ e $\top_{[0,1]} = 1$, tem-se que:

$$\Phi 2: \phi(0) = 0 \text{ e } \phi(1) = 1.$$

Além disso, com base no trabalho de (KLEMENT; NAVARA, 1999, Def. 4.1), $\phi \in Aut(\mathcal{L})$ é um operador que preserva a ordem em $\mathcal{L}$ em relação às principais propriedades algébricas e preserva operadores de reversibilidade e composição:

$$\Phi 3: \phi \circ \phi', \phi' \circ \phi \in Aut(\mathcal{L}), \forall \phi, \phi' \in Aut(\mathcal{L});$$

$$\Phi 4: \phi \circ \phi^{-1} = \phi^{-1} \circ \phi = Id_{\mathcal{L}}, \forall \phi, \phi^{-1} \in Aut(\mathcal{L}_{[0,1]}).$$

Portanto, $(Aut(\mathcal{L}), \circ)$ é uma estrutura de grupo (não abeliano) com a função identidade ($Id_{\mathcal{L}}$) como o elemento neutro. Além disso, a ação de um automorfismo ϕ sobre uma função $f : \mathcal{L}^n \rightarrow \mathcal{L}$, resulta na função $f^\phi : \mathcal{L}^n \rightarrow \mathcal{L}$, denominada conjugada de f e, para $a_1, \dots, a_n \in \mathcal{L}$, $\phi, \phi' \in Aut(\mathcal{L})$, é dada pela expressão logo a seguir:

$$f^\phi(a_1, \dots, a_n) = \phi^{-1}(f(\phi(a_1), \dots, \phi(a_n))). \quad (2)$$

3.1.2 Conectivos Fuzzy

Neste trabalho, os principais conectivos estudados são as negações fuzzy, funções de agregação e as implicações fuzzy.

3.1.2.1 Negações Fuzzy

Nesta Seção, conceitos e propriedades de negações fuzzy em $\mathcal{L}$ são abordados.

Definição 3.1.1. (PALMEIRA et al., 2018) Uma função $\mathcal{N} : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$ é uma negação fuzzy, em $\mathcal{L}$, ou simplesmente $\mathcal{L}$ -negação, se as seguintes propriedades forem verificadas:

$$N1: \mathcal{N}(\perp_{\mathcal{L}}) = \top_{\mathcal{L}} \text{ e } \mathcal{N}(\top_{\mathcal{L}}) = \perp_{\mathcal{L}}; \text{ e}$$

$$N2: \text{ Se } a \leq_{\mathcal{L}} b \text{ então } \mathcal{N}(a) \geq_{\mathcal{L}} \mathcal{N}(b), \forall a, b \in \mathcal{L}.$$

Uma $\mathcal{L}$ -negação $\mathcal{N}$ é estritamente decrescente sempre que

$$N3: \text{ Se } a <_{\mathcal{L}} b \text{ então } \mathcal{N}(b) >_{\mathcal{L}} \mathcal{N}(a), \text{ para todo } a, b \in \mathcal{L}.$$

Adicionalmente, uma $\mathcal{L}$ -negação $\mathcal{N}$ é forte se ela for involutiva,

$$N4: \mathcal{N}(\mathcal{N}(a)) = a, \forall a \in \mathcal{L}.$$

3.1.2.2 Dualidade e complementaridade

Seja $\mathcal{N}$ uma negação fuzzy forte no reticulado $\mathcal{L}$. A ação de $\mathcal{N}$ sobre uma função $f : \mathcal{L}^n \rightarrow \mathcal{L}$, resulta na função $f_{\mathcal{N}} : \mathcal{L}^n \rightarrow \mathcal{L}$ denominada função N -dual de f e, para $a_1, \dots, a_n \in \mathcal{L}$, $f_{\mathcal{N}}$ é dada pela expressão logo a seguir:

$$f_{\mathcal{N}}(a_1, \dots, a_n) = \mathcal{N}(f(\mathcal{N}(a_1), \dots, \mathcal{N}(a_n))). \quad (3)$$

O complemento do conjunto fuzzy $X \in \mathcal{F}_{\mathcal{X}}$ em relação à negação fuzzy N no reticulado $\mathcal{L}_{[0,1]}$, para todo $u \in \mathcal{X}$, é dado como segue:

$$X^N = \{(u, \mu_{X^N}(u)) : \mu_{X^N}(u) = \mathcal{N}(\mu_X(u)) \in [0, 1]\} \in \mathcal{F}_{\mathcal{X}}. \quad (4)$$

Exemplo 3.1.1. Seja $N : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ uma negação fuzzy forte sobre o reticulado de valores fuzzy $\mathcal{L}_{[0,1]}$. No reticulado de todos os conjuntos fuzzy $\mathcal{L}_{\mathcal{F}_{\mathcal{X}}}$, a função $\mathcal{N}_N : \mathcal{L}_{\mathcal{F}_{\mathcal{X}}} \rightarrow \mathcal{L}_{\mathcal{F}_{\mathcal{X}}}$ dada por

$$\mathcal{N}_N(X) = \{(u, N(\mu_X(u))) : u \in \mathcal{X}\} \quad (5)$$

é uma negação em $\mathcal{L}_{\mathcal{F}_{\mathcal{X}}}$, chamada de negação forte $\mathcal{N}_N$ induzida pela negação N .

Exemplo 3.1.2. Seja N uma negação no reticulado $\mathcal{L}_{[0,1]}$. Cada negação fuzzy forte é estrita mas o inverso não é válido. A negação fuzzy $N(x) = 1 - \sqrt{x}$ é estrita mas não é forte. A negação fuzzy forte padrão é a negação $N_S(x) = 1 - x$, denominada negação

de Zadeh. Para todo $k, l \in \{1, \dots, n\}$, considere $\psi_{k,l}, \phi_k \in \text{Aut}([0, 1])$ dados por:

$$\begin{aligned} \psi_{k,l}(x) &= x^{\frac{l}{k}} \quad \text{e} \quad \psi_{k,l}^{-1}(x) = x^{\frac{k}{l}}; \\ \phi_k(x) &= \frac{(kx+1)^2-1}{k(k+2)} \quad \text{e} \quad \phi_k^{-1}(x) = \frac{\sqrt{(k^2+2k)x+1}-1}{k}. \end{aligned}$$

Seja uma função $f : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$. As funções $f^{\psi_{k,l}}, f^{\phi_k} : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$, definidas por:

$$\begin{aligned} f^{\psi_{k,l}}(x_1, \dots, x_n) &= (f((x_1)^{\frac{l}{k}}, \dots, (x_n)^{\frac{l}{k}}))^{\frac{k}{l}}; \\ f^{\phi_k}(x_1, \dots, x_n) &= \frac{1}{k} \left(\left((k^2+2k)f\left(\frac{(kx_1+1)^2-1}{k(k+2)}, \dots, \frac{(kx_n+1)^2-1}{k(k+2)}\right) + 1 \right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right); \end{aligned}$$

são, respectivamente, funções $\psi_{k,l}$ -conjugada e ϕ_k -conjugada de f . Em particular, quando $f = N_S$, as funções $N_S^{\psi_{k,l}}, N_S^{\phi_k} : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ são respectivamente dadas por:

$$\begin{aligned} N_S^{\psi_{k,l}}(x) &= \left(1 - x^{\frac{l}{k}}\right)^{\frac{k}{l}}; \\ N_S^{\phi_k}(x) &= \frac{1}{k} \left(\left((k^2+2k) \left(1 - \frac{(kx+1)^2-1}{k(k+2)}\right) + 1 \right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right). \end{aligned}$$

3.1.2.3 Funções de Agregações

As definições, principais propriedades e exemplos de agregações em $\mathcal{L}_{[0,1]}$ são apresentados (GRABISCH et al., 2009).

Definição 3.1.2. (BELIAKOV; PRADERA; CALVO, 2007) Uma função $A : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ é uma Função de Agregação (AF) n -ária se verifica as seguintes propriedades:

A1: Se $x_i \leq y_i, \forall i \in \mathbb{N}_n$ implica $A(x_1, \dots, x_n) \leq A(y_1, \dots, y_n)$, então A é isotônica (crescente), $\forall x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_m \in [0, 1]$;

A2: Se $A(0, \dots, 0) = 0$ e $A(1, \dots, 1) = 1$, então A verifica as condições de borda.

Neste trabalho, as seguintes propriedades adicionais para AF são consideradas:

A3: Se $A(x_1, \dots, x_n) = A(x_{(1)}, \dots, x_{(n)})$, para todo $x_1, \dots, x_n \in [0, 1]$ e cada permutação $(\cdot) : \mathbb{N}_n \rightarrow \mathbb{N}_n$, então A é simétrica”

Propriedades adicionais são consideradas neste trabalho:

A4: Se existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha^k A(x_1, \dots, x_n) = A(\alpha x_1, \dots, \alpha x_n), \forall \alpha, x_1, \dots, x_n \in [0, 1]$, então A verifica a k -homogeneidade;

A5: Se $A(x_1, \dots, x_n) + A(y_1, \dots, y_n) = A(x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$, para cada $x_i, y_i \in [0, 1]$ tal que $x_i + y_i \leq 1, \forall i \in \mathbb{N}_n$, então A é aditiva-isotônica;

A6: Se $A(x, 1, \dots, 1) = x$, para cada $x \in [0, 1]$, então A verifica a dominância da verdade;

A7: Se $A(x_1, \dots, x_n) = 1 \Leftrightarrow x_1 = \dots = x_n = 1$, para cada $x_1, \dots, x_n \in [0, 1]$, então A verifica a 1-condição de borda;

A8: Se $A(x_1, \dots, x_n) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$ ou $\dots$ ou $x_n = 0$ então, para cada $x_1, \dots, x_n \in [0, 1]$, A verifica a 0-condição de borda forte;

A8(a): Se $A(x, \dots, x) = x$ para cada $x \in [0, 1]$, então A é idempotente.

Definição 3.1.3. (PAIVA et al., 2021) Uma função de quase-overlap $A : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ é uma AF que verifica as propriedades A3, A7 e A8.

Nas condições dadas pela Definição 3.1.3, as funções de *quasi-overlap* $A : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ que satisfazem a continuidade em $[0, 1]$ são chamadas de funções de *overlap* (MEZZOMO et al., 2020).

Exemplo 3.1.3. (PAIVA et al., 2021) Seja $a \in]0, 1[$, a função $O_a : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ dada por

$$O_a(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{se } x = 0 \text{ ou } y = 0 \\ 1, & \text{se } x = y = 1 \\ a, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

é uma função quasi-overlap.

Exemplo 3.1.4. Outros exemplos de funções bivariantes e (quasi-)overlap são apresentados em (ELKANO et al., 2018) e reportados logo a seguir:

$$T_p(x, y) = x \cdot y \quad (6)$$

$$O_p(x, y) = x^p \cdot y^p, \text{ se } p > 0; \quad (7)$$

$$O_{\frac{1}{2}, \min}(x, y) = \min(\sqrt{x} \cdot \sqrt{y}) \quad (8)$$

$$O_k(x, y) = \min(x^k \cdot y, x \cdot y^k) \quad (9)$$

Definição 3.1.4. Uma função $A : \bigcup_{n=1}^{\infty} [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ é uma função de agregação estendida (EAF²) se as seguintes condições são verificadas:

(i) $A \upharpoonright [0, 1]^n : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ é uma AF, $\forall n \in \mathbb{N}^{+2} = \{2, 3, \dots\}$; e

(ii) $A(x) = x, \forall x \in [0, 1]$.

Assim, a partir da Definição 3.1.4, pode-se identificar qualquer EAF A com uma família de funções $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^{+2}}$, tal que $A_n : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ é uma função AF.

Outras duas propriedades também são consideradas para uma EAF A :

²Sigla proveniente do termo original em língua inglesa *Extended Aggregation Function*.

A9: Se $A(x_1, \dots, x_n) = A(x_1, \dots, x_n, \dots, x_1, \dots, x_n)$ então A é invariante para replicações;

A10: Se $A(x_1, \dots, x_n) = A(x_1, \dots, x_i, 1, x_{i+1}, \dots, x_n)$ então A é 1-invariante.

Exemplo 3.1.5. *Seja $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1] \in \text{Aut}(\mathcal{L}_{[0,1]})$. A função $M_\phi : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$, denominada média quase aritmética (QAM³) gerada por um automorfismo $\phi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ é definida pela expressão:*

$$M_\phi(x_1, \dots, x_n) = \phi^{-1} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \phi(x_i) \right). \quad (10)$$

Assim, M_ϕ e correspondente EAF $M_\phi : \bigcup_{n=1}^{\infty} [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ são ambas AF que verificam as propriedades A_k , para $k \in \{3, 4, 5, 6\}$. Detalhes podem ser obtidos no trabalho de (BELIAKOV; PRADERA; CALVO, 2007). Nesta classe de QAM, duas são as funções consideradas neste trabalho e estão apresentadas logo a seguir nesta exemplificação:

- A média aritmética $AM : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$, dada por

$$AM(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i) \quad (11)$$

é a QAM gerada por $\phi = Id_{[0,1]}$ e, portanto, é uma AF que verifica A_3 , A_6 , A_7 e A_8 . Detalhes adicionais podem ser obtidos em (GRABISCH et al., 2009).

- A média exponencial, $\exp_\alpha : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ que, para $\alpha \in (0, 1]$, é dada por

$$\exp_\alpha(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{e^{\alpha x_1} + \dots + e^{\alpha x_n}}{n}, \quad (12)$$

é a QAM gerada por $\phi_\alpha(x) = \frac{e^{\alpha x} - 1}{e^\alpha - 1}$, e, portanto, é uma AF que verifica A_3 , A_6 , A_7 e A_8 , como discutido em (GARCÍA-LAPRESTA et al., 2010).

3.1.2.4 Implicações Fuzzy em $\mathcal{L}_{[0,1]}$

Uma função $I : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ é um *implicador* se I atende às condições de borda:

$$I0(a): I(1, 1) = I(0, 1) = I(0, 0) = 1; \quad I0(b): I(1, 0) = 0;$$

Definição 3.1.5. (FODOR; ROUBENS, 1994, Definição 1.15) Um implicador $I : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ é uma fuzzy implicação se I também satisfaz às condições:

I1: Se $x \leq x'$ então $I(x, y) \geq I(x', y)$ (antitonicidade no primeiro argumento);

I2: Se $y \leq z$ então $I(x, y) \leq I(x, z)$ (isotonicidade no segundo argumento).

³Sigla proveniente do termo original em língua inglesa *Quasi-Arithmetic Mean*.

Propriedades adicionais consideradas neste trabalho são listadas a seguir:

I3: $I(x, y) = 1 \Leftrightarrow x \leq y$ (princípio da ordem);

I4: $I(x, y) = I(N(y), N(x))$ (princípio da contra-posição em relação à negação fuzzy N);

I5: $I(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ e } y = 0$.

Além disso, se uma função $I : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ satisfaz *I1*, *I3*, *I4* e *I5* então também satisfaz *I0* e *I2*.

Detalhes adicionais podem ser vistos nos trabalhos de (BACZYŃSKI; JAYARAM, 2008; REISER; BEDREGAL; BACZYŃSKI, 2013).

Exemplo 3.1.6. *Os exemplos de implicações fuzzy considerados neste trabalho estão apresentados na sequência:*

$$I_0(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \leq y, \\ \max(1 - x, y), & \text{caso contrário;} \end{cases} \quad (13)$$

$$I_{LK}(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \leq y, \\ 1 - x + y, & \text{caso contrário;} \end{cases} \quad (14)$$

$$I_{RB}(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \leq y, \\ 1 - x + xy, & \text{caso contrário;} \end{cases} \quad (15)$$

$$I_{30}(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \leq y, \\ \max(1 - x, y, 0.5), & \text{se } 0 < y < x < 1, \\ \max(1 - x, y), & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (16)$$

3.2 Funções de Equivalência Restritas

O conceito de Função de Equivalência Restrita (REF) (BUSTINCE; BARRENECHEA; PAGOLA, 2006) é proposto como extensão das funções de equivalência, no sentido proposto em (FODOR; ROUBENS, 1994). A Seção apresenta, ainda, funções de dissimilaridade restritas, suas principais propriedades e exemplificação (BUSTINCE; BARRENECHEA; PAGOLA, 2008).

A próxima definição generaliza o conceito de $\mathcal{L}_{[0,1]}$ -REF apresentado em (BUSTINCE; BARRENECHEA; PAGOLA, 2006; BUSTINCE et al., 2013).

Definição 3.2.1. (PALMEIRA et al., 2018, Definição 2.16) *Seja $\mathcal{N}$ um operador de negação no reticulado $\mathcal{L} \equiv (\mathcal{L}, \leq_{\mathcal{L}})$. Uma função de equivalência restrita sobre $\mathcal{L}$ ($\mathcal{L}$ -REF) $f : \mathcal{L}^2 \rightarrow \mathcal{L}$, em relação à negação $\mathcal{N}$, verifica as seguintes propriedades:*

$$REF1: f(a, b) = f(b, a), \forall a, b \in \mathcal{L};$$

$$REF2: f(a, b) = \top_{\mathcal{L}} \Leftrightarrow a = b, \forall a, b \in \mathcal{L};$$

REF3: $f(a, b) = \perp_{\mathcal{L}} \Leftrightarrow (a = \top_{\mathcal{L}} \text{ e } b = \perp_{\mathcal{L}}) \text{ ou } (a = \perp_{\mathcal{L}} \text{ e } b = \top_{\mathcal{L}});$

REF4: $f(a, b) = f(\mathcal{N}(a), \mathcal{N}(b)), \forall a, b \in \mathcal{L};$

REF5: $a \leq b \leq c \Rightarrow f(a, b) \geq f(a, c) \text{ e } f(b, c) \geq f(a, c), \forall a, b, c \in \mathcal{L}.$

Ao considerar uma construção dual $\mathcal{N}$ sobre $\mathcal{L} \equiv (\mathcal{L}, \leq_{\mathcal{L}})$, o conceito de uma função de dissimilaridade restrita foi estudado, principalmente conectado com funções de penalidade (BUSTINCE et al., 2016, 2014; RICCI, 2015). O conceito de $\mathcal{L}$ -RDF, baseado em estudos anteriores, é apresentado a seguir (PALMEIRA et al., 2018):

Definição 3.2.2. (PALMEIRA et al., 2018, Definição 5.1) Uma função $h_L : \mathcal{L}^2 \rightarrow \mathcal{L}$ é chamada de Função de Dissimilaridade Restrita (RDF) sobre $\mathcal{L}$ ($\mathcal{L}$ -RDF) quando satisfaz, para todo $a, b, c \in \mathcal{L}$, as seguintes condições:

RDF1: $h_{\mathcal{L}}(a, b) = h_{\mathcal{L}}(b, a);$

RDF2: $h_{\mathcal{L}}(a, b) = \top_{\mathcal{L}}$ se e somente se $\{a, b\} = \{\top_{\mathcal{L}}, \perp_{\mathcal{L}}\};$

RDF3: $h_{\mathcal{L}}(a, b) = \perp_{\mathcal{L}}$ se e somente se $a = b;$

RDF4: se $a \leq_{\mathcal{L}} b \leq_{\mathcal{L}} c$, então $h(a, b) \leq_{\mathcal{L}} h(a, c)$ e $h(b, c) \leq_{\mathcal{L}} h(a, c).$

Quando uma $\mathcal{L}$ -RDF h verifica a condição

RDF5: $h(a, b) = h(\mathcal{N}(a), \mathcal{N}(b)), \forall a, b \in \mathcal{L}.$

com respeito a uma $\mathcal{L}$ -negação, então dizemos que h é $\mathcal{L}$ -RDF com respeito a $\mathcal{N}$.

3.2.1 Geração de Operadores $\mathcal{L}_{[0,1]}$ -REF

Nesta Seção serão estudadas as funções de equivalência restritas e suas construções duais, assim como as funções de dissimilaridade restritas, com ênfase no reticulado de valores fuzzy $\mathcal{L}_{[0,1]}$ e no reticulado $\mathcal{L}_{\mathcal{F}_{\chi}}$ dos conjuntos fuzzy definidos no universo χ .

Proposição 3.2.1. Seja $\mathcal{N}$ uma $\mathcal{L}$ -negação forte e $h : \mathcal{L}^2 \rightarrow \mathcal{L}$ é uma $\mathcal{L}$ -RDF se, e somente se, a função $h_{\mathcal{N}} : \mathcal{L}^2 \rightarrow \mathcal{L}$ é uma função $\mathcal{L}$ -REF em relação a $\mathcal{N}$. Assim, $(h, h_{\mathcal{N}})$ fornece um par de funções $\mathcal{N}$ -duais.

Proof. ($\Rightarrow$) Seja h uma $\mathcal{L}$ -RDF e seja $\mathcal{N} : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$ uma negação forte.

$$REF1 : h_{\mathcal{N}}(a, b) = \mathcal{N}(h(\mathcal{N}(a), \mathcal{N}(b))) = \mathcal{N}(h(\mathcal{N}(b), \mathcal{N}(a))) = h_{\mathcal{N}}(b, a).$$

$$REF2 : h_{\mathcal{N}}(a, b) = \top_{\mathcal{L}} \Leftrightarrow \mathcal{N}(h(\mathcal{N}(a), \mathcal{N}(b))) = \top_{\mathcal{L}} \Leftrightarrow h(\mathcal{N}(a), \mathcal{N}(b)) = \perp_{\mathcal{L}} \Leftrightarrow a = b.$$

$$REF3 : h_{\mathcal{N}}(a, b) = \perp_{\mathcal{L}} \Leftrightarrow \mathcal{N}(h(\mathcal{N}(a), \mathcal{N}(b))) = \perp_{\mathcal{L}} \\ \Leftrightarrow h(\mathcal{N}(a), \mathcal{N}(b)) = \top_{\mathcal{L}} \Leftrightarrow \{a, b\} = \{\top_{\mathcal{L}}, \perp_{\mathcal{L}}\}.$$

$$REF4 : h_{\mathcal{N}}(\mathcal{N}(a), \mathcal{N}(b)) = \mathcal{N}(h(\mathcal{N}^2(a), \mathcal{N}^2(b))) = \mathcal{N}(h(\mathcal{N}(a), \mathcal{N}(b))) = h(a, b).$$

$$REF5 : \text{Se } a \leq b \leq c \Rightarrow \mathcal{N}(c) \leq \mathcal{N}(b) \leq \mathcal{N}(a)$$

$$\Rightarrow h(\mathcal{N}(c), \mathcal{N}(b)) \leq (h(\mathcal{N}(c), \mathcal{N}(a))) \Rightarrow h_{\mathcal{N}}(c, b) \geq h_{\mathcal{N}}(c, a)$$

$$\text{Se } a \leq b \leq c \Rightarrow \mathcal{N}(c) \leq \mathcal{N}(b) \leq \mathcal{N}(a);$$

$$\Rightarrow h(\mathcal{N}(b), \mathcal{N}(a)) \leq (h(\mathcal{N}(c), \mathcal{N}(a))) \Rightarrow h_{\mathcal{N}}(b, a) \geq h_{\mathcal{N}}(c, a).$$

Portanto, $h_{\mathcal{N}}$ é uma $\mathcal{L}$ -REF em relação a $\mathcal{N}$.

($\Leftarrow$) Analogamente, pode-se provar que, quando $h_{\mathcal{N}}$ é uma $\mathcal{L}$ -REF, então h é uma $\mathcal{L}$ -RDF que satisfaz RDF5. $\square$

A próxima proposição explora as condições verificadas no reticulado $[0, 1]$, as quais permitem obter, de uma $\mathcal{L}$ -REF quase-côncava uma $\mathcal{L}$ -RDF quase-conexa, considerando sua construção $\mathcal{N}$ -dual.

Proposição 3.2.2. *Seja $\mathcal{N} : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$ uma negação forte no reticulado $[0, 1]$. Uma função $\mathcal{L}$ -REF $f : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ é quase-côncava, ou seja, $\forall a, b, a', b \in [0, 1]$, tem-se que*

$$QCO: f(\lambda(a, b) + (1 - \lambda)(a', b')) \leq \max(f(a, b), f(a', b'))$$

se, e somente se, a correspondente função $\mathcal{N}$ -dual $\mathcal{L}$ -RDF, indicada por $f_{\mathcal{N}}$, é uma função quase-convexa, ou seja, $\forall a, b, a', b \in [0, 1]$, tem-se que

$$QCE: f_{\mathcal{N}}(\lambda(a, b) + (1 - \lambda)(a', b')) \geq \min(f_{\mathcal{N}}(a, b), f_{\mathcal{N}}(a', b')).$$

Proof. ($\Leftarrow$) Sejam $\mathcal{N} : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$ uma negação forte e $f_{\mathcal{N}}$ uma função $\mathcal{L}$ -RDF quase-convexa. Então, tem-se os seguintes resultados:

$$f_{\mathcal{N}}(\lambda(a, b) + (1 - \lambda)(a', b')) \geq \min(f_{\mathcal{N}}(a, b), f_{\mathcal{N}}(a', b'))$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{N}(f(\mathcal{N}(\lambda(a, b) + \mathcal{N}((1 - \lambda)(a', b'))))) \geq \min(\mathcal{N}(f(\mathcal{N}(a), \mathcal{N}(b))), \mathcal{N}(f(\mathcal{N}(a'), \mathcal{N}(b'))))$$

$$\Leftrightarrow f(\mathcal{N}(\lambda(a, b) + \mathcal{N}((1 - \lambda)(a', b')))) \leq \max(f(\mathcal{N}(a), \mathcal{N}(b)), f(\mathcal{N}(a'), \mathcal{N}(b')))$$

$$\Leftrightarrow f(\lambda(a, b) + (1 - \lambda)(a', b')) \leq \max(f(a, b), f(a', b'))$$

Portanto, a função $\mathcal{L}$ -REF f é quase-côncava no reticulado $[0, 1]$. E, de forma análoga, a construção reversa pode se construída. Portanto, a Proposição 3.2.2 é verificada. $\square$

Exemplo 3.2.1. Seja $\mathcal{L}_{[0,1]} = ([0, 1], \leq, \vee, \wedge, 1, 0)$ o reticulado de todos os valores fuzzy. De acordo com (YAGER; RYBALOV, 1997) as funções $F_2, H_2 : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ dados por

$$F_2(x, y) = 1 - (x - y)^2 \text{ e } H_2(x, y) = (x - y)^2, \quad (17)$$

são funções $\mathcal{L}_{[0,1]}$ -REF e $\mathcal{L}_{[0,1]}$ -RDF, ambas em relação à negação N_S , significando que (F_2, H_2) é um par de funções N_S -duais que satisfazem as propriedades QCE e QCO, respectivamente.

Exemplo 3.2.2. De acordo com (BUSTINCE; FERNANDEZ; BURILLO, 2017), as funções $f_{||}, h_{||} : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ dadas por

$$f_{||}(x, y) = 1 - |x - y| \text{ e } h_{||}(x, y) = |x - y|, \quad (18)$$

são operadores $\mathcal{L}_{[0,1]}$ -REF e $\mathcal{L}_{[0,1]}$ -RDF, ambos em relação à negação N_S e satisfazem as propriedades QCE e QCO, respectivamente.

Exemplo 3.2.3. As funções $f_{\mathcal{L}_{[0,1]}^n}, h_{\mathcal{L}_{[0,1]}^n} : [0, 1]^n \times [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]^n$, dadas por

$$f_{\mathcal{L}_{[0,1]}^n}(\vec{x}, \vec{y}) = (f_{||}(x_1, y_1), \dots, f_{||}(x_n, y_n)), \text{ e} \quad (19)$$

$$h_{\mathcal{L}_{[0,1]}^n}(\vec{x}, \vec{y}) = (h_{||}(x_1, y_1), \dots, h_{||}(x_n, y_n)), \quad (20)$$

são operadores $\mathcal{L}_{[0,1]}^n$ -REF e $\mathcal{L}_{[0,1]}^n$ -RDF em relação à $N_S^n = (N_S(x_1), \dots, N_S(x_n))$. Além disso, com base no Exemplo 3.2.2, as $f_{||}, h_{||} : [0, 1]^n \times [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]^n$ são definidas por

$$f_{||}(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{1} - |\vec{x} - \vec{y}| = (1 - |x_1 - y_1|, \dots, 1 - |x_n - y_n|); \quad (21)$$

$$h_{||}(\vec{x}, \vec{y}) = |\vec{x} - \vec{y}| = (|x_1 - y_1|, \dots, |x_n - y_n|). \quad (22)$$

também são operadores $\mathcal{L}_{[0,1]}^n$ -REF e $\mathcal{L}_{[0,1]}^n$ -FDR em relação à negação N_S^n .

Exemplo 3.2.4. Sejam f e d funções $\mathcal{L}_{[0,1]}$ -RDF e $\mathcal{L}_{[0,1]}$ -REF, respectivamente. As funções $f_{\mathcal{F}_{\mathcal{X}}}, d_{\mathcal{F}_{\mathcal{X}}} : \mathcal{F}_{\mathcal{X}}^2 \rightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{X}}$,

$$f_{\mathcal{F}_{\mathcal{X}}}(X, Y) = \{f((u, f(\mu_X(u), \mu_Y(u)))) : u \in \mathcal{X}\} \quad (23)$$

$$d_{\mathcal{F}_{\mathcal{X}}}(X, Y) = \{d((u, d(\mu_X(u), \mu_Y(u)))) : u \in \mathcal{X}\} \quad (24)$$

forneem o par $(f_{\mathcal{F}_{\mathcal{X}}}, d_{\mathcal{F}_{\mathcal{X}}})$ dos operadores $\mathcal{L}_{\mathcal{F}_{\mathcal{X}}}$ -REF e $\mathcal{L}_{\mathcal{F}_{\mathcal{X}}}$ -RDF. Neste contexto, as funções $d_{||}, f_{||} : \mathcal{F}_{\mathcal{X}}^2 \rightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{X}}$ dado por

$$f_{||}(X, Y) = \|X - Y\| = \{(u, |\mu_X(u) - \mu_Y(u)|) : u \in \mathcal{X}\} \text{ e} \quad (25)$$

$$d_{||}(X, Y) = \vec{1} - \|X - Y\| = \{(u, 1 - |\mu_X(u) - \mu_Y(u)|) : u \in \mathcal{X}\}, \quad (26)$$

são $\mathcal{L}_{\mathcal{F}_\chi}$ -REF e $\mathcal{L}_{\mathcal{F}_\chi}$ -RDF em relação à negação fuzzy induzidos por N_S , indicada por $\mathcal{N}_{N_S}$, nos termos apresentados no Exemplo 3.1.1.

3.2.1.1 $\mathcal{L}_{[0,1]}$ -REF via automorfismos

Na sequência desta sessão, consideram-se negações estritas em $[0, 1]$, seguindo a caracterização dada em (FODOR, 1993). Outros trabalhos também contemplam o estudo de negações fuzzy estritas, veja Proposição 2.5 em (BEDREGAL, 2010).

Proposição 3.2.3. (BUSTINCE et al., 2014, Proposição 1) *Seja $\phi_1, \phi_2 \in \text{Aut}([0, 1])$ e F uma REF em relação à negação N . Quando $N(x) = \phi_2(1 - \phi_1(x))$, garantindo que N é estrita por (FODOR, 1993), então $F^{\phi_1, \phi_2} : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ dada por*

$$F^{\phi_1, \phi_2}(x, y) = \phi_1(F(\phi_2(x), \phi_2(y))). \quad (27)$$

é uma função $\mathcal{L}_{[0,1]}$ -REF em relação a negação estrita N . Adicionalmente, se $\phi = \phi_2 = \phi_1$, é a conjugação ϕ de F , $F^{\phi_1, \phi_2} \equiv F^\phi$.

Exemplo 3.2.5. *Alguns exemplos de operadores $\mathcal{L}_{[0,1]}$ -REF obtidos a partir da Eq.(18) ilustrando a Proposição 3.2.3 são apresentados a seguir:*

- *Seja $\phi_2(x) = \phi_{l,k}(x) = x^{\frac{l}{k}}$ e $\phi_1(x) = \phi_{l,k}^{-1}(x) = x^{\frac{k}{l}}$ em $\text{Aut}([0, 1])$. Tomando a negação fuzzy $N_S^{\phi_{l,k}}(x) = \left(1 - x^{\frac{l}{k}}\right)^{\frac{k}{l}}$, a conjugada $\phi_{l,k}$ de $f_{||}$, $f_{||}^{\phi_{l,k}} : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ é uma REF definida como segue:*

$$f_{||}^{\phi_{l,k}}(x, y) = \left(1 - |x^{\frac{l}{k}} - y^{\frac{l}{k}}|\right)^{\frac{k}{l}}; \quad (28)$$

- *Sejam outros membros de operadores $\mathcal{L}_{[0,1]}$ -REF, tomando automorfismos em $\text{Aut}([0, 1])$, dados pelas expressões:*

$$F_2(x, y) = (1 - |x - y|)^2, \text{ em relação a } N_2(x) = 1 - x^2; \quad (29)$$

$$F_{\frac{1}{2}}(x, y) = (1 - |x - y|)^{\frac{1}{2}}, \text{ em relação a } N_{\frac{1}{2}}(x) = 1 - x^{\frac{1}{2}}; \quad (30)$$

3.2.1.2 $\mathcal{L}_{[0,1]}$ -REF via Somas Convexas

Esta Seção estuda as principais propriedades dos operadores $\mathcal{L}_{[0,1]}$ -REF preservados por uma soma convexa realizada sobre dois operadores $\mathcal{L}_{[0,1]}$ -REF, F_1 e F_2 .

Proposição 3.2.4. *Sejam F_1 e F_2 $\mathcal{L}_{[0,1]}$ -REF em relação a mesma negação fuzzy forte N , e seja um escalar $\lambda \in [0, 1]$. Então, a função dada por $F_\lambda : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$*

$$F_\lambda(x, y) = \lambda F_1(x, y) + (1 - \lambda) F_2(x, y). \quad (31)$$

é uma função REF em relação à negação fuzzy N .

Proof. Sejam F_1, F_2 funções $\mathcal{L}_{[0,1]}$ -REF em relação a negação forte N . Para $\lambda \in [0, 1]$, quando $\lambda = 0$ então $F_\lambda = F_2$ e se $\lambda = 1$ implica que $F_\lambda = F_1$. Assim, ambos os casos resultam em que F_λ é uma $\mathcal{L}_{[0,1]}$ -REF em relação à N . Portanto, considera-se, agora, o caso $\lambda \in]0, 1[$.

$$\text{REF1: } F_\lambda(x, y) = \lambda F_1(x, y) + (1 - \lambda) F_2(x, y) = \lambda F_1(y, x) + (1 - \lambda) F_2(y, x) = F_\lambda(y, x).$$

$$\text{REF2: Se } F_\lambda(x, y) = 1 \text{ então } \lambda F_1(x, y) + (1 - \lambda) F_2(x, y) = 1. \text{ Portanto, } F_1(x, y) = F_2(x, y) = 1 \text{ implicando que } x = y. \text{ Por outro lado, trivialmente, } F_\lambda(1, 1) = 1.$$

$$\text{REF3: } F_\lambda(x, y) = 0 \Leftrightarrow \lambda F_1(x, y) + (1 - \lambda) F_2(x, y) = 0 \Leftrightarrow F_2(x, y) = F_1(x, y) = 0 \Leftrightarrow (x = 1 \text{ e } y = 0) \text{ ou } (x = 0 \text{ e } y = 1).$$

$$\text{REF4: } F_\lambda(N(x), N(y)) = \lambda F_1(N(x), N(y)) + (1 - \lambda) F_2(N(x), N(y)) = \lambda F_1(x, y) + (1 - \lambda) F_2(x, y) = F_\lambda(x, y).$$

$$\text{REF5: Os dois casos a seguir também são verificados: (i) } x \leq y \leq z \Rightarrow F_\lambda(x, y) = \lambda F_1(x, y) + (1 - \lambda) F_2(x, y) \geq \lambda F_1(x, z) + (1 - \lambda) F_2(x, z) = F_\lambda(x, z); \text{ e (ii) } x \leq y \leq z \Rightarrow F_\lambda(y, z) = \lambda F_1(y, z) + (1 - \lambda) F_2(y, z) \geq \lambda F_1(x, z) + (1 - \lambda) F_2(x, z) = F_\lambda(x, z).$$

Portanto, F_λ é uma $\mathcal{L}_{[0,1]}$ -REF. □

Uma construção análoga pode ser exigida para obter o operador $\mathcal{L}_{[0,1]}$ -RDF H_λ preservando somas convexas entre os operadores $\mathcal{L}_{[0,1]}$ -RDF H_1 e H_2 .

Exemplo 3.2.6. Para $\lambda \in [0, 1]$, seja $F_1(x, y) = 1 - |x - y|$, $F_2(x, y) = (1 - |x - y|)^2$ e $F_3(x, y) = (1 - |x - y|)^{\frac{1}{2}}$ seja $\mathcal{L}_{[0,1]}$ -REF em relação à N_S . Encontram-se, a seguir, funções $\mathcal{L}_{[0,1]}$ -REF também relacionadas a negação padrão N_S obtidas pela ação de uma soma convexa na Proposição 3.2.4:

$$G_{F_1, F_2}(x, y) = \lambda(1 - |x - y|) + (1 - \lambda)(1 - |x - y|)^2;$$

$$G_{F_1, F_3}(x, y) = \lambda(1 - |x - y|) + (1 - \lambda)(1 - (|x - y|)^{\frac{1}{2}});$$

$$G_{F_3, F_2}(x, y) = \lambda(1 - |x - y|^{\frac{1}{2}}) + (1 - \lambda)(1 - |x - y|)^2;$$

$$G_{F_2, F_3}(x, y) = \lambda(1 - |x - y|)^2 + (1 - \lambda)(1 - |x - y|)^{\frac{1}{2}}.$$

3.2.1.3 $\mathcal{L}_{[0,1]}$ -REF via composição de funções quase-overlap em implicações fuzzy

Os próximos resultados seguem diretamente do (PALMEIRA; BEDREGAL; VARGAS, 2018, Teorema 1) no reticulado $\mathcal{L}_{[0,1]}$, estudando as propriedades de uma função de quase-overlap (PAIVA et al., 2021) e uma implicação fuzzy, que permite obter um operador $\mathcal{L}_{[0,1]}$ -REF, no sentido da Definição 3.2.1.

Proposição 3.2.5. *Seja $M : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ uma função de quase-overlap, $N : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ uma negação fuzzy forte e, $I : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ uma função. A função $f_{M,I} : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ definida como segue*

$$f_{M,I}(x, y) = M(I(x, y), I(y, x)) \quad (32)$$

é uma $\mathcal{L}_{[0,1]}$ -REF em relação à negação fuzzy N se I é uma função que verifica as propriedades I1, I3, I4 (em relação a N) e I5.

Proof. Seja N uma negação fuzzy forte, M uma função que verifica A1, A3, A7 e A8 e I é uma função que verifica as propriedades I1, I3, I4 e I5.

$$REF1 : f_{M,I}(x, y) = M(I(x, y), I(y, x)) \text{ pela Eq.(32)}$$

$$= M(I(y, x), I(x, y)) = f_{M,I}(y, x); \text{ por A3 e Eq.(32)}$$

$$REF2 : f_{M,I}(x, y) = 1 \Leftrightarrow M(I(x, y), I(y, x)) = 1 \text{ pela Eq.(32)}$$

$$\Leftrightarrow I(x, y) = 1 \text{ e } I(y, x) = 1 \text{ por A7}$$

$$\Leftrightarrow x \leq y \text{ e } y \leq x \Leftrightarrow x = y; \text{ por I3}$$

$$REF3 : f_{M,I}(x, y) = 0 \Leftrightarrow M(I(x, y), I(y, x)) = 0 \text{ pela Eq.(32)}$$

$$\Leftrightarrow I(x, y) = 0 \text{ ou } I(y, x) = 0 \text{ por A8}$$

$$\Leftrightarrow (x = 1 \text{ e } y = 0) \text{ ou } (x = 0 \text{ e } y = 1) \text{ por I5;}$$

$$REF4 : f_{M,I}(N(x), N(y)) = M(I(N(x), N(y)), I(N(y), N(x)))$$

Agora, a partir de I4, A3, Eq.(32) é válido o que segue:

$$f_{M,I}(N(x), N(y)) = M(I(y, x), I(x, y)) = M(I(x, y), I(y, x)) = f_{M,I}(x, y)$$

REF5 : Se $x \leq y \leq z$ então por A1, I1 e I3 tem-se que

$$M(I(x, y), I(y, x)) = M(1, I(y, x)) \geq M(1, I(z, x)) = M(I(x, z), I(z, x));$$

Então, $f_{M,I}(x, y) \geq f_{M,I}(x, z)$. Agora, por I3,

$$f_{M,I}(y, z) = M(I(y, z), I(z, y)) \geq M(I(x, z), I(z, x)) = f_{M,I}(x, z).$$

Portanto, a Proposição 3.2.5 é válida. □

Proposição 3.2.6. *Seja f uma $\mathcal{L}_{[0,1]}$ -REF em relação a uma negação fuzzy N estrita. Então, a função $I_f : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ dada por*

$$I_f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \leq y; \\ f(x, y), & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (33)$$

satisfaz as propriedades I1, I3, I4 (em relação a N) e I5.

Proof. Seja uma REF f em relação a uma negação fuzzy forte N e I_f a função dada pela Eq.(33). Os seguintes resultados são verificados:

I1: Se $x \leq x'$, é preciso considerar três casos:

Caso (1): $x' \leq y$, o que é trivial porque $I_f(x', y) = 1 = I_f(x, y)$.

Caso (2): $x \leq y \leq x'$, então $I_f(x', y) = f(x', y) \leq 1 = I_f(x, y)$.

Caso (3): $y < x$. Então, $I_f(x', y) = f(x', y) \leq f(x, y) = I_f(x, y)$. Portanto, $I_f(x', y) \leq I_f(x, y)$.

I3: A partir de REF2 se $x > y$ então $I_f(x, y) = f(x, y) < 1$. Isso resulta em $I_f(x, y) = 1 \Leftrightarrow x \leq y$;

I4: Ao provar a contraposição com respeito a negação estrita N , tem-se que:

$$I_f(N(y), N(x)) = \begin{cases} 1, & \text{se } N(y) \leq N(x); \\ f(N(y), N(x)), & \text{se } N(y) > N(x) \end{cases} = \begin{cases} 1, & \text{se } y \geq x; \\ f(x, y), & \text{se } y < x. \end{cases}$$

Portanto $I_f(N(y), N(x)) = I_f(x, y)$.

I5: $I_f(x, y) = 0 \Leftrightarrow f(x, y) = 0$ e $x > y \Leftrightarrow x = 1$ e $y = 0$.

Portanto, a Proposição 3.2.5 é verificada. $\square$

Em uma construção dual, as propriedades de negação, de funções de quase-*overlap*, e implicações fuzzy são discutidas para obter um operador $\mathcal{L}_{[0,1]}$ -RDF no sentido da Definição 3.2.2.

Proposição 3.2.7. *Seja uma função de quase-overlap $M : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$, uma função $I : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ e uma negação fuzzy $N : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$. A função $h_{N,M,I} : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ definida como segue*

$$h_{N,M,I}(x, y) = N(M(I(x, y), I(y, x))) \quad (34)$$

é uma $\mathcal{L}_{[0,1]}$ -RDF se I verifica as propriedades I1, I3, I4 (em relação a N) e I5.

Proof. Análoga à prova da Proposição 3.2.5. $\square$

Proposição 3.2.8. *Seja h uma $\mathcal{L}_{[0,1]}$ -RDF com relação a negação fuzzy estrita N . Então, a função $I_{N_h} : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ dada por*

$$I_f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \leq y; \\ f(x, y), & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (35)$$

satisfaz as propriedades I1, I3, I4 (em relação a negação fuzzy estrita N) e I5.

Proof. Análoga à prova da Proposição 3.2.6. $\square$

Remark 3.2.1. *Observa-se que a Proposição 3.2.5 é relacionada aos resultados de (BUSTINCE; BARRENECHEA; PAGOLA, 2006, Teorema 7). Seja $I : [0, 1]^2 \rightarrow (0, 1)$ uma função que verifica apenas as quatro propriedades, de I1 a I4. Em (BUSTINCE; BARRENECHEA; PAGOLA, 2006, Teorema 7), tomando $M = \min$ obtém-se um operador $\mathcal{L}_{[0,1]}$ -REF $F_{\min} : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$, dado por $F_{\min}(x, y) = \min(I(x, y), I(y, x))$.*

Exemplo 3.2.7. A Tabela 6 ilustra os resultados da Proposição 3.2.5, aplicando a $f_{\min, I}$ dada pela Equação(32) e tomando I como uma das implicações fuzzy: I_0 , I_{LK} , I_{RB} e I_{30} .

Tabela 6 – Geração dos Operadores $\mathcal{L}_{[0,1]}$ -REF a partir do Mínimo das Implicações Fuzzy.

Ref_I	
$Ref_{I_0}(x, y) =$	$\begin{cases} \max(x, 1 - y), & \text{se } x < y; \\ 1, & \text{se } x = y; \\ \max(1 - x, y), & \text{caso contrário.} \end{cases}$
$Ref_{I_{LK}}(x, y) =$	$\begin{cases} 1 - x + y, & \text{se } x \geq y; \\ 1 - y + x, & \text{caso contrário.} \end{cases}$
$Ref_{I_{RB}}(x, y) =$	$\begin{cases} 1 - y + xy, & \text{se } x < y; \\ 1, & \text{se } x = y; \\ 1 - x + xy, & \text{caso contrário.} \end{cases}$
$Ref_{I_{30}}(x, y) =$	$\begin{cases} \max(1 - y, x, 0.5), & \text{se } 0 < x < y < 1; \\ 1, & \text{se } x = y; \\ \max(1 - x, y, 0.5), & \text{se } 0 < y < x < 1; \\ \min(\max(1 - x, y), \max(1 - y, x)), & \text{caso contrário.} \end{cases}$

Exemplo 3.2.8. A Tabela 7 apresenta outros exemplos de funções $\mathcal{L}_{[0,1]}$ -REF, considerando funções de overlap como apresentadas em (ELKANO et al., 2018) e reportadas no Exemplo 3.1.4, T_p , O_p , $O_{\frac{1}{2}, \min}$ e O_k , incluindo as implicações fuzzy I_0 , I_{LK} e I_{RB} .

Tabela 7 – Geração de $\mathcal{L}_{[0,1]}$ -REF a partir de Função de Overlap e Implicações Fuzzy.

$Ref_{O, I}$	
$Ref_{T_p, I_0}(x, y) =$	$\begin{cases} \max(x, 1 - y), & \text{se } x > y; \\ 1, & \text{se } x = y; \\ \max(y, 1 - x), & \text{se } y > x. \end{cases}$
$Ref_{O_p, I_{LK}}(x, y) =$	$\begin{cases} (1 - x + y)^p, & \text{se } x > y; \\ (1 - y + x)^p, & \text{se } x < y; \\ 1, & \text{se } x = y. \end{cases}$
$Ref_{O_{\frac{1}{2}, \min}, I_{RB}}(x, y) =$	$\begin{cases} \sqrt{1 - x + xy} & \text{se } x > y, \\ 1, & \text{se } x = y; \\ \sqrt{1 - y + xy} & \text{se } x < y. \end{cases}$
$Ref_{O_k, I_0}(x, y) =$	$\begin{cases} \max(x, 1 - y)^k, & \text{se } x < y; \\ \max(y, 1 - x)^k, & \text{se } x > y; \\ 1, & \text{se } x = y. \end{cases}$

3.3 Funções de Penalidade Fuzzy

Funções de penalidade tem sido amplamente estudadas no contexto da análise de consenso em sistemas fuzzy baseados na tomada de decisão (CALVO; BELIAKOV, 2010; BELIAKOV; CALVO; JAMES, 2014). Funções de penalidade podem dissuadir os tomadores de decisão de fazer julgamentos extremos que inviabilizem os resultados consensuais (YAGER; RYBALOV, 1997).

Métodos de agregação baseados em penalidades também são capazes de propor diferentes pesos, adaptando a análise de consenso à situação específica e desde a modelagem do problema (CALVO; MESIAR; YAGER, 2004; BUSTINCE; PAGOLA; BARRENECHEA, 2007).

A aplicação e uso das funções de penalidade não se restringe apenas à agregação de opiniões de especialistas, mas podem ser aplicadas a medidas de distância visando um consenso em experimentos de *benchmarking* (HORNIK; MEYER, 2006) em atuais aplicações via simulações (MARTÍNEZ-PANERO, 2011; ELKANO et al., 2018).

A diversidade de definições de funções de penalidade fuzzy tem-se formalizado via relações de preferência (BUSTINCE et al., 2014), *fuzzy subsethood measures* (SANTOS et al., 2019), pré-agregações (DIMURO et al., 2018) e tantos outros agregadores fuzzy (BUSTINCE; FERNANDEZ; BURILLO, 2017). Neste trabalho, considera a definição de função de penalidades proposta em (WILKIN; BELIAKOV, 2015).

Definição 3.3.1. (WILKIN; BELIAKOV, 2015, Definição 10) A função $P : [0, 1]^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de penalidade se, e somente se, satisfaz as seguintes condições:

P1: $P(x_1, \dots, x_n, y) \geq c, \forall x_i \in [0, 1], i \in \mathbb{N}_n, y \in [0, 1], e c \in \mathbb{R};$

P2: $P(x_1, \dots, x_n, y) = c$ se, e somente se, $x_i = y, \forall i \in \mathbb{N}_n, e$

P3: P é *quasi-convexa* em y , ou seja, para $x_1, \dots, x_n, y, x'_1, \dots, x'_n, y' \in [0, 1]$, tem-se que

$$P(\lambda(x_1, \dots, x_n, y) + (1 - \lambda)(x'_1, \dots, x'_n, y')) \leq \max(P(x_1, \dots, x_n, y), P(x'_1, \dots, x'_n, y')).$$

Consideramos a definição apresentada em (BUSTINCE; FERNANDEZ; BURILLO, 2017, Definição 10) e (BUSTINCE et al., 2016, Definição 3.7), de uma p -função restrita ao reticulado $\mathcal{L}([0, 1])$.

Definição 3.3.2. (BUSTINCE; FERNANDEZ; BURILLO, 2017, Definição 10) Uma função baseada em penalidades $f : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ é definida, $\forall x_1, \dots, x_n \in [0, 1]$, pela expressão

$$f(x_1, \dots, x_n) = \arg \min_y P(x_1, \dots, x_n, y), \quad (36)$$

se y é o único minimizador, e $y = \frac{1}{2}$ se o conjunto de minimizadores é o intervalo $]0, 1[$ (ou $[0, 1]$).

De acordo com (BUSTINCE et al., 2016, Ex. 2.2), para cada função de penalidade P , busca-se definir o número $y \in [0, 1]$ que indica o valor de fusão dos n dados de entrada, interpretados por $x_1, \dots, x_n \in [0, 1]$, de forma a otimizar a função baseada em penalidade f . Neste sentido, ao minimizar y , tem-se a otimização de f .

Exemplo 3.3.1. De acordo com a exemplificação 3.2.1 que se reporta a resultados em (BUSTINCE; FERNANDEZ; BURILLO, 2017), a função $F_2 : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$, definida por $F_2(x, y) = (x - y)^2$ é uma função $\mathcal{L}([0, 1])$ -REF quasi-conexa. Seja $() : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ uma permutação. Logo, a função $P_2 : [0, 1]^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$P_2(x_1, \dots, x_n, y) = \sum_{i=1}^n F_2(x_{(i)}, y) = \sum_{i=1}^n (x_{(i)} - y)^2, \quad (37)$$

é uma função de penalidade, sendo y o correspondente valor de fusão. Observa-se ainda que, como provado em (YAGER; RYBALOV, 1997), de acordo com a teoria da otimização, quando este valor de fusão se refere à média aritmética dos valores observados, ou seja, $y = AM(x_1, \dots, x_n)$, tem-se então o valor que minimiza P_2 .

Exemplo 3.3.2. Veja Exemplo 3.2.2 com resultados de (BUSTINCE et al., 2016, Ex. 2.2), mostrando que $f_{||}(x, y) = |x - y|$ é uma função $\mathcal{L}([0, 1])$ -REF quasi-conexa. E, quando $() : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ define uma permutação, a função $P_{||} : [0, 1]^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$, dada pela expressão

$$P_{||}(x_1, \dots, x_n, y) = \sum_{i=1}^n f_{||}(x_{(i)} - y) = \sum_{i=1}^n |x_{(i)} - y|, \quad (38)$$

é também uma função de penalidade em $\mathcal{L}([0, 1])$, sendo que quando y , o correspondente valor de fusão, se refere à mediana dos valores observados, $y = Med(x_1, \dots, x_n)$, tem-se o valor de fusão que minimiza $P_{||}$ (YAGER; RYBALOV, 1997).

Outras contribuições envolvendo novos estudos de classes de funções de penalidade, discussão de suas propriedades, apresentação de generalizações e diferentes aplicações estão descritas na literatura (YAGER; RYBALOV, 1997; BUSTINCE et al., 2016; BUSTINCE; FERNANDEZ; BURILLO, 2017).

3.4 Teoria dos Conjuntos Fuzzy Valorados Intervalarmente

Na modelagem fuzzy de um sistema de tomada de decisão, sempre a principal dificuldade se reportava à atribuição do grau de pertinência a um elemento, a qual se mostrava extremamente dependente da aplicação e da contextualização do universo

considerado. Assim, a concepção de novas extensões da Teoria dos Conjuntos Fuzzy foi instigada por esta noção difusa e nebulosa da informação atribuída como grau de pertinência aos elementos associados a um conjunto fuzzy (ZADEH, 1971).

Neste contexto histórico, Sambuc propõe a noção preliminar de IVFS, denominados Φ -Flou sets (SAMBUC, 1975). Zadeh também sugeriu esta noção de IVFS, que neste caso, particularizava a noção mais genérica de T2FS (*Type-2 Fuzzy Sets*) (ZADEH, 1975). E ainda, neste mesmo período, e de forma independente, Grattan-Guinness (GRATTAN-GUINNESS, 1976) também apresenta estudos na direção da extensão da teoria dos conjuntos fuzzy, abordando os conjuntos fuzzy valorados por intervalos. Na sequência das propostas desta extensão, novos trabalhos fixam a nomenclatura e estudam as propriedades dos IVFS visando o suporte teórico para sistemas de tomada de decisão baseados IVFL (DUBOIS; PRADE, 1980; DUBOIS; OSTASIEWICZ; PRADE, 2000; FODOR, 1991; FODOR; ROUBENS, 1994).

Assim, nas últimas décadas várias abordagens foram propostas para o tratamento de incerteza também considerando sistemas especialistas. No caso do raciocínio aproximado (KANDEL et al., 1996), captura-se a descrição imprecisa e inexata de conceitos da linguagem natural na modelagem das funções de pertinência. E, frequentemente, a aquisição de informações obtida por especialistas resulta em diferenças quando da atribuição dos graus de pertinência para cada termo linguístico das variáveis consideradas (BUSTINCE, 2010). Neste contexto, a representação intervalar para os graus de pertinência se mostra robusta, incluindo desde o menor até o maior valor atribuído por especialistas para os graus de pertinência.

Ao integrar conceitos da Teoria dos Conjuntos Fuzzy com a Matemática Intervalar (MOORE; LODWICK, 2003), na IVFL pode-se considerar subintervalos do intervalo unitário $[0, 1]$ ao atribuir o valor-verdade a proposições fuzzy. E, neste caso, a distância entre os extremos superior e inferior (diâmetro) de cada intervalo provê uma medida da imprecisão na atribuição do correspondente grau de pertinência.

Esta Seção aborda os conceitos referentes à teoria dos conjuntos fuzzy valorados intervalarmente. Apresentam-se a definição destes conjuntos e, na sequência, as propriedades fundamentais que definem os conectivos lógicos, considerando a estruturação e manipulação de sistemas baseados na Lógica Fuzzy Valorada Intervalarmente (IVFL).

3.4.1 Conjuntos Fuzzy Valorados Intervalarmente

O conjunto dos valores fuzzy é estendido ao conjunto dos valores intervalares fuzzy, consistindo em subintervalos fechados do intervalo unitário $[0, 1]$, indicado por:

$$L([0, 1]) = \{[\underline{X}, \bar{X}] : (\underline{X}, \bar{X}) \in [0, 1]^2 \text{ e } \underline{X} \leq \bar{X}\}.$$

Um intervalo $X \in L([0, 1])$ tal que $\underline{X} = \overline{X} = x$ é denominado intervalo degenerado e será indicado pela expressão $[x, x] = \mathbf{x}$. O conjunto dos intervalos degenerados é definido pela expressão:

$$\mathcal{D}([0, 1]) = \{\mathbf{x} \in L([0, 1]) | x \in [0, 1]\} \subseteq \mathcal{L}([0, 1]).$$

E, neste contexto, $L([0, 1])$ recobre o intervalo unitário $[0, 1]$.

Seja $L^n([0, 1]) = \underbrace{L([0, 1]) \times \dots \times L([0, 1])}_{n \text{ vezes}}$ tal que $L^0([0, 1]) = [0, 1]$ e $L^1([0, 1]) = L([0, 1])$.

Assim, para cada vetor intervalar $\vec{X} = (X_1, \dots, X_n) \in L^n([0, 1])$, tem-se os operadores:

- (i) projeções: $l(\vec{X}) = (\underline{X}_1, \dots, \underline{X}_n)$ e $r(\vec{X}) = (\overline{X}_1, \dots, \overline{X}_n)$;
- (ii) supremo e ínfimo: $\vee(\vec{X}) = [\vee(\underline{X}_1, \dots, \underline{X}_n), \vee(\overline{X}_1, \dots, \overline{X}_n)]$ e $\wedge(\vec{X}) = [\wedge(\underline{X}_1, \dots, \underline{X}_n), \wedge(\overline{X}_1, \dots, \overline{X}_n)]$.

Aplicando as projeções a uma função $\mathbb{F}: L^n([0, 1]) \rightarrow L([0, 1])$, tem-se as funções $\underline{\mathbb{F}}, \overline{\mathbb{F}}: L^n([0, 1]) \rightarrow [0, 1]$ dadas, respectivamente, por:

$$l(\underline{\mathbb{F}}(X_1, \dots, X_n)) = \mathbb{F}(X_1, \dots, X_n) \text{ e } r(\overline{\mathbb{F}}(X_1, \dots, X_n)) = \mathbb{F}(X_1, \dots, X_n).$$

Considera-se a ordem parcial usual em $L([0, 1])$, também chamada ordem produto ou Kulisch-Miranker, definida para todo $X = [\underline{X}, \overline{X}], Y = [\underline{Y}, \overline{Y}] \in L([0, 1])$, pela expressão:

$$X \leq_{L([0, 1])} Y \Leftrightarrow \underline{X} \leq \underline{Y} \text{ e } \overline{X} \leq \overline{Y}.$$

E, se não houver ambiguidade, a ordem produto $\leq_{L([0, 1])}$ será indicada por $\leq$.

Assim, $\mathcal{L}([0, 1]) = (L([0, 1]), \leq_{L([0, 1])}, \mathbf{1}, \mathbf{0})$ define o reticulado completo dos subintervalos fechados do intervalo unitário $[0, 1]$, onde $\perp_{\mathcal{L}([0, 1])} = \mathbf{0}$ e $\top_{\mathcal{L}([0, 1])} = \mathbf{1}$.

Definição 3.4.1. Um Conjunto Fuzzy Valorado Intervalarmente (IVFS) $\mathbb{A}$, referente ao universo $\chi \neq \emptyset$ está definido pela função de pertinência $\mu_{\mathbb{A}}: \chi \rightarrow L([0, 1])$ e dado por

$$\mathbb{A} = \left\{ (u, \mu_{\mathbb{A}}(u)) : u \in \chi, \mu_{\mathbb{A}}(u) = [\underline{\mu}_{\mathbb{A}}(u), \overline{\mu}_{\mathbb{A}}(u)] \in L([0, 1]) \right\}, \quad (39)$$

onde o par de funções $\underline{\mu}_{\mathbb{A}}, \overline{\mu}_{\mathbb{A}}: \chi \rightarrow [0, 1]$ estão mapeando os limites inferior e superior do grau de pertinência intervalar $\mu_{\mathbb{A}}$, respectivamente. Assim, se $\mu_{\mathbb{A}}(u) = X$ na Def. 3.4.1, então $\underline{\mu}_{\mathbb{A}}(u) = l(X) = \underline{X}$ e $\overline{\mu}_{\mathbb{A}}(u) = r(X) = \overline{X}$.

3.4.2 Conectivos Fuzzy Valorados Intervalarmente

Nesta Seção apresentam-se a extensão intervalar para os conectivos fuzzy em $L([0, 1])$, com ênfase na correspondente representabilidade (DESCHRIJVER, 2008).

Inspirado em~(BEDREGAL, 2010), seguem estudos em (SANTIAGO; BEDREGAL; ACIÓLY, 2006) onde um intervalo $X \in L([0, 1])$ é interpretado como a representação de um número real α , com $\alpha \in X$. Ao considerarmos duas representações intervalares X e Y para este número real α , X é uma melhor representação para α que Y se $X \subseteq Y$.

Os seguintes estudos em representabilidade de funções intervalares seguem dos resultados apresentados em (SANTIAGO; BEDREGAL; ACIÓLY, 2006) contextualizados em $L([0, 1])$.

Uma função $F: L([0, 1])^n \rightarrow L([0, 1])$ é uma representação intervalar $f: [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ se, para cada $\vec{X} = (X_1, \dots, X_n) \in L([0, 1])^n$ e $\vec{x} \in \vec{X}$, tem-se que $f(\vec{x}) \in F(\vec{X})$.

Além do resultado anterior, uma função valorada intervalarmente $F: L([0, 1])^n \rightarrow L([0, 1])$ é uma melhor representação de $f: [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ do que $G: L([0, 1])^n \leftrightarrow L([0, 1])$, indicada por $G \sqsubseteq F$, se vale a inclusão $F(\vec{X}) \subseteq G(\vec{X})$, $\forall \vec{X} \in L([0, 1])^n$.

Neste contexto, a melhor representação intervalar para $f: [0, 1]^n \leftrightarrow [0, 1]$, é a função $\hat{f}: L([0, 1])^n \leftrightarrow L([0, 1])$ definida por

$$\hat{f}(\vec{X}) = [\inf\{f(\vec{x}) | \vec{x} \in \vec{X}\}, \sup\{f(\vec{x}) | \vec{x} \in \vec{X}\}]. \quad (40)$$

A função $\hat{f}$ está bem definida e, para toda representação intervalar F de f , $F \sqsubseteq \hat{f}$.

Conectivos fuzzy valorados intervalarmente podem ser interpretados como representação de um conectivo fuzzy. Essa generalização decorre do princípio da extensão fuzzy, sendo o grau de pertinência intervalar considerado uma aproximação do grau de pertinência pontual.

Definição 3.4.2. (PEKALA, 2019) *Seja $\mathbb{M}: L([0, 1])^n \rightarrow L([0, 1])$ uma Função de Agregação Valorada Intervalarmente (IVAF) com respeito a $\leq_{L([0, 1])}$ -ordem, se $\forall i \in \mathbb{N}_n$ e $\forall X_i, Y_i \in L([0, 1])$, tem-se que*

$$\mathbb{M1}: X_i \leq Y_i \Rightarrow \mathbb{M}(X_1, \dots, X_n) \leq \mathbb{M}(Y_1, \dots, Y_n);$$

$$\mathbb{M2}: \mathbb{M}(\mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}) = \mathbf{0} \text{ e } \mathbb{M}(\mathbf{1}, \dots, \mathbf{1}) = \mathbf{1}.$$

Seja a IVAF $\mathbb{M}: L([0, 1])^n \rightarrow L([0, 1])$. $\mathbb{M}$ é chamada uma agregação $L([0, 1])$, $\leq_{L([0, 1])}$ -representável sempre que existem funções de agregação $M_1, M_2: [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ tais que $A_1 \leq A_2$ e, $\forall X_1, \dots, X_n \in L([0, 1])$, a seguinte condição é satisfeita:

$$\mathbb{M}(X_1, \dots, X_n) = [M_1(\underline{X}_1, \dots, \underline{X}_n), M_2(\overline{X}_1, \dots, \overline{X}_n)]. \quad (41)$$

Consideramos a extensão intervalar dos agregadores definidos por t-(co)normas em $L([0, 1])$, de acordo com a abordagem introduzida em (DESCHRIJVER, 2008).

Definição 3.4.3. *Uma função binária $\mathbb{T}(\mathbb{S}): L([0, 1])^2 \rightarrow L([0, 1])$ é uma t-(co)norma valorada intervalarmente IVT (IVS), se é comutativa, associativa, monotônica em relação à ordem usual e tem $\mathbf{1}$ ($\mathbf{0}$) como elemento neutro.*

Pela Eq. (41), as funções $\mathbb{T}_{T,T'}(\mathbb{S}_{S,S'}): L([0,1])^2 \rightarrow L([0,1])$, são denominadas t-(co)normas $\leq_{L([0,1])}$ -representáveis e dadas pelas respectivas expressões:

$$\mathbb{T}_{T,T'}(X,Y) = [T(\underline{X},\underline{Y}), T'(\overline{X},\overline{Y})] \text{ e } \mathbb{S}_{S,S'}(X,Y) = [S(\underline{X},\underline{Y}), S'(\overline{X},\overline{Y})], \quad (42)$$

se, e somente se, $T(x,y) \leq T'(x,y)$ ($S(x,y) \leq S'(x,y)$), $\forall x,y \in [0,1]$.

E, t-(co)normas $\leq_{L([0,1])}$ -representáveis satisfazem a correspondente condição:

$$T_{T,T'}([0,1], [0,1]) = [0,1] \text{ e } S_{S,S'}([0,1], [0,1]) = [0,1].$$

Exemplo 3.4.1. Na Tabela 8, seguem exemplos ilustrando a classe de t-(co)normas em $L([0,1])$. Veja (DIMURO et al., 2011), para comentários e lustrações adicionais.

Tabela 8 – Funções t-(co)normas ($\leq_{L([0,1])}$)-Representáveis.

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_M(X,Y) &= [\min(\underline{X},\underline{Y}), \min(\overline{X},\overline{Y})] \\ \mathbb{T}_P(X,Y) &= [\underline{X}\underline{Y}, \overline{X}\overline{Y}] \\ \mathbb{T}_{LK}^*(X,Y) &= [\max(0, \underline{X} + \underline{Y} - 1), \max(0, \overline{X} + \overline{Y} - 1)] \\ \mathbb{T}_D(X,Y) &= \begin{cases} \min(X,Y), & \text{se } \max(X,Y) =, \\ [0, \min(\overline{X},\overline{Y})], & \text{se } \max(\overline{X},\overline{Y}) = 1 \text{ e} \\ & \max(\underline{X},\underline{Y}) \neq 1, \\ & \text{caso contrário.} \end{cases} \\ \mathbb{S}_M(X,Y) &= [\max(\underline{X},\underline{Y}), \max(\overline{X},\overline{Y})] \\ \mathbb{S}_P(X,Y) &= [\underline{X} + \underline{Y} - \underline{X}\underline{Y}, \overline{X} + \overline{Y} - \overline{X}\overline{Y}] \\ \mathbb{S}_{LK}(X,Y) &= [\min(\underline{X} + \underline{Y}, 1), \min(\overline{X} + \overline{Y}, 1)] \\ \mathbb{S}_D(X,Y) &= \begin{cases} \max(X,Y), & \text{se } \min(X,Y) =, \\ [\max(\underline{X},\underline{Y}), 1], & \text{se } \min(\underline{X},\underline{Y}) = 0 \text{ e} \\ & \min(\overline{X},\overline{Y}) \neq 0; \\ & \text{caso contrário.} \end{cases} \end{aligned}$$

Definição 3.4.4. (ZAPATA et al., 2017) A função $\mathbb{N}: L([0,1]) \rightarrow L([0,1])$ define Negação Fuzzy Valorada Intervalarmente (IVFN) se, para todo $X,Y \in L([0,1])$, satisfaz as propriedades:

N1: $\mathbb{N}(\mathbf{0}) = \mathbf{1}$ e $\mathbb{N}(\mathbf{1}) = \mathbf{0}$;

N2: Se $X \geq Y$, então $\mathbb{N}(X) \leq \mathbb{N}(Y)$.

Uma IVFN $\mathbb{N}$ é forte se satisfaz a propriedade involutiva:

N3: $\mathbb{N}(\mathbb{N}(X)) = X$, $\forall X \in L([0,1])$.

De acordo com a Eq. (40), pode-se construir uma IVFN $\mathbb{N}$ que seja involutiva, a partir de negações fuzzy fortes, como mostra a expressão a seguir:

$$\mathbb{N}(X) = [N(\overline{X}), N(\underline{X})].$$

Exemplo 3.4.2. Baseados em resultados em (ZAPATA et al., 2017, Proposição 3.2), seguem algumas ilustrações de IVFN apresentadas na Tabela 9.

Tabela 9 – Representabilidade de IVFN em $L([0, 1])$.

$N_C(x) = 1 - x$	$\mathbb{N}_C(X) = [1 - \bar{X}, 1 - \underline{X}]$
$N_K(x) = 1 - x^2$	$\mathbb{N}_K(X) = [1 - \bar{X}^2, 1 - \underline{X}^2]$
$N_R(x) = 1 - \sqrt{x}$	$\mathbb{N}_R(X) = [1 - \sqrt{\bar{X}}, 1 - \sqrt{\underline{X}}]$
$N_{D1}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x = 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$	$\mathbb{N}_{D1}(X) = \begin{cases} 1, & \text{se } X = 0 \\ [0, 1], & \text{se } 0 \in X \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$
$N_{D2}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x < 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$	$\mathbb{N}_{D2}(X) = \begin{cases} 0, & \text{se } X = 1 \\ [0, 1], & \text{se } 1 \in X \\ 1, & \text{caso contrário} \end{cases}$

No mesmo contexto em que valores pontuais são identificados a intervalos degenerados na matemática intervalar, as propriedades das implicações fuzzy da FL podem ser naturalmente estendidas para IVFL.

Definição 3.4.5. (REISER et al., 2007), para $X, Y, Z \in L([0, 1])$, uma função $\mathbb{I}: L([0, 1])^2 \rightarrow L([0, 1])$ é uma *Implicação Fuzzy Valorada Intervalarmente (IVFI)*, se as seguintes condições são satisfeitas:

$$\mathbb{I}1 : \mathbb{I}(1, 1) = \mathbb{I}(0, 0) = \mathbb{I}(0, 1) = 1, \text{ e } \mathbb{I}(1, 0) = 0;$$

$$\mathbb{I}2 : \text{Se } X \leq Z, \text{ então } \mathbb{I}(X, Y) \geq \mathbb{I}(Z, Y);$$

$$\mathbb{I}3 : \text{Se } Y \leq Z, \text{ então } \mathbb{I}(X, Y) \leq \mathbb{I}(X, Z).$$

Busca-se obter uma IVFI a partir de qualquer implicação fuzzy, preservando as suas propriedades. Pela Eq. (40), a representação intervalar $\mathbb{I}$ é obtida a partir de uma implicação fuzzy I , pela a ordem usual. Neste caso, resultados apresentados em (BEDREGAL et al., 2010) mostram que, se I é uma implicação fuzzy, então $\hat{I} = \mathbb{I}$ é um IVFI. E ainda, I satisfaz $I1$ e $I2$ se, e somente se, $\hat{I}$ é dado pela expressão:

$$\mathbb{I}(X, Y) = [I(\bar{X}, \underline{Y}), I(\underline{X}, \bar{Y})]. \quad (43)$$

Exemplo 3.4.3. A tabela a seguir apresenta a expressão para a representação intervalar das implicações de Łukaziewicz (LK), Reichenbach (RC), Dubois-Prade (DP) e Kleene-Dienes (KD), de acordo com a Eq. 43) e com respeito a ordem usual em $L([0, 1])$.

Tabela 10 – Representação Intervalar de Implicações com respeito a Ordem Usual em $L([0, 1])$.

$\mathbb{I}_{LK}(X, Y) = [\min(1 - \bar{X} + \min(\underline{X}, \underline{Y}), 1), \min(1 - \underline{X} + \min(\bar{X}, \bar{Y}), 1)]$
$\mathbb{I}_{RC}(X, Y) = [\min(1 - \bar{X} + \underline{X}\underline{Y}, 1), \min(1 - \underline{X} + \bar{X}\bar{Y}, 1)]$
$\mathbb{I}_{DP}(X, Y) = \begin{cases} 1 & \text{se } \underline{X}\underline{Y} \in (0, 1) \text{ e } \bar{X} \in (0, 1) \\ [\max(1 - \bar{X}, \underline{X}\underline{Y}), \max(1 - \underline{X}, \bar{X}\bar{Y})] & \text{se } [\min(1 - \bar{X}, \underline{X}\underline{Y}), \min(1 - \underline{X}, \bar{X}\bar{Y})] = 0 \\ [\max(1 - \bar{X}, \underline{X}\underline{Y}), 1] & \text{caso contrário} \end{cases}$
$\mathbb{I}_{KD}(X, Y) = [\min(1 - \bar{X} + \max(0, \underline{X} + \underline{Y} - 1), 1), \min(1 - \underline{X} + \max(0, \bar{X} + \bar{Y} - 1), 1)]$

3.5 Sistemas Baseados em Regras Fuzzy

Esta Seção aborda o conceito de Sistema Baseado em Regras Fuzzy (SBRF) e descreve os módulos que compõem um controlador fuzzy como um caso particular destes sistemas, capaz de reproduzir a estratégia de um controlador humano com abordagem da lógica fuzzy para produzir saídas que consideram as incertezas de cada entrada desde a modelagem do sistema (BARROS; BASSANEZI, 2006). A seguir são descritos os Sistemas Baseados em Regras Fuzzy Tipo-1 (SBRFT1) e os Sistemas Baseados em Regras Fuzzy Tipo-2 (SBRFT2). Os módulos que compõem estes sistemas estão representados na Figura 10.

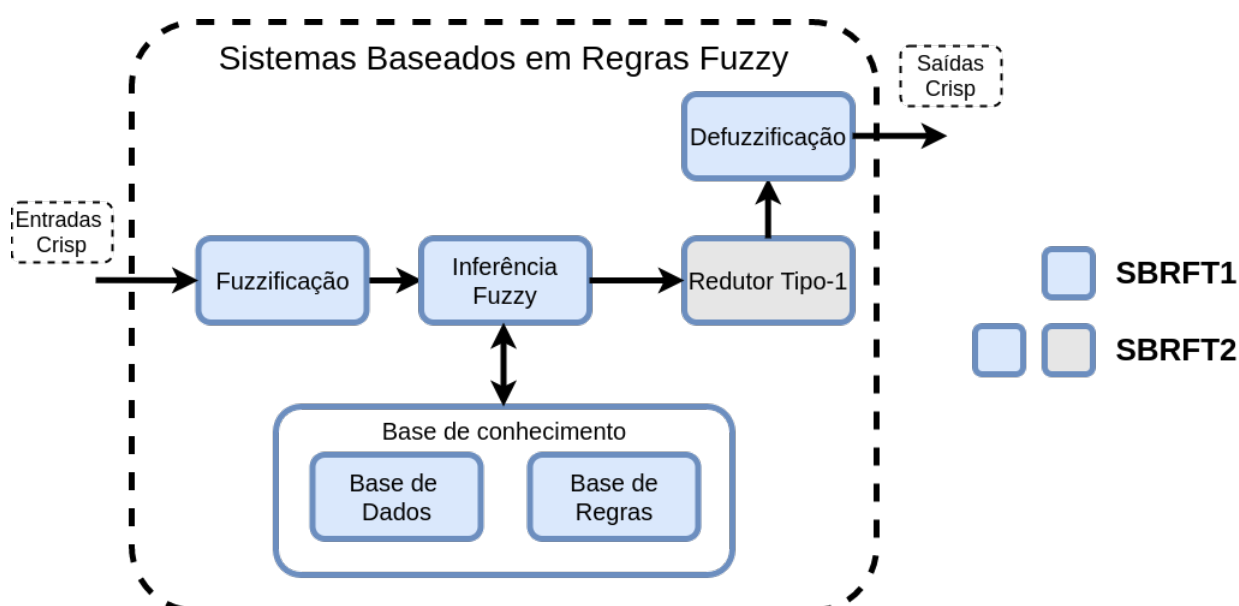


Figura 10 – Sistemas Baseados em Regras Fuzzy.

3.5.1 Sistemas Baseados em Regras Fuzzy Tipo-1

Nas primeiras aplicações dos SBRF, cada saída representava a ação correspondente à condição ou entrada do sistema. Neste contexto, os SBRF são denominados *Controladores Fuzzy*.

Métodos em raciocínio aproximado possibilitam a tradução dos termos linguísticos, definidos por especialistas, com o intuito de controlar suas tarefas, traduzindo em fórmulas matemáticas que viabilizam a automação de tarefas. Este é o ponto fundamental na distinção entre teoria de controle fuzzy e teoria clássica de controle. Nesta última, o intuito principal é montar estratégias para que um sistema dinâmico otimize algum critério descrito via lógica multi-valorada. No caso deste trabalho, a fundamentação lógica está baseada na teoria dos conjuntos fuzzy (BARROS; BASSANEZI, 2006).

Um controlador fuzzy Tipo-1 é composto por quatro módulos principais:

1. Módulo de fuzzificação, onde é feita a modelagem das entradas do sistema por conjuntos fuzzy.
2. Base de Regras, transcrevendo os termos traduzidos por conjuntos fuzzy para a base de conhecimentos,
3. Inferência fuzzy, definindo a relação fuzzy que produzirá a saída para cada entrada, a partir da tradução matemática de cada proposição fuzzy e correspondente cálculo referente à regra acionada.
4. Módulo de defuzzificação, permitindo representar um conjunto fuzzy por um valor crisp (número real).

A seguir são descritos cada um dos módulos principais que compõem um controlador fuzzy Tipo-1.

3.5.1.1 Módulo de Fuzzificação

Neste módulo as entradas são modeladas por conjuntos fuzzy com seus respectivos domínios. Neste módulo justifica-se a importância de especialistas do fenômeno a ser modelado (BARROS; BASSANEZI, 2006).

As funções de pertinência são formuladas para cada conjunto fuzzy envolvido no processo e, as variáveis de entrada do sistema são mapeadas em graus de pertinência de cada conjunto fuzzy que representa a variável analisada. As funções de pertinência, portanto, definem cada conjunto fuzzy e frequentemente são formuladas de forma analítica, lineares por partes, resultando em formas triangulares ou trapezoidais, e ainda discretizadas (GOMIDE; GUDWIN; TANSCHKEIT, 1995).

Para a seleção de serviços, pode-se fazer uso de algoritmos fuzzy, sendo que a maior parte dos trabalhos na literatura usam funções de associação triangular ou trapezoidal (ALMULLA; YAHYAOU; AL-MATORI, 2015).

3.5.1.2 Módulo da Base de Regras

Este módulo é composto por um conjunto de proposições fuzzy, sendo que cada uma destas proposições é representada na forma linguística pela seguinte expressão:

Se “A é Baixo” e “B é Baixo” e “C é Baixo” então “D é Baixo”.

Esses dados de entrada (A,B,C) e saída (D), correspondem a valores associados aos termos de cada variável linguística, e modelados por funções de pertinência de acordo com as informações provenientes de um especialista.

Os SBRF consideram a inferência com base em regras pois são fáceis de entender, ler, adicionar, modificar serviços e apresentam conhecimento natural em representação uniforme. Além disso, separam conhecimento do processamento e, portanto, reduzem a complexidade do tempo de computação (PRIYA; CHANDRAMATHI, 2014).

3.5.1.3 Módulo de Inferência Fuzzy

No módulo de Inferência Fuzzy tem-se a expressão matemática de cada proposição fuzzy, com o uso de técnicas da lógica fuzzy. Nesse módulo são definidos quais procedimentos e regras de inferência serão selecionadas para se obter a relação fuzzy que modela a regra(s) selecionada(s) para avaliação de cada proposição fuzzy. O módulo também fornece o controle fuzzy para cada variável de entrada (SILER; BUCKLEY, 2004).

Neste módulo aplicam-se os conectivos fuzzy, t-normas e t-conormas, para aplicação das regras de inferência, as quais podem ser modeladas por implicações fuzzy, obtendo as relação fuzzy como Modus Ponens (Tolens) generalizado, que estruturam o módulo de Base de Regras.

Dentre os métodos de inferência previstos na literatura, destacam-se os métodos de Takagi-Sugeno e Mamdani, sendo que o primeiro método surgiu a partir da utilização de controladores fuzzy na teoria de controle, considerando que as saídas parciais de cada regra são dadas por meio de funções das entradas (TAKAGI; SUGENO, 1985). O segundo método, considerado na modelagem de estratégias neste trabalho, foi desenvolvido por Ebrahim Mamdani (MAMDANI; ASSILIAN, 1975) e está baseado na regra de inferência indicada pela composição $\max - \min$. O processamento das regras. Para cada regra M_j da base de regras de k -múltiplas entradas e uma saída, é indicado da forma

$$\text{Se } "x_1 \text{ é } A_1" \text{ e } \dots \text{ e } "x_k \text{ é } A_k" \text{ então } "y \text{ é } B_j"$$

modela a aplicação de uma relação fuzzy onde a representação da t-norma t_M (mínimo) pelo conectivo lógico "e" e da t-conorma S_M (máximo) pelo conectivo lógico "ou"; e ainda, utilizando-se ambos na interpretação das regras fuzzy da Base de Regras.

3.5.1.4 Módulo de Defuzzificação

No módulo de Defuzzificação, também conhecido como Processador de Saída, cada entrada de dados referentes às variáveis e termos linguísticos fuzzy, o módulo de inferência produz uma saída fuzzy.

Se a entrada for um número real, espera-se que a saída também seja um número real, mas, geralmente, isso não ocorre em controladores fuzzy pois, mesmo a entrada sendo crisp, a saída é fuzzy. Com isso, deve-se utilizar um método para defuzzificar a saída e gerar um número real (CARLSSON; FULLER, 2002).

Entre vários métodos de defuzzificação, um dos mais utilizados é o Método do Centro de Gravidade ($G(Y)$), também conhecido como Centroide. Esse método transforma a saída fuzzy em saída discreta. Calcula-se a média aritmética entre os centros de gravidade dos conjuntos fuzzy, aos quais o elemento pertence, ponderados pelo

grau de pertinência (CHEN; PHAM, 2001).

Então, para um universo discreto χ_n , tem-se a seguinte equação:

$$G(Y) = \frac{\sum_{i=1}^n \mu_i Y_i}{\sum_{i=1}^n \mu_i}, \quad (44)$$

onde $G(Y)$ é a saída discreta, n é a quantidade de conjuntos fuzzy a que o elemento pertence, μ_i é o grau de pertinência com que o elemento pertence ao i -ésimo conjunto fuzzy, e ainda, Y_i é o centro de gravidade do i -ésimo conjunto fuzzy deste elemento.

3.5.2 Sistemas Baseados em Regras Fuzzy Tipo-2

A origem da Lógica Fuzzy Tipo-2 (LFT2), introduzida por Lotfi A. Zadeh (ZADEH, 1975) como uma extensão da Lógica Fuzzy Tipo-1 (LFT1), está relacionada à insuficiência da LFT1 em modelar as incertezas referentes à definição das funções de pertinência dos antecedentes e consequentes em um sistemas fuzzy para tomada de decisão. Em SBRFT2, ao menos um dos seus conjuntos fuzzy presentes no antecedente ou no consequente de uma regra são conjuntos fuzzy do Tipo-2.

Em especial, os sistemas baseados em conjuntos fuzzy valorados intervalarmente, são uma classe especial em SBRFT2, onde o grau de pertinência de um elemento pode ser dado por um subintervalo em $[0, 1]$. Desse modo, tem-se caracterizada a “mancha de incerteza”, *Footprint of Uncertainty* (FOU), que na representação gráfica, modela a incerteza na determinação das funções que limitam a região espacial que retrata a função de pertinência intervalar principal. E, considera-se a IVFL nesta modelagem lógica.

A diferença entre SBRFT1 e SBRFT2 está essencialmente associada à natureza das funções de pertinência (no caso IVFL são as funções de pertinência valoradas intervalarmente) e não às regras de composição do sistema de inferência. Por isso, as regras permanecem as mesmas, tanto para sistemas do tipo-1 como para o Tipo-2 (como na IVFL).

Um controlador fuzzy Tipo-2 é composto pelos módulos de fuzzificação, inferência, base de regras, o módulo redutor de tipo antecipando a etapa de defuzzificação, como mostra a Figura 10.

Os componentes utilizados por SBRFT2 são análogos aos utilizados por sistemas SBRFT1. Por este motivo, apenas o componente "Redutor Tipo-1" será brevemente detalhado logo a seguir.

O módulo Redutor Tipo-1 transforma um conjunto Fuzzy Tipo-2 em conjunto fuzzy do Tipo-1, ou seja, verifica o conjunto Fuzzy Tipo-1 que melhor representa o conjunto Fuzzy Tipo-2 considerando que, se toda incerteza desaparecer, então o resultado do SBRFT2 é reduzido ao SBRFT1 (MENDEL, 2017).

Salienta-se que, uma das restrições quanto à aplicação da Lógica Fuzzy Tipo-2

refere-se a este módulo, reduzindo ao final, todo o resultado da análise de incerteza carregada pela modelagem fuzzy, a apenas um número. Embora seja fácil de analisar e comparar, este resultado numérico nem sempre é capaz de refletir, no resultado, a avaliação da incerteza para tomada de decisão baseada em sistemas baseados em SBRFT2. Entretanto, muitas vezes esta redução se justifica, porque nem sempre conjuntos podem ser comparados, pois são reticulados algebricamente estruturados por ordens parciais. E, embora não seja o foco neste projeto, para contornar estas restrições, surgem novas abordagens, relacionadas a aplicação de ordens admissíveis (BUSTINCE et al., 2013; MIGUEL et al., 2016; WANG; XU, 2016; SCHNEIDER et al., 2020).

3.6 Considerações sobre o Capítulo

Neste Capítulo foram apresentados os conceitos fundamentais para o desenvolvimento desta Tese, sendo estes a teoria de conjuntos fuzzy, as funções de penalidade fuzzy, as funções de equivalência restritas, a teoria dos conjuntos fuzzy valorados intervalarmente e os sistemas baseados em regras fuzzy.

A discussão sobre a teoria de conjuntos fuzzy trouxe a perspectiva do tratamento matemático para a produção de cálculos com informações imprecisas que podem ser utilizados para modelar incertezas e contribuir para processos de tomada de decisão.

A revisão do conceito referente às funções de penalidade fuzzy e suas exemplificações auxiliam na compreensão e perspectivas de uso em diferentes aplicações que utilizam a fusão de informações.

Conceitos acerca de funções REF e suas propriedades foram apresentados permitindo, assim, a discussão sobre a geração de operadores pela ação de diferentes funções e implicações.

A partir da pesquisa na literatura para o tratamento das questões de pesquisa desta Tese, foi abordada a teoria dos conjuntos fuzzy. A revisão dos conceitos e propriedades referentes à teoria dos conjuntos fuzzy valorados intervalarmente apresentou perspectivas para o uso e manipulação de sistemas baseados em IVFL.

As considerações sobre os SBRFT1 e SBRFT2 com a descrição dos principais módulos que compõem estes controladores fuzzy consolidam a perspectiva para tratamento de incertezas em memórias híbridas.

O próximo Capítulo apresenta a Concepção da Estratégia CDM, proposta nesta Tese para caracterizar a análise consensual a partir de medidas de consenso fuzzy para auxílio na tomada de decisão.

4 CONCEPÇÃO DA ESTRATÉGIA CDM

“Genius is one percent inspiration
and ninety-nine percent perspiration.”

Thomas A. Edison

Este Capítulo apresenta a concepção da **Estratégia CDM**, caracterizada pelas **FCM-Metodologias**, para análise consensual via medidas de consenso fuzzy, construída por composição de funções agregações, negação e implicações fuzzy, incluindo funções de overlap, de penalidades e relações fuzzy de equivalência estritas.

Estas metodologias se diferenciam pela natureza dos conjuntos fuzzy que definem a estrutura lógica da proposta consensual, refletindo as diferenças com respeito à natureza das funções de pertinência, no caso, modeladas em FL ou em IVFL.

As FCM-metodologias são estruturadas em dois contextos:

- (1) **FS-FCM metodologias**, via medidas de consenso fuzzy aplicadas sobre o reticulado de valores fuzzy $\mathcal{L}_{[0,1]}$. Os métodos agregam valores e/ou termos linguísticos fuzzy referentes a uma função de pertinência definindo um conjunto fuzzy. Neste caso, tem-se uma análise consensual tradicional, interpretando as opiniões de diversos especialistas sobre o grau de pertinência dos elementos de um universo χ , em um conjunto fuzzy X . Esta proposta contempla a representação da coesão de dados referentes a um termo linguístico na modelagem de sistemas de tomada de decisão baseados em lógica fuzzy.
- (2) **IVFS-FCM metodologias**, via medidas de consenso fuzzy aplicadas sobre o reticulado de conjuntos fuzzy $\mathcal{L}_{\mathcal{F}\chi}$. Neste caso, tem-se a análise de coesão ao agregar os valores das medidas de consenso de distintas funções de pertinência referentes a elementos de um universo, sobre o qual se definem os correspondentes conjuntos fuzzy. Ao considerar famílias de conjuntos fuzzy, esta metodologia provê uma análise mais abrangente, destacando-se os seguintes possibilidades:

- (i) Aplicação sobre vários conjuntos fuzzy tipo-1, onde cada conjunto fuzzy refere-se a um termo linguístico de uma mesma variável linguística;
- (ii) Aplicação sobre conjuntos fuzzy tipo-2, focando (mas não restritamente) na abordagem da IVFL, consolidando uma análise consensual sobre um conjunto fuzzy valorado intervalarmente $\mathbb{A}$, pela ação de medidas de consenso nas suas projeções, indicadas por $\sup(\mathbb{A})$ e $\inf(\mathbb{A})$.

Deve-se ressaltar ainda que, as FS-FCM metodologias podem prover métodos que viabilizam a aplicação de medidas de consenso para análise de funções modeladas via abordagem da IVFL, as quais são representados por suas projeções (T1FS), permitindo várias possibilidades de famílias de funções, selecionadas a partir das variáveis linguísticas e/ou dos termos linguísticos modelados.

Ambos métodos são introduzidos neste capítulo, como descrito na sequência e, posteriormente, são aplicadas na consolidação da Estratégia CDM, para auxílio na recomendação de migrações de páginas em arquiteturas de memórias híbridas.

Primeiramente, apresentamos as diretrizes conceituais da Estratégia FS-FCM, fundamentada na conceituação de medidas de consenso fuzzy e suas propriedades.

4.1 FCM-Metodologias: Conceituação formal

Medidas de consenso fuzzy promovem um modelo consensual para obtenção de uma análise formal de concordância para variáveis de um sistema fuzzy e, são frequentemente empregadas em contextos de tomada de decisão.

O estudo formal sobre medidas de consenso elege uma indicação, sempre que uma avaliação global reflète uma visão geral alcançada, aplicada sobre um termo linguístico identificando um conjunto fuzzy. Estabelece ainda limites mínimo/máximo de consenso e promove a decisão final sobre os termos consensuais.

As medidas de consenso fuzzy, de acordo com (BELIAKOV; CALVO; JAMES, 2014), são funções definidas no intervalo unitário $[0, 1]$ modelando a concordância relacionada de valores, frequentemente fornecidos por um grupo de especialistas, na modelagem de um conjunto fuzzy. Essa análise de consenso se preocupa essencialmente com as duas propriedades fundamentais:

- (i) a unanimidade, interpretando o consenso completo por uma função onde todas as entradas são iguais; e
- (ii) o consenso mínimo, resultando em um consenso nulo sempre que as entradas da função forem os extremos (0 e 1) no intervalo unitário $[0, 1]$.

Uma conceituação formal para medidas de consenso foi apresentada em (BELIAKOV; CALVO; JAMES, 2014, Definição 7), sendo reportada logo a seguir:

Definição 4.1.1. Uma função $C : \bigcup_{n=1}^{\infty} [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ é uma Medida de Consenso Fuzzy (FCM) ($\mathcal{L}_{[0,1]}$ -FCM) se forem verificadas as seguintes propriedades:

$C1 : C(x, x, \dots, x) = 1, \forall x \in [0, 1]$ (unanimidade);

$C2 : C(0, 1) = C(1, 0) = 0$ (consenso mínimo para $n = 2$).

Em casos onde precisamos salientar a definição estrita da propriedade de unanimidade, tem-se o seguinte conceito de medidas de consenso fuzzy:

Definição 4.1.2. Uma função $C : \bigcup_{n=1}^{\infty} [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ é uma medida de consenso fuzzy estrita se C verifica $C2$ e a propriedade da unanimidade estrita dada por:

$C1(a) : C(x_1, \dots, x_n) = 1$ se, e somente se, $x_i = x_j$ para $i, j \in \mathbb{N}_n$ e $\mathbb{N}_n = \{1, 2, \dots, n\}$.

A fim de avaliar o comportamento dos indivíduos em grupos, de tamanhos possivelmente diferentes, é relevante considerar medidas de consenso (estritas) com propriedades adicionais. No contexto deste trabalho, propriedades como simetria, dissensão máxima, reciprocidade, monotonicidade e replicação em invariância são estendidas, considerando a abordagem proposta em (BELIAKOV; CALVO; JAMES, 2014).

$C3$: Uma medida de consenso C é simétrica se, para todas as permutações $() : \mathbb{N}_n \rightarrow \mathbb{N}_n$ e $x_1, \dots, x_n \in [0, 1]^n$, tem-se a igualdade: $C(x_1, x_2, \dots, x_n) = C(x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)})$ (simetria);

$C4$: C satisfaz a propriedade de dissensão máxima se, para todo n par e $\forall x_1, \dots, x_n \in [0, 1]$ tal que $\#\{i : x_i = 0\} = \#\{i : x_i = 1\} = n/2$, para $i \in \mathbb{N}_n$, tem-se a igualdade $C(x_1, \dots, x_n) = 0$.

$C5$: C é invariante para replicações se, $\forall \vec{x} \in [0, 1]^n$, tem-se a igualdade: $C(x) = C(x, x) = C(x, x, x) = \dots = C(x, x, \dots, x)$, significando que para qualquer vetor de entrada $x \in [0, 1]^n$, ao replicar estas entradas m -vezes, para qualquer inteiro positivo m , o nível de consenso é preservado.

$C6$: C satisfaz a propriedade da reciprocidade relativa a uma negação fuzzy forte N se, para qualquer inteiro positivo n e $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in [0, 1]^n$, tem-se a igualdade $C(x_1, x_2, \dots, x_n) = C(N(x_1), N(x_2), \dots, N(x_n))$.

$C7$: C satisfaz a monotonicidade em relação à maioria e relacionado a $\mathcal{L}_{[0,1]}$ -RDF, $d : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$, se a metade das avaliações forem iguais, tomando-se, por exemplo, $\vec{a} = (a, a, \dots, a) \in [0, 1]^k$, para todo $\vec{x} = (x_1, \dots, x_k), \vec{y} = (y_1, \dots, y_k) \in [0, 1]^k$ tal que, $d(a, x_j) \leq d(a, y_j), \forall j \in \mathbb{N}_k$, o que implica $C(\vec{a}, \vec{x}) \geq C(\vec{a}, \vec{y})$, para qualquer permutação de entradas.

C8: Para um operador de agregação estendido A , C satisfaz a A -monotonicidade em relação à $\mathcal{L}_{[0,1]}$ -RDF $d : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$, se, para qualquer inteiro positivo n , e $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in [0, 1]$, tem-se que:

$$d(x_i, A(x_1, \dots, x_n)) \leq d(y_i, A(y_1, \dots, y_n)), \forall i \in \mathbb{N}_n \Rightarrow C(y_1, \dots, y_n) \leq C(x_1, \dots, x_n).$$

Pode-se observar que, se A é idempotente e $x_1 = \dots = x_n$ então para $\mathcal{L}_{[0,1]}$ -RDF $d : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$, $\forall i \in \mathbb{N}_n$ temos que $d(x_{(i)}, A(x_{(1)}, \dots, x_{(n)})) = 0$ e $C(x_1, \dots, x_n) = 1$ e então a A -propriedade da monotonicidade é verificada.

Exemplos de medidas de consenso apresentados em (BELIAKOV; CALVO; JAMES, 2014) que também verificam as propriedades Ck , $\forall k \in \{3, 4, 5, 6\}$, são reportados logo a seguir, ilustrando as definições previamente reportadas.

Exemplo 4.1.1. Considerando a média aritmética da distância entre os pares, a função $C_{SK}^d : \bigcup_{i=1}^{\infty} [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$, definida pela expressão a seguir

$$C_{SK}^d(x_1, \dots, x_n) = 1 - \frac{2}{n^2} \sum_{\forall i, j | i \neq j}^n d(x_i, x_j); \quad (45)$$

é uma medida de consenso que satisfaz C7, em relação a $\mathcal{L}_{[0,1]}$ -RDF definida por $d : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$, onde $d(x, y) = (x - y)^2$.

Exemplo 4.1.2. A função $C_{Tastle} : \bigcup_{i=1}^{\infty} [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ dada por

$$C_{Tastle}(x_1, \dots, x_n) = 1 + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log_2(1 - |x_i - \bar{x}|) \quad (46)$$

define uma medida de consenso relacionada à média aritmética sobre o operador logaritmo aplicada à diferença entre 1 e a $\mathcal{L}_{[0,1]}$ -RDF $d : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ definida como $d(x, y) = |x - y|$. Ambos os operadores C_{SK}^d e C_{Tastle} verificam C6 em relação a $\mathcal{L}_{[0,1]}$ -RDF d e C8 em relação à média aritmética AM.

Exemplo 4.1.3. Em (BELIAKOV; CALVO; JAMES, 2014, Definição 14) uma classe do consenso de Beonferroni com a média aritmética AM é dada como segue:

$$BCA_{AM,I}(x_1, \dots, x_n) = AM_{i=1}^n \left(I(x_i, AM_{j=1, i \neq j}^n x_j), I(AM_{j=1, i \neq j}^n x_j, x_i) \right),$$

e também ilustra uma medida de consenso fuzzy.

4.2 FS-FCM Metodologias: Construção de Medidas de Consenso no Reticulado de Valores Fuzzy

Nas seções mostramos que operadores como soma convexa, função conjugada, relações de equivalência e funções de penalidades são construtores de FCM, discutimos as condições que preservam suas principais propriedades.

4.2.1 $\mathcal{L}_{[0,1]}$ -FCM via Somas Convexas

Esta seção discute a definição e apresenta exemplos que ilustram um método para gerar uma nova medida de consenso fuzzy $C_1 +_\lambda C_2$ a partir da soma convexa aplicada à $\mathcal{L}_{[0,1]}$ -FCM C_1 e C_2 . Sempre que, para um escalar $\lambda \in [0, 1]$, é considerado como um operador ele também preservará as principais propriedades de C_1 e C_2 .

Proposição 4.2.1. *Considere uma negação fuzzy N . Sejam $C_1, C_2 : \bigcup_{n=1}^{\infty} [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ medidas de consenso fuzzy em $[0, 1]$ que satisfaz C_i para $i \in \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, C_6 (em relação a N), C_7 relacionada com $\mathcal{L}_{[0,1]}$ -RDF $d : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ e C_8 , também considerando uma EAF A . Para $\lambda \in [0, 1]$, a função $C_1 +_\lambda C_2 : \bigcup_{n=1}^{\infty} [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ dada por*

$$C_1 +_\lambda C_2(x_1, \dots, x_n) = \lambda C_1(x_1, \dots, x_n) + (1 - \lambda) C_2(x_1, \dots, x_n) \quad (47)$$

também é uma medida de consenso fuzzy em $[0, 1]$ que verifica C_i , para o mesmo $i \in \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, C_6 (em relação a N), C_7 relacionada com $\mathcal{L}_{[0,1]}$ -RDF d e C_8 considerando a EAF AM .

Proof. Seja $\lambda \in [0, 1]$ e $C_1, C_2 : \bigcup_{n=1}^{\infty} [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ medidas de consenso fuzzy $[0, 1]$ que verificam C_i , para $i \in \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, C_6 em relação à negação fuzzy N , C_7 relacionada com $\mathcal{L}_{[0,1]}$ -RDF $d : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ e C_8 , também considerando uma EAF A . Então, tem-se que:

$$C1: C_1 +_\lambda C_2(x, \dots, x) = \lambda C_1(x, \dots, x) + (1 - \lambda) C_2(x, \dots, x) = \lambda + (1 - \lambda) = 1;$$

$$C2: C_1 +_\lambda C_2(0, 1) = \lambda C_1(0, 1) + (1 - \lambda) C_2(0, 1) = \lambda \cdot 0 + (1 - \lambda) \cdot 0 = 0. \text{ De maneira análoga, } C_1 +_\lambda C_2(1, 0) = \lambda C_1(1, 0) + (1 - \lambda) C_2(1, 0) = \lambda \cdot 0 + (1 - \lambda) \cdot 0 = 0.$$

$$C3: C_1 +_\lambda C_2(x_{(1)}, \dots, x_{(n)}) = \lambda C_1(x_{(1)}, \dots, x_{(n)}) + (1 - \lambda) C_2(x_{(1)}, \dots, x_{(n)}) = \lambda C_1(x_1, \dots, x_n) + (1 - \lambda) C_2(x_1, \dots, x_n). \text{ Então, resulta em } C_1 +_\lambda C_2(x_{(1)}, \dots, x_{(n)}) = C_1 +_\lambda C_2(x_1, \dots, x_n);$$

$$C4: \forall x_1, \dots, x_n \in [0, 1] \text{ tal que } \#\{i : x_i = 0\} = \#\{i : x_i = 1\} = n/2, \text{ obtém-se que } C_1 +_\lambda C_2(x_1, \dots, x_n) = \lambda C_1(x_1, \dots, x_n) + (1 - \lambda) C_2(x_1, \dots, x_n) = \lambda \cdot 0 + (1 - \lambda) \cdot 0 = 0;$$

$$C5: : \text{ Desde que } C_1 \text{ e } C_2 \text{ verifique } C5, \text{ para qualquer vetor de entrada } \vec{x} \in [0, 1]^n \text{ repli-}$$

cando as entradas m -vezes para qualquer inteiro positivo m , temos que

$$\begin{aligned} C_1 +_\lambda C_2(\vec{x}, \dots, \vec{x}) &= \\ &= \lambda C_1(\vec{x}, \dots, \vec{x}) + (1 - \lambda) C_2(\vec{x}, \dots, \vec{x}) \text{ pela Eq.(47)} \\ &= \lambda C_1(\vec{x}) + (1 - \lambda) C_2(\vec{x}) = C_1 +_\lambda C_2(\vec{x}) \text{ pela C5;} \end{aligned}$$

$$\text{C6: : } C_1 +_\lambda C_2(N(x_1), \dots, N(x_n)) = \lambda C_1(N(x_1), \dots, N(x_n)) + (1 - \lambda) C_2(N(x_1), \dots, N(x_n)) = \lambda C_1(x_1, \dots, x_n) + (1 - \lambda) C_2(x_1, \dots, x_n) = C_1 +_\lambda C_2(x_1, \dots, x_n).$$

C7: Para cada $n = 2k$ sendo metade das avaliações iguais e tomando $\vec{a} = (a, a, \dots, a) \in [0, 1]^k$, $\forall \vec{x} = (x_1, \dots, x_k), \vec{y} = (y_1, \dots, y_k) \in [0, 1]^k$ tal que, $d(a, x_j) \leq d(a, y_j)$, $\forall j \in \mathbb{N}_k$ implica $C_2(\vec{a}, \vec{x}) \geq C_2(\vec{a}, \vec{y})$ e $C_1(\vec{a}, \vec{x}) \geq C_1(\vec{a}, \vec{y})$. Portanto, para cada $\lambda \in [0, 1]$, desde que C_1, C_2 verifique C7, tem-se que:

$$\begin{aligned} C_1 +_\lambda C_2(\vec{a}, \vec{x}) &= \lambda C_1(\vec{a}, \vec{x}) + (1 - \lambda) C_2(\vec{a}, \vec{x}) \text{ pela Eq.(47)} \\ &\geq \lambda C_1(\vec{a}, \vec{y}) + (1 - \lambda) C_2(\vec{a}, \vec{y}) \\ &= C_1 +_\lambda C_2(\vec{a}, \vec{y}); \end{aligned}$$

C8: Para qualquer inteiro positivo n , uma EAF A e $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in [0, 1]$, quando temos que

$$d(x_{(i)}, A(x_{(1)}, \dots, x_{(n)})) \leq d(y_{(i)}, A(y_{(1)}, \dots, y_{(n)})),$$

o que implica próximas condições: $C_1(y_1, \dots, y_n) \geq C_1(x_1, \dots, x_n)$ e $C_2(y_1, \dots, y_n) \geq C_2(x_1, \dots, x_n)$. Então,

$$\begin{aligned} C_1 +_\lambda C_2(y_1, \dots, y_n) &= \lambda C_1(y_1, \dots, y_n) + (1 - \lambda) C_2(y_1, \dots, y_n) \\ &\geq \lambda C_1(x_1, \dots, x_n) + (1 - \lambda) C_2(x_1, \dots, x_n) \\ &= C_1 +_\lambda C_2(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

desde que C_1, C_2 verifiquem C8, considerando $\mathcal{L}_{[0,1]}$ -RDF d relacionada à EAF A .

Portanto, a proposição 4.2.1 está verificada. $\square$

4.2.2 $\mathcal{L}_{[0,1]}$ -FCM via Automorfismos

Agora, a definição e exemplos que ilustram um método para gerar uma nova medida de consenso C^ϕ pela ação de um automorfismo $\phi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ sobre uma medida de consenso fuzzy C são discutidos, mostrando C^ϕ como uma ϕ -propriedade de preservação da medida de consenso C .

Proposição 4.2.2. Considere uma negação fuzzy N . Seja $\phi \in \text{Aut}([0, 1])$ e $C : \bigcup_{n=1}^{\infty} [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ uma $\mathcal{L}_{[0,1]}$ -FCM que verifica C_i , para $i \in \{3, 4, 5, 6, 7\}$, C_6 (em re-

lação à N) e $C7$ relacionado a uma $\mathcal{L}_{[0,1]}$ -RDF $d : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$. A função conjugada $C^\phi : \bigcup_{n=1}^{\infty} [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ dada por

$$C^\phi(x_1, \dots, x_n) = \phi^{-1}(C(\phi(x_1), \dots, \phi(x_n))) \quad (48)$$

é uma $\mathcal{L}_{[0,1]}$ -FCM que verifica Ci para $i \in \{3, 4, 5, 6, 7\}$, $C6$ (em relação a N^ϕ , ϕ -conjugada de N) e $C7$ relacionada a d .

Proof. Seja $C : \bigcup_{n=1}^{\infty} [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ uma $\mathcal{L}_{[0,1]}$ -FCM que verifica Ci , para $i \in \{3, 4, 5, 6, 7\}$, $C6$ em relação à negação fuzzy N e $C7$ relacionado a $\mathcal{L}_{[0,1]}$ -RDF d . Tem-se os seguintes resultados:

$$C1: C^\phi(x, x) = \phi^{-1}(C(\phi(x), \phi(x))) = \phi^{-1}(\phi(x) = x);$$

$$C2: C^\phi(0, 1) = \phi^{-1}(C(\phi(0), \phi(1))) = \phi^{-1}(C(0, 1)) = \phi^{-1}(0) = 0. \quad \text{Analogamente,} \\ C^\phi(1, 0) = \phi^{-1}(C(\phi(1), \phi(0))) = \phi^{-1}(C(1, 0)) = \phi^{-1}(0) = 0.$$

$$C3: \text{Uma vez que } \phi \text{ está estritamente aumentando, } C^\phi(x_{(1)}, \dots, x_{(n)}) = \\ \phi^{-1}(C(\phi(x_{(1)}), \dots, \phi(x_{(n)}))) = \phi^{-1}(C(\phi(x_1), \dots, \phi(x_n))), \quad \text{significa que} \\ C^\phi(x_{(1)}, \dots, x_{(n)}) = C^\phi(x_1, \dots, x_n);$$

$$C4: \text{Seja } n \text{ um número inteiro par, } \forall x_1, \dots, x_n \in [0, 1] \text{ tal que } \#\{i : x_i = 0\} = \#\{i : x_i = 1\} = n/2, \text{ uma vez que } \phi(0) = 0 \text{ e } \phi(1) = 1, \text{ estabelece que } C^\phi(x_1, \dots, x_n) = \\ \phi^{-1}(C(\phi(x_1), \dots, \phi(x_n))) = \phi^{-1}(C(x_1, \dots, x_n)) = \phi^{-1}(0) = 0;$$

$$C5: \text{Uma vez que } C \text{ verifica } C5, \text{ para qualquer entrada } \vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in [0, 1]^n, \phi(\vec{x}) = \\ (\phi(x_1), \dots, \phi(x_n)), \text{ replicando as entradas } m\text{-vezes para qualquer inteiro positivo} \\ m \text{ temos que } C^\phi(\vec{x}, \dots, \vec{x}) = \phi^{-1}(C(\phi(\vec{x}), \dots, \phi(\vec{x}))) = \phi^{-1}(C(\phi(\vec{x}))) = C^\phi(\vec{x});$$

$C6$: Considere $\phi \in \text{Aut}([0, 1])$. Uma vez que ϕ -conjugada de N é, também, uma negação fuzzy, temos que:

$$\begin{aligned} \phi \in C^\phi(N^\phi(x_1), \dots, N^\phi(x_n)) &= \phi^{-1}(C(\phi(\phi^{-1}(N(\phi(x_1))))), \dots, \phi^{-1}(N(\phi(x_n)))) \\ &= \phi^{-1}(C(N(\phi(x_1)), \dots, N(\phi(x_n)))) \\ &= \phi^{-1}(C(\phi(x_1), \dots, \phi(x_n))) = C^\phi(x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

$C7$: Para cada $n = 2k$ sendo metade das avaliações iguais e tomando $\vec{a} = (a, a, \dots, a) \in [0, 1]^k$, $\forall \vec{x} = (x_1, \dots, x_k), \vec{y} = (y_1, \dots, y_k) \in [0, 1]^k$ tal que, para todo $j \in \mathbb{N}_k$, a implicação $d(a, x_j) \leq d(a, y_j) \Rightarrow d(\phi(a), \phi(x_j)) \leq d(\phi(a), \phi(y_j))$ é verificada, desde que ϕ verifique $\Phi1$. E, considerando o Exemplo 3.2.3, para $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{L}_{[0,1]}^k$, tem-se que:

$$\begin{aligned} \max\{d_{\mathcal{L}_{[0,1]}}(\phi(a), \phi(x_i)) : i \in \mathbb{N}_k\} &\leq \max\{d_{\mathcal{L}_{[0,1]}}(\phi(a), \phi(y_i)) : i \in \mathbb{N}_k\}; \\ \max\{d_{\mathcal{L}_{[0,1]}}(\phi^{-1}(\phi(a), \phi(x_i))) : i \in \mathbb{N}_k\} &\leq \max\{d_{\mathcal{L}_{[0,1]}}(\phi^{-1}(\phi(a), \phi(y_i))) : i \in \mathbb{N}_k\} \end{aligned}$$

A partir dos resultados anteriores, conclui-se que:

$$C^\phi(\vec{a}, \vec{x}) = \phi^{-1}(C(\phi(\vec{a}), \phi(\vec{x}))) \geq \phi^{-1}(C(\phi(\vec{a}), \phi(\vec{y}))) = C^\phi(\vec{a}, \vec{y}).$$

Portanto, a Proposição 4.2.2 é verificada. $\square$

4.2.3 $\mathcal{L}_{[0,1]}$ -FCM via Agregações de Funções $\mathcal{L}_{[0,1]}$ -REF

O próximo teorema introduz a metodologia $C_{A,f}$ para construir $\mathcal{L}_{[0,1]}$ -FCM baseadas em funções de agregação (A) e funções de equivalência estrita (f).

Teorema 4.2.1. *Sejam N uma negação fuzzy forte, $f : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ uma $\mathcal{L}_{[0,1]}$ -REF com respeito a N e com um operador N -dual dado por $\mathcal{L}_{[0,1]}$ -RDF $d : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ e A uma EAF que verifica as propriedades A3, A4, A6 e A9. Para a permutação $() : \mathbb{N}_n \rightarrow \mathbb{N}_n$, a função $C_{A,f} : \bigcup_{n=1}^{\infty} [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ dada por*

$$C_{A,f}(x_1, \dots, x_n) = A(f(x_{(1)}, x_{(n)}), \dots, f(x_{(n)}, x_{(1)})) = A_{i=1}^n f(x_{(i)}, x_{(n-i+1)}) \quad (49)$$

é uma $\mathcal{L}_{[0,1]}$ -FCM que verifica C4, C5, C6 (em relação a N) juntamente com C7 e C8 (relacionado a d).

Proof. Seja $f : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ uma $\mathcal{L}_{[0,1]}$ -REF em relação à negação fuzzy forte N , verificando as propriedades REF1-REF5. Seja A uma EAF verificando A3, A4, A6 e A9. Para cada permutação ordenada $() : \mathbb{N}_n \rightarrow \mathbb{N}_n$, tem-se que

$$C1 : C_{A,f}(a, \dots, a) = A(f(a, a), \dots, f(a, a)) = A(1, \dots, 1) = 1;$$

$$C2 : C_{A,f}(1, 0) = A(f(1, 0), f(0, 1)) = A(0, 0) = 0; \text{ e}$$

$$C_{A,f}(0, 1) = A(f(0, 1), f(1, 0)) = A(0, 0) = 0, \text{ por A2.};$$

C3 : Seja n um inteiro par em $\mathbb{N}$, então, a partir de A3 para cada permutação $()$, temos que

$$C_{A,f}(x_{(1)}, \dots, x_{(n)}) = A_{i=1}^n f(x_{(i)}, x_{(n-i+1)}) = A_{i=1}^n f(x_i, x_{n-i+1}) = C_{A,f}(x_1, \dots, x_n);$$

C4 : Seja $(x_{(1)}, \dots, x_{(n)})$ uma permutação ordenada de $x_1, \dots, x_n$. Se $x_{(i)} \in \{1, 0\}$,

$$\forall i \in \mathbb{N}_n^* \text{ e } \#\{i \in \mathbb{N}_n^* : x_i = 0\} = \#\{i \in \mathbb{N}_n^* : x_i = 1\}, \text{ tem-se que}$$

$$C_{A,f}(x_1, \dots, x_n) = C_{A,f}(x_{(1)}, \dots, x_{(n)}) = C_{A,f}(0, \dots, 0, 1, \dots, 1)$$

E, a partir da REF3 e A1, tem-se que

$$C_{A,f}(x_1, \dots, x_n) = (f(0, 1), \dots, f(0, 1), f(1, 0), \dots, f(1, 0)) = A(0, \dots, 0) = 0;$$

C5 : Para $()$ -permutação, $(x'_{(1)}, \dots, x'_{(kn)}) = (x'_{(1)}, \dots, x'_{(1)}, \dots, x'_{(n)}, \dots, x_{(n)})$. Logo, tem-se

$$\begin{aligned} C_{A,f}(x_1, \dots, x_n, \dots, x_1, \dots, x_n) &= A_{i=1}^{kn} f(x_{(i)}, x_{(kn-i+1)}) \\ &= A_{i=1}^n (f(x_{(i)}, x_{(n-i+1)}), \dots, f(x_{(i)}, x_{(n-i+1)}))_{k\text{-times}} \\ &= A_{i=1}^n f(x_{(i)}, x_{(n-i+1)}) = C_{A,f}(x_1, \dots, x_n), \text{ por A9} \end{aligned}$$

$$C6 : C_{A,f}(N(x_1), \dots, N(x_n)) = A_{i=1}^n f(N(x_{n-i+1}), N(x_i)) = A_{i=1}^n f(N(x_i), N(x_{n-i+1})) \\ = A_{i=1}^n f(x_i, x_{n-i+1}) = C_{A,f}(x_1, \dots, x_n); (\text{por REF4, N2.})$$

C7 : Seja $n = 2k$ indicando metade das avaliações iguais, $\vec{a} = (a, a, \dots, a) \in [0, 1]^k$, e $\vec{x} = (x_1, \dots, x_k), \vec{y} = (y_1, \dots, y_k) \in [0, 1]^k$. Logo, tem-se a desigualdade a seguir:

$$d(a, x_j) \leq d(a, y_j) \Leftrightarrow f_N(a, x_j) \leq f_N(a, y_j) \Rightarrow f(a, x_j) \geq f(a, y_j), \forall j \in \mathbb{N}_k.$$

Portanto, as propriedades A1 e REF1 implicam nos resultados

$$C_{A,f}(\vec{a}, \vec{x}) = A_{j=1}^k (f(a, x_{(j)}), \dots, f(x_{(j)}, a)) \geq A_{j=1}^k (f(a, y_{(j)}), \dots, f(y_{(j)}, a)) = C_{A,f}(\vec{a}, \vec{y}).$$

C8: Para qualquer inteiro positivo $n, x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in [0, 1], \forall i \in \mathbb{N}_n$ temos que

$$\begin{aligned} d(x_{(i)}, A(x_{(1)}, \dots, x_{(n)})) &\leq d(y_{(i)}, A(y_{(1)}, \dots, y_{(n)})) \\ \Leftrightarrow f_N(x_{(i)}, A(x_{(1)}, \dots, x_{(n)})) &\leq f_N(y_{(i)}, A(y_{(1)}, \dots, y_{(n)})) \\ \Rightarrow f(x_{(i)}, A(x_{(1)}, \dots, x_{(n)})) &\geq f(y_{(i)}, A(y_{(1)}, \dots, y_{(n)})) \text{ por REF4;} \\ \Rightarrow f(x_{(i)}, A(x_{(n-i+1)}, 1, \dots, 1)) &\leq f(y_{(i)}, A(y_{(n-i+1)}, 1, \dots, 1)) \text{ de A1} \\ \Rightarrow f(x_{(i)}, x_{(n-i+1)}) &\leq f(y_{(i)}, y_{(n-i+1)}) \text{ de A6.} \end{aligned}$$

Então, por A1, $A(f(y_{(1)}, y_{(n)}), \dots, f(y_{(n)}, y_{(1)})) \leq A(f(x_{(1)}, x_{(n)}), \dots, f(x_{(n)}, x_{(1)}))$, resultando em $C_{A,f}(y_1, \dots, y_n) \leq C_{A,f}(x_1, \dots, x_n)$. Concluindo, o Teorema 4.2.1 é verificado. $\square$

Nos corolários a seguir, é apresentada uma metodologia para obter as medidas de consenso a partir da ação de média aritmética (AM) e média exponencial (exp_α), ambas relacionadas a valores fuzzy obtidos a partir de uma $\mathcal{L}_{[0,1]}$ -REF f .

Corolário 4.2.1. *Seja $f : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ a $\mathcal{L}_{[0,1]}$ -REF dada na Eq.(17), em relação à negação fuzzy padrão N_s e $d : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ sua função N_s dual $\mathcal{L}_{[0,1]}$ -RDF. A função $C_{AM,f} : \bigcup_{n=1}^\infty [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ dada por*

$$C_{AM,f}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_{(i)}, x_{(n-i+1)}) \quad (50)$$

é uma FCM em relação a N_s sobre $d : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ dada por $d(x, y) = |x - y|$, verificando C_i , para todo $i \in \{3, 4, 5\}$, C6 em relação a N_s , C7 e C8, ambas com respeito a d .

Proof. Segue a partir dos resultados do Teorema 4.2.1. $\square$

Uma nova classe de medidas de consenso fuzzy pode ser obtida a partir do Corolário 4.2.1 e da Proposição 4.2.2 a partir da ação de um automorfismo $\phi \in \text{Aut}(\mathcal{L}_{[0,1]})$ sobre operadores $\mathcal{L}_{[0,1]}$ -FCM, como apresentado a seguir.

Exemplo 4.2.1. Seja $F^{\phi_{l,k}} : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ a $\mathcal{L}_{[0,1]}$ -REF dada na Eq.(28) em relação à negação fuzzy $N_S^{\phi_{l,k}} : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$. Sejam $l, k \in \mathbb{N}^*$, então a função $C_{AM,F^{\phi_{l,k}}} : \bigcup_{n=1}^{\infty} [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ dada por

$$C_{AM,F^{\phi_{l,k}}}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(1 - |x_{(i)}^{\frac{l}{k}} - x_{(n-i+1)}^{\frac{l}{k}}| \right)^{\frac{k}{l}} \quad (51)$$

é uma medida de consenso fuzzy que verifica Ci, para todo $i \in \{3, 4, 5\}$, C6 em relação a negação $N_S^{\phi_{l,k}}$, C7 e C8, ambas relacionadas à $\mathcal{L}_{[0,1]}$ -RDF $d : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$, $d(x, y) = |x - y|$. Em particular, se $l = k$ tem-se

$$C_{AM,f_{||}}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (1 - |x_{(i)} - x_{(n-i+1)}|). \quad (52)$$

Corolário 4.2.2. Seja $F : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ uma $\mathcal{L}_{[0,1]}$ -REF dada pela Eq.(18), em relação à negação fuzzy padrão N_S . A função $C_{\exp_{\alpha},F} : \bigcup_{n=1}^{\infty} [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ definida por

$$C_{\exp_{\alpha},F}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{\alpha} \ln \sum_{i=1}^n \frac{e^{F(x_{(i)}, x_{(n-i+1)})}}{n} \quad (53)$$

é uma medida de consenso fuzzy em relação a N_S sobre a $\mathcal{L}_{[0,1]}$ -RDF $d : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ dada por $d(x, y) = |x - y|$, que verifica Ci, para todo $i \in \{3, 4, 5\}$, C6, em relação a N_S e C7 relacionada à $\mathcal{L}_{[0,1]}$ -RDF $d : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$, $d(x, y) = |x - y|$.

Proof. Segue diretamente dos resultados do Teorema 4.2.1. □

Como ilustração, este estudo considera o operador de agregação média exponencial, representado por $\exp_{\alpha}$, e os operadores $\mathcal{L}_{[0,1]}$ -REF para obter outra classe de $\mathcal{L}_{[0,1]}$ -FCM.

Exemplo 4.2.2. Seja F a $\mathcal{L}_{[0,1]}$ -REF dada pela Eq.(18) e seja $\exp_{\alpha}$ a agregação média exponencial. A função $C_{\exp_{\alpha},F} : \bigcup_{n=1}^{\infty} [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ dada por

$$C_{\exp_{\alpha},F}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{\alpha} \ln \sum_{i=1}^n \frac{e^{1 - |x_{(i)} - x_{(n-i+1)}|}}{n} \quad (54)$$

é uma $\mathcal{L}_{[0,1]}$ -FCM que verifica C3, C4, C5, C6, em relação à negação fuzzy N_S e C7 relacionada à $\mathcal{L}_{[0,1]}$ -RDF $d : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$, $d(x, y) = |x - y|$.

Exemplo 4.2.3. Seja $C_{AM,F}, C_{\exp_{\alpha},F} : \bigcup_{n=1}^{\infty} [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ uma $\mathcal{L}_{[0,1]}$ -FCM em relação a negação fuzzy N_S dada nos Exemplos 4.2.1 e 4.2.2, respectivamente. A partir da

Proposição 4.2.1, a função

$$C_{AM,F} + \lambda C_{exp_\alpha,F} : \bigcup_{n=1}^{\infty} [0,1]^n \rightarrow [0,1]$$

também é uma $\mathcal{L}_{[0,1]}$ -FCM que verifica C_i , para todo $i \in \{3,4,5\}$, C_6 , em relação a N_s e C_7 relacionada a $\mathcal{L}_{[0,1]}$ -RDF $d : [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$, dada por $d(x,y) = |x - y|$.

4.2.4 $\mathcal{L}_{[0,1]}$ -FCM via Funções de Quase-overlap e Implicações Fuzzy

Estendemos os resultados da Seção 3.2, os quais promovem a aplicação de $\mathcal{L}_{[0,1]}$ -REF a partir de funções de quase-overlap, reportadas na Definição 3.1.3), e de implicações fuzzy.

Este estudo considera a preservação das mesmas condições estabelecidas com relação às propriedades destes operadores ao definir novos métodos de obter $\mathcal{L}_{[0,1]}$ -FCM via as classes de funções de overlap e de implicações fuzzy.

Proposição 4.2.3. *Sejam $M : [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ uma função de quase-overlap, $N : [0,1] \rightarrow [0,1]$ e $I : [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ uma função binária verificando as propriedades I_1 , I_3 , I_4 (em relação a N) e I_5 . A partir destas funções, considera-se a $\mathcal{L}_{[0,1]}$ -REF $f_{M,I} : [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ definida pela Eq.(32) e uma EAF A verificando as propriedades A_3 , A_4 , A_6 e A_9 e define-se a função $C_{A,f_{M,I}} : \bigcup_{n=1}^{\infty} [0,1]^n \rightarrow [0,1]$ pela expressão*

$$C_{A,f_{M,I}}(x_1, \dots, x_n) = A_{i=1}^n (f_{M,I}(x_{(i)}, x_{(n-i+1)})) \quad (55)$$

como uma $\mathcal{L}_{[0,1]}$ -FCM que verifica C_i , para todo $i \in \{3,4,5\}$, C_6 em relação à negação fuzzy N e C_7 relacionada à $\mathcal{L}_{[0,1]}$ -RDF d .

Proof. Resultados são verificados a partir do Teorema 4.2.1 e da Proposição 3.2.5. $\square$

Exemplo 4.2.4. *Baseado nos resultados apresentados na Proposição 4.2.3, e considerando $p \in \{0.5, 1, 2\}$, tem-se que as seguintes medidas de consenso fuzzy em $\mathcal{L}_{[0,1]}$:*

(i) $C_{AM,f_{0.5,I_{LK}}}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n f_{0.5,I_{LK}}(x_{(i)}, x_{(n-i+1)})$ é uma função $\mathcal{L}_{[0,1]}$ -FCM. onde

$$Ref_{0.5,I_{LK}}(x,y) = \begin{cases} \sqrt{1-x+y}, & \text{se } x > y, \\ \sqrt{1-y+x}, & \text{se } x < y, \\ 1, & \text{se } x = y. \end{cases} \quad (56)$$

(ii) $C_{AM,f_{I_{LK}}}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n f_{I_{LK}}(x_{(i)}, x_{(n-i+1)})$ é uma função $\mathcal{L}_{[0,1]}$ -FCM, onde

$$Ref_{I_{LK}}(x,y) = \begin{cases} 1-x+y, & \text{se } x > y, \\ 1-y+x, & \text{se } x \leq y, \\ 1, & \text{se } x = y. \end{cases} \quad (57)$$

(iii) $C_{AM,fo_2,I_{LK}}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n fo_{2,I_{LK}}(x_i, x_{(n-i+1)})$ é uma função $\mathcal{L}_{[0,1]}$ -FCM, onde

$$Ref_{O_2,I_{LK}}(x,y) = \begin{cases} (1-x+y)^2, & \text{se } x > y, \\ (1-y+x)^2, & \text{se } x \leq y, \\ 1, & \text{se } x = y. \end{cases} \quad (58)$$

4.2.5 $\mathcal{L}_{[0,1]}$ -FCM via Agregação de Funções de Penalidades

Baseados nos resultados apresentados na Seção 3.3, introduzimos a metodologia para obter $\mathcal{L}_{[0,1]}$ -FCM a partir de funções de penalidades.

Proposição 4.2.4. *Seja $M : \bigcup_{n=1}^{\infty} [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ uma EAF e $C : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ uma $\mathcal{L}_{[0,1]}$ -FCM. Então, $C_{M,n} : \bigcup_{i=2}^{\infty} [0, 1]^i \rightarrow [0, 1]$ definida pela expressão $n \geq 1$*

$$C_{M,n}(x_1, \dots, x_n, y) = M(C(x_1, y), \dots, C(x_n, y)), \forall n > 1, \quad (59)$$

é uma $\mathcal{L}_{[0,1]}$ -FCM. E ainda, se M verifica A9 e $C_{M,n}$ também satisfaz a unanimidade estrita dada por $C1(a)$, então $C_{M,n}$ verifica C7.

Proof. Seja M uma EAF e C uma $\mathcal{L}_{[0,1]}$ -FCM.

C1: Se $x_1 = \dots = x_n = y$, $C_{M,n}(x_1, \dots, x_n, y) = M(C(y, y), \dots, C(y, y)) = M(1, \dots, 1) = 1$.

C2: $C_{M,2}(0, 0, 1) = M(C(0, 1), C(0, 1)) = M(0, 0) = 0$ e de forma análoga, $C_{M,2}(1, 1, 0) = M(C(1, 0), C(1, 0)) = M(0, 0) = 0$.

C7: Se $C_{M,n}(x_1, \dots, x_n, y) = 1$ então $M(C(x_1, y), \dots, C(x_n, y)) = 1$. Assim, por A9, $C(x_i, y) = 1$ para cada $i = 1, \dots, n$. E, por C1(a), $x_i = y$ para cada $i = 1, \dots, n$. Portanto, tem-se que $C_{M,n}$ satisfaz C1(a). $\square$

O próximo teorema garante as condições para obter funções de penalidade a partir de medidas de consenso.

Teorema 4.2.2. *Seja $N : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ uma negação fuzzy forte e $C : \bigcup_{i=1}^n [0, 1]^i \rightarrow [0, 1]$ uma $\mathcal{L}$ -FCM que satisfaz C1(a) e é uma função quasi-côncava, ou seja, para $x_1, \dots, x_n, y, x'_1, \dots, x'_n, y' \in [0, 1]$,*

$$C(\lambda(x_1, \dots, x_n, y) + (1 - \lambda)(x'_1, \dots, x'_n, y')) \geq \min(C(x_1, \dots, x_n, y), C(x'_1, \dots, x'_n, y')).$$

Então, a função $P_{N,C} : [0, 1]^{n+1} \rightarrow [0, 1]$ definida pela expressão

$$P_{N,C}(x_1, \dots, x_n, y) = N(C(x_1, \dots, x_n, y)) \quad (60)$$

é uma função de penalidade fuzzy com valor de fusão em y , no sentido da Definição 3.3.1.

Proof. Seja $N : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ uma negação fuzzy forte e $C \rightarrow [0, 1]$ uma $\mathcal{L}$ -FCM que verifica $C1(a)$. Para para $x_1, \dots, x_n, y, x'_1, \dots, x'_n, y' \in [0, 1]$, tem-se então os seguintes resultados:

P1: Como a imagem das funções de negação fuzzy N e das medidas de consenso C estão no intervalo $[0, 1]$, ao considerar $c = 0$, é imediato que $P_{N,C}(x_1, \dots, x_n, y) \geq 0$, $\forall x_i \in [0, 1], i \in \mathbb{N}_n, y \in [0, 1]$.

P2: Se $x_1 = \dots = x_n = y$, $P_{N,C}(x_1, \dots, x_n, y) = N(C(y, \dots, y)) = N(1) = 0$. E, no caso contrário, se $P_{N,C}(x_1, \dots, x_n, y) = 0$ então tem-se que $N(C(x_1, \dots, x_n, y)) = 0$. Como N é involutiva, $C(x_1, \dots, x_n, y) = 1$ e portanto, por $C1(a)$, $x_1 = \dots = x_n = y$.

P3: Considera-se que C é uma função quasi-côncava em y (satisfaz $C9$):

$$\begin{aligned} P_{N,C}(\lambda(x_1, \dots, x_n, y) + (1 - \lambda)(x'_1, \dots, x'_n, y')) &= N(C(\lambda(x_1, \dots, x_n, y) + (1 - \lambda)(x'_1, \dots, x'_n, y'))) \\ &\leq N(\min(C(x_1, \dots, x_n, y), C(x'_1, \dots, x'_n, y'))) \\ &= \max(N(C(x_1, \dots, x_n, y)), N(C(x'_1, \dots, x'_n, y'))) \\ &= \max(P(x_1, \dots, x_n, y), P(x'_1, \dots, x'_n, y')). \end{aligned}$$

Portanto, o Teorema 4.2.2 está provado. $\square$

Corolário 4.2.3. *Seja A uma EAF que verifica $A9$ e $C : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ uma função $\mathcal{L}_{[0,1]}$ -FCM, quasi-côncava que verifica $C3$. A função $P_{N,C_A} : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ dada por*

$$P_{N,C_A}(x_1, \dots, x_n, y) = N(C_A(x_1, \dots, x_n, y)) \quad (61)$$

é uma função de penalidade fuzzy, no sentido da Definição 3.3.1.

Proof. Segue da Proposição 4.2.4 e Teorema 4.2.3. $\square$

As exemplificações apresentadas logo a seguir foram aplicadas no Capítulo 6 na tomada de decisão para recomendação de migração de páginas, considerando a **Abordagem f-HybridMem**, na consolidação da Estratégia **CDM**.

Exemplo 4.2.5. *Considerando o Exemplo 3.3.1 de uma função de penalidade, tem-se*

$$P_{N_S, C_{fsq}}(x_1, \dots, x_n, AM(x_1, \dots, x_n)) = N_S(C_{fsq}(x_1, \dots, x_n, AM(x_1, \dots, x_n))).$$

Ou ainda, a função de penalidade dada na Eq. (37) pode ser definida pela composição referente a Eq. (63):

$$P_{N_S, C_{fsq}}(x_1, \dots, x_n, AM(x_1, \dots, x_n)) = \sum_{i=1}^n (x_{(i)} - AM(x_1, \dots, x_n))^2 = P_2(x_1, \dots, x_n, AM(x_1, \dots, x_n)), \quad (62)$$

sendo neste caso, o ponto de fusão y obtido a partir da média aritmética dos valores de entrada, $x_1, \dots, x_n \in [0, 1]$.

Exemplo 4.2.6. Considerando o Exemplo 3.3.2 de uma função de penalidade, tem-se

$$P_{N_S, C_{f||}}(x_1, \dots, x_n, \text{Med}(x_1, \dots, x_n)) = N_S(C_{f||}(x_1, \dots, x_n, \text{Med}(x_1, \dots, x_n))).$$

Nesta expressão, a função de penalidade tem seu ponto de fusão y obtido a partir da mediana dos valores de entrada $x_1, \dots, x_n \in [0, 1]$. De acordo com Eq. (38), a função de penalidade $P_{N_S, C_{f||}}$ pode ser indicada pela expressão:

$$P_{N_S, C_{f||}}(x_1, \dots, x_n, \text{Med}(x_1, \dots, x_n)) = \sum_{i=1}^n |x_{(i)} - \text{Med}(x_1, \dots, x_n)| = P_{||}(x_1, \dots, x_n, \text{Med}(x_1, \dots, x_n)) \quad (63)$$

E logo a seguir, na construção reversa, o próximo teorema garante as condições para obter de medidas de consenso via funções de penalidade em $\mathcal{L}([0, 1])$.

Teorema 4.2.3. Seja $N : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ uma negação fuzzy forte e a função $P : [0, 1]^{n+1} \rightarrow [0, 1]$ uma função de penalidade fuzzy, quasi-convexa com valor de fusão y , pela Definição 3.3.1. Então a função $C_{N,P} : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$, que para $x_1, \dots, x_n, y, x'_1, \dots, x'_n, y' \in [0, 1]$ é dada pela expressão

$$C_{N,P}(x_1, \dots, x_n, y) = N(P(x_1, \dots, x_n, y)) \quad (64)$$

é uma $\mathcal{L}$ -FCM, quasi-côncava.

4.3 IVFS-FCM Metodologias: Construção de Medidas de Consenso sobre o Reticulado de todos os Conjuntos Fuzzy Valorados Intervalarmente

Esta seção contribui de forma significativa nesta pesquisa teórica ao introduzir metodologias para construir medidas de consenso sobre conjuntos fuzzy, indicadas por $\mathcal{L}_{\mathcal{F}_X}$ -FCM.

Estas metodologias podem ser aplicadas sobre coleções de conjuntos fuzzy relacionadas a um universo não-vazio, estendendo as propriedades inerentes à definição de uma medida de consenso restrita a valores fuzzy. As propriedades C1 a C8, como apresentadas na Seção 4.1, são estendidas do reticulado $\mathcal{L}_{[0,1]}$ para o reticulado $\mathcal{L}_{\mathcal{F}_X}$.

Cada uma das $\mathcal{L}_{\mathcal{F}_X}$ -FCM permite a análise consensual entre dois ou mais grupos de conjuntos fuzzy tipo-1, possivelmente dados como números fuzzy e/ou imagens de funções de pertinência associadas a conjuntos fuzzy.

Definição 4.3.1. *Seja $\mathcal{F}_\chi$ uma família de conjuntos fuzzy definidos sobre um universo χ . A função $\mathcal{C} : \bigcup_{n=1}^{\infty} (\mathcal{F}_\chi)^n \rightarrow [0, 1]$ define uma medida de consenso sobre conjuntos fuzzy ($\mathcal{L}_{\mathcal{F}_\chi}$ -FSCM) em $\mathcal{F}_\chi$ se as seguintes condições são satisfeitas:*

$\mathcal{C}1$: $\mathcal{C}(X, \dots, X) = 1$, para todo $X \in \mathcal{F}_\chi$;

$\mathcal{C}2$: $\mathcal{C}(X_\chi, X_\emptyset) = \mathcal{C}(X_\emptyset, X_\chi) = 0$, tal que $\mu_{X_\chi}(u) = 1$, $\mu_{X_\emptyset}(u) = 0$, $\forall u \in \chi$.

A partir dos operadores da Definição 4.3.1, propriedades adicionais $\mathcal{L}_{\mathcal{F}_\chi}$ -FSCM podem ser exigidas. Sejam $X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n \in \mathcal{F}_\chi$, relacionados a um conjunto finito não vazio χ .

$\mathcal{C}3$: $\mathcal{C}(X_1, \dots, X_n) = \mathcal{C}(X_{(1)}, \dots, X_{(n)})$, para cada permutação $() : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$;

$\mathcal{C}4$: $\mathcal{C}(X_1, \dots, X_n) = 0$, se $X_i \in \{X_\emptyset, X_\chi\}$ e $\#\{i \in \mathbb{N}_n : X_i = X_\emptyset\} = \#\{i \in \mathbb{N}_n : X_i = X_\chi\}$;

$\mathcal{C}5$: $\mathcal{C}(X_1, \dots, X_n) = \mathcal{C}(X_1, \dots, X_n, \dots, X_1, \dots, X_n)$, o que significa que, para qualquer entrada $(X_1, \dots, X_n)$, replicando as entradas l -vezes, para qualquer inteiro positivo l , não altera o nível de consenso de conjunto fuzzy;

$\mathcal{C}6$: $\mathcal{C}(X_1, \dots, X_n) = \mathcal{C}(X_1^N, \dots, X_n^N)$, para todo $X_1, \dots, X_n \in \mathcal{F}_\chi$, sempre que X^N indica a complementaridade do conjunto fuzzy $X \in \mathcal{F}_\chi$ em relação a uma negação fuzzy N .

$\mathcal{C}7$: Para cada $n = 2k$ sendo metade das avaliações iguais, digamos Z , e tomando $\vec{Z} = (Z, Z, \dots, Z) \in \mathcal{F}_\chi$, para todo $\vec{X} = (X_1, \dots, X_k), \vec{Y} = (Y_1, \dots, Y_k) \in \mathcal{F}_\chi$ tal que, $d(Z, X_j) \leq_{\mathcal{F}_\chi} d(Z, Y_j)$, $\forall j \in \mathbb{N}_k$ com d sendo uma $\mathcal{L}_{\mathcal{F}_\chi}$, implica que $\mathcal{C}(\vec{Z}, \vec{X}) \geq \mathcal{C}(\vec{Z}, \vec{Y})$;

$\mathcal{C}8$: Para qualquer inteiro positivo n , uma permutação $() : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$, uma $\mathcal{L}_{\mathcal{F}_\chi}$ -RDF d e uma $\mathcal{L}_{\mathcal{F}_\chi}$ -EAF $\mathcal{A}$, sempre que, para todo $X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n \in \mathcal{F}_\chi$ tal que $\mu_{X_i}(u_j) = X_{ij} \in [0, 1]$ para $i \in \mathbb{N}_n$ e $j \in \mathbb{N}_m$, a seguinte condição é verificada,

$$d_{\mathcal{F}_\chi}(X_{(i)}, \mathcal{A}(X_{(1)}, \dots, X_{(n)})) \leq_{\mathcal{F}_\chi} d_{\mathcal{F}_\chi}(Y_{(i)}, \mathcal{A}(Y_{(1)}, \dots, Y_{(n)}))$$

então isso implica que $\mathcal{C}(X_1, \dots, X_n) \leq_{\mathcal{F}_\chi} \mathcal{C}(Y_1, \dots, Y_n)$.

4.3.1 $\mathcal{L}_{\mathcal{F}_\chi}$ -FCM via Somas Convexas

Para um universo finito não vazio χ_m , a soma convexa de medidas de consenso sobre conjuntos fuzzy é, também, uma medida de consenso sobre conjuntos fuzzy.

Proposição 4.3.1. *Seja N uma negação fuzzy e seja d uma $\mathcal{L}_{\mathcal{F}_{\chi_m}}$ -RDF. Considere $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2 : \bigcup_{n=1}^{\infty} (F_{\chi})^n \rightarrow [0, 1]$ como $\mathcal{L}_{\mathcal{F}_{\chi_m}}$ -FCM. Para $\lambda \in [0, 1]$, a função $\mathcal{C}_1 +_{\lambda} \mathcal{C}_2 : \bigcup_{n=1}^{\infty} (F_{\chi})^n \rightarrow [0, 1]$ definida como*

$$\mathcal{C}_1 +_{\lambda} \mathcal{C}_2(X_1, \dots, X_n) = \lambda \mathcal{C}_1(X_1, \dots, X_n) + (1 - \lambda) \mathcal{C}_2(X_1, \dots, X_n) \quad (65)$$

também é uma $\mathcal{L}_{\mathcal{F}_{\chi_m}}$ -FCM. Além disso, se $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ satisfaz $\mathcal{C}_i$ para $i \in \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $\mathcal{C}_6$ em relação à negação fuzzy N , $\mathcal{C}_7$ e $\mathcal{C}_8$ considerando $\mathcal{L}_{\mathcal{F}_{\chi_m}}$ -RDF d , então $\mathcal{C}_1 +_{\lambda} \mathcal{C}_2$ também satisfaz $\mathcal{C}_i$ para $i \in \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $\mathcal{C}_6$ em relação à negação fuzzy N , $\mathcal{C}_7$ e $\mathcal{C}_8$ considerando a $\mathcal{L}_{\mathcal{F}_{\chi_m}}$ -RDF d .

Proof. Sejam $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2 : \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_{\chi_m}^n \rightarrow [0, 1]$ medidas de consenso de conjunto fuzzy $\mathcal{L}_{\mathcal{F}_{\chi_m}}$ -FSCM, ambas verificando $\mathcal{C}_i$, para $i \in \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $\mathcal{C}_6$ em relação à negação $\mathcal{N}$, $\mathcal{C}_7$ e $\mathcal{C}_8$ relacionada a $\mathcal{L}_{\mathcal{F}_{\chi_m}}$ -RDF d . Então, para $\lambda \in [0, 1]$, tem-se que:

$$\mathcal{C}_1 : \mathcal{C}_1 +_{\lambda} \mathcal{C}_2(X, \dots, X) = \lambda \mathcal{C}_1(X, \dots, X) + (1 - \lambda) \mathcal{C}_2(X, \dots, X) = \lambda 1 + (1 - \lambda) 1 = 1;$$

$$\mathcal{C}_2 : \mathcal{C}_1 +_{\lambda} \mathcal{C}_2(X_{\emptyset}, X_{\chi_m}) = \lambda \mathcal{C}_1(X_{\emptyset}, X_{\chi_m}) + (1 - \lambda) \mathcal{C}_2(X_{\emptyset}, X_{\chi_m}) = \lambda 0 + (1 - \lambda) 0 = 0;$$

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_3 : \mathcal{C}_1 +_{\lambda} \mathcal{C}_2(X_{(1)}, \dots, X_{(n)}) &= \lambda \mathcal{C}_1(X_{(1)}, \dots, X_{(n)}) + (1 - \lambda) \mathcal{C}_2(X_{(1)}, \dots, X_{(n)}) \\ &= \lambda \mathcal{C}_2(X_1, \dots, X_n) + (1 - \lambda) \mathcal{C}_2(X_1, \dots, X_n) = \mathcal{C}_1 +_{\lambda} \mathcal{C}_2(X_1, \dots, X_n); \end{aligned}$$

$\mathcal{C}_4$: Seja $X_i \in \{X_{\emptyset}, X_{\chi_m}\}$, $i \in \mathbb{N}_n$ e $\#\{i \in \{1, \dots, n\} : X_i = X_{\emptyset}\} = \#\{i \in \{1, \dots, n\} : X_i = X_{\chi_m}\}$. Então, desde que ambos $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ verifiquem $\mathcal{C}_4$, tem-se o seguinte:

$$\mathcal{C}_1 +_{\lambda} \mathcal{C}_2(X_1, \dots, X_n) = \lambda \mathcal{C}_1(X_1, \dots, X_n) + (1 - \lambda) \mathcal{C}_2(X_1, \dots, X_n) = \lambda 0 + (1 - \lambda) 0 = 0;$$

$\mathcal{C}_5$: Para qualquer entrada $(X_1, \dots, X_n)$, replicando as entradas k -vezes para qualquer inteiro positivo k , tem-se que:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1 +_{\lambda} \mathcal{C}_2(X_1, \dots, X_n, \dots, X_1, \dots, X_n) &= \\ &= \lambda \mathcal{C}_1(X_1, \dots, X_n, \dots, X_1, \dots, X_n) + (1 - \lambda) \mathcal{C}_2(X_1, \dots, X_n, \dots, X_1, \dots, X_n) \\ &= \lambda \mathcal{C}_1(X_1, \dots, X_n) + (1 - \lambda) \mathcal{C}_2(X_1, \dots, X_n) = \mathcal{C}_1 +_{\lambda} \mathcal{C}_2(X_1, \dots, X_n); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_6 : \mathcal{C}_1 +_{\lambda} \mathcal{C}_2(X_1^N, \dots, X_n^N) &= \lambda \mathcal{C}_1(X_1^N, \dots, X_n^N) + (1 - \lambda) \mathcal{C}_2(X_1^N, \dots, X_n^N) \\ &= \lambda \mathcal{C}_1(X_1, \dots, X_n) + (1 - \lambda) \mathcal{C}_2(X_1, \dots, X_n) = \mathcal{C}_1 +_{\lambda} \mathcal{C}_2(X_1, \dots, X_n). \end{aligned}$$

$\mathcal{C}_7$: Para cada $n = 2k$, tomando $\vec{Z} = (Z, Z, \dots, Z) \in \mathcal{F}_{\chi_m}$, para todo $\vec{X} = (X_1, \dots, X_k), \vec{Y} = (Y_1, \dots, Y_k) \in \mathcal{F}_{\chi_m}$ tal que, $d_{\mathcal{F}_{\chi_m}}(Z, X_j) \leq d_{\mathcal{F}_{\chi_m}}(Z, Y_j)$, $\forall j \in \mathbb{N}_k$, o que implica $\mathcal{C}_1(\vec{Z}, \vec{X}) \geq$

$\mathcal{C}_1(\vec{Z}, \vec{Y})$ e $\mathcal{C}_2(\vec{Z}, \vec{X}) \geq \mathcal{C}_2(\vec{Z}, \vec{Y})$. Portanto, para $\lambda \in [0, 1]$, obtém-se que

$$\mathcal{C}_1 + \lambda \mathcal{C}_2(\vec{Z}, \vec{X}) = \lambda \mathcal{C}_1(\vec{Z}, \vec{X}) + (1 - \lambda) \mathcal{C}_2(\vec{Z}, \vec{X}) \geq \lambda \mathcal{C}_1(\vec{Z}, \vec{Y}) + (1 - \lambda) \mathcal{C}_2(\vec{Z}, \vec{Y}) = \mathcal{C}_1 + \lambda \mathcal{C}_2(\vec{Z}, \vec{Y});$$

C8: Para qualquer inteiro positivo n , uma permutação $(\cdot) : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$, uma $\mathcal{L}_{\mathcal{F}_{\chi_m}}$ -RDF d e uma $\mathcal{L}_{\mathcal{F}_{\chi_m}}$ -EAF A , para todo $X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n \in \mathcal{F}_{\chi_m}$, quando a seguinte condição

$$d_{\mathcal{F}_{\chi_m}}(X_{(i)}, \mathcal{A}(X_{(1)}, \dots, X_{(n)})) \leq_{\mathcal{F}_{\chi_m}} d_{\mathcal{F}_{\chi_m}}(Y_{(i)}, \mathcal{A}(Y_{(1)}, \dots, Y_{(n)}))$$

é verificada, então isso implica que

$$\mathcal{C}_1(X_1, \dots, X_n) \leq_{\mathcal{F}_{\chi_m}} \mathcal{C}_1(Y_1, \dots, Y_n) \text{ e } \mathcal{C}_2(X_1, \dots, X_n) \leq_{\mathcal{F}_{\chi_m}} \mathcal{C}_2(Y_1, \dots, Y_n).$$

Então, para $\lambda \in [0, 1]$, tem-se que: $\mathcal{C}_1 + \lambda \mathcal{C}_2(X_1, \dots, X_n) \leq_{\mathcal{F}_{\chi_m}} \mathcal{C}_1 + \lambda \mathcal{C}_2(Y_1, \dots, Y_n)$. Então, a Proposição 4.3.1 é válida. $\square$

4.3.2 $\mathcal{L}_{\mathcal{F}_{\chi}}$ -FCM via Funções de Agregação

Nesta seção, as medidas de consenso de conjuntos fuzzy são obtidas a partir de funções de agregação aplicadas a um conjunto de medidas de consenso fuzzy definidas sobre um universo finito e não vazio χ_m .

Proposição 4.3.2. *Seja A uma função de agregação m -ária e $C : \bigcup_{n=1}^{\infty} [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ uma $\mathcal{L}_{[0,1]}$ -FCM que verifica C_i , para $i \in \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, C_6 em relação a uma negação fuzzy N , C_7 e C_8 considerando $\mathcal{L}_{[0,1]}$ -RDF d . A função $\mathcal{C}_{A,C} : \bigcup_{n=1}^{\infty} (\mathcal{F}_{\chi_m})^n \rightarrow [0, 1]$ dada por*

$$\mathcal{C}_{A,C}(X_1, \dots, X_n) = A(C(\mu_{X_1}(u_1), \dots, \mu_{X_n}(u_1)), \dots, C(\mu_{X_1}(u_m), \dots, \mu_{X_n}(u_m))) \quad (66)$$

é uma $\mathcal{L}_{\mathcal{F}_{\chi_m}}$ -FCM que verifica $\mathcal{C}_i$, para $i \in \{3, 4, 5\}$, $\mathcal{C}_6$ em relação à negação fuzzy N , $\mathcal{C}_7$ e $\mathcal{C}_8$ relacionada a $\mathcal{L}_{\mathcal{F}_{\chi_m}}$ -RDF $d_{\mathcal{F}_{\chi}}$ como dada na Eq.(24).

Proof. Seja A uma EAF e $C : \bigcup_{n=1}^{\infty} [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ uma medida de consenso fuzzy que verifica C_i , para $i \in \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, C_6 em relação a negação fuzzy N , C_7 e C_8 considerando $\mathcal{L}_{[0,1]}$ -RDF d .

C1: Para $X \in \mathcal{F}_{\chi_m}$, tem-se que

$$\mathcal{C}_{A,C}(X, \dots, X) = A(C(\mu_X(u_1), \dots, \mu_X(u_1)), \dots, C(\mu_X(u_m), \dots, \mu_X(u_m))) = A(1, \dots, 1) = 1$$

$\mathcal{C}2$: Uma vez que C verifica C3, tem-se que:

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_{A,C}(X_\emptyset, X_{\mathcal{F}_{\chi_m}}) &= A(C(\mu_{X_\emptyset}(u_1), \mu_{X_\emptyset}(u_1)), \dots, C(\mu_{X_{\mathcal{F}_{\chi_m}}}(u_m), \mu_{X_{\mathcal{F}_{\chi_m}}}(u_m))) \\ &= A(0, \dots, 0, 1, \dots, 1) = 0.\end{aligned}$$

$\mathcal{C}3$: Uma vez que C verifica C3, então tem-se que:

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_{A,C}(X_{(1)}, \dots, X_{(n)}) &= A(C(\mu_{X_{(1)}}(u_1), \dots, \mu_{X_{(n)}}(u_1)), \dots, C(\mu_{X_{(1)}}(u_m), \dots, \mu_{X_{(n)}}(u_m))) \\ &= A(C(\mu_{X_1}(u_1), \dots, \mu_{X_n}(u_1)), \dots, C(\mu_{X_1}(u_m), \dots, \mu_{X_n}(u_m))) = \mathcal{C}_{A,C}(X_1, \dots, X_n);\end{aligned}$$

$\mathcal{C}4$: Se $X_i \in \{X_\emptyset, X_{\mathcal{F}_\chi}\}, \forall i \in \mathbb{N}_n$ e $\#\{i \in \mathbb{N}_n : X_i = X_\emptyset\} = \#\{i \in \mathbb{N}_n : X_i = X_{\mathcal{F}_\chi}\}$ então, por C4, tem-se que

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_{A,C}(X_1, \dots, X_n) &= A(C(\mu_{X_1}(u_1), \dots, \mu_{X_n}(u_1)), \dots, C(\mu_{X_1}(u_m), \dots, \mu_{X_n}(u_m))) \\ &= A(0, \dots, 0) = 0\end{aligned}$$

Observe que, quando $X_i = X_\emptyset$ então $\mu_{X_i}(u_j) = 0, \forall j \in \mathbb{N}_m$. Analogamente, isso ocorre quando $X_i = X_{\mathcal{F}_\chi}$. Concluindo que, por C3, $C(\mu_{X_1}(u_j), \dots, \mu_{X_n}(u_j)) = 0$.

$\mathcal{C}5$: A propriedade de dissensão máxima também é verificada:

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_{A,C}(X_1, \dots, X_n, \dots, X_1, \dots, X_n) &= \\ &= A(C(\mu_{X_1}(u_1), \dots, \mu_{X_n}(u_1), \dots, \mu_{X_1}(u_1), \dots, \mu_{X_n}(u_1)), \dots, \\ &\quad C(\mu_{X_1}(u_m), \dots, \mu_{X_n}(u_m), \dots, \mu_{X_1}(u_m), \dots, \mu_{X_n}(u_m))) \\ &= A(C(\mu_{X_1}(u_1), \dots, \mu_{X_n}(u_1)), \dots, C(\mu_{X_1}(u_m), \dots, \mu_{X_n}(u_m))) = \mathcal{C}_{A,C}(X_1, \dots, X_n)\end{aligned}$$

$\mathcal{C}6$: E, seja N negação forte. Então, temos que

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_{A,C}(X_1^N, \dots, X_n^N) &= A(C(\mu_{X_1^N}(u_1)), \dots, \mu_{X_n^N}(u_1)), \dots, C(\mu_{X_1^N}(u_m), \dots, \mu_{X_n^N}(u_m))) \\ &= A(C(N(\mu_{X_1}(u_1)), \dots, N(\mu_{X_n}(u_1))), \dots, C(N(\mu_{X_1}(u_m)), \dots, N(\mu_{X_n}(u_m)))) \\ &= A(C(\mu_{X_1}(u_1), \dots, \mu_{X_n}(u_1)), \dots, C(\mu_{X_1}(u_m), \dots, \mu_{X_n}(u_m))) = \mathcal{C}_{A,C}(X_1, \dots, X_n).\end{aligned}$$

$\mathcal{C}7$: Para todo $n = 2k \in \mathbb{N}$, $\vec{Z} = (Z, Z, \dots, Z) \in \mathcal{F}_{\chi_m}^k$ e $\vec{X} = (X_1, \dots, X_k), \vec{Y} = (Y_1, \dots, Y_k) \in \mathcal{F}_\chi^k$. Seja d a $\mathcal{L}_{F_{\chi_m}}$ -RDF dada na Eq.(24). Então, tem-se que, se

$$d_{\mathcal{F}_\chi}(Z, X_j) \leq_{\mathcal{F}_{\chi_m}} d_{\mathcal{F}_\chi}(Z, Y_j) \Leftrightarrow f_{\mathcal{F}_{\chi_m}}(Z, X_j) \geq_{\mathcal{F}_{\chi_m}} f_{\mathcal{F}_{\chi_m}}(Z, Y_j), \text{ para algum } j \in \{1, \dots, n\},$$

logo, $\forall i \in \{1, \dots, n\}, d(\mu_Z(u_i), \mu_{X_j}(u_i)) \leq d(\mu_Z(u_i), \mu_{Y_j}(u_i))$. E, assim, $C(\mu_Z(u_i), \dots, \mu_Z(u_i), \mu_{X_1}(u_i), \dots, \mu_{X_k}(u_i)) \geq C(\mu_Z(u_i), \dots, \mu_Z(u_i), \mu_{Y_1}(u_i), \dots, \mu_{Y_k}(u_i))$.

Portanto, segue que:

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_{A,C}(\vec{Z}, \vec{X}) &= \\
&= A(C(\mu_Z(u_1), \dots, \mu_Z(u_1), \mu_{X_1}(u_1), \dots, \mu_{X_k}(u_1)), \dots, C(\mu_Z(u_m), \dots, \mu_Z(u_m), \mu_{X_1}(u_m), \dots, \mu_{X_k}(u_m))) \\
&\leq A(C(\mu_Z(u_1), \dots, \mu_Z(u_1), \mu_{Y_1}(u_1), \dots, \mu_{Y_k}(u_1)), \dots, C(\mu_Z(u_m), \dots, \mu_Z(u_m), \mu_{Y_1}(u_m), \dots, \mu_{Y_k}(u_m))) \\
&= \mathcal{C}_{A,C}(\vec{Z}, \vec{Y})
\end{aligned}$$

C8: Seja n um inteiro positivo e A seja uma EAF. Seja d a $\mathcal{L}_{\mathcal{F}_{\chi_m}}$ -RDF como dada na Eq.(24). Para todo $X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n \in \mathcal{F}_{\chi_m}$, quando o seguinte é válido,

$$d_{\mathcal{F}_{\chi_m}}(X_i, A(X_1, \dots, X_n)) \leq d_{\mathcal{F}_{\chi_m}}(Y_i, A(Y_1, \dots, Y_n)), \forall i \in \mathbb{N}_n;$$

E, a partir de C8, tem-se as seguintes expressões:

$$\begin{aligned}
d(\mu_{X_1}(u_1), A(\mu_{X_1}(u_1), \dots, \mu_{X_n}(u_1))) &\leq d(\mu_{Y_1}(u_1), A(\mu_{Y_1}(u_1), \dots, \mu_{Y_n}(u_1))) \\
\Leftrightarrow C(\mu_{X_1}(u_1), \dots, \mu_{X_n}(u_1)) &\geq C(\mu_{Y_1}(u_1), \dots, \mu_{Y_n}(u_1)); \\
&\vdots \\
d(\mu_{X_i}(u_m), A(\mu_{X_1}(u_m), \dots, \mu_{X_n}(u_m))) &\leq d(\mu_{Y_i}(u_m), A(\mu_{Y_1}(u_m), \dots, \mu_{Y_n}(u_m))) \\
\Leftrightarrow C(\mu_{X_1}(u_m), \dots, \mu_{X_n}(u_m)) &\geq C(\mu_{Y_1}(u_m), \dots, \mu_{Y_n}(u_m)).
\end{aligned}$$

Portanto, por A1, implica que:

$$A_{j=1}^m C(\mu_{X_1}(u_j), \dots, \mu_{X_n}(u_j)) \geq A_{j=1}^m C(\mu_{Y_1}(u_j), \dots, \mu_{Y_n}(u_j)).$$

Significa que $\mathcal{C}_{A,C}(X_1, \dots, X_n) \geq \mathcal{C}_{A,C}(Y_1, \dots, Y_n)$.

Portanto, a Proposição 4.3.2 é verificada. □

4.4 Considerações sobre o Capítulo

Neste Capítulo foi apresentada a concepção da estratégia proposta nesta Tese a partir da análise consensual via medidas de consenso fuzzy, sendo discutida a conceituação formal para esta estratégia e também as metodologias para a construção de medidas de consenso de valores e de conjuntos fuzzy empregados na Estratégia CDM proposta.

Esta conceituação para Estratégia CDM, com suporte nas metodologias *FS-FCM* e *IVFS-FCM*, será aplicada na base arquitetural descrita no próximo capítulo.

5 CONSOLIDAÇÃO DA BASE ARQUITETURAL PARA A ESTRATÉGIA CDM

"Your time is limited, so don't waste it living someone else's life. Don't be trapped by dogma – which is living with the results of other people's thinking".

Steve Jobs

Este Capítulo tem por objetivo apresentar os esforços para consolidar a base arquitetural empregada na *CDM*. Esta base, denominada *Intf-HybridMem*, foi inicialmente apresentada para a comunidade científica nas publicações (MOURA, 2021; MOURA et al., 2021; MOURA et al., 2020).

5.1 Descrição da Arquitetura *Intf-HybridMem*

A arquitetura *Intf-HybridMem* foi concebida a partir de pressupostos que consideram as características das tecnologias de memórias (voláteis e não-voláteis) descritas no Capítulo 2. A premissa operacional buscada ressalta a necessidade de evitar a execução de instruções de escrita em memórias não-voláteis a fim de otimizar a relação entre velocidade de acesso e durabilidade dos componentes. Estas memórias deverão, portanto, ter incremento na concentração de instruções de leitura.

Este trabalho visa contribuir na proposta de exploração efetiva das características de diferentes tecnologias de memórias, focando na modelagem das incertezas inerentes à migração de informações no armazenamento de dados computacionais.

Considerando as pesquisas descritas no Capítulo 2 e que apontam para o uso de memórias híbridas, a arquitetura para a abordagem *Intf-HybridMem* que vem sendo trabalhada pelo grupo de pesquisa é composta por memória DRAM e NVM. Neste contexto, buscam-se realizar o máximo de operações de leitura na memória NVM, enquanto as operações de escrita estão mais concentradas na memória DRAM.

Considerando o exposto, a Figura 11 ilustra o esquema gráfico para gerenciamento proposto nesta arquitetura onde considera-se a migração de páginas entre os módulos de memória. A partir do padrão de acessos de cada página, a arquitetura pode realizar dois tipos de migrações: (i) *Recomendação*, representando as migrações de páginas provenientes da NVM para a DRAM; e (ii) *Rebaixamento*, representando as migrações de páginas oriundas da DRAM para a NVM.

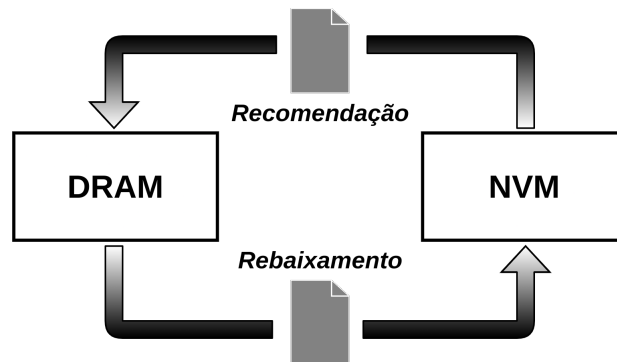


Figura 11 – Esquema de Representação das Migrações de Páginas na Memória Híbrida.

Outro pressuposto considerado nesta Tese, que a abordagem *Intf-HybridMem* oferece suporte, refere-se à identificação do perfil de acesso à memória de cada página. Para tanto, a abordagem considera uma análise de acessos anteriores para prever os acessos futuros.

Neste contexto, para uma página que teve a maioria dos acessos à memória em operações de leitura, espera-se que os acessos futuros sejam majoritariamente do mesmo tipo.

Assim, para que a estratégia possa prever os acessos futuros a partir dos acessos anteriores, é necessário a coleta e armazenagem de informações sobre estes acessos. Isto é feito a partir de uma contagem de operações de leituras e de operações de escritas em cada página e armazenando estas informações. Após coletadas, estas informações devem ser processadas e analisadas para a tomada de decisão.

A arquitetura *Intf-HybridMem* está organizada em dois módulos, apresentados em destaque na Figura 12 e brevemente descritos logo a seguir:

- (i) O Módulo em Hardware é composto por componentes que disponibilizam os mecanismos necessários para a interceptação dos acessos à memória e identificação das páginas acessadas. Além disso, esses componentes devem fazer a contagem dos tipos de acessos e manter essa informação armazenada até que ela seja utilizada pelo Módulo em Software.
- (ii) O Módulo em Software, por sua vez, é composto pelo *Page Migrator*, o qual compreende os componentes responsáveis por avaliar as informações coletadas

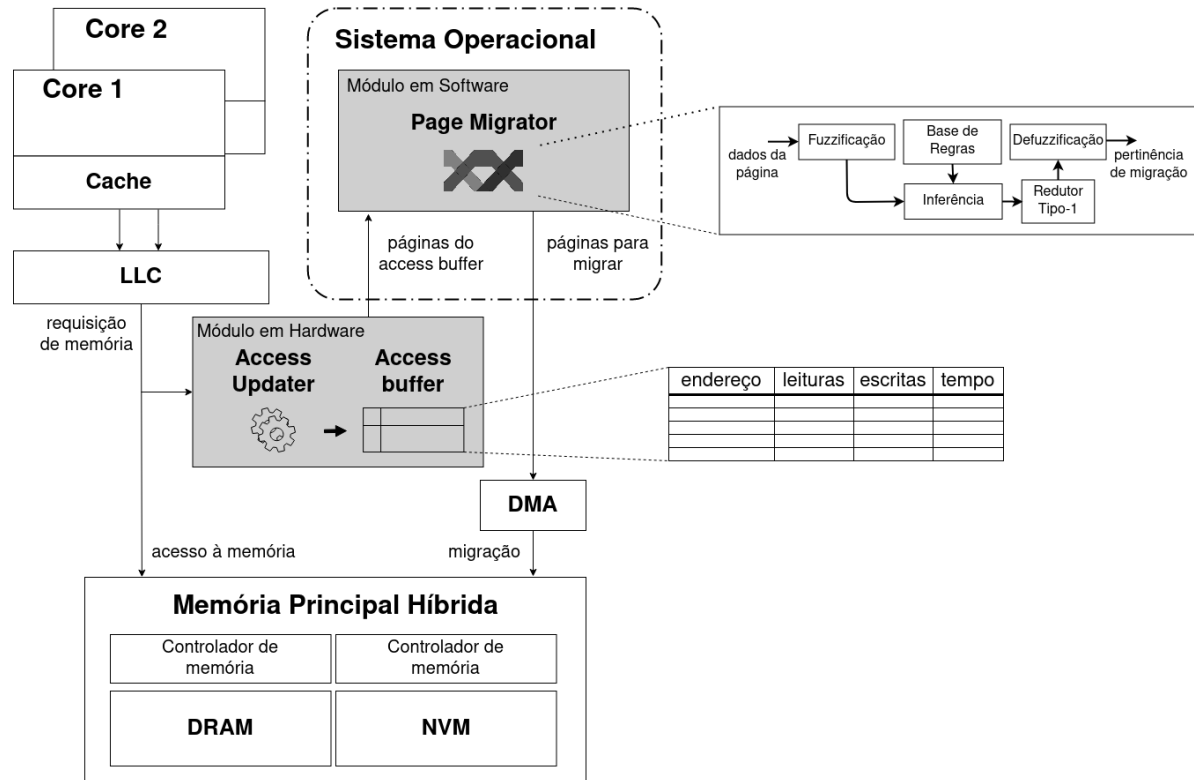


Figura 12 – Visão Geral da Arquitetura Concebida para a Abordagem *Intf-HybridMem*. Fonte: (MOURA, 2021).

pelo Módulo em Hardware e recomendar migrações baseadas nestas informações. É neste módulo que está contextualizado o sistema fuzzy para suporte à tomada de decisão (MOURA, 2021).

5.2 Modelagem Fuzzy das Abordagens *f-HybridMem* e *Intf-HybridMem*

A modelagem fuzzy para a abordagem *f-HybridMem* foi realizada a partir da definição de quatro variáveis linguísticas (OLIVEIRA et al., 2021): Frequência de Leitura (FL), Frequência de Escrita (FE) e Recência de Acesso (RA) como entradas e Recomendação (R) como saída.

Os dados para as entradas são obtidos a partir dos dados recebidos do *Access Buffer*, referentes aos contadores de leituras, escritas e tempo. Os valores extraídos do *Access Buffer* são então convertidos à escala padrão, considerando o intervalo $[0, 10]$.

Os graus de pertinência são obtidos conforme as expressões dadas por Eq. (67)

para FL, Eq. (68) para FE e Eq. (69) para RA:

$$FL = p_i(CL)/MaxL \quad (67)$$

$$FE = p_i(CE)/MaxE \quad (68)$$

$$RA = p_i(CT)/MaxT \quad (69)$$

Nestas formulações, consideramos os seguintes parâmetros:

- p_i denotando a *pagina(i)* do *Access Buffer*;
- CL denotando a contagem das operações de leitura na página;
- CE denotando a contagem das operações de escrita na página;
- CT indicando a contagem de tempo da página;
- $MaxL$ indicando o maior número de operações de leitura;
- $MaxE$ representando o maior número de operações de escrita;
- $MaxT$ representando a maior contagem de tempo;

5.2.1 Etapa de Fuzzificação

Nesta etapa, os valores de entrada, já normalizados para escala padrão descrita na Seção 5.2.1.1, são mapeados para o domínio fuzzy.

Como pode ser observado na Figura 13, nas suas quatro colunas, apresentamos os resumos da escala padrão aplicada, do mapeamento das variáveis linguísticas e correspondentes termos linguísticos da entrada do sistema, a notação associadas às funções de pertinência e o domínio dos valores fuzzy como sendo o intervalo unitário $[0, 1]$.

5.2.1.1 Funções de pertinência da abordagem Intf-HybridMem

A partir da opinião de especialistas, cada uma das variáveis linguísticas foi associada a um conjunto fuzzy distinto, sendo utilizada a representação gráfica trapezoidal para as funções de pertinência correspondente (OLIVEIRA et al., 2021; MOURA, 2021).

Os Termos Linguísticos (TL) que definem os conjuntos fuzzy relacionados às variáveis são declarados como "Baixo", "Médio" e "Alto", em $[0, 10]$. Para a variável de saída (Recomendação), os conjuntos fuzzy correspondentes aos TL são relacionados à migração do tipo recomendação.

Na modelagem das funções de pertinência consideramos as funções de pertinência, elaboradas para a avaliação das medidas de consenso fuzzy na abordagem f -

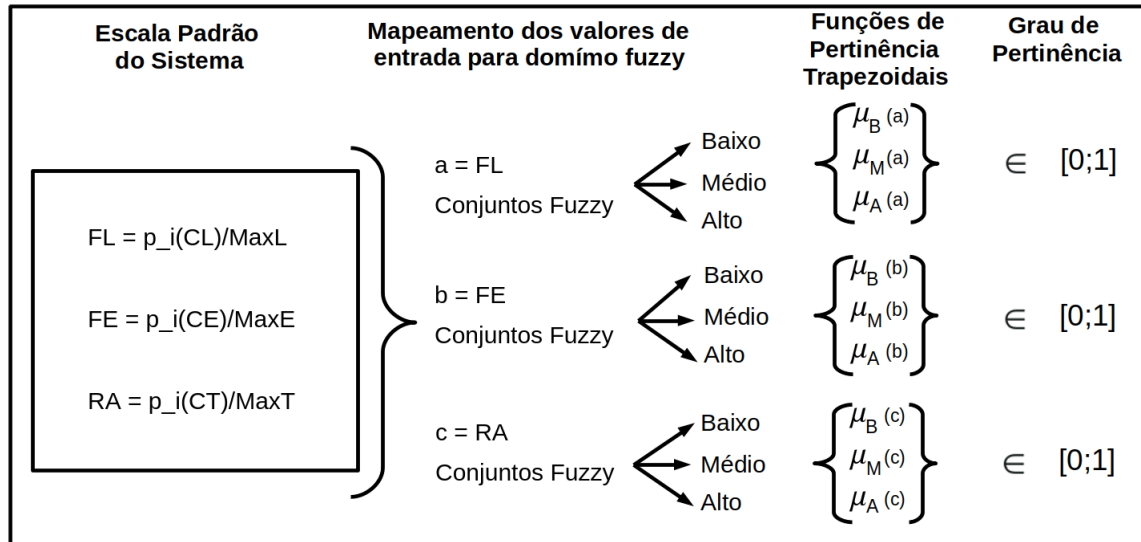


Figura 13 – Componente Fuzzificação da Arquitetura *Intf-HybridMem*. Fonte: (MOURA, 2021).

HybridMem e das medidas de consenso de conjuntos fuzzy valorados intervalarmente, na abordagem *Intf-HybridMem* (OLIVEIRA et al., 2021).

A Tabela 11 apresenta a expressão matemática das equações que definem as funções de pertinência para o sistema fuzzy Tipo-1, as quais foram definidas a partir da parametrização das curvas obtidas para as diferentes variáveis linguísticas na escala padrão, como descrito na modelagem fuzzy apresentada na Seção 5.2. Sendo então utilizadas na modelagem fuzzy Tipo-1 descrita em (MOURA et al., 2020).

Como as funções de pertinência para a FL e FE são idênticas, foram suprimidas as representações para esta última.

As funções de pertinência para a variável de saída, por sua vez, são mostradas na Tabela 12.

As funções de pertinência referentes aos conjuntos fuzzy tipo-2, para os termos linguísticos das variáveis linguísticas de entrada e de saída são mostradas na Figura 14. É possível observar os TL para cada uma das variáveis, na escala padrão, e seus respectivos graus de pertinência.

A arquitetura proposta para a Abordagem *Intf-HybridMem*, introduzida em (MOURA et al., 2021) já está consolidada na continuidade, com resultados alcançados descritos em (MOURA et al., 2021; MOURA, 2021).

Na Abordagem *Intf-HybridMem*, foram modeladas as equações que descrevem as funções de pertinência para o sistema fuzzy baseado em IVFL.

Assim, de modo similar ao que fora apresentado para modelagem do controlador fuzzy para Abordagem *f-HybridMem*, a extensão considera uso de funções de projeção para definição da representação intervalar dos graus de pertinência. Nas Tabelas 13 e 14, apresentamos a expressão analítica para estas funções de pertinência, estendendo a modelagem fuzzy para a Abordagem *Intf-HybridMem*.

Observa-se que, também aqui, as funções de pertinência para a frequência de

Tabela 11 – Atributos Selecionados para as Variáveis de Entrada, Referentes a T1FS.

Atributo / VL	Função de Pertinência
RA Baixo	$\mu_{RA_B}(u) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 \leq u \leq 2.0; \\ \frac{-u+4.0}{2}, & \text{se } 2.0 \leq u \leq 4.0; \\ 0, & \text{se } u \geq 4.0; \end{cases}$
RA Médio	$\mu_{RA_M}(u) = \begin{cases} \frac{u-2}{2}, & \text{se } 2.0 \leq u \leq 4.0; \\ \frac{-u+6}{2}, & \text{se } 4.0 \leq u \leq 6.0; \\ 0, & \text{caso contrário}; \end{cases}$
RA Alto	$\mu_{RA_A}(u) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq u \leq 4.0; \\ \frac{u-4.0}{2}, & \text{se } 4.0 \leq u \leq 6.0; \\ 1, & \text{se } u \geq 6.0. \end{cases}$
FL Baixo	$\mu_{FL_B}(u) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 \leq u \leq 2.0; \\ \frac{-u+5.0}{3}, & \text{se } 2.0 \leq u \leq 5.0; \\ 0, & \text{se } u \geq 5.0. \end{cases}$
FL Médio	$\mu_{FL_M}(u) = \begin{cases} \frac{u-2.0}{2}, & \text{se } 2.0 \leq u \leq 4.0; \\ 1, & \text{se } 4.0 \leq u \leq 6.0; \\ \frac{-u+8.0}{2}, & \text{se } 6.0 \leq u \leq 8.0; \\ 0, & \text{caso contrário}. \end{cases}$
FL Alto	$\mu_{FL_A}(u) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq u \leq 5.0; \\ \frac{u-5.0}{3}, & \text{se } 5.0 \leq u \leq 8.0; \\ 1, & \text{se } u \geq 8.0. \end{cases}$

Tabela 12 – Atributos Selecionados para a Variável de Saída Tipo-1.

Atributo/VL	Função de Pertinência
R Baixo	$\mu_{R_B}(u) = \begin{cases} \frac{-u+5}{5}, & \text{se } 0 \leq u \leq 5.0; \\ 0, & \text{se } u \geq 5.0. \end{cases}$
R Médio	$\mu_{R_M}(u) = \begin{cases} \frac{u}{5}, & \text{se } 0 \leq u \leq 5.0; \\ \frac{-u+10}{5}, & \text{se } 5.0 \leq u \leq 10; \\ 0, & \text{caso contrário}. \end{cases}$
R Alto	$\mu_{R_A}(u) = \begin{cases} 0, & \text{se } u \leq 5.0; \\ \frac{u-5}{5}, & \text{se } 5.0 \leq u \leq 10; \end{cases}$

escrita foram novamente suprimidas, sendo idênticas às funções de pertinência para a frequência de leitura.

5.2.2 Base de Regras

A base de regras para a abordagem *Intf-HybridMem*, mostrada na Tabela 15, foi desenvolvida a partir do conhecimento de especialistas.

Esta base de regras é editável e, com isso, permite a adição de novas regras caso outras variáveis de entrada sejam incluídas.

Para a montagem desta base de regras foram considerados três fatores, como

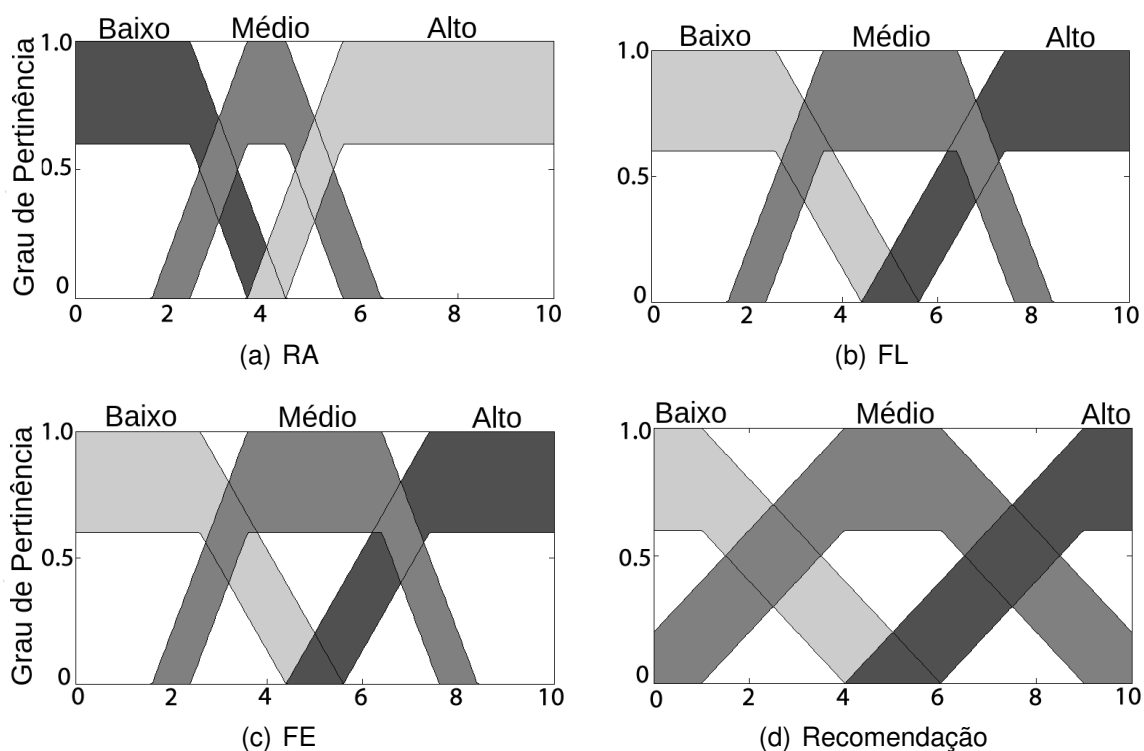


Figura 14 – Variáveis Linguísticas na Escala Padrão. Fonte: (OLIVEIRA et al., 2021).

destacado em (MOURA, 2021):

- (i) Variável linguística como nome para conjuntos fuzzy, aproximando a modelagem do sistema do mundo real;
- (ii) Conexões do tipo "AND" são utilizadas para criar o relacionamento entre as variáveis de entrada;
- (iii) Implicações fuzzy realizando o modo afirmativo no esquema de inferência, relacionado ao modus ponens generalizado (MPG), considerando 3 entradas e uma saída:

"se X é A e Y é B e z é C então w é D".

5.2.3 Etapa de Inferência

No processo de inferência, os operadores de composição são executados sobre os conjuntos fuzzy relacionando os antecedentes das regras às implicações usando o operador modus ponens generalizado. A inferência ocorre em três etapas básicas:

- Realização da aplicação da operação fuzzy sobre os três valores resultantes de fuzzificação para agregar as regras, com uso do operador fuzzy "AND", fazendo uso do método MIN (mínimo).

Tabela 13 – Atributos Seleccionados para as Variáveis de Entrada Referentes a IVFS.

Atributo/VL	Função de Pertinência
RA Baixo	$\mu_{\overline{RA}_B}(u) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 \leq u \leq 2.4; \\ \frac{-u+4.4}{2}, & \text{se } 2.4 \leq u \leq 4.4; \\ 0, & \text{se } u \geq 4.4; \end{cases}$
RA Baixo	$\mu_{\underline{RA}_B}(u) = \begin{cases} 0.6, & \text{se } 0 \leq u \leq 2.4; \\ \frac{-u+3.6}{2}, & \text{se } 2.4 \leq u \leq 3.6; \\ 0, & \text{se } u \geq 3.6. \end{cases}$
RA Médio	$\mu_{\overline{RA}_M}(u) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq u \leq 1.6; \\ \frac{u-1.6}{2}, & \text{se } 1.6 \leq u \leq 3.6; \\ 1, & \text{se } 3.6 \leq u \leq 4.4; \\ \frac{-u+6.4}{2}, & \text{se } 4.4 \leq u \leq 6.4; \\ 0, & \text{se } u \geq 6.4. \end{cases}$
RA Médio	$\mu_{\underline{RA}_M}(u) = \begin{cases} 0, & \text{se } u \leq 2.4; \\ \frac{u-2.4}{2}, & \text{se } 2.4 \leq u \leq 3.6; \\ 0.6, & \text{se } 3.6 \leq u \leq 4.4; \\ \frac{-u+5.6}{2}, & \text{se } 4.4 \leq u \leq 5.6; \\ 0, & \text{se } u \geq 5.6. \end{cases}$
RA Alto	$\mu_{\overline{RA}_A}(u) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq u \leq 3.6; \\ \frac{u-3.6}{2}, & \text{se } 3.6 \leq u \leq 5.6; \\ 1, & \text{se } u \geq 5.6. \end{cases}$
RA Alto	$\mu_{\underline{RA}_A}(u) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq u \leq 4.4; \\ \frac{u-4.4}{2}, & \text{se } 4.4 \leq u \leq 5.6; \\ 0.6, & \text{se } u \geq 5.6. \end{cases}$
FL Baixo	$\mu_{\overline{FL}_B}(u) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 \leq u \leq 2.6; \\ \frac{-u+5.6}{3}, & \text{se } 2.6 \leq u \leq 5.6; \\ 0, & \text{se } u \geq 5.6. \end{cases}$
FL Baixo	$\mu_{\underline{FL}_B}(u) = \begin{cases} 0.6, & \text{se } 0 \leq u \leq 2.6; \\ \frac{-u+4.4}{3}, & \text{se } 2.6 \leq u \leq 4.4; \\ 0, & \text{se } u \geq 4.4. \end{cases}$
FL Médio	$\mu_{\overline{FL}_M}(u) = \begin{cases} 0, & \text{se } u \leq 1.6; \\ \frac{u-1.6}{2}, & \text{se } 1.6 \leq u \leq 3.6; \\ 1, & \text{se } 3.6 \leq u \leq 6.4; \\ \frac{-u+8.4}{2}, & \text{se } 6.4 \leq u \leq 8.4; \\ 0, & \text{se } u \geq 8.4. \end{cases}$
FL Médio	$\mu_{\underline{FL}_M}(u) = \begin{cases} 0, & \text{se } u \leq 2.4; \\ \frac{u-2.4}{2}, & \text{se } 2.4 \leq u \leq 3.6; \\ 0.6, & \text{se } 3.6 \leq u \leq 6.4; \\ \frac{-u+7.6}{2}, & \text{se } 6.4 \leq u \leq 7.6; \\ 0, & \text{se } u \geq 7.6. \end{cases}$
FL Alto	$\mu_{\overline{FL}_A}(u) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq u \leq 4.4; \\ \frac{u-4.4}{3}, & \text{se } 4.4 \leq u \leq 7.4; \\ 1, & \text{se } u \geq 7.4. \end{cases}$
FL Alto	$\mu_{\underline{FL}_A}(u) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq u \leq 5.6; \\ \frac{u-5.6}{3}, & \text{se } 5.6 \leq u \leq 7.4; \\ 0.6, & \text{se } u \geq 7.4. \end{cases}$

- Aplicação do método fuzzy de implicação, realizando uma combinação do valor obtido a partir do operador fuzzy com os valores das regras de saída dos conjuntos fuzzy, utilizando o método MIN (mínimo) nessas combinações;

Tabela 14 – Atributos Seleccionados para as Variáveis de Saída Referentes a IVFS.

Atributo/VL	Função de Pertinência
R Baixo	$\mu_{\bar{R}_B}(u) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 \leq u \leq 1.0; \\ \frac{-u+6}{5}, & \text{se } 1.0 \leq u \leq 6.0; \\ 0, & \text{se } u \geq 6.0. \end{cases}$
R Baixo	$\mu_{R_B}(u) = \begin{cases} 0.6, & \text{se } 0 \leq u \leq 1.0; \\ \frac{-u+4}{5}, & \text{se } 1 \leq u \leq 4.0; \\ 0, & \text{se } u \geq 4.0. \end{cases}$
R Médio	$\mu_{\bar{R}_M}(u) = \begin{cases} \frac{u+1}{5}, & \text{se } 0 \leq u \leq 4.0; \\ 1, & \text{se } 4.0 \leq u \leq 6.0; \\ \frac{-u+11}{5}, & \text{se } u \geq 10. \end{cases}$
R Médio	$\mu_{R_M}(u) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq u \leq 1.0; \\ \frac{u-1}{5}, & \text{se } 1.0 \leq u \leq 4.0; \\ 0.6, & \text{se } 4.0 \leq u \leq 6.0; \\ \frac{-u+9}{5}, & \text{se } 6.0 \leq u \leq 9.0; \\ 0, & \text{se } u \geq 9.0. \end{cases}$
R Alto	$\mu_{\bar{R}_A}(u) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq u \leq 4.0; \\ \frac{u-4}{5}, & \text{se } 4.0 \leq u \leq 9.0; \\ 1, & \text{se } u \geq 9.0. \end{cases}$
R Alto	$\mu_{R_A}(u) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq u \leq 6.0; \\ \frac{u-6}{5}, & \text{se } 6.0 \leq u \leq 9.0; \\ 0.6, & \text{se } u \geq 9.0. \end{cases}$

- Aplicação do método fuzzy de agregação, resultando na composição da saída fuzzy das regras utilizando o método MAX (máximo), criando assim uma única região fuzzy a ser analisada pelo próximo módulo do processo fuzzy.

5.2.4 Redutor de Tipo-1 e Defuzzificação

Neste trabalho considera-se o centroide, como mostra na sequência do processo de defuzzificação desta modelagem, agrega todos conjuntos fuzzy tipo-1 representando o conjunto-saída fuzzy tipo-2 (IVFL). Aplica-se uma t-conorma (como o máximo) e posteriormente determina-se o centroide associado a estes conjuntos. O redutor de tipo considera a média aritmética de todos os centroides calculados na etapa anterior.

Na etapa de defuzzificação da política de migração fuzzy, é calculado o centroide (u) da área da saída do FIS, conectando todas as regras declaradas nas Seções 5.2.2 e 5.2.1, de acordo com o seguinte equação:

$$u = \frac{\sum_{i=1}^N u_i \mu_{OUT}(u_i)}{\sum_{i=1}^N \mu_{OUT}(u_i)} \quad (70)$$

Tabela 15 – Base de Regras da Abordagem *Intf-HybridMem*.

Regra	RA	FL	FE	Recomendação
1	Baixo	Baixo	Baixo	Baixo
2	Baixo	Baixo	Médio	Médio
3	Baixo	Baixo	Alto	Alto
4	Baixo	Médio	Baixo	Baixo
5	Baixo	Médio	Médio	Alto
6	Baixo	Médio	Alto	Alto
7	Baixo	Alto	Baixo	Baixo
8	Baixo	Alto	Médio	Médio
9	Baixo	Alto	Alto	Alto
10	Médio	Baixo	Baixo	Baixo
11	Médio	Baixo	Médio	Médio
12	Médio	Baixo	Alto	Alto
13	Médio	Médio	Baixo	Baixo
14	Médio	Médio	Médio	Médio
15	Médio	Médio	Alto	Alto
16	Médio	Alto	Baixo	Baixo
17	Médio	Alto	Médio	Médio
18	Médio	Alto	Alto	Alto
19	Alto	Baixo	Baixo	Baixo
20	Alto	Baixo	Médio	Baixo
21	Alto	Baixo	Alto	Médio
22	Alto	Médio	Baixo	Baixo
23	Alto	Médio	Médio	Baixo
24	Alto	Médio	Alto	Médio
25	Alto	Alto	Baixo	Baixo
26	Alto	Alto	Médio	Baixo
27	Alto	Alto	Alto	Médio

5.3 Considerações sobre o Capítulo

Este Capítulo apresentou a consolidação da base arquitetural a ser empregada na estratégia *CDM*, sendo caracterizadas suas estratégias operacionais e as decorrentes variáveis linguísticas, termos linguísticos e funções de pertinência.

A seguir, são avaliadas as estratégias propostas nesta Tese a partir da análise consensual para a tomada de decisão no processo de gerenciamento de dados entre os módulos de sistemas de memórias híbridas. São apresentadas as abordagens algorítmicas propostas para a modelagem fuzzy tipo-1 e, no caso do tipo-2, focando na lógica fuzzy valorada intervalarmente.

Considerando esta base arquitetural, a estratégia *CDM* terá suas metodologias *FS-FCM* e *IVFS-FCM* avaliadas, sendo empregada uma visão algorítmica a fim de observar o impacto do emprego de consenso fuzzy na área de gerenciamento de sistemas híbridos de memórias.

6 AVALIAÇÃO DA ESTRATÉGIA CDM

“Everything should be made as
simple as possible, but not simpler.”

Albert Einstein

Este Capítulo tem como objetivo a descrição algorítmica das estratégias propostas nesta Tese e suas avaliações, considerando aspectos entendidos como relevantes para o escopo desta Tese.

6.1 Abordagem Algorítmica para Estratégia CDM

Esta Seção descreve a estratégia algorítmica desenvolvida para a aplicação de medidas de consenso fuzzy no processo de tomada de decisão, que na sequência deste capítulo, foram aplicadas no gerenciamento de memórias híbridas.

A abordagem algorítmica para Estratégia CDM tem por objetivo a utilização de medidas de consenso fuzzy para auxílio à tomada de decisão consensual no processo de gerenciamento em sistemas híbridos de memórias. Como descrito no Capítulo 4, consideramos duas classes de metodologias *FCM*, de acordo com a natureza da modelagem fuzzy aplicada:

- (i) *Fuzzy Consensus Measures for Fuzzy Set (FS-FCM)*, que fazem uso de métodos para a abordagem de consenso sobre valores fuzzy;
- (ii) *Fuzzy Consensus Measures for Interval-valued Fuzzy Set (IVFS-FCM)*, promovendo a análise consensual de famílias de conjuntos fuzzy tipo-1, podendo incluir as projeções de conjuntos fuzzy valorados intervalarmente.

A apresentação algorítmica para análise consensual fuzzy via Estratégia CDM está graficamente representada no fluxograma da Figura 15, detalhando as correspondentes sequências de passos e identificando ambas propostas metodológicas, FS-FCM e IVFS-FCM, incluindo a seleção dos seus métodos.

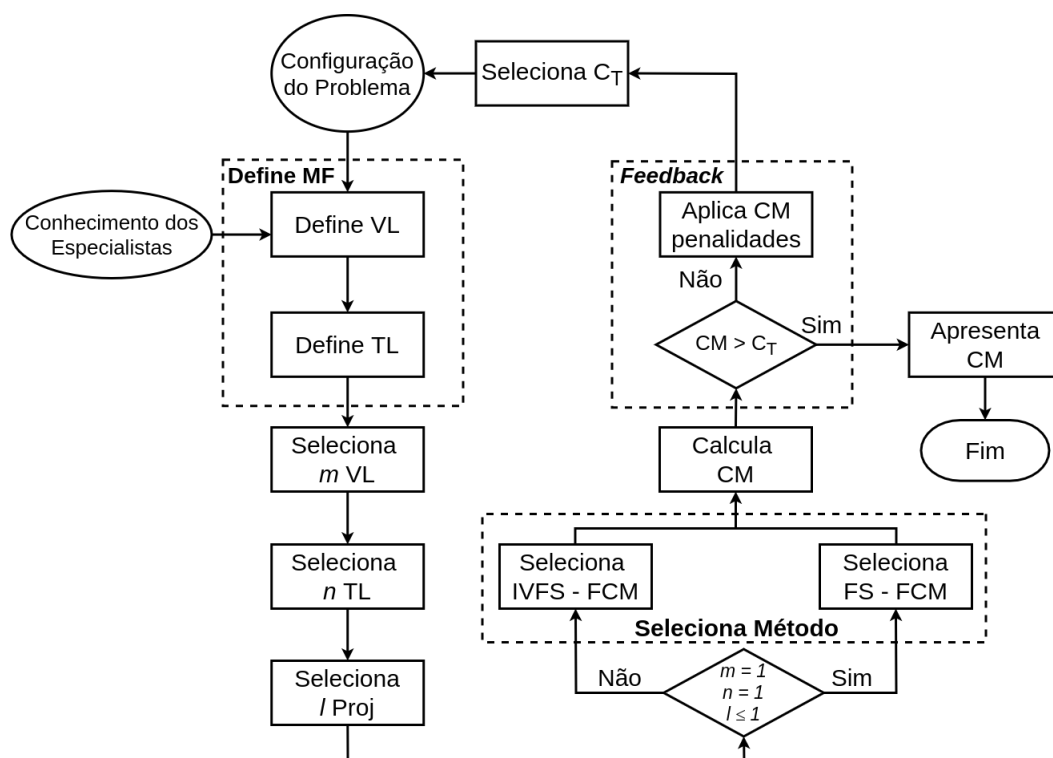


Figura 15 – Fluxo da Estratégia CDM.

Esta estratégia consolida a abordagem de consenso fuzzy para tomada de decisão no gerenciamento de memórias híbridas, sendo possível sua aplicação para múltiplos atributos e especialistas.

No que se refere ao consenso fuzzy, a estratégia é abrangente por aportar um conjunto significativo de funções de agregação, funções de penalidade e relações de equivalência restritas, as quais podem ser definidas por composições de funções de implicações e quase-overlap.

Passo 1 Definição das funções de pertinência e construção dos conjuntos fuzzy.

- 1.1 Normalização dos dados de entrada e de saída.
- 1.2 Definição do universo χ_k , sendo o número k de elementos sobre o qual os graus de pertinência são atribuídos pelos especialistas.
- 1.3 Definição dos conjuntos de entrada e de saída fuzzy:
 - * Determinação das variáveis linguísticas (RA, FL, FE e R).
 - * Escolha dos termos linguísticos (Baixo, Médio ou Alto).
 - * Formulação matemática das funções de pertinência $\mu_X(u)$.

Passo 2 Descrição das condições conceituais das FCM-metodologias

- 2.1 Seleciona o número m de variáveis linguísticas ($m \in \{1, 2, 3\} \subseteq \mathbb{N}^*$).
- 2.2 Seleciona o número n de termos linguísticos ($n \in \{1, 2, 3\} \subseteq \mathbb{N}^*$).

- 2.3 Selecione o número l de funções de projeções ($l \in \{0, 1, 2\} \subseteq \mathbb{N}$).
- $l = 0$ para conjunto fuzzy tipo-1;
 - $l = 1$ para projeção inferior do conjunto fuzzy valorado intervalarmente;
 - $l = 2$ para projeção superior do conjunto fuzzy valorado intervalarmente;

Passo 3 Teste das condições para seleção de FCM-metodologias

- 3.1 Se $m = 1$ e $n = 1$ e $l \leq 1$ então será considerado um dos métodos referente à classe de FS-FCM Metodologias e na sequência, vai para Passo 4;
- 3.2 Caso contrário, considere aplicação de métodos referente à classe de IVFS-FCM Metodologias e na sequência, vai para Passo 5;

Passo 4 Seleção do $\mathcal{L}_{[0,1]}$ -FCM método, pela escolha de um dos quatro itens seguintes:

- 4.1 Defina λ para seleção de Soma Conexa.
- 4.2 Defina ϕ -automorfismo para seleção de Conjugada.
- 4.3 Defina Função de Agregação (AM, Exp) pela escolha de um dos itens:
- 4.3.1 Defina função de overlap e implicação fuzzy para seleção de $\mathcal{L}_{[0,1]}$ -REF;
 - 4.3.2 Defina vetor de fusão para seleção de função de penalidade.
- 4.4 Vai para Passo 6.

Passo 5 Seleção de $\mathcal{L}_{\mathcal{F}_X}$ -FCM método, pela escolha de um dos três seguintes itens:

- 5.1 Defina λ para seleção de Soma Conexa.
- 5.2 Defina ϕ -automorfismo para seleção de Conjugada.
- 5.3 Defina função de agregação e vai para Passo 4.

Passo 6 Cálculo do Consenso C , segundo metodologia selecionada.

Passo 7 Teste do Consenso-Threshold (C_T)

- Se $C \leq C_T$ então vá para Passo 8 (indicando critério mínimo de satisfação consensual foi atingido);
- Caso contrário, aplicam-se funções de penalidades e voltamos ao Passo 1

Passo 8 Apresente o resultado final e encerre o algoritmo de análise de consenso.

Assim, a abordagem algorítmica para a Estratégia CDM foi estruturada de forma integrada com todas as seções dos Capítulos 4 e 5.

Remark 6.1.1. A Estratégia CDM também explora a construção N_S -dual, considerando neste contexto a análise de dissenso fuzzy em $\mathcal{L}_{[0,1]}$. E, baseada em funções de dissimilaridade restritas $\mathcal{L}_{[0,1]}$ -RDF, tem-se uma proposta de novas extensões para FS-FCM Metodologias.

Tais métodos seguem uma abordagem algorítmica análoga à aplicada na análise consensual. Se os agregadores forem AM e exp, dados pelas Equações 50 e 53, respectivamente, então, teremos como o cálculo do dissenso como sendo construído por métodos definidos pelas seguintes expressões:

$$D_{AM,f}(x_1, \dots, x_n) = 1 - C_{AM,f}(x_1, \dots, x_n); \quad (71)$$

$$D_{\exp_\alpha, F}(x_1, \dots, x_n) = 1 - C_{\exp_\alpha, F}(x_1, \dots, x_n). \quad (72)$$

Este trabalho também avaliou a abordagem algorítmica dual, construída a partir das Eq. (71) e Eq.(72). Os resultados obtidos estão reportados no Apêndice A e validaram os dados inferidos pelo construção algorítmica dual, para todas as funções de pertinência associadas às VL e TL consideradas na Abordagem *f-HybridMem*.

Os resultados da aplicação das metodologias duais estão baseadas em medidas de dissenso via $\mathcal{L}_{[0,1]}$ -RDF e as correspondentes construções duais, as medidas de consenso via $\mathcal{L}_{[0,1]}$ -REF, e podem ser comparados nos pares de Tabelas 21 e 22, e Tabelas 23 e 24 do Apêndice A deste texto.

6.2 Avaliação da Estratégia CDM: Análise Consensual para Abordagens *f-HybridMem* e *Intf-HybridMem*

Esta Seção apresenta uma avaliação da Estratégia CDM, promovendo a avaliação consensual para as Abordagens *f-HybridMem* e *Intf-HybridMem*.

A partir das funções de pertinência modeladas na Seção 5.2.1.1, e dos fundamentos e métodos apresentados nos Capítulos 3 e 4, foram realizadas as análises consensuais para os correspondentes conjuntos fuzzy tipo-1, para projeções dos conjuntos fuzzy valoradas intervalarmente e também para os conjuntos fuzzy valorados intervalarmente. Assim, a avaliação está apresentada em estudos de casos, elencados em três classes da seguinte forma:

- Análise Consensual para Funções de Pertinência Tipo-1 na Abordagem *f-HybridMem*, considerando a diversificação de métodos providos por FS-FCM metodologias;
- Análise Consensual para Funções de Pertinência Valoradas Intervalarmente na Abordagem *Intf-HybridMem*, representadas por suas funções de projeção (sup e inf), considerando as FS-FCM metodologias;

- Análise Consensual de família de conjuntos fuzzy, aplicadas em ambas Abordagens, *f-HybridMem* e *Intf-HybridMem*, segue as IVFS-FCM metodologias.

A análise consensual, proposta neste trabalho, tem por objetivo identificar funções de agregação que melhor descrevem um conjunto de valores de um conjunto fuzzy, sendo a função de pertinência construída a partir das especificações de especialistas.

As funções de pertinência descritas na Seção 5.2.1.1 foram aplicadas a 100 dos valores de dados, equidistantes no intervalo $[0, 10]$, caracterizando o universo χ_{100} .

6.2.1 Estudo de Caso 1: Análise Consensual da Abordagem *f-HybridMem* via FS-FCM Metodologias

Considerando as definições das funções de pertinência apresentadas na Tabela 11 foram calculadas as medidas de consenso para a modelagem fuzzy Tipo-1.

Os resultados referentes ao grau de consenso para as diferentes VL/TL para os casos analisados, são mostrados nas Tabelas 16 e 17.

Tabela 16 – Consenso para as Funções de Pertinência Fuzzy Tipo-1.

X	$C_{AM, f_{ }}$	$C_{exp, f_{ }}$	C_{SK}	C_{Tastle}
RA_B	0.4100	0.4997	0.3011	0.6989
RA_M	0.6900	0.7425	0.6260	0.3740
RA_A	0.1000	0.1341	0.1331	0.8669
FL_B	0.3100	0.3704	0.2959	0.7041
FL_M	0.9800	0.9803	0.3060	0.6940
FL_A	0.2900	0.3463	0.2839	0.7161
R_B	0.5100	0.5513	0.5933	0.4067
R_M	0.9800	0.9800	0.6664	0.3336
R_A	0.4900	0.5313	0.5733	0.4267

Na construções dos resultados apresentados nas Tabelas 16 e 17, consideramos diferentes atribuições do Consenso-*Threshold* (C_T) para os termos linguísticos que definiram os conjuntos fuzzy compondo a análise consensual da Abordagem *f-HybridMem* via FS-FCM Metodologias.

E assim, considerando a abordagem algorítmica descrita na Seção 6.1, os operadores selecionados neste estudo foram elencados como segue.

- Funções de médias C_{AM} e C_{exp} , dadas em Eq.(11) e Eq.(12), respectivamente.

- Classe de função quase-overlap O_p e a implicação fuzzy I_{LK} , dadas em Eq.(7) e Eq.(14), respectivamente.
- Classe de funções $\mathcal{L}_{[0,1]}$ -REF: $Ref_{||}(x, y)$, $Ref_{I_{LK}}(x, y)$, sendo dadas pelas expressões em Eq.(18), Eq.(57), respectivamente. Consideram-se ainda as funções $Ref_{O_p, I_{LK}}(x, y)$, dadas pelas respectivas expressões: Eq.(56) para $p = 1$, e Eq.(58) para $p = 2$.
- Classes de funções $\mathcal{L}_{[0,1]}$ -FCM, definindo 6 novos métodos neste estudo de caso:
 - $C_{AM, f_{||}}$ e $C_{exp, f_{||}}$, dadas nas respectivas Eq.(52) e Eq.(54).
 - $C_{AM, f_{O_p, I_{LK}}}$ e $C_{exp, f_{O_p, I_{LK}}}$, para $p \in \{0.5, 1, 2\}$ como ilustradas no Exemplo 55.
 - E ainda, reportamos 2 funções $\mathcal{L}_{[0,1]}$ -FCM frequentemente citadas na literatura, C_{SK} e C_{Tastle} , nas respectivas expressões em Eq.(45) e Eq.(46), para prover comparações entre os métodos propostos.

Tabela 17 – Consenso para as Funções de Pertinência Fuzzy Tipo 1 - $Ref_{O_p, I_{LK}}(x, y)$.

X	C_{AM}		C_{exp}	
	$p = 0.5$	$p = 2$	$p = 0.5$	$p = 2$
RA_B	0.4758	0.3435	0.5653	0.4359
RA_M	0.7895	0.5900	0.8196	0.6667
RA_A	0.1337	0.0665	0.1826	0.0881
FL_B	0.4093	0.2101	0.4802	0.2586
FL_M	0.9899	0.9610	0.9899	0.9621
FL_A	0.3893	0.1901	0.4588	0.2317
R_B	0.6761	0.3434	0.7014	0.3921
R_M	0.9899	0.9604	0.9899	0.9604
R_A	0.6561	0.3234	0.6842	0.3686

6.2.1.1 Comparação entre métodos

Para comparação dos métodos propostos nas FS-FCM Metodologias aplicadas na Abordagem *f-HybridMem* foram divididas em duas etapas, para melhor apresentação dos resultados obtidos.

Em todos os casos, os resultados referentes à frequência de escrita, como descrito anteriormente, foram suprimidos pelo fato de apresentar as mesmas funções de pertinência da variável linguística frequência de leitura.

Primeiramente, considera-se a aplicação da FS-FCM Metodologia gerada pela aplicação da média aritmética AM , e os resultados tabulados podem ser facilmente comparados, veja esta apresentação na Figura 16.

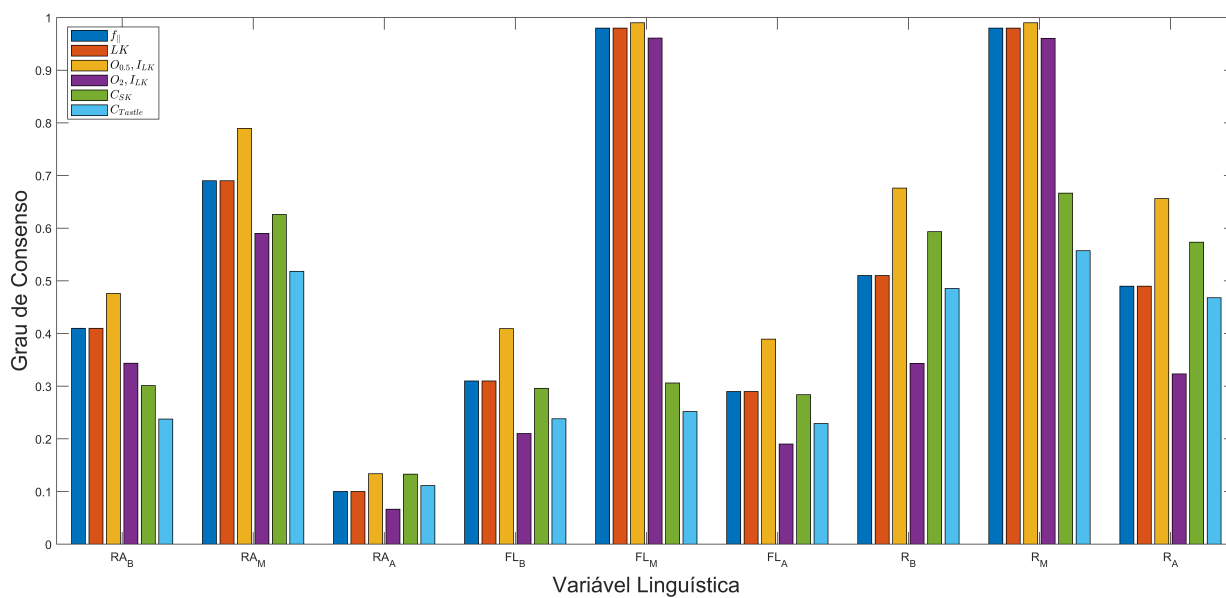


Figura 16 – C_{AM} para a Modelagem Fuzzy T1 e Diferentes REF.

Observa-se que nesta etapa, caracterizada de aplicação da FS-FCM Metodologia baseada na média AM , tem-se a possibilidade de comparar quatro novos métodos, identificados na legenda da Tabela apresentada na Figura 16, com os outros dois métodos da literatura. Neste caso, os métodos C_{SK} e C_{Tastle} apresentados na literatura (BELIAKOV; CALVO; JAMES, 2014) foram aplicados aos dados do universo χ_{100} considerado. Compondo-se assim, uma análise consensual para fins de comparação com seis métodos, aplicados na Abordagem f -HybridMem.

É possível observar, a partir da Figura 16, que os maiores valores referentes ao grau de consenso foram obtidos para o agregador média aritmética para a função $Ref_{O_{0.5}, I_{LK}}(x, y)$. Este comportamento pode ser observado para as entradas (recência de acesso, frequência de leitura e frequência de escrita) e também para a saída (recomendação).

Além disso, verifica-se que os maiores graus de consenso foram obtidos para os casos com termo linguístico médio. Ao analisar a representação gráfica para as funções de pertinência, modelando a Abordagem f -HybridMem, é possível observar uma maior simetria dos gráficos que descrevem os conjuntos fuzzy identificados por termos linguísticos médios, o que justifica o maior grau de consenso nestes casos.

O menor grau de consenso é obtido para o termo linguístico alto. Ainda na Figura 16 é possível identificar as medidas de consenso obtidas por métodos gerados

pelos operadores C_{SK} e C_{Tastle} , como apresentadas na Seção 4.1. Estes métodos são frequentemente superados pelos novos métodos inseridos na FS-FCM Metodologia, ao aplicar a média AM .

Na segunda etapa, os resultados referentes ao grau de consenso para as variáveis linguísticas definidas para as entradas e para a saída da Abordagem *f-HybridMem*, foram gerados ao considerar a média exponencial (exp), e estão tabulados na Figura 17. É possível observar que os maiores graus de consenso obtidos correspondem às medidas de consenso obtidas a partir da $Ref_{O_{0.5}, I_{LK}}(x, y)$ e ocorrem para os casos com termo linguístico médio. Os menores graus de consenso, por sua vez, foram obtidos para o termo linguístico alto referente à variável RA.

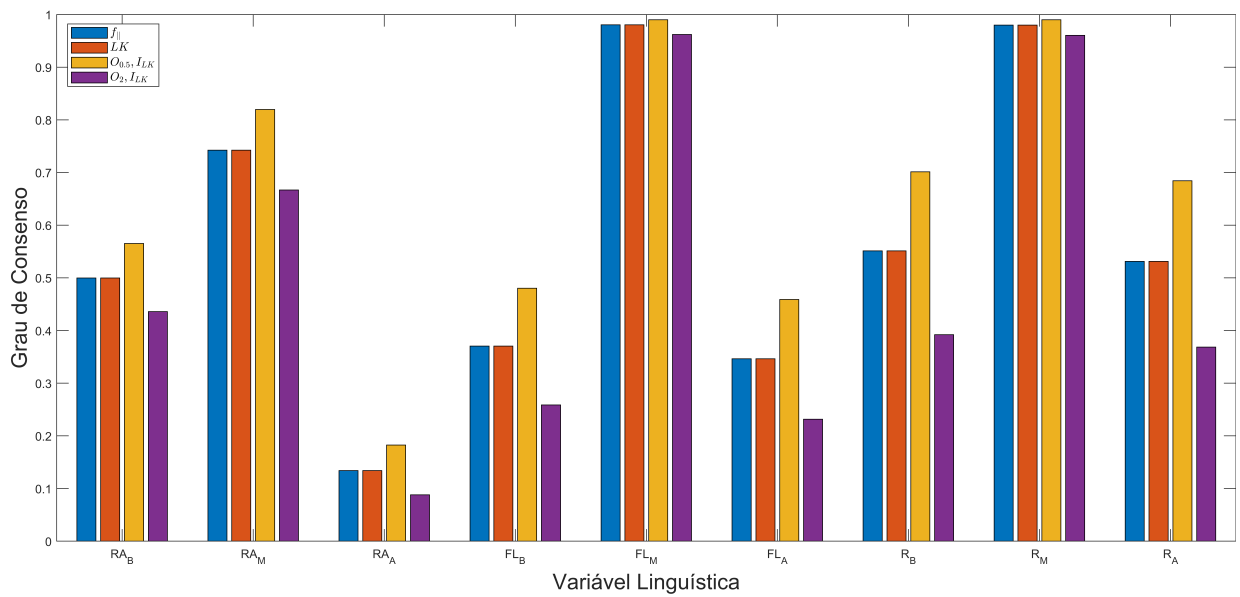


Figura 17 – C_{exp} para a Modelagem Fuzzy T1 e Diferentes REF.

6.2.2 Estudo de Caso 2: Análise Consensual da Abordagem *Intf-HybridMem* via FS-FCM Metodologias

Este segundo estudo de caso também considera os mesmos métodos referentes às FS-FCM Metodologias, aplicando tanto o agregador AM como o agregador exp . E ainda, considerando a abordagem algorítmica descrita na Seção 6.1, os operadores selecionados neste estudo já foram elencados no primeiro estudo.

Similarmente à análise consensual dos valores fuzzy referentes às funções de pertinência tipo-1 que definem a etapa de fuzzyficação da Abordagem *f-HybridMem*, este trabalho estende esta avaliação ao considerar a análise consensual para projeções das funções de pertinência valoradas intervalarmente, para a Abordagem *Intf-HybridMem*, totalizando seis análises consensuais.

Os resultados mostrados na Tabela 18, para esta modelagem, considera ambos operadores de média AM e exp , construindo as funções $\mathcal{L}_{[0,1]}$ -FCM a partir de funções

$\mathcal{L}_{[0,1]}$ -REF são definidas por $Ref_{||}(x,y)$, e dadas pela expressão em Eq.(18). Além disso, também são considerados os métodos gerados pelos operadores C_{SK} e C_{Tastle} .

De forma análoga, a Tabela 19 apresenta resultados obtidos ao considerar ambos operadores de média AM e exp , e construindo as funções $\mathcal{L}_{[0,1]}$ -FCM a partir de $\mathcal{L}_{[0,1]}$ -REF construídas por composição da funções quase-overlap e implicações fuzzy, no caso, os operadores da classe $Ref_{Op, I_{LK}}$, para os parâmetros $p = 0.5$ e $p = 2$.

Tabela 18 – Consenso para as Funções de Pertinência Valoradas Intervalarmente.

X	$[\underline{X}, \overline{X}]$	C_{SK}	C_{Tastle}	$C_{AM, f_{ }}$	$C_{exp, f_{ }}$
RA_B	$\underline{B}_{In}$	0.6047	0.4734	0.5500	0.6832
	$\overline{B}_{In}$	0.2419	0.1918	0.3300	0.4127
RA_M	$\underline{M}_{In}$	0.8268	0.7135	0.7900	0.8185
	$\overline{M}_{In}$	0.4596	0.3710	0.6220	0.6817
RA_A	$\underline{A}_{In}$	0.6686	0.5181	0.4360	0.4434
	$\overline{A}_{In}$	0.1411	0.1171	0.1200	0.1543
FL_B	$\underline{B}_{In}$	0.7165	0.5770	0.5860	0.6153
	$\overline{B}_{In}$	0.2358	0.1933	0.2100	0.2549
FL_M	$\underline{M}_{In}$	0.7116	0.5683	0.9880	0.9882
	$\overline{M}_{In}$	0.2680	0.2238	0.9800	0.9803
FL_A	$\underline{A}_{In}$	0.7133	0.5727	0.5740	0.6019
	$\overline{A}_{In}$	0.2286	0.1880	0.1980	0.2421
R_B	$\underline{B}_{Out}$	0.8056	0.6815	0.7060	0.7327
	$\overline{B}_{Out}$	0.4293	0.3502	0.3460	0.3910
R_M	$\underline{M}_{Out}$	0.7838	0.6489	0.9880	0.9880
	$\overline{M}_{Out}$	0.7267	0.6034	0.9840	0.9840
R_A	$\underline{A}_{Out}$	0.7984	0.6726	0.6940	0.7209
	$\overline{A}_{Out}$	0.4173	0.3410	0.3340	0.3798

Os resultados referentes às diferentes VL para a modelagem das funções de pertinência valoradas intervalarmente, considerando os diferentes agregadores e as funções $\mathcal{L}_{[0,1]}$ -FCM analisadas, são mostrados na Figura 18.

Nesta Figura são mostrados os graus de consenso para as entradas e para a saída, sendo agrupados os resultados referentes às variáveis com os mesmos TL (baixo, médio ou alto). Para cada um destes termos são apresentados os resultados referentes ao cálculo do grau de consenso para as funções superior e inferior. Como adotado para o tipo-1, os resultados referentes à FE também foram suprimidos pelos motivos expostos anteriormente.

Tabela 19 – Consenso para as Funções de Pertinência Valoradas Intervalarmente para $Ref_{O_p, I_{LK}}(x, y)$ ($p = 0.5$ e $p = 2$).

X	$[\underline{X}, \overline{X}]$	C_{AM}		C_{exp}	
		$p = 0.5$	$p = 2$	$p = 0.5$	$p = 2$
RA_B	$\underline{B}_{In}$	0.7062	0.3989	0.8004	0.5632
	$\overline{B}_{In}$	0.3958	0.2635	0.4840	0.3428
RA_M	$\underline{M}_{In}$	0.8763	0.6844	0.8870	0.7425
	$\overline{M}_{In}$	0.7357	0.5128	0.7726	0.5951
RA_A	$\underline{A}_{In}$	0.6562	0.2031	0.6591	0.2154
	$\overline{A}_{In}$	0.1725	0.0725	0.2242	0.0939
FL_B	$\underline{B}_{In}$	0.7513	0.3989	0.7624	0.4551
	$\overline{B}_{In}$	0.3000	0.1252	0.3465	0.1471
FL_M	$\underline{M}_{In}$	0.9939	0.9766	0.9940	0.9775
	$\overline{M}_{In}$	0.9899	0.9610	0.9899	0.9621
FL_A	$\underline{A}_{In}$	0.7440	0.3821	0.7546	0.4353
	$\overline{A}_{In}$	0.2845	0.1180	0.3465	0.1471
R_B	$\underline{B}_{Out}$	0.8282	0.5524	0.8381	0.6066
	$\overline{B}_{Out}$	0.4954	0.2063	0.5435	0.2436
R_M	$\underline{M}_{Out}$	0.9940	0.9762	0.9940	0.9764
	$\overline{M}_{Out}$	0.9920	0.9683	0.9920	0.9684
R_A	$\underline{A}_{Out}$	0.8208	0.5356	0.8309	0.5896
	$\overline{A}_{Out}$	0.4799	0.1991	0.5299	0.2368

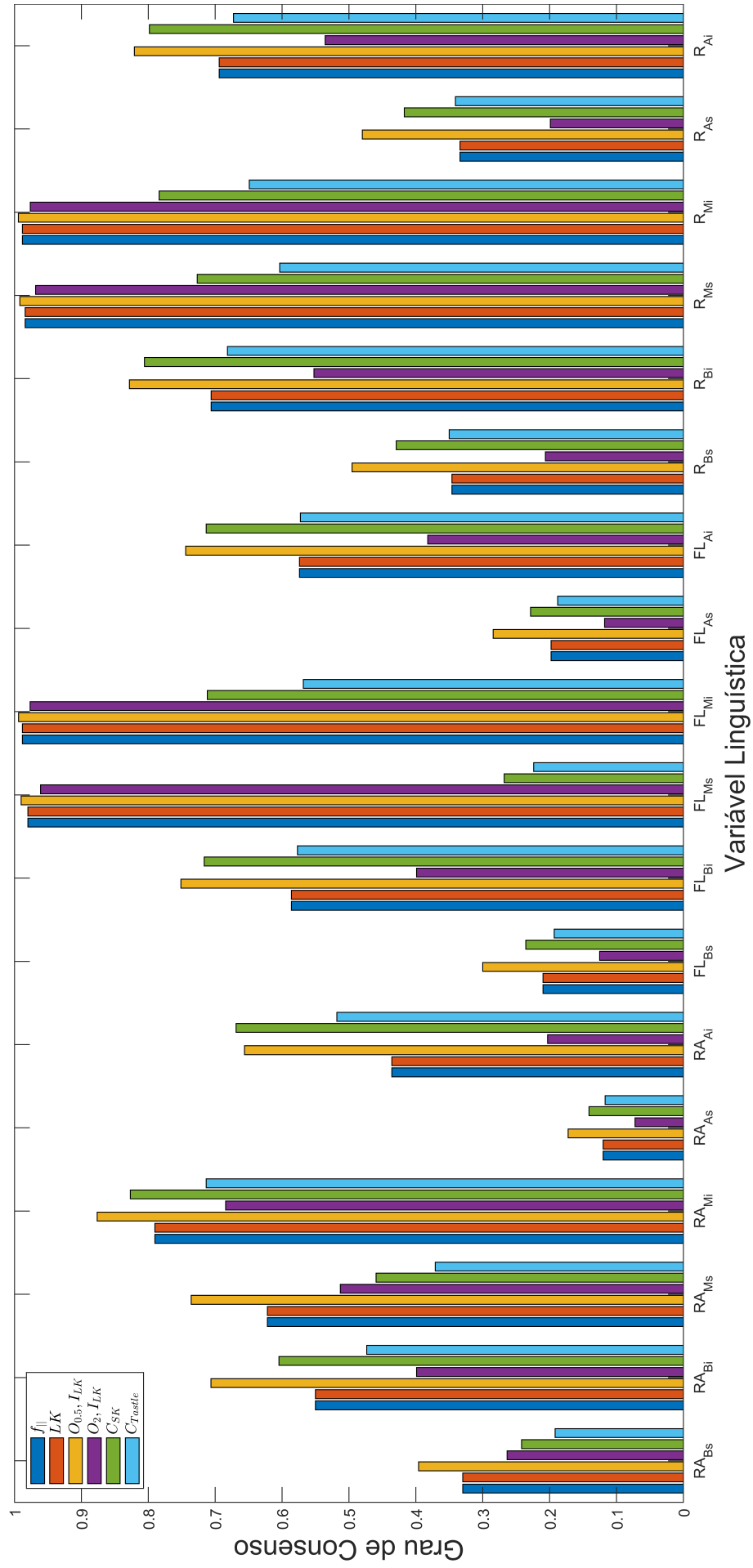


Figura 18 – C_{AM} para a Modelagem Fuzzy T2 e Diferentes REF.

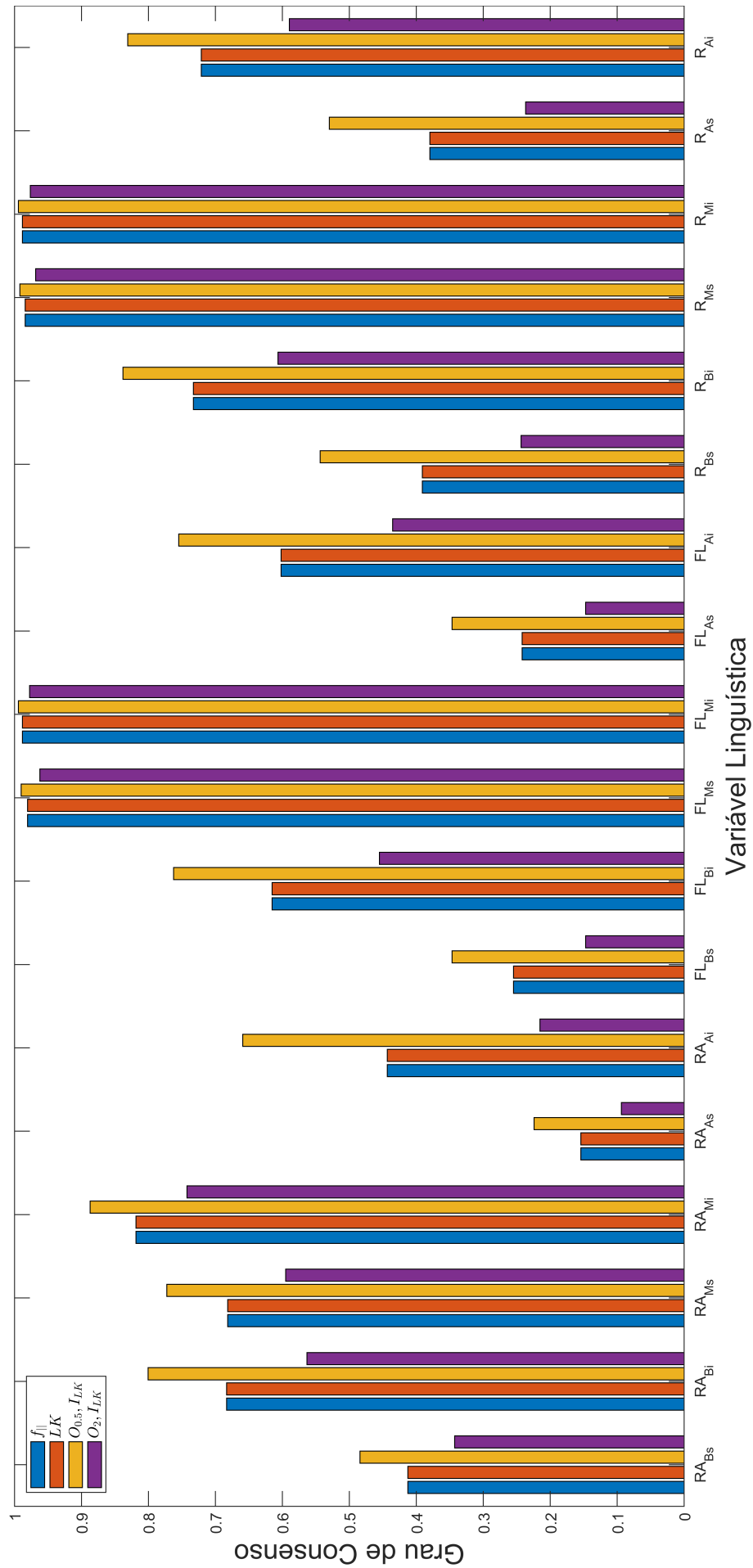


Figura 19 – C_{exp} para a Modelagem Fuzzy T2 e Diferentes REF.

É possível verificar, a partir da Figura 18, que os maiores valores referentes ao grau de consenso foram obtidos novamente para o agregador média aritmética para a função $Ref_{O_{0.5}, I_{LK}}(x, y)$.

Este comportamento pode ser observado para as entradas (recência de acesso, frequência de leitura e frequência de escrita) e também para a saída (recomendação). Além disso, pode ser observado que os maiores graus de consenso foram obtidos para os casos com termo linguístico médio. O maior grau de consenso, para as entradas e para a saída, foi obtido para a função inferior.

As diferenças entre as medidas dos graus de consenso para as funções superiores e inferiores podem ser visualizadas na Tabela 21 mostrada no Apêndice A.

Na Figura 19 são mostrados os resultados referentes ao grau de consenso para as diferentes projeções VL/TL para a modelagem fuzzy Tipo-2 para o agregador média exponencial ($\exp_\alpha$). Como ocorre com o agregador média aritmética, para a média exponencial são verificados os maiores valores para as funções inferiores com TL médio.

As medidas podem ser verificadas na Tabela 21 mostrada no Apêndice A. As mesmas observações referentes à simetria das funções que descrevem o termo linguístico médio podem ser feitas aqui. Igualmente válida a observação sobre as funções de pertinência para FL e FE.

Ao analisar as funções de pertinência, graficamente representadas na Figura 14, é possível verificar uma maior simetria das funções que descrevem o TL médio, o que justifica o maior grau de consenso para estes casos. O menor grau de consenso é observado para o TL alto da função superior para cada uma das variáveis.

6.2.3 Estudo de Caso 3: Análise Consensual das Abordagens *f-HybridMem* e *Intf-HybridMem* via FS-FCM Metodologias

A análise consensual entre os conjuntos fuzzy também foi analisada a partir do cálculo do grau de consenso entre conjuntos fuzzy para a mesma variável linguística, considerando os agregadores *AM* e *exp* para as funções $Ref_{f_{||}}(x, y)$, $Ref_{I_{LK}}(x, y)$ e $Ref_{O_p, I_{LK}}(x, y)$, integralizando a análise consensual. Os resultados estão mostrados nas Figuras 20 e 21.

A Figura 20 mostra as medidas referentes aos graus de consenso obtidos entre os conjuntos fuzzy para a mesma VL (RA, FL, FE ou R) e também as medidas obtidas para os graus de consenso para os valores superiores e inferiores das funções de pertinência intervalares.

Estas medidas foram obtidas considerando os agregadores *AM* e *exp*, além das funções $Ref_{f_{||}}(x, y)$ e $Ref_{I_{LK}}(x, y)$. As medidas obtidas para a mesma variável linguística foram calculadas, portanto, para o conjunto de valores fuzzy de todos os termos linguísticos (baixo, médio e alto) da variável analisada.

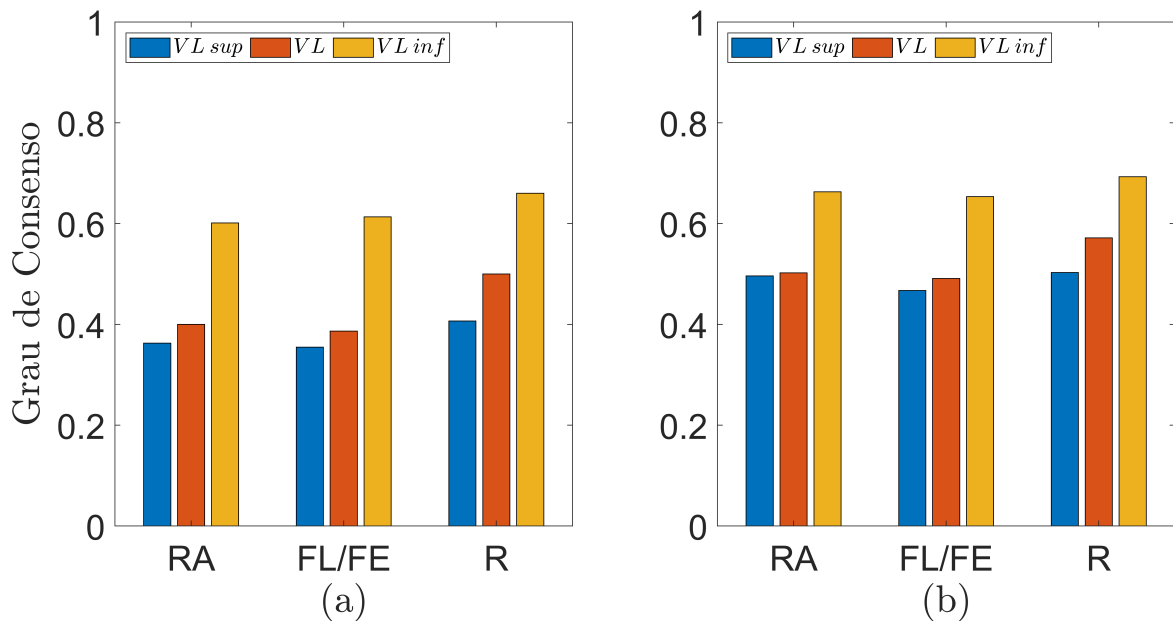


Figura 20 – Consensos entre Conjuntos Fuzzy para a mesma VL e para os Valores Superiores e Inferiores considerando os Agregadores *AM* (a) e *exp* (b) para a $Ref_{f_{||}}(x, y)$.

Assim, para a variável recência de acesso (RA), foram considerados seus respectivos conjuntos baixo, médio e alto como entradas ordenadas para a obtenção do consenso entre conjuntos fuzzy desta VL. Os valores superiores e inferiores, no entanto, foram obtidos a partir das respectivas funções do sistema fuzzy intervalar para cada uma das VL.

No caso da variável RA, os valores superiores foram obtidos a partir das entradas superiores para os diferentes termos linguísticos desta variável. É possível observar que os valores fuzzy estão compreendidos entre os valores superiores e inferiores para todas as VL e para os diferentes agregadores e funções *REF*.

A Figura 21 mostra as medidas referentes aos graus de consenso obtidos entre os conjuntos fuzzy para a mesma VL (RA, FL, FE ou R) e também as medidas obtidas para os graus de consenso para os valores superiores e inferiores das funções de pertinência intervalares. Para estas medidas foram considerados os mesmos agregadores citados anteriormente, no entanto, foram consideradas as funções $Ref_{O_p, I_{LK}}(x, y)$. Para estas funções, observa-se um comportamento similar quanto ao grau de consenso quando comparado às funções $Ref_{f_{||}}(x, y)$ e $Ref_{I_{LK}}(x, y)$, com exceção da VL RA.

6.2.4 Estudo de Caso 4: Análise Consensual da Abordagem *Intf-HybridMem* via IVFS-FCM Metodologias

O grau de consenso de conjunto $\mathcal{C}_{AM}$ para a modelagem fuzzy Tipo-2 e as diferentes REF utilizadas, pode ser visualizado na Figura 22. É possível observar que o consenso utilizando $Ref_{O_{0.5}, I_{LK}}(x, y)$ foi o maior dentre as diferentes VL consideradas

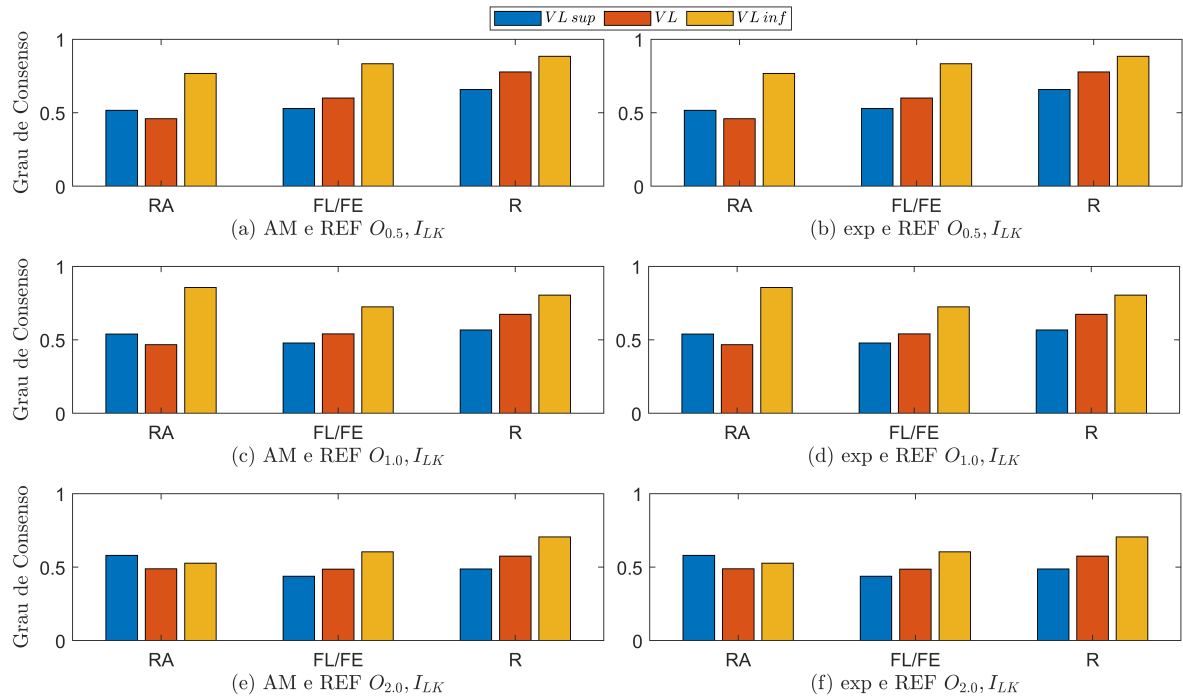


Figura 21 – Consensos entre Conjuntos Fuzzy para a mesma VL e para os Valores Superiores e Inferiores considerando os Agregadores AM e exp e a $Ref_{O_p, I_{LK}}(x, y)$.

tanto para as entradas como para a saída. O termo linguístico baixo apresenta o maior grau de consenso para as diferentes variáveis.

É possível observar que a nova estratégia proposta na tese supera as estratégias convencionais, tanto no módulo fuzzy como no módulo fuzzy valorado intervalarmente.

As medidas de consenso fuzzy para o agregador média exponencial, assim como para as medidas de consenso para o agregador média aritmética, foram modeladas a partir das funções de pertinência descritas na Seção 5.2.1.1 e considerando as medidas de consenso fuzzy obtidas a partir das REF definidas no Capítulo 4.

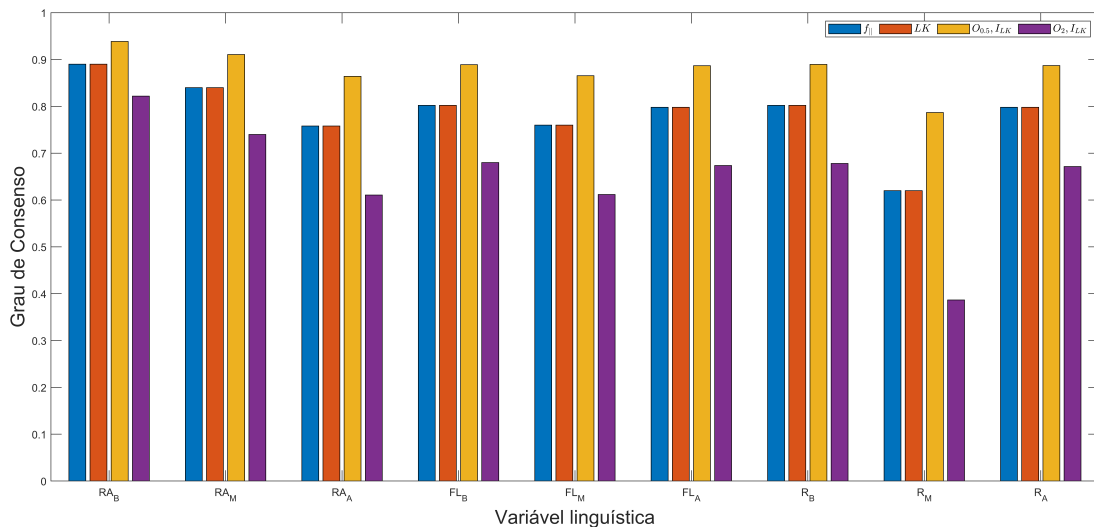


Figura 22 – $\mathcal{C}_{AM}$ para a Modelagem Fuzzy T2 e Diferentes REF.

A Figura 23 mostra os graus de consenso de conjunto fuzzy $\mathcal{C}_{exp}$ para o agregador média exponencial. Novamente pode ser observado o maior consenso utilizando a $Ref_{O_{0.5}, I_{LK}}(x, y)$ quando comparada com as demais REF. O menor grau de consenso ocorre para a $Ref_{O_2, I_{LK}}(x, y)$, enquanto as $Ref_{f_{||}}(x, y)$ e $Ref_{I_{LK}}(x, y)$, como esperado, apresentem mesmos graus de consenso.

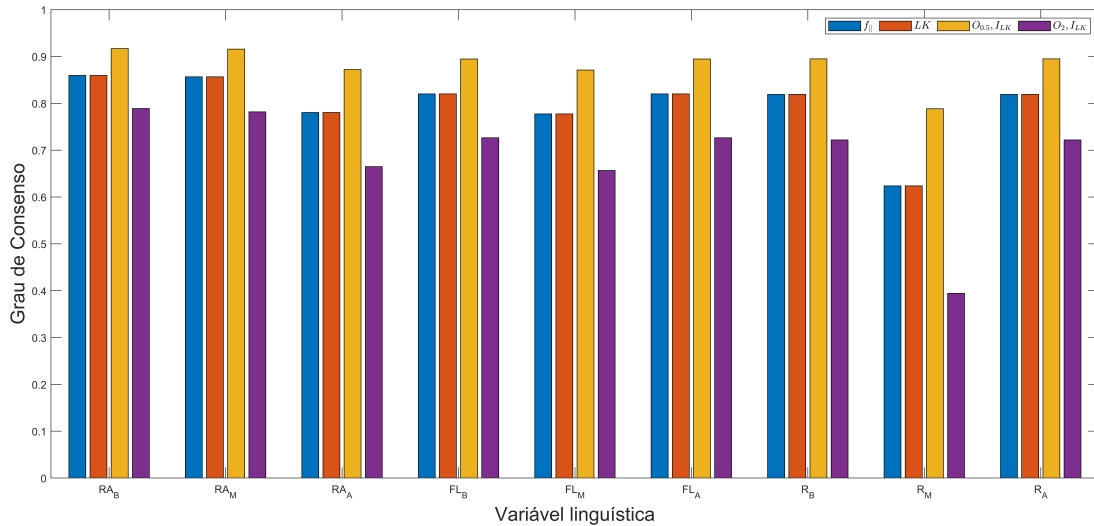


Figura 23 – $\mathcal{C}_{exp}$ para a Modelagem Fuzzy T2 e Diferentes REF.

Conclui-se, portanto, que a nova estratégia proposta na tese supera as estratégias convencionais, tanto no módulo fuzzy como no módulo fuzzy valorado intervalarmente. Além disso, um aumento no parâmetro de $Ref_{O_p, I_{LK}}(x, y)$ não resultou incremento no grau de consenso.

Os resultados apresentados nesta Seção referentes aos graus de consenso para as diferentes modelagens e funções REF estão sumarizados nas Tabelas 21 e 22 mostradas no Apêndice A.

A Tabela 21 mostra as medidas de consenso para as variáveis de entrada e para as variáveis de saída para os agregadores média aritmética e média exponencial, AM e exp_{α} , considerando as funções $Ref_{f_{||}}(x, y)$ e $Ref_{I_{LK}}(x, y)$. A representação para as medidas de consenso referentes à frequência de escrita foram suprimidas pois são iguais às medidas para a frequência de leitura. Isto se deve ao fato de que estas medidas de consenso são calculadas a partir das funções de pertinência, que são idênticas para as variáveis citadas.

A Tabela 22 apresenta as medidas de consenso para as variáveis de entrada e para as variáveis de saída para os agregadores média aritmética e média exponencial, AM e exp_{α} , porém considerando as funções $Ref_{O_{0.5}, I_{LK}}(x, y)$ e $Ref_{O_2, I_{LK}}(x, y)$, respectivamente. Novamente as medidas de consenso para a frequência de escrita foram suprimidas por serem iguais às medidas de consenso da frequência de leitura. As medidas de consenso $Ref_{O_1, I_{LK}}(x, y)$, embora calculadas para as diferentes variáveis, não foram representadas porque são idênticas às medidas obtidas para a $Ref_{f_{||}}(x, y)$ e $Ref_{I_{LK}}(x, y)$.

Com $p = 1$, pode ser verificada, a partir das Tabela 6 e 7, a igualdade mencionada.

6.2.5 Estudo de Caso 5: Análise Consensual da Abordagem *f-HybridMem* via Metodologia FS-FCM baseada em Funções de Penalidades

Neste estudo de caso, considera-se o uso de funções de penalidades para obter a análise consensual aplicada sobre conjuntos fuzzy Tipo-1, considerando as três VL de entrada, recência de acesso, frequência de leitura e de escrita, bem como a VL de saída, recomendação de migração. Para cada um dos três termos linguísticos (alto, médio e baixo) associados às VL, foram calculados os consensos baseados no método *FS-FCM*. Para tanto, foram consideradas as Eq. 37 e 38.

Os resultados referentes ao grau de consenso para o agregador *AM* na modelagem fuzzy Tipo-1 e os casos onde foram consideradas as penalidades estão mostrados na Figura 24.

É possível observar a influência da penalidade no grau de consenso para as variáveis de entrada e de saída. Para a RA, é verificado um maior grau de consenso para os TL baixo e médio para o agregador *AM* sem penalidade. Para o TL alto, no entanto, é identificado maior grau de consenso quando são consideradas as penalidades.

As entradas FE e FL apresentam maior grau de consenso somente para o TL médio, quando analisado o agregador *AM*. Para os demais TL são observados maiores graus com o uso da penalidade para a função $|x - y|$, onde x são elementos de entrada e y a mediana provenientes das entradas não nulas.

A variável de saída apresenta o mesmo comportamento das variáveis de entrada FE e FL para o TL médio. Para os demais TL, no entanto, são observados menores graus de consenso para a função $(x - y)^2$. Para esta penalidade, x denota os elementos de entrada e y corresponde à média aritmética dos elementos de entrada.

É possível observar, a partir da aplicação das penalidades $|x - y|$ e $(x - y)^2$, que uma maior diferença, em módulo, para o grau de consenso referente à média aritmética foi obtida para o TL médio (0.4550), considerando as VLs FL e FE. A menor diferença (0.0900) foi obtida para a VL RA e o TL médio considerando a penalidade $|x - y|$. Para a função $(x - y)^2$ a menor diferença (0.0138) foi obtida para as VLs FL e FE e o TL baixo. Estes resultados estão sumarizados na Tabela 20.

6.3 Considerações sobre o Capítulo

Este Capítulo apresentou a avaliação das estratégias propostas para análise consensual prevista nesta Tese, sendo descritas as estratégias algorítmicas desenvolvidas. Assim, de acordo com a natureza da modelagem fuzzy aplicada, foram consideradas as duas classes de metodologias *FCM* (*FS-FCM* e *IVFS-FCM*) para a utilização de medidas de consenso fuzzy no processo de gerenciamento de sistemas híbridos

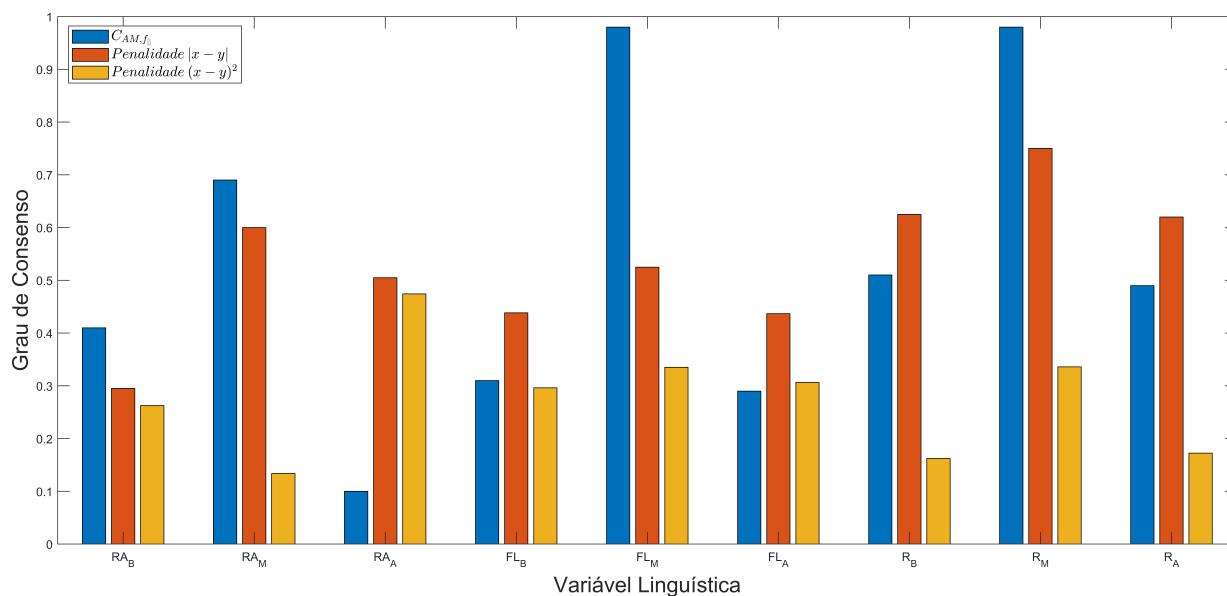


Figura 24 – Influência da Penalidade no Grau de Consenso para o Agregador AM na Modelagem Fuzzy T1.

de memórias. Assim, foram descritas as análises consensuais a partir de cinco estudos de caso com a utilização de diferentes metodologias, conforme o cenário a ser avaliado.

Tabela 20 – Consenso sobre as Variáveis de Entrada e de Saída para a Modelagem Fuzzy Tipo-1 ($Ref_{f_{||}}(x, y)$) e Penalidades.

X	C_{AM}	$C_{Penalidade}$	
		$ x - y $	$(x - y)^2$
RA_B	0.4100	0.2950	0.2626
RA_M	0.6900	0.6000	0.1339
RA_A	0.1000	0.5050	0.4743
FL_B	0.3100	0.4383	0.2962
FL_M	0.9800	0.5250	0.3351
FL_A	0.2900	0.4367	0.3063
R_B	0.5100	0.6250	0.1623
R_M	0.9800	0.7500	0.3359
R_A	0.4900	0.6200	0.1724

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

“Here comes the sun, and I say...It’s all right”.

George Harrison

Este Capítulo é dedicado a registrar as principais conclusões decorrentes da concepção da proposta CDM, sendo também apresentadas as publicações realizadas ao longo do desenvolvimento desta Tese. Também são caracterizadas alternativas para a continuidade dos trabalhos, tendo por base os esforços de estudo e pesquisa realizados.

7.1 Principais Conclusões

Dentre os indicadores decorrentes da revisão de literatura realizada no desenvolvimento desta Tese, temos a perspectiva do emprego crescente de memórias não voláteis. Seu uso acontece na perspectiva de substituir as tecnologias historicamente praticadas ou de seu emprego de forma combinada, situação esta última que dá origem aos sistemas híbridos de memória. Na perspectiva do gerenciamento destes sistemas híbridos, a perspectiva é minimizar as limitações de ambos tipos de memória, explorando com o uso de heurísticas as características desejáveis tanto das memórias voláteis, como das não voláteis.

Na organização dos sistemas híbridos, a combinação dos diferentes tipos de memória pode ocorrer a partir de diferentes pontos da hierarquia, fato que introduz desafios de gerenciamento particulares, considerando os diferentes níveis explorados no sistema híbrido em questão. Esta Tese teve por premissa que ambos tipos de memória empregados estão em um mesmo nível hierárquico, tendo como desafios centrais de pesquisa para o seu gerenciamento a coleta das estatísticas referentes as operações de leitura e escrita em ambos tipos de memória. Esta coleta ganha complexidade na medida que deve manter baixos os níveis de intrusão praticados, bem como deve empregar uma abordagem que trate as incertezas decorrentes das limitações associadas

às estruturas de dados que o hardware empregado para o gerenciamento propicia.

A partir desse cenário, o crescente emprego de sistemas híbridos formados por memórias voláteis e não voláteis, dotadas de diferentes configurações e tecnologias, constitui a motivação central para a pesquisa contemplada nesta Tese, a qual trata as incertezas introduzidas pela coleta dinâmica de informações para a tomada de decisão por parte de um mecanismo de gerenciamento. Neste contexto, medidas de consenso fuzzy assumem um papel relevante no que se refere à tomada de decisão, já que promovem um modelo para obtenção de uma análise de concordância entre as diferentes variáveis de um sistema fuzzy.

Considerando esta motivação foi concebida, nesta Tese, a estratégia *CDM*, que caracteriza a análise consensual via medidas de consenso fuzzy para auxílio na tomada de decisão. A estratégia algorítmica *CDM*, proposta nesta Tese, está estruturada em duas metodologias: (i) *FS-FCM*, referente ao processo de auxílio à tomada de decisão a partir do cálculo de consenso sobre valores fuzzy de uma função de pertinência; e (ii) *IVFS-FCM*, referente ao processo para agregar valores de medidas de consenso de funções de pertinência referentes a cada elemento de um universo, sobre o qual são definidos os correspondentes conjuntos fuzzy. Para esta metodologia, foram consideradas famílias de conjuntos fuzzy, sendo proposta a aplicação sobre vários conjuntos fuzzy tipo-1 e a aplicação sobre conjuntos fuzzy tipo-2, com foco na abordagem IVFL. Esta estratégia e suas respectivas metodologias foi empregada utilizando-se como base arquitetural a abordagem *Intf-HybridMem*, que vem sendo desenvolvida pelo Grupo de Pesquisa.

No tocante a análise consensual da estratégia proposta nesta Tese, esta foi instanciada a partir de cinco estudos de caso e diferentes metodologias, conforme o cenário a ser avaliado. Para tanto, foram utilizadas, para FL e IVFL, as medidas de consenso fuzzy C_{AM} e C_{exp} sobre as funções de pertinência, além das funções $Ref_{f_{||}}(x, y)$, $Ref_{I_{LK}}(x, y)$ e $Ref_{O_p, I_{LK}}(x, y)$, incluindo as respectivas medidas de consenso sobre conjuntos fuzzy ($\mathcal{C}_{AM}$ e $\mathcal{C}_{exp}$). Outras medidas de consenso fuzzy presentes na literatura, como as medidas C_{SK} e C_{Tastle} , também foram discutidas, além de breve análise sobre a influência das funções de penalidade nas medidas de consenso analisadas.

O primeiro estudo de caso compreende a análise consensual da abordagem *f-HybridMem* com o uso da metodologia *FS-FCM*. Para este estudo de caso, foram obtidas as medidas de consenso para a modelagem fuzzy Tipo-1 referentes à Variável Linguística (VL) e agregadores analisados.

Para o segundo estudo de caso, de modo similar ao primeiro, foi realizada a análise consensual utilizando a metodologia *FS-FCM*, no entanto com o uso da abordagem intervalar denominada *Intf-HybridMem*. Para tanto, foram obtidos os graus de consenso para as diferentes VL na modelagem das funções de pertinência valoradas intervalarmente. Para cada uma das variáveis e seus respectivos TL, foram consideradas as

funções superiores e inferiores. Assim como o comportamento identificado para a modelagem fuzzy Tipo-1 descrito no primeiro estudo de caso, para a modelagem fuzzy Tipo-2 verifica-se um maior grau de consenso para o TL médio. Estes resultados foram obtidos novamente para o agregador média aritmética para a função $Ref_{O_{0.5}, I_{LK}}(x, y)$.

O terceiro estudo de caso contempla as abordagens fuzzy e intervalar, *f-HybridMem* e *Intf-HybridMem*, respectivamente. Para estas abordagens foi utilizada a metodologia *IVFS-FCM*, sendo analisados os graus de consenso entre conjuntos fuzzy para a mesma variável linguística e diferentes funções *REF* e também as medidas obtidas para os graus de consenso considerando os valores superiores e inferiores das funções de pertinência intervalares. Neste estudo de caso foi possível observar que os valores fuzzy estão compreendidos entre os valores superiores e inferiores para as diferentes VL, considerando as funções $Ref_{f_{||}}(x, y)$ e $Ref_{I_{LK}}(x, y)$. Ao considerar a função $Ref_{O_{0.5}, I_{LK}}(x, y)$, com exceção da VL RA, foi observado comportamento similar àquele obtido para as funções *REF* anteriores.

O quarto estudo de caso, por sua vez, apresentou as análises consensuais para a metodologia *IVFS-FCM*. Para este caso, foi aplicada análise sobre a abordagem *Intf-HybridMem*, sendo obtidas as medidas de consenso sobre conjuntos fuzzy para os agregadores média aritmética e média exponencial ($\mathcal{C}_{AM}$ e $\mathcal{C}_{exp}$). Para ambos os agregadores, foram obtidos maiores graus de consenso para a função $Ref_{O_{0.5}, I_{LK}}(x, y)$.

O quinto estudo de caso, por fim, analisa especificamente o comportamento da metodologia *CDM* a partir da aplicação de funções de penalidade.

As avaliações realizadas nos cinco estudos de caso apontaram que a estratégia *CDM* proposta nesta Tese se mostra promissora, apontando que o emprego de consenso fuzzy pode contribuir significativamente para processos de tomada de decisão, e em particular no gerenciamento de sistemas híbridos de memória.

7.2 Publicações Realizadas

Nesta Seção estão elencadas as publicações decorrentes da pesquisa desenvolvida até o momento e estão ordenadas por ano de publicação.

- Estratégias para Análise Consensual na *Intf-HybridMem*. Em: Congresso Brasileiro de Sistemas Fuzzy, 2021.
- Exploring fuzzy set consensus analysis in IoT resource ranking. Em: **Engineering Applications of Artificial Intelligence (EAAI)**, vol. 1, pp. 1-23, 2021 (Em processo de revisão).
- Toward the fuzzy logic-based consensus analysis in hybrid memory managements. Em: **FUZZ-IEEE 2021 - International Conference on Fuzzy Systems**. Luxembourg: FUZZ-IEEE, 2021.

- A Proposal for Hybrid Memories Management Exploring Fuzzy-Based Page Migration Policy. Em: **ICAISC 2021 - The 20th International Conference on Artificial Intelligence and Soft Computing**. Zakopane - Poland: ICAISC, 2021.
- Intf-HybridMem: Page migration in hybrid memories considering cost efficiency. Em: **Sustainable Computing: Informatics and Systems**, SUSCOM, 2021.
- f-HybridMem: A Fuzzy-based Approach for Decision Support in Hybrid Memory Management. Em: **FUZZ-IEEE 2020 - International Conference on Fuzzy Systems**. Glasgow - UK: FUZZ-IEEE, 2020.

7.3 Trabalhos futuros

Dentre as diversas alternativas para a continuidade da pesquisa desenvolvida nesta Tese, destacamos as seguintes frentes de trabalho:

- avaliar diferentes funções na estratégia *CDM*, tais como funções de agregação, funções *overlap*, implicações fuzzy para seleção de funções REF;
- consolidar análise consensual empregando funções de penalidade e relações de dualidade;
- modelar a tomada de decisão por sistemas especialistas, com o uso de medidas de consenso;
- analisar a correlação e entropia em FL e IVFL para as diferentes variáveis linguísticas de um sistema para problemas de tomada de decisão.

Estas frentes de pesquisa elencadas configuram o panorama para o aprimoramento e expansão da estratégia *CDM*, visando promover sua consolidação como solução para gerenciamento na área de memórias híbridas e também podendo ser aplicada a outras áreas de pesquisa.

REFERÊNCIAS

- AGRAWAL, A.; ANSARI, A.; TORRELLAS, J. Mosaic: Exploiting the spatial locality of process variation to reduce refresh energy in on-chip eDRAM modules. In: IEEE INTL SYMP. ON HIGH PERF. COMPUT. ARCH., 2014. **Anais...** [S.l.: s.n.], 2014. p.84–95.
- AHN, J.; CHOI, K. LASIC: Loop-Aware Sleepy Instruction Caches Based on STT-RAM Technology. **IEEE Trans. on VLSI Systems**, [S.l.], v.22, n.5, p.1197–1201, May 2014.
- AHN, J. H.; LI, S.; O, S.; JOUPPI, N. P. McSimA+: A manycore simulator with application-level+ simulation and detailed microarchitecture modeling. **IEEE Intl. Symp. on Perf. Analysis of Syst. and Softw. (ISPASS)**, [S.l.], p.74–85, 2013.
- AHN, J.; YOO, S.; CHOI, K. Prediction hybrid cache: An energy-efficient STT-RAM cache architecture. **IEEE Trans. on Computers**, [S.l.], v.65, n.3, p.940–951, 2016.
- ALABOOL, H. M.; MAHMOOD, A. K. Trust-Based Service Selection in Public Cloud Computing Using Fuzzy Modified VIKOR Method. **Australian Journal of Basic and Applied Sciences**, [S.l.], v.7, n.9, p.211–220, 2013.
- ALMULLA, M.; YAHYAOU, H.; AL-MATORI, K. A new fuzzy hybrid technique for ranking real world Web services. **Knowledge-Based Systems**, [S.l.], v.77, p.1–15, 2015.
- AMIRI, P. K. et al. Switching current reduction using perpendicular anisotropy in CoFeB–MgO magnetic tunnel junctions. **Applied Physics Letters**, [S.l.], v.98, n.11, p.112507, 2011.
- APALKOV, D. et al. Spin-transfer torque magnetic random access memory (STT-MRAM). **ACM Journal on Emerging Technologies in Computing Syst.**, [S.l.], v.9, n.2, p.13, 2013.
- BACZYŃSKI, M.; JAYARAM, B. **Fuzzy Implications**. [S.l.]: Springer, 2008. (Studies in Fuzziness and Soft Computing, v.231).
- BANAKAR, R. et al. Scratchpad memory: design alternative for cache on-chip memory in embedded systems. In: INTL. SYMP. ON HARDW./SOFTW. CODESIGN, 2002. **Proceedings...** [S.l.: s.n.], 2002. p.73–78.

BARROS, L. C. de; BASSANEZI, R. C. **Tópicos de Lógica Fuzzy e Biomatemática**. [S.l.]: UNICAMP/IMECC, 2006. v.5. Coleção IMECC - Textos didáticos.

BEDREGAL, B.; DIMURO, G. P.; SANTIAGO, R.; REISER, R. On interval fuzzy S-implications. **Information Sciences**, [S.l.], v.180, n.8, p.1373–1389, 2010.

BEDREGAL, B. R. C. On interval fuzzy negations. **Fuzzy Sets Syst.**, [S.l.], v.161, n.17, p.2290–2313, 2010.

BELIAKOV, G.; CALVO, T.; JAMES, S. Consensus measures constructed from aggregation functions and fuzzy implications. **Knowledge-Based Systems**, [S.l.], v.55, p.1–8, 2014.

BELIAKOV, G.; PRADERA, A.; CALVO, T. **Aggregation Functions: A Guide for Practitioners**. [S.l.]: Springer, 2007. (Studies in Fuzziness and Soft Computing, v.221).

BERKOWITS, S. Pin-a dynamic binary instrumentation tool. **Intel Developer Zone**, [S.l.], 2012.

BEZDEK, J.; KELLER, J.; KRISHNAPURAM, R.; PAL, N. **Fuzzy Models and Algorithms for Pattern Recognition and Image Processing**. [S.l.]: Kluwer Academic Publishers, 1999. (The Handbooks of Fuzzy Sets Series, v.4).

BIENIA, C. **Benchmarking modern multiprocessors**. [S.l.]: Princeton University, 2011.

BIENIA, C.; KUMAR, S.; SINGH, J. P.; LI, K. The PARSEC benchmark suite: Characterization and architectural implications. In: INTL. CONF. ON PARALLEL ARCH. AND COMPILATION TECHNIQUES, 2008. **Proceedings...** [S.l.: s.n.], 2008. p.72–81.

BINKERT, N. L. et al. The M5 simulator: Modeling networked systems. **IEEE Micro**, [S.l.], v.26, n.4, p.52–60, 2006.

BINKERT, N. et al. The gem5 simulator. **ACM SIGARCH Comput. Arch. News**, [S.l.], v.39, n.2, p.1–7, 2011.

BISHNOI, R.; EBRAHIMI, M.; OBORIL, F.; TAHOORI, M. B. Asynchronous asymmetrical write termination (AAWT) for a low power STT-MRAM. In: CONF. ON DESIGN, AUTOM. & TEST IN EUR., 2014. **Proceedings...** [S.l.: s.n.], 2014. p.180.

BISHNOI, R.; OBORIL, F.; EBRAHIMI, M.; TAHOORI, M. B. Avoiding unnecessary write operations in STT-MRAM for low power implementation. In: INTL. SYMP. ON QUALITY ELECTRON. DESIGN, 2014. **Anais...** [S.l.: s.n.], 2014. p.548–553.

BURR, G. W. et al. Recent Progress in Phase-Change Memory Technology. **IEEE Journal on Emerging and Selected Topics in Circuits and Systems**, [S.I.], v.6, n.2, p.146–162, June 2016.

BUSTINCE, H. Interval-valued Fuzzy Sets in Soft Computing. **International Journal of Computational Intelligence Systems**, [S.I.], v.3, n.2, p.215–222, June 2010.

BUSTINCE, H.; BARRENECHEA, E.; PAGOLA, M. Restricted equivalence functions. **Fuzzy Sets and Systems**, [S.I.], v.157, n.17, p.2333–2346, 2006.

BUSTINCE, H.; BARRENECHEA, E.; PAGOLA, M. Relationship between restricted dissimilarity functions, restricted equivalence functions and normal E_N -functions: Image thresholding invariant. **Pattern Recognition Letters**, [S.I.], v.29, n.4, p.525–536, 2008.

BUSTINCE, H.; BURILLO, P.; SORIA, F. Automorphisms, negations and implication operators. **Fuzzy Sets and Systems**, [S.I.], v.134, n.2, p.209–229, 2003.

BUSTINCE, H.; FERNANDEZ, J.; BURILLO, P. Penalty Function in Optimization Problems: A Review of Recent Developments. In: **Soft Computing Based Optimization and Decision Models**. [S.I.]: Springer International Publishing, 2017. p.275–287.

BUSTINCE, H.; FERNANDEZ, J.; KOLESÁROVÁ, A.; MESIAR, R. Generation of linear orders for intervals by means of aggregation functions. **Fuzzy Sets and Systems**, [S.I.], v.220, p.69 – 77, 2013. Theme: Aggregation functions.

BUSTINCE, H. et al. Generalization of the weighted voting method using penalty functions constructed via faithful restricted dissimilarity functions. **European Journal of Operational Research**, [S.I.], v.225, n.3, p.472–478, 2013.

BUSTINCE, H. et al. Consensus in multi-expert decision making problems using penalty functions defined over a Cartesian product of lattices. **Information Fusion**, [S.I.], v.17, p.56–64, 2014.

BUSTINCE, H. et al. On the definition of penalty functions in data aggregation. **Fuzzy Sets and Systems**, [S.I.], 2016. <http://dx.doi.org/10.1016/j.fss.2016.09.011>.

BUSTINCE, H.; PAGOLA, M.; BARRENECHEA, E. Construction of fuzzy indices from fuzzy DI-subsethood measures: Application to the global comparison of images. **Information Sciences**, [S.I.], v.177, n.3, p.906–929, 2007.

CABRERA, N. **Aplicação da Extensão de Zadeh para Conjuntos Fuzzy Tipo 2 Intervalar**. 2014. 72p. Dissertação (Mestrado em Ciência da Computação) — Universidade Federal de Uberlândia.

CALVO, T.; BELIAKOV, G. Aggregation functions based on penalties. **Fuzzy Sets Syst.**, [S.I.], v.161, n.10, p.1420–1436, 2010.

CALVO, T.; MESIAR, R.; YAGER, R. R. Quantitative weights and aggregation. **IEEE Trans. Fuzzy Syst.**, [S.I.], v.12, n.1, p.62–69, 2004.

CARGNINI, L. V. et al. Embedded memory hierarchy exploration based on magnetic random access memory. **Journal of Low Power Electron. and Applications**, [S.I.], v.4, n.3, p.214–230, 2014.

CARLSSON, C.; FULLER, R. **Fuzzy Reasoning in Decision Making and Optimization**. Heidelberg: Physiva-Verlag Springer, 2002.

CHEN, A. A review of emerging non-volatile memory (NVM) technologies and applications. **Solid-State Electronics**, [S.I.], v.125, p.25 – 38, 2016. Extended papers selected from ESSDERC 2015.

CHEN, E. et al. Advances and Future Prospects of Spin-Transfer Torque Random Access Memory. **IEEE Transactions on Magnetism**, [S.I.], v.46, n.6, p.1873–1878, June 2010.

CHEN, G.; PHAM, T. T. **Fuzzy Sets, Fuzzy Logic, and Fuzzy Control Systems**. Boca Raton: CRC Press, 2001.

CHOI, J.; PARK, G. NVM Way Allocation Scheme to Reduce NVM Writes for Hybrid Cache Architecture in Chip-Multiprocessors. **IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems**, [S.I.], v.28, n.10, p.2896–2910, Oct 2017.

CHUNG, Y. M.; HALIM, Z. A. Adaptive Neuro-fuzzy Inference System as Cache Memory Replacement Policy. **Advances in Electrical and Computer Engineering**, [S.I.], v.14, n.1, p.15–24, 2014.

DESCHRIJVER, G. A representation of t-norms in interval-valued L-fuzzy set theory. **Fuzzy Sets Syst**, [S.I.], v.159, n.13, p.1597–1618, 2008.

DIAB, H.; KASHANI, A.; NASRI, A. Cache replacement engine: A fuzzy logic approach. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON THE CURRENT TRENDS IN INFORMATION TECHNOLOGY (CTIT), 2009., 2009. **Anais...** IEEE, 2009.

DIMURO, G. P.; BEDREGAL, B. R. C.; SANTIAGO, R. H. N.; REISER, R. H. S. Interval additive generators of interval t-norms and interval t-conorms. **Inf. Sci.**, [S.I.], v.181, n.18, p.3898–3916, 2011.

DIMURO, G. P. et al. Penalty-Based Functions Defined by Pre-aggregation Functions. In: INFORMATION PROCESSING AND MANAGEMENT OF UNCERTAINTY IN KNOWLEDGE-BASED SYSTEMS. THEORY AND FOUNDATIONS - 17TH INTERNATIONAL CONFERENCE, IPMU 2018, CÁDIZ, SPAIN, JUNE 11-15, 2018, PROCEEDINGS, PART II, 2018. **Anais...** Springer, 2018. p.403–415. (Communications in Computer and Information Science, v.854).

DONG, X.; XU, C.; JOUPPI, N.; XIE, Y. NVSim: A circuit-level performance, energy, and area model for emerging non-volatile memory. In: **Emerging Memory Tech.** [S.l.]: Springer, 2014. p.15–50.

DUBOIS, D.; PRADE, H. (Ed.). **Fundamentals of Fuzzy Sets.** Boston, MA: Springer US, 2000. p.21–124.

DUBOIS, D.; PRADE, H. **Fuzzy sets and systems - Theory and applications.** New York: Academic press, 1980.

ELKANO, M. et al. Consensus via penalty functions for decision making in ensembles in fuzzy rule-based classification systems. **Appl. Soft Comput.**, [S.l.], v.67, p.728–740, 2018.

ENDO, T. et al. An Overview of Nonvolatile Emerging Memories—Spintronics for Working Memories. **IEEE Journal on Emerging and Selected Topics in Circuits and Syst.**, [S.l.], v.6, n.2, p.109–119, 2016.

FAN, S.; ZHANG, W.; XU, W. Fuzzy inference based on fuzzy concept lattice. **Fuzzy Sets and Systems**, [S.l.], v.157, n.24, p.3177–3187, 2006.

FERREIRA, A. P. et al. Using PCM in Next-generation Embedded Space Applications. In: IEEE REAL-TIME AND EMBEDDED TECHNOLOGY AND APPLICATIONS SYMPOSIUM, 2010., 2010. **Anais...** [S.l.: s.n.], 2010. p.153–162.

FODOR, J. C. On fuzzy implication operators. **Fuzzy Sets and Systems**, [S.l.], v.42, n.3, p.293–300, 1991.

FODOR, J. C. A new look at fuzzy connectives. **Fuzzy Sets and Systems**, [S.l.], v.57, n.2, p.141–148, July 1993.

FODOR, J. C.; ROUBENS, M. **Fuzzy Preference Modelling and Multicriteria Decision Support.** [S.l.]: Springer, 1994. (Theory and Decision Library, v.14).

FUJITA, S. et al. Technology trends and near-future applications of embedded STT-MRAM. In: IEEE INTL. MEM. WORKSHOP, 2015. **Anais...** [S.l.: s.n.], 2015. p.1–5.

GAO, T. et al. Using managed runtime systems to tolerate holes in wearable memories. In: ACM SIGPLAN NOTICES, 2013. **Anais...** [S.l.: s.n.], 2013. v.48, n.6, p.297–308.

GARCÍA-LAPRESTA, J. L.; VEGA, C. L. de la; PEREIRA, R. A. M.; URRUTIA, A. M. A Class of Poverty Measures Induced by the Dual Decomposition of Aggregation Functions. **Int. Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems**, [S.l.], v.18, n.4, p.493–511, 2010.

GIERZ, G. et al. **Continuous Lattices and Domains**. Cambridge: Cambridge Press, 2003.

GOMIDE, F. A. C.; GUDWIN, R. R.; TANSCHKEIT, R. Conceitos Fundamentais Da Teoria De Conjuntos Fuzzy , Lógica Fuzzy e Aplicações. In: IFSA CONGRESS - TUTORIALS, 6., 1995. **Proceedings...** [S.l.: s.n.], 1995. p.1–38.

GOUX, L. et al. Ultralow sub-500nA operating current high-performance TiN\Al₂O₃\HfO₂\Hf\TiN bipolar RRAM achieved through understanding-based stack-engineering. In: SYMP. ON VLSI TECHNOLOGY, 2012. **Anais...** [S.l.: s.n.], 2012. p.159–160.

GRABISCH, M.; MARICHAL, J.; MESIAR, R.; PAP, E. **Aggregation Functions (Encyclopedia of Mathematics and Its Applications)**. 1st.ed. New York, NY, USA: Cambridge University Press, 2009.

GRATTAN-GUINNESS, I. Fuzzy Membership Mapped onto Intervals and Many-Valued Quantities. **Mathematical Logic Quarterly**, [S.l.], v.22, n.1, p.149–160, 1976.

GUSTAFSSON, J.; BETTS, A.; ERMEDAHL, A.; LISPER, B. The Mälardalen WCET benchmarks: Past, present and future. In: OASICS-OPENACCESS SERIES IN INFORMATICS, 2010. **Anais...** [S.l.: s.n.], 2010. v.15.

GUTHAUS, M. R. et al. MiBench: A free, commercially representative embedded benchmark suite. In: IEEE INTL. WORKSHOP ON WORKLOAD CHARACTERIZATION, 2001. **Anais...** [S.l.: s.n.], 2001. p.3–14.

HENNESSY, J. L.; PATTERSON, D. A. **Arquitetura de Computadores**: uma abordagem quantitativa. [S.l.]: Elsevier, 2014.

HENNING, J. L. SPEC CPU2006 benchmark descriptions. **ACM SIGARCH Computer Arch. News**, [S.l.], v.34, n.4, p.1–17, 2006.

HEROUX, M. A. et al. Improving performance via mini-applications. **Sandia National Laboratories, Tech. Rep. SAND2009-5574**, [S.l.], v.3, 2009.

HORNIK, K.; MEYER, D. Deriving Consensus Rankings from Benchmarking Experiments. In: ADVANCES IN DATA ANALYSIS, PROCEEDINGS OF THE 30TH ANNUAL CONFERENCE OF THE GESELLSCHAFT FÜR KLASSIFIKATION E.V., FREIE UNIVERSITÄT BERLIN, MARCH 8-10, 2006, 2006. **Anais...** Springer, 2006. p.163–170. (Studies in Classification, Data Analysis, and Knowledge Organization).

HU, J. et al. Data allocation optimization for hybrid scratch pad memory with SRAM and nonvolatile memory. **IEEE Trans. on VLSI Syst.**, [S.l.], v.21, n.6, p.1094–1102, 2013.

HU, Q.; SUN, G.; SHU, J.; ZHANG, C. Exploring main memory design based on race-track memory technology. In: INTL. GREAT LAKES SYMP. ON VLSI (GLSVLSI), 2016. **Anais...** [S.l.: s.n.], 2016. p.397–402.

HUAI, Y. Spin-transfer torque MRAM (STT-MRAM): Challenges and prospects. **AAPPS bulletin**, [S.l.], v.18, n.6, p.33–40, 2008.

HUANG, J. et al. Virtual Page Behavior Based Page Management Policy for Hybrid Main Memory in Cloud Computing. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON MOBILE AD-HOC AND SENSOR NETWORKS (MSN), 2016., 2016. **Anais...** IEEE, 2016.

JHA, N. K.; GUPTA, S. **Testing of Digital Systems**. USA: Cambridge University Press, 2002.

JIN, H. et al. **The OpenMP Implementation of NAS Parallel Benchmarks and its Performance**. [S.l.: s.n.], 1999.

JOG, A. et al. Cache revive: architecting volatile STT-RAM caches for enhanced performance in CMPs. In: DESIGN AUTOM. CONF., 2012. **Proceedings...** [S.l.: s.n.], 2012. p.243–252.

JOO, Y. et al. Energy-and endurance-aware design of phase change memory caches. In: DESIGN, AUTOM. & TEST IN EUR. CONF. & EXHIBITION, 2010, 2010. **Anais...** [S.l.: s.n.], 2010. p.136–141.

JUNG, J.-Y.; CHO, S. Memorage: Emerging persistent RAM based malleable main memory and storage architecture. In: INTL. ACM CONF. ON SUPERCOMPUTING, 2013. **Proceedings...** [S.l.: s.n.], 2013. p.115–126.

KANDEL, A.; PACHECO, R.; MARTINS, A.; KHATOR, S. The Foundations of Rule-Based Computations in Fuzzy Models. In: **International Series in Intelligent Technologies**. [S.l.]: Springer US, 1996. p.231–263.

KANG, S. H.; PARK, C. MRAM: Enabling a sustainable device for pervasive system architectures and applications. In: IEEE INTL. ELECTRON DEVICES MEETING, 2017. **Anais...** [S.l.: s.n.], 2017. p.38.2.1–38.2.4.

KANNAN, S.; GAVRILOVSKA, A.; SCHWAN, K.; MILOJICIC, D. Optimizing checkpoints using NVM as virtual memory. In: IEEE 27TH INTL. SYMP. ON PARALLEL & DISTRIBUTED PROCESSING, 2013. **Anais...** [S.l.: s.n.], 2013. p.29–40.

KAWAHARA, A. et al. An 8 Mb multi-layered cross-point ReRAM macro with 443 MB/s write throughput. **IEEE Journal of Solid-State Circuits**, [S.l.], v.48, n.1, p.178–185, 2013.

KHAJOUINEJAD, S.; SABEGHI, M.; SADEGHZADEH, A. A Fuzzy Cache Replacement Policy and Its Experimental Performance Assessment. In: INNOVATIONS IN INFORMATION TECHNOLOGY, 2006., 2006. **Anais...** [S.l.: s.n.], 2006. p.1–5.

KHOUZANI, H. A.; HOSSEINI, F. S.; YANG, C. Segment and Conflict Aware Page Allocation and Migration in DRAM-PCM Hybrid Main Memory. **IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems**, [S.l.], v.36, n.9, p.1458–1470, 2017.

KIM, H. et al. In-memory file system for non-volatile memory. In: RESEARCH IN ADAPTIVE AND CONVERGENT SYSTEMS, 2013. **Proceedings...** [S.l.: s.n.], 2013. p.479–484.

KIM, S. Resistive RAM (ReRAM) technology for high density memory applications. In: WORKSHOP INNOVATIVE MEMORY TECHNOLOGY MINATEC; JUNE 21-24, 4., 2012. **Anais...** [S.l.: s.n.], 2012.

KIM, Y.-B. et al. Bi-layered RRAM with unlimited endurance and extremely uniform switching. In: SYMP. ON VLSI TECHNOLOGY, 2011. **Anais...** [S.l.: s.n.], 2011. p.52–53.

KLEMENT, E. P.; NAVARA, M. A survey on different triangular norm-based fuzzy logics. **Fuzzy Sets and Systems**, [S.l.], v.101, n.2, p.241–251, 1999.

KOMALAN, M. et al. Feasibility exploration of nvm based i-cache through mshr enhancements. In: CONF. ON DESIGN, AUTOM. & TEST IN EUROPE, 2014. **Proceedings...** [S.l.: s.n.], 2014. p.21.

KOMALAN, M. P. et al. System level exploration of a STT-MRAM based level 1 data-cache. In: DESIGN, AUTOM. & TEST IN EUR. CONF. & EXHIBITION, 2015. **Proceedings...** [S.l.: s.n.], 2015. p.1311–1316.

KROFT, D. Lockup-free instruction fetch/prefetch cache organization. In: SYMP. ON COMPUT. ARCH., 1981. **Proceedings...** [S.l.: s.n.], 1981. p.81–87.

LATTNER, C.; ADVE, V. LLVM: A compilation framework for lifelong program analysis & transformation. In: INTL. SYMP. ON CODE GENERATION AND OPTIMIZATION: FEEDBACK-DIRECTED AND RUNTIME OPTIMIZATION, 2004. **Proceedings...** [S.l.: s.n.], 2004. p.75.

LEE, B. C.; IPEK, E.; MUTLU, O.; BURGER, D. Architecting phase change memory as a scalable dram alternative. In: ACM SIGARCH COMPUT. ARCH. NEWS, 2009. **Anais...** [S.l.: s.n.], 2009. v.37, n.3, p.2–13.

LEE, B. C. et al. Phase-Change Technology and the Future of Main Memory. **IEEE Micro**, [S.l.], v.30, n.1, p.143–143, Jan 2010.

LEE, C.; POTKONJAK, M.; MANGIONE-SMITH, W. H. MediaBench: a tool for evaluating and synthesizing multimedia and communications systems. In: ACM/IEEE INTL. SYMPOSIUM ON MICROARCHITECTURE, 1997. **Proceedings...** [S.l.: s.n.], 1997. p.330–335.

LI, B.; SHAN, S.; HU, Y.; LI, X. Partial-SET: write speedup of PCM main memory. In: DESIGN, AUTOM. TEST EUR. CONF. AND EXHIBITION, 2014, 2014. **Anais...** [S.l.: s.n.], 2014. p.1–4.

LI, H.; CHEN, Y. An overview of non-volatile memory technology and the implication for tools and architectures. In: DESIGN, AUTOM. & TEST IN EUR. CONF. & EXHIBITION, 2009. **Anais...** [S.l.: s.n.], 2009. p.731–736.

LI, J. et al. Low-energy volatile STT-RAM cache design using cache-coherence-enabled adaptive refresh. **ACM Trans. on Design Autom. of Electron. Syst.**, [S.l.], v.19, n.1, p.5, 2013.

LI, J.; XUE, C. J.; XU, Y. STT-RAM based energy-efficiency hybrid cache for CMPs. In: IEEE/IFIP 19TH INTL. CONF. ON VLSI AND SYSTEM-ON-CHIP, 2011. **Anais...** [S.l.: s.n.], 2011. p.31–36.

LI, L.; GAO, L.; XUE, J. Memory coloring: A compiler approach for scratchpad memory management. In: INTL. CONF. ON PARALLEL ARCH. AND COMPILATION TECHNIQUES (PACT), 14., 2005. **Anais...** [S.l.: s.n.], 2005. p.329–338.

LI, Q. et al. Compiler-assisted STT-RAM-based hybrid cache for energy efficient embedded systems. **IEEE Trans. on VLSI Systems**, [S.l.], v.22, n.8, p.1829–1840, 2014.

LI, Q. et al. Compiler-assisted refresh minimization for volatile STT-RAM cache. **IEEE Trans. on Computers**, [S.l.], v.64, n.8, p.2169–2181, 2015.

LI, X.; LIANG, Y.; MITRA, T.; ROYCHOUDHURY, A. Chronos: A timing analyzer for embedded software. **Science of Computer Programming**, [S.l.], v.69, n.1, p.56–67, 2007.

LIN, C.; CHIOU, J.-N. High-endurance hybrid cache design in CMP architecture with cache partitioning and access-aware policies. **IEEE Trans. on VLSI Syst.**, [S.l.], v.23, n.10, p.2149–2161, 2015.

LIU, T. et al. A 130.7-mm^2 2-Layer 32-Gb ReRAM Memory Device in 24-nm Technology. **IEEE Journal of Solid-State Circuits**, [S.l.], v.49, n.1, p.140–153, 2014.

MAGNUSSON, P. S. et al. Simics: A full system simulation platform. **Computer**, [S.l.], v.35, n.2, p.50–58, 2002.

MAMDANI, E. H.; ASSILIAN, S. An experiment in linguistic synthesis with a fuzzy logic controller. **International Journal of Man-Machine Studies**, [S.l.], 1975.

MARTIN, M. M. K. et al. Multifacet's General Execution-driven Multiprocessor Simulator (GEMS) Toolset. **SIGARCH Comput. Archit. News**, New York, NY, USA, v.33, n.4, p.92–99, Nov. 2005.

MARTÍNEZ-PANERO, M. Consensus Perspectives: Glimpses into Theoretical Advances and Applications. In: HERRERA-VIDEIRA, E. et al. (Ed.). **Consensual Processes**. [S.l.]: Springer, 2011. p.179–193. (Studies in Fuzziness and Soft Computing, v.267).

MEENA, J. S.; SZE, S. M.; CHAND, U.; TSENG, T.-Y. Overview of emerging nonvolatile memory technologies. **Nanoscale research letters**, [S.l.], v.9, n.1, p.526, 2014.

MENDEL, J. M. **Uncertain Rule-Based Fuzzy Systems: Introduction and New Directions**. 2.ed. [S.l.]: Springer International Publishing, 2017. 684p.

MEZZOMO, I.; FRAZÃO, H.; BEDREGAL, B. R. C.; SILVA MENEZES, M. da. On the Dominance Relation Between Ordinal Sums of Quasi-Overlap Functions. In: IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON FUZZY SYSTEMS, FUZZ-IEEE 2020, GLASGOW, UK, JULY 19-24, 2020, 29., 2020. **Anais...** IEEE, 2020. p.1–7.

MIGUEL, L. D. et al. Construction of admissible linear orders for interval-valued Atanassov intuitionistic fuzzy sets with an application to decision making. **Information Fusion**, [S.l.], v.27, p.189 – 197, 2016.

MITTAL, S. A Survey of Techniques for Architecting Processor Components Using Domain-Wall Memory. **ACM Journal on Emerging Technologies in Computing Syst.**, [S.l.], v.13, n.2, p.29, 2016.

MITTAL, S.; VETTER, J. S. A survey of software techniques for using non-volatile memories for storage and main memory systems. **IEEE Trans. on Parallel and Distributed Syst.**, [S.l.], v.27, n.5, p.1537–1550, 2016.

MITTAL, S.; VETTER, J. S.; LI, D. Improving Energy Efficiency of Embedded DRAM Caches for High-end Computing Systems. In: INTL. SYMP. ON HIGH-PERF. PARALLEL AND DISTRIBUTED COMPUTING, 23., 2014, New York, NY, USA. **Proceedings...** ACM, 2014. p.99–110. (HPDC '14).

MITTAL, S.; VETTER, J. S.; LI, D. A survey of architectural approaches for managing embedded DRAM and non-volatile on-chip caches. **IEEE Trans. on Parallel and Distributed Syst.**, [S.l.], v.26, n.6, p.1524–1537, 2015.

MONAZZAH, A. M. H. et al. FTSPM: A fault-tolerant scratchpad memory. In: ANNUAL IEEE/IFIP INTL. CONF. ON DEPENDABLE SYSTEMS AND NETWORKS, 43., 2013. **Anais...** [S.l.: s.n.], 2013. p.1–10.

MOORE, R.; LODWICK, W. Interval analysis and fuzzy set theory. **Fuzzy Sets and Systems**, [S.l.], v.135, n.1, p.5–9, 2003.

MORARU, I. et al. Consistent, durable, and safe memory management for byte-addressable non volatile main memory. In: ACM SIGOPS CONF. ON TIMELY RESULTS IN OPERATING SYSTEMS, 2013. **Proceedings...** [S.l.: s.n.], 2013. p.1.

MOURA, B. M. P. et al. Interval-Valued Fuzzy Logic Approach for Overloaded Hosts in Consolidation of Virtual Machines in Cloud Computing. **Fuzzy Sets and Systems**, [S.l.], v.1, n.2, p.1–23, 2021.

MOURA, R. C. d. **Intf-HybridMem: Uma Abordagem para Gerência de Memórias Híbridas Explorando Sistemas Fuzzy**. 2021. 96p. Tese (Doutorado em Ciência da Computação) — Universidade Federal de Pelotas.

MOURA, R. C. de et al. Intf-HybridMem: Page migration in hybrid memories considering cost efficiency. **Sustainable Computing: Informatics and Systems**, [S.l.], v.29, p.100466, 2021.

MOURA, R. C. et al. f-HybridMem: A Fuzzy-based Approach for Decision Support in Hybrid Memory Management. In: IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON FUZZY SYSTEMS (FUZZ-IEEE), 2020. **Anais...** [S.l.: s.n.], 2020. p.1–8.

MURALIMANOHAR, N.; BALASUBRAMONIAN, R.; JOUPPI, N. Optimizing NUCA organizations and wiring alternatives for large caches with CACTI 6.0. In: ANNUAL IEEE/ACM INTL. SYMP. ON MICROARCHITECTURE, 2007. **Proceedings...** [S.l.: s.n.], 2007. p.3–14.

MURALIMANO HAR, N.; BALASUBRAMONIAN, R.; JOUPPI, N. P. CACTI 6.0: A tool to model large caches. **HP Laboratories**, [S.l.], p.22–31, 2009.

NIU, J.; XU, J.; XIE, L. Online fuzzy logic control with decision tree for improving hybrid cache performance symposia. In: IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON CONTROL AND AUTOMATION (ICCA), 2016., 2016. **Anais...** [S.l.: s.n.], 2016. p.511–516.

NOGUCHI, H. et al. A 10T Non-precharge Two-Port SRAM Reducing Readout Power for Video Processing. **IEICE Trans. Electron.**, [S.l.], v.91-C, n.4, p.543–552, 2008.

Oliveira, L. S. et al. Toward a Fuzzy Logic-Based Consensus Analysis in Hybrid Memory Management. In: IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON FUZZY SYSTEMS (FUZZ-IEEE), 2021. **Anais...** [S.l.: s.n.], 2021.

Oliveira, L. S. et al. A Proposal for Hybrid Memories Management Exploring Fuzzy-Based Page Migration Policy. In: CONFERENCE ON ARTIFICIAL INTELLIGENCE AND SOFT COMPUTING (ICAISC), 2021. **Anais...** [S.l.: s.n.], 2021.

OLIVEIRA TORRES, G. de. **An Evaluation of Memory Controllers for Non-Volatile Memories**. 2018. Dissertação (Mestrado em Ciência da Computação) — Universidade Federal de Pelotas, Pelotas, RS.

PAIVA, R.; PALMEIRA, E. S.; SANTIAGO, R. H. N.; BEDREGAL, B. R. C. Lattice-valued Overlap and Quasi-Overlap Functions. **Information Sciences**, [S.l.], v.562, p.180–199, 2021.

PALMEIRA, E. S.; BEDREGAL, B. R. C.; VARGAS, R. R. de. Characterization of Lattice-Valued Restricted Equivalence Functions. In: FUZZY INFORMATION PROCESSING - 37TH CONFERENCE OF THE NORTH AMERICAN FUZZY INFORMATION PROCESSING SOCIETY, NAFIPS 2018, FORTALEZA, BRAZIL, JULY 4-6, 2018, PROCEEDINGS, 2018. **Anais...** Springer, 2018. p.167–178. (Communications in Computer and Information Science, v.831).

PALMEIRA, E. S. et al. Application of two different methods for extending lattice-valued restricted equivalence functions used for constructing similarity measures on L -fuzzy sets. **Information Sciences**, [S.l.], v.441, p.95–112, 2018.

PAVLOV, A.; SACHDEV, M. **CMOS SRAM Circuit Design and Parametric Test in Nano-Scaled Technologies: Process-Aware SRAM Design and Test**. 1st.ed. [S.l.]: Springer Publishing Company, Incorporated, 2008.

PEKALA, B. **Uncertainty Data in Interval-Valued Fuzzy Set Theory - Properties, Algorithms and Applications**. [S.l.]: Springer, 2019. (Studies in Fuzziness and Soft Computing, v.367).

PRIYA, N. H.; CHANDRAMATHI, S. QoS Based Optimal Selection of Web Services Using Fuzzy Logic. **Journal of Emerging Technologies in Web Intelligence** 6.3 (2014): 331-339, [S.l.], v.6, n.3, p.331–339, 2014.

QADRI, M. Y.; MAIER, K. D. A fuzzy logic based dynamic reconfiguration scheme for optimal energy and throughput in symmetric chip multiprocessors. In: NASA/ESA CONFERENCE ON ADAPTIVE HARDWARE AND SYSTEMS, 2010., 2010. **Anais...** IEEE, 2010.

QIU, K. et al. Migration-aware loop retiming for STT-RAM-based hybrid cache in embedded systems. **IEEE Trans. on Computer-Aided Design of Integr. Circuits Syst.**, [S.l.], v.33, n.3, p.329–342, 2014.

QIU, M.; CHEN, Z.; LIU, M. Low-power low-latency data allocation for hybrid scratchpad memory. **IEEE Embedded Systems Letters**, [S.l.], v.6, n.4, p.69–72, 2014.

RABIN, S. **AI Game Programming Wisdom**. Rockland, MA, USA: Charles River Media, Inc., 2002.

RAMOS, L. E.; GORBATOV, E.; BIANCHINI, R. Page Placement in Hybrid Memory Systems. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON SUPERCOMPUTING, 2011, New York, NY, USA. **Proceedings...** Association for Computing Machinery, 2011. p.85–95. (ICS '11).

REISER, R. H. S.; BEDREGAL, B. R. C.; BACZYŃSKI, M. Aggregating fuzzy implications. **Information Sciences**, [S.l.], v.253, p.126–146, 2013.

REISER, R. H. S.; DIMURO, G. P.; BEDREGAL, B. C.; SANTIAGO, R. H. N. Interval Valued QL-Implications. In: **Logic, Language, Information and Computation**. [S.l.]: Springer Berlin Heidelberg, 2007. p.307–321.

RICCI, R. G. Penalty functions based upon a general class of restricted dissimilarity functions. **European Journal of Operational Research**, [S.l.], v.241, n.3, p.806–814, 2015.

RODRÍGUEZ, G.; TOURINO, J.; KANDEMIR, M. T. Volatile STT-RAM scratchpad design and data allocation for low energy. **ACM Trans. on Arch. and Code Optimization**, [S.l.], v.11, n.4, p.38, 2015.

SAMBUC, R. **Fonctions ϕ -floues. Application l'aide au Diagnostic en Pathologie Thyroïdienne**. 1975. Tese (Doutorado em Ciência da Computação) — , Marseille.

SAMPSON, A.; NELSON, J.; STRAUSS, K.; CEZE, L. Approximate storage in solid-state memories. **ACM Trans. on Comput. Syst.**, [S.l.], v.32, n.3, p.9, 2014.

SANTIAGO, R.; BEDREGAL, B.; ACIÓLY, B. Formal aspects of correctness and optimality of interval computations. **Formal Aspects of Computing**, [S.l.], v.18, n.2, p.231–243, 2006.

SANTOS, H. S. et al. Similarity measures, penalty functions, and fuzzy entropy from new fuzzy subethood measures. **Int. J. Intell. Syst.**, [S.l.], v.34, n.6, p.1281–1302, 2019.

SAWA, A. Resistive switching in transition metal oxides. **Materials today**, [S.l.], v.11, n.6, p.28–36, 2008.

SCHNEIDER, G. B.; MOURA, B. M. P.; YAMIN, A. C.; REISER, R. H. S. Int-FLBCC: Model for Load Balancing in Cloud Computing using Fuzzy Logic Type-2 and Admissible Orders. **RITA**, [S.l.], v.27, n.3, p.102–117, 2020.

SEO, Y. J.; AN, H. M.; KIM, H. D.; KIM, T. G. Improved performance in charge-trap type flash memories with an Al₂O₃ dielectric by using bandgap engineering of charge-trapping layers. **J Korean Phys Soc**, [S.l.], v.55, n.6, p.2679–2692, 2009.

SILER, W.; BUCKLEY, J. J. **Fuzzy Expert Systems and Fuzzy Reasoning**. New York: John Wiley, 2004.

SMULLEN, C. W. et al. Relaxing non-volatility for fast and energy-efficient STT-RAM caches. In: INTL. SYMP. ON HIGH PERF. COMPUT. ARCH., 2011. **Anais...** [S.l.: s.n.], 2011. p.50–61.

SMULLEN, C. W.; NIGAM, A.; GURUMURTHI, S.; STAN, M. R. The STeTSiMS STT-RAM simulation and modeling system. In: INTL. CONF. ON COMPUTER-AIDED DESIGN, 2011. **Proceedings...** [S.l.: s.n.], 2011. p.318–325.

SUN, G. et al. A novel architecture of the 3D stacked MRAM L2 cache for CMPs. In: IEEE INTL. SYMP. ON HIGH PERF. COMPUT. ARCH., 2009. **Anais...** [S.l.: s.n.], 2009. p.239–249.

SUN, Z. et al. Array organization and data management exploration in racetrack memory. **IEEE Trans. on Computers**, [S.l.], v.65, n.4, p.1041–1054, 2016.

TADISINA, Z. R. et al. Perpendicular magnetic tunnel junctions using Co-based multilayers. **Journal of Applied Physics**, [S.l.], v.107, n.9, p.09C703, 2010.

TAKAGI, T.; SUGENO, M. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control. **IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics**, [S.l.], v.SMC-15, n.1, p.116–132, 1985.

THOMAS LUC, E.-m. I. et al. Perpendicular spin transfer torque magnetic random access memories with high spin torque efficiency and thermal stability for embedded applications (invited). **Journal of Applied Physics**, [S.l.], v.115, n.17, 5 2014.

UDAYAKUMARAN, S.; BARUA, R. Compiler-decided dynamic memory allocation for scratch-pad based embedded systems. In: INTL. CONF. ON COMPILERS, ARCH. AND SYNTHESIS FOR EMBEDDED SYSTEMS, 2003. **Proceedings...** [S.l.: s.n.], 2003. p.276–286.

VENKATESAN, R. et al. TapeCache: a high density, energy efficient cache based on domain wall memory. In: ACM/IEEE INTL. SYMP. ON LOW POWER ELECTRON. AND DESIGN, 2012. **Proceedings...** [S.l.: s.n.], 2012. p.185–190.

VIJAYAKUMAR, D.; SRINIVASAGAN, K. G.; SABARIMUTHUKUMAR, R. FIR3: A fuzzy inference based reliable replica replacement strategy for cloud Data Centre. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON COMPUTING AND NETWORK COMMUNICATIONS (COCONET), 2015., 2015. **Anais...** [S.l.: s.n.], 2015. p.473–479.

WANG, G.; GUAN, Y.; WANG, Y.; SHAO, Z. Energy-aware assignment and scheduling for hybrid main memory in embedded systems. **Computing**, [S.l.], v.98, n.3, p.279–301, 2016.

WANG, H.; XU, Z. Admissible Orders of Typical Hesitant Fuzzy Elements and Their Application in Ordered Information Fusion in Multi-criteria Decision Making. **Information Fusion**, Amsterdam, The Netherlands, The Netherlands, v.29, n.C, p.98–104, 2016.

WANG, J.; DONG, X.; XIE, Y.; JOUPPI, N. P. i2WAP: Improving non-volatile cache lifetime by reducing inter-and intra-set write variations. In: IEEE 19TH INTL. SYMP. ON HIGH PERF. COMP. ARCH., 2013. **Anais...** [S.l.: s.n.], 2013. p.234–245.

WANG, P. et al. Designing scratchpad memory architecture with emerging STT-RAM memory technologies. In: IEEE INTL. SYMP. ON CIRCUITS SYST., 2013. **Anais...** [S.l.: s.n.], 2013. p.1244–1247.

WANG, Y. et al. Loop scheduling optimization for chip-multiprocessors with non-volatile main memory. In: IEEE INTL CONF. ON ACOUSTICS, SPEECH AND SIGNAL PROCESSING (ICASSP), 2012., 2012. **Anais...** [S.l.: s.n.], 2012. p.1553–1556.

WANG, Y.; NI, L.; CHANG, C. H.; YU, H. DW-AES: A Domain-Wall Nanowire-Based AES for High Throughput and Energy-Efficient Data Encryption in Non-Volatile Memory. **IEEE Trans. on Information Forensics and Security**, [S.l.], v.11, n.11, p.2426–2440, Nov 2016.

- WANG, Z.; GU, Z.; YAO, M.; SHAO, Z. Endurance-aware allocation of data variables on nvm-based scratchpad memory in real-time embedded systems. **IEEE Trans. on Computer-Aided Design of Integr. Circuits and Syst.**, [S.l.], v.34, n.10, p.1600–1612, 2015.
- WASER, R.; DITTMANN, R.; STAIKOV, G.; SZOT, K. Redox-based resistive switching memories—nanoionic mechanisms, prospects, and challenges. **Advanced materials**, [S.l.], v.21, n.25-26, p.2632–2663, 2009.
- WILKIN, T.; BELIAKOV, G. Weakly Monotonic Averaging Functions. **Int. J. Intell. Syst.**, [S.l.], v.30, n.2, p.144–169, 2015.
- WOLF, W.; KANDEMIR, M. Memory system optimization of embedded software. **Proc. of the IEEE**, [S.l.], v.91, n.1, p.165–182, 2003.
- WONG, H.-S. P. et al. Metal–oxide RRAM. **Proc. of the IEEE**, [S.l.], v.100, n.6, p.1951–1970, 2012.
- WU, X. et al. Hybrid cache architecture with disparate memory technologies. In: ACM SIGARCH COMP. ARCH. NEWS, 2009. **Anais...** [S.l.: s.n.], 2009. v.37, n.3, p.34–45.
- XU, C.; DONG, X.; JOUPPI, N. P.; XIE, Y. Design implications of memristor-based RRAM cross-point structures. In: DESIGN, AUTOM. & TEST IN EUROPE CONF. & EXHIBITION, 2011. **Anais...** [S.l.: s.n.], 2011. p.1–6.
- XU, C. et al. Device-architecture co-optimization of STT-RAM based memory for low power embedded systems. In: INTL. CONF. ON COMPUTER-AIDED DESIGN, 2011. **Proceedings...** [S.l.: s.n.], 2011. p.463–470.
- YAGER, R. R.; RYBALOV, A. UNDERSTANDING THE MEDIAN AS A FUSION OPERATOR. **International Journal of General Systems**, [S.l.], v.26, n.3, p.239–263, Aug. 1997.
- YILDIZ CAVDAR, Z.; AVCI, I.; KOCA, M.; SERTBAS, A. A Survey of Hybrid Main Memory Architectures. **Sakarya University Journal of Science**, [S.l.], v.23, p.1 – 15, 2019.
- ZADEH, L. A. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning—I. **Information sciences**, [S.l.], v.8, n.3, p.199–249, 1975.
- ZADEH, L. Fuzzy sets. **Information and Control**, [S.l.], v.8, n.3, p.338–353, 6 1965.
- ZADEH, L. Quantitative fuzzy semantics. **Information Sciences**, [S.l.], v.3, p.159 – 176, 1971.

ZAPATA, H. et al. Interval-valued implications and interval-valued strong equality index with admissible orders. **Int. J. Approx. Reason.**, [S.l.], v.88, p.91–109, 2017.

ZHANG, D. et al. Write-back aware shared last-level cache management for hybrid main memory. In: ANNUAL DESIGN AUTOMATION CONFERENCE ON - DAC 16, 53., 2016. **Proceedings...** ACM Press, 2016.

ZHANG, H. et al. Perf. Anal. on Structure of Racetrack Memory. In: ASIA AND SOUTH PACIFIC DESIGN AUTOM. CONF., 23., 2018. **Anais...** [S.l.: s.n.], 2018. p.367–374.

ZHANG, Y. et al. Energy-aware page replacement for NVM based hybrid main memory system. In: IEEE 23RD INTL CONF. ON EMBEDDED AND REAL-TIME COMPUTING SYST AND APPLICATIONS (RTCSEA), 2017. **Anais...** [S.l.: s.n.], 2017. p.1–6.

ZHANG, Z.; JIA, Z.; LIU, P.; JU, L. Energy efficient real-time task scheduling for embedded systems with hybrid main memory. **Journal of Signal Processing Syst.**, [S.l.], v.84, n.1, p.69–89, 2016.

ZHAO, J. et al. Kiln: Closing the performance gap between systems with and without persistence support. In: IEEE/ACM INTL. SYMP. ON MICROARCHITECTURE, 2013. **Anais...** [S.l.: s.n.], 2013. p.421–432.

Apêndices

APÊNDICE A – Graus de Consenso e Dissenso sobre as Variáveis

Tabela 21 – Consenso sobre as Variáveis de Entrada e de Saída para $Ref_{f_1}(x,y)$ e $Ref_{f_{LK}}(x,y)$

X	C_{AM}	C_{exp}	C_{SK}	C_{Tasile}	$[X, \bar{X}]$	C_{SK}	C_{Tasile}	C_{AM}	C_{exp}	$\mathcal{C}_{AM}$	$\mathcal{C}_{exp}$
RA_B	0.4100	0.4997	0.3011	0.6989	$\frac{B_{In}}{\bar{B}_{In}}$	0.6047	0.4734	0.5500	0.6832	0.8900	0.8595
RA_M	0.6900	0.7425	0.6260	0.3740	$\frac{M_{In}}{\bar{M}_{In}}$	0.8268	0.7135	0.7900	0.8185	0.8400	0.8566
RA_A	0.1000	0.1341	0.1331	0.8669	$\frac{A_{In}}{\bar{A}_{In}}$	0.6686	0.5181	0.4360	0.4434	0.7580	0.7806
FL_B	0.3100	0.3704	0.2959	0.7041	$\frac{B_{In}}{\bar{B}_{In}}$	0.7165	0.5770	0.5860	0.6153	0.8020	0.8203
FL_M	0.9800	0.9803	0.3060	0.6940	$\frac{M_{In}}{\bar{M}_{In}}$	0.2358	0.1933	0.2100	0.2549	0.7600	0.7774
FL_A	0.2900	0.3463	0.2839	0.7161	$\frac{A_{In}}{\bar{A}_{In}}$	0.7116	0.5683	0.9880	0.9882	0.7980	0.8203
R_B	0.5100	0.5513	0.5933	0.4067	$\frac{B_{Out}}{\bar{B}_{Out}}$	0.2680	0.2238	0.9800	0.9803	0.8020	0.8192
R_M	0.9800	0.9800	0.6664	0.3336	$\frac{M_{Out}}{\bar{M}_{Out}}$	0.7133	0.5727	0.5740	0.6019	0.6200	0.6238
R_A	0.4900	0.5313	0.5733	0.4267	$\frac{A_{Out}}{\bar{A}_{Out}}$	0.2286	0.1880	0.1980	0.2421	0.7980	0.8192

Tabela 22 – Consenso sobre as Variáveis de Entrada e de Saída para $Ref_{0,p,LK}(x,y)$ ($p = 0.5$ e $p = 2$).

X	C_{AM}		C_{exp}		$[X, \overline{X}]$	C_{AM}		C_{exp}		$\mathcal{C}_{AM}$		$\mathcal{C}_{exp}$	
	$p = 0.5$	$p = 2$	$p = 0.5$	$p = 2$		$p = 0.5$	$p = 2$	$p = 0.5$	$p = 2$	$p = 0.5$	$p = 2$		
RA_B	0.4758	0.3435	0.5653	0.4359	$\frac{B_{In}}{\overline{B}_{In}}$	0.7062	0.3989	0.8004	0.5632	0.9384	0.8219	0.9170	0.7890
RA_M	0.7895	0.5900	0.8196	0.6667	$\frac{M_{In}}{\overline{M}_{In}}$	0.8763	0.6844	0.8870	0.7425	0.9106	0.7398	0.9159	0.7818
RA_A	0.1337	0.0665	0.1826	0.0881	$\frac{A_{In}}{\overline{A}_{In}}$	0.6562	0.2031	0.6591	0.2154	0.8640	0.6107	0.8721	0.6649
FL_B	0.4093	0.2101	0.4802	0.2586	$\frac{B_{In}}{\overline{B}_{In}}$	0.7513	0.3989	0.7624	0.4551	0.8890	0.6800	0.8948	0.7265
FL_M	0.9899	0.9610	0.9899	0.9621	$\frac{M_{In}}{\overline{M}_{In}}$	0.9939	0.9766	0.9940	0.9775	0.8655	0.6118	0.8710	0.6567
FL_A	0.3893	0.1901	0.4588	0.2317	$\frac{A_{In}}{\overline{A}_{In}}$	0.7440	0.3821	0.7546	0.4353	0.8867	0.6736	0.8948	0.7265
R_B	0.6761	0.3434	0.7014	0.3921	$\frac{B_{Out}}{\overline{B}_{Out}}$	0.8282	0.5524	0.8381	0.6066	0.8894	0.6779	0.8949	0.7218
R_M	0.9899	0.9604	0.9899	0.9604	$\frac{M_{Out}}{\overline{M}_{Out}}$	0.9940	0.9762	0.9940	0.9764	0.7869	0.3867	0.7885	0.3944
R_A	0.6561	0.3234	0.6842	0.3686	$\frac{A_{Out}}{\overline{A}_{Out}}$	0.8208	0.5356	0.8309	0.5896	0.8871	0.6715	0.8949	0.7218

Tabela 23 – Dissenso sobre as Variáveis de Entrada e de Saída para $Ref_{f_{||}}(x, y)$ e $Ref_{I_{LK}}(x, y)$

X	D_{AM}	D_{exp}	D_{SK}	D_{Tastle}	$\left[\frac{X}{\bar{X}}, \frac{\bar{X}}{X}\right]$	D_{SK}	D_{Tastle}	D_{AM}	D_{exp}	$\mathcal{D}_{AM}$	$\mathcal{D}_{exp}$
RA_B	0.5900	0.5003	0.6989	0.7623	$\frac{B_{In}}{\bar{B}_{In}}$	0.3953	0.5266	0.4500	0.3168	0.1100	0.1405
					$\frac{\bar{B}_{In}}{B_{In}}$	0.7581	0.8082	0.6700	0.5873		
RA_M	0.3100	0.2575	0.3740	0.4820	$\frac{M_{In}}{\bar{M}_{In}}$	0.1732	0.2865	0.2100	0.1815	0.1600	0.1434
					$\frac{\bar{M}_{In}}{M_{In}}$	0.5404	0.6290	0.3780	0.3183		
RA_A	0.9000	0.8659	0.8669	0.8887	$\frac{A_{In}}{\bar{A}_{In}}$	0.3314	0.4819	0.5640	0.5566	0.2420	0.2194
					$\frac{\bar{A}_{In}}{A_{In}}$	0.8589	0.8829	0.8800	0.8457		
FL_B	0.6900	0.6296	0.7041	0.7618	$\frac{B_{In}}{\bar{B}_{In}}$	0.2835	0.4230	0.4140	0.3847	0.1980	0.1797
					$\frac{\bar{B}_{In}}{B_{In}}$	0.7642	0.8067	0.7900	0.7451		
FL_M	0.0200	0.0197	0.6940	0.7481	$\frac{M_{In}}{\bar{M}_{In}}$	0.2884	0.4317	0.0120	0.0118	0.2400	0.2226
					$\frac{\bar{M}_{In}}{M_{In}}$	0.7320	0.7762	0.0200	0.0197		
FL_A	0.7100	0.6537	0.7161	0.7709	$\frac{A_{In}}{\bar{A}_{In}}$	0.2867	0.8120	0.4260	0.3981	0.2020	0.1797
					$\frac{\bar{A}_{In}}{A_{In}}$	0.7714	0.4273	0.8020	0.7579		
R_B	0.4900	0.4487	0.4067	0.5145	$\frac{B_{Out}}{\bar{B}_{Out}}$	0.1944	0.3185	0.2940	0.2673	0.1980	0.1808
					$\frac{\bar{B}_{Out}}{B_{Out}}$	0.5707	0.6498	0.6540	0.6090		
R_M	0.0200	0.0200	0.3336	0.4428	$\frac{M_{Out}}{\bar{M}_{Out}}$	0.2162	0.3511	0.0120	0.0120	0.3800	0.3762
					$\frac{\bar{M}_{Out}}{M_{Out}}$	0.2733	0.3966	0.0160	0.0160		
R_A	0.5100	0.4687	0.4267	0.5320	$\frac{A_{Out}}{\bar{A}_{Out}}$	0.2016	0.3274	0.3060	0.2791	0.2020	0.1808
					$\frac{\bar{A}_{Out}}{A_{Out}}$	0.5827	0.6590	0.6660	0.6202		

Tabela 24 – Dissenso sobre as Variáveis de Entrada e de Saída para $Ref_{O_p, I_K}(x, y)$ ($p = 0.5$ e $p = 2$).

X	D_{AM}		D_{exp}		$[X, \bar{X}]$		D_{AM}		D_{exp}		$\mathcal{D}_{AM}$		$\mathcal{D}_{exp}$	
	$p = 0.5$	$p = 2$	$p = 0.5$	$p = 2$			$p = 0.5$	$p = 2$	$p = 0.5$	$p = 2$	$p = 0.5$	$p = 2$	$p = 0.5$	$p = 2$
RA_B	0.5242	0.6565	0.4347	0.5641	$\frac{B_{In}}{\bar{B}_{In}}$	$\frac{B_{In}}{\bar{B}_{In}}$	0.2938	0.6011	0.1996	0.4368	0.0616	0.1781	0.0830	0.2110
RA_M	0.2105	0.4100	0.1804	0.3333	$\frac{M_{In}}{\bar{M}_{In}}$	$\frac{M_{In}}{\bar{M}_{In}}$	0.1237	0.3156	0.1130	0.2575	0.0894	0.2602	0.0841	0.2182
RA_A	0.8663	0.9335	0.8174	0.9119	$\frac{A_{In}}{\bar{A}_{In}}$	$\frac{A_{In}}{\bar{A}_{In}}$	0.3438	0.7969	0.3409	0.7846	0.1360	0.3893	0.1279	0.3351
FL_B	0.5907	0.7899	0.5198	0.7414	$\frac{B_{In}}{\bar{B}_{In}}$	$\frac{B_{In}}{\bar{B}_{In}}$	0.8275	0.9275	0.7758	0.9061	0.1110	0.3200	0.1052	0.2735
FL_M	0.0101	0.0390	0.0101	0.0379	$\frac{M_{In}}{\bar{M}_{In}}$	$\frac{M_{In}}{\bar{M}_{In}}$	0.2487	0.6011	0.2376	0.5449	0.1345	0.3882	0.1290	0.3433
FL_A	0.6107	0.8099	0.5412	0.7683	$\frac{A_{In}}{\bar{A}_{In}}$	$\frac{A_{In}}{\bar{A}_{In}}$	0.7000	0.8748	0.6535	0.8529	0.1133	0.3264	0.1052	0.2735
R_B	0.3239	0.6566	0.2986	0.6079	$\frac{B_{Out}}{\bar{B}_{Out}}$	$\frac{B_{Out}}{\bar{B}_{Out}}$	0.0061	0.0234	0.0060	0.0225	0.1106	0.3221	0.1051	0.2782
R_M	0.0101	0.0396	0.0101	0.0396	$\frac{M_{Out}}{\bar{M}_{Out}}$	$\frac{M_{Out}}{\bar{M}_{Out}}$	0.1718	0.4476	0.1619	0.3934	0.2131	0.6133	0.2115	0.6056
R_A	0.3439	0.6766	0.3158	0.6314	$\frac{A_{Out}}{\bar{A}_{Out}}$	$\frac{A_{Out}}{\bar{A}_{Out}}$	0.5046	0.7937	0.4565	0.7564	0.1129	0.3285	0.1051	0.2782

Tabela 25 – Consenso sobre as Mesmas Variáveis Linguísticas para o Sistema Fuzzy Tipo-1.

X	$\mathcal{C}_{AM}$	$\mathcal{C}_{exp}$	$\mathcal{C}_{AM}$			$\mathcal{C}_{exp}$		
VL	TL	$Ref_{f_{ }}(x,y)$	$Ref_{O_p, I_{LK}}(x,y)$					
			$p = 0.5$	$p = 1$	$p = 2$	$p = 0.5$	$p = 1$	$p = 2$
B								
RA	M	0.4000	0.5021	0.4593	0.4667	0.4887	0.5579	0.5584
	A							0.5774
B								
FL	M	0.3867	0.4910	0.5996	0.5400	0.4861	0.6794	0.6248
	A							0.5756
B								
R	M	0.5000	0.5716	0.7773	0.6731	0.5748	0.8069	0.7242
	A							0.6465

Tabela 26 – Consenso sobre os Valores Superiores e Inferiores do Sistema Fuzzy Tipo-2.

X	$[X, \bar{X}]$	$\mathcal{C}_{AM}$		$\mathcal{C}_{exp}$		$\mathcal{C}_{AM}$		$\mathcal{C}_{exp}$	
		$Ref_{f_{\parallel}}(x, y)$		$Ref_{O_p, I_K}(x, y)$		$Ref_{O_p, I_K}(x, y)$		$Ref_{O_p, I_K}(x, y)$	
VL	TL	$p = 0.5$		$p = 1$		$p = 2$		$p = 0.5$	
		$p = 1$		$p = 2$		$p = 1$		$p = 2$	
B									
RA	M	Sup	0.3627	0.4961	0.5162	0.5387	0.5798	0.5990	0.6160
	A								0.6544
	B								
	M	Inf	0.6013	0.6629	0.7678	0.8563	0.5261	0.7975	0.6854
A									
B									
FL	M	Sup	0.3547	0.4673	0.5297	0.4787	0.4380	0.6191	0.5711
	A								0.5343
	B								
	M	Inf	0.6133	0.6533	0.8334	0.7240	0.6036	0.8469	0.7595
A									
B									
R	M	Sup	0.4067	0.5029	0.6587	0.5667	0.4872	0.7162	0.6389
	A								0.5735
	B								
	M	Inf	0.6600	0.6931	0.8844	0.8037	0.7057	0.8941	0.8297
A									

APÊNDICE B – Rotina csk_ctastle.m

```

1 % UFPel - Doutorado em Computacao
2 % Lizandro S Oliveira - 2021
3 % csk_ctastle - rotina para o calculo do operador de consenso Csk e Ctastle
4 % Csk: baseado na media aritmetica da distancia entre os pares d = (x-y)^2
5 % Ctastle: distancia entre cada entrada e o valor medio, onde d = |x-y|
6 % ref: https://doi.org/10.1016/j.knosys.2013.07.002
7
8 n = input('Digite o valor de n = ');
9 %n = 100;
10 cA = 2/(n^2);
11 cB = 1/(n);
12 x = input('Digite o vetor de entrada "x": ');
13 %x = xlsread('valx.xlsx','x_cam_dam - t2','B2:CW2');
14 xmed = mean(x);
15 A = zeros(size(cA));
16 B = zeros(size(cB));
17 for i = 1:n
18     for j = 1:n
19         A(i,j) = ((x(i)-x(j))^2);
20     end
21     B(i) = log2(1-(abs(x(i)-xmed)));
22 end
23
24 A = sum(A,1);
25 sA = sum(A(1:n));
26 Csk = 1-(cA)*(sA);
27 disp('-----')
28 fprintf('O valor da medida de consenso Csk e %f.\n', Csk);
29
30 B = sum(B,1);
31 sB = sum(B(1:n));
32 Ctastle = 1+(cB)*(sB);
33 fprintf('O valor da medida de consenso Ctastle e %f.\n', Ctastle);
34 disp('-----')

```

APÊNDICE C – Rotina cc_am_t1.m

```

1 % UFPel - Doutorado em Computacao
2 % Lizandro S Oliveira - 07/2021
3 % cc_am_t1: rotina para o calculo de consenso entre conjuntos fuzzy T1
4 % considerando o agregador AM e as REF  $1-|x-y|$ , LK e Op
5 clc;
6 n = 100; % nr elementos de entrada
7 k = 3; % nr conjuntos ordenados
8 % REF F ( $1-|x-y|$ ) e LK
9 xra1 = xlsread('cam_dam - t1.xlsx','CC_RA','C3:C102'); % le entrada RA1
10 xra3 = xlsread('cam_dam - t1.xlsx','CC_RA','E3:E102'); % le entrada RA3
11
12 xrf1 = xlsread('cam_dam - t1.xlsx','CC_RF','C3:C102'); % le entrada RF1
13 xrf3 = xlsread('cam_dam - t1.xlsx','CC_RF','E3:E102'); % le entrada RF3
14
15 xpr1 = xlsread('cam_dam - t1.xlsx','CC_PR','C3:C102'); % le entrada PR1
16 xpr3 = xlsread('cam_dam - t1.xlsx','CC_PR','E3:E102'); % le entrada PR3
17
18 % REF OP
19
20 % ra
21 % p=0.5
22 xra1_op05 = xlsread('cam_dam - t1.xlsx','CC_RA','K3:K102');
23 xra3_op05 = xlsread('cam_dam - t1.xlsx','CC_RA','M3:M102');
24
25 % p=1
26 xra1_op1 = xlsread('cam_dam - t1.xlsx','CC_RA','N3:N102');
27 xra3_op1 = xlsread('cam_dam - t1.xlsx','CC_RA','P3:P102');
28
29 % p=2
30 xra1_op2 = xlsread('cam_dam - t1.xlsx','CC_RA','Q3:Q102');
31 xra3_op2 = xlsread('cam_dam - t1.xlsx','CC_RA','S3:S102');
32
33 % rf
34 % p=0.5
35 xrf1_op05 = xlsread('cam_dam - t1.xlsx','CC_RF','K3:K102');
36 xrf3_op05 = xlsread('cam_dam - t1.xlsx','CC_RF','M3:M102');
37
38 % p=1
39 xrf1_op1 = xlsread('cam_dam - t1.xlsx','CC_RF','N3:N102');
40 xrf3_op1 = xlsread('cam_dam - t1.xlsx','CC_RF','P3:P102');
41
42 % p=2
43 xrf1_op2 = xlsread('cam_dam - t1.xlsx','CC_RF','Q3:Q102');
44 xrf3_op2 = xlsread('cam_dam - t1.xlsx','CC_RF','S3:S102');
45
46 % pr
47 % p=0.5
48 xpr1_op05 = xlsread('cam_dam - t1.xlsx','CC_PR','K3:K102');
```



```

49 xpr3_op05 = xlsread('cam_dam - t1.xlsx','CC_PR','M3:M102');
50
51 % p=1
52 xpr1_op1 = xlsread('cam_dam - t1.xlsx','CC_PR','N3:N102');
53 xpr3_op1 = xlsread('cam_dam - t1.xlsx','CC_PR','P3:P102');
54
55 % p=2
56 xpr1_op2 = xlsread('cam_dam - t1.xlsx','CC_PR','Q3:Q102');
57 xpr3_op2 = xlsread('cam_dam - t1.xlsx','CC_PR','S3:S102');
58
59 i=1:n;
60 % modulo da diferenca entre os elementos ordenados de RA
61 d1_ra(i) = abs(xra1(i)-xra3(i));
62 d2_ra(i) = abs(xra3(i)-xra1(i));
63
64 % ra_op
65 d1_ra_op05(i) = abs(xra1_op05(i)-xra3_op05(i));
66 d2_ra_op05(i) = abs(xra3_op05(i)-xra1_op05(i));
67
68 d1_ra_op1(i) = abs(xra1_op1(i)-xra3_op1(i));
69 d2_ra_op1(i) = abs(xra3_op1(i)-xra1_op1(i));
70
71 d1_ra_op2(i) = abs(xra1_op2(i)-xra3_op2(i));
72 d2_ra_op2(i) = abs(xra3_op2(i)-xra1_op2(i));
73
74 % rf/wf_op
75 d1_rf_op05(i) = abs(xrf1_op05(i)-xrf3_op05(i));
76 d2_rf_op05(i) = abs(xrf3_op05(i)-xrf1_op05(i));
77
78 d1_rf_op1(i) = abs(xrf1_op1(i)-xrf3_op1(i));
79 d2_rf_op1(i) = abs(xrf3_op1(i)-xrf1_op1(i));
80
81 d1_rf_op2(i) = abs(xrf1_op2(i)-xrf3_op2(i));
82 d2_rf_op2(i) = abs(xrf3_op2(i)-xrf1_op2(i));
83
84 % pr_op
85 d1_pr_op05(i) = abs(xpr1_op05(i)-xpr3_op05(i));
86 d2_pr_op05(i) = abs(xpr3_op05(i)-xpr1_op05(i));
87
88 d1_pr_op1(i) = abs(xpr1_op1(i)-xpr3_op1(i));
89 d2_pr_op1(i) = abs(xpr3_op1(i)-xpr1_op1(i));
90
91 d1_pr_op2(i) = abs(xpr1_op2(i)-xpr3_op2(i));
92 d2_pr_op2(i) = abs(xpr3_op2(i)-xpr1_op2(i));
93
94 % modulo da diferenca entre os elementos ordenados de RF
95 d1_rf(i) = abs(xrf1(i)-xrf3(i));
96 d2_rf(i) = abs(xrf3(i)-xrf1(i));
97
98 % modulo da diferenca entre os elementos ordenados de PR
99 d1_pr(i) = abs(xpr1(i)-xpr3(i));
100 d2_pr(i) = abs(xpr3(i)-xpr1(i));
101
102 % soma dos modulos
103 soma_ra = d1_ra(i)+d2_ra(i);
104 soma_rf = d1_rf(i)+d2_rf(i);
105 soma_pr = d1_pr(i)+d2_pr(i);
106
107 soma_ra_op_05 = d1_ra_op_05(i)+d2_ra_op_05(i);

```

```

108 soma_ra_op1 = d1_ra_op1(i)+d2_ra_op1(i);
109 soma_ra_op2 = d1_ra_op2(i)+d2_ra_op2(i);
110
111 soma_rf_op_05 = d1_rf_op_05(i)+d2_rf_op_05(i);
112 soma_rf_op1 = d1_rf_op1(i)+d2_rf_op1(i);
113 soma_rf_op2 = d1_rf_op2(i)+d2_rf_op2(i);
114
115 soma_pr_op_05 = d1_pr_op_05(i)+d2_pr_op_05(i);
116 soma_pr_op1 = d1_pr_op1(i)+d2_pr_op1(i);
117 soma_pr_op2 = d1_pr_op2(i)+d2_pr_op2(i);
118
119 ref_ra = (3-soma_ra)/k;
120 ref_rf = (3-soma_rf)/k;
121 ref_pr = (3-soma_pr)/k;
122
123 ref_ra_op_05 = (3-soma_ra_op_05)/k;
124 ref_ra_op1 = (3-soma_ra_op1)/k;
125 ref_ra_op2 = (3-soma_ra_op2)/k;
126
127 ref_rf_op_05 = (3-soma_rf_op_05)/k;
128 ref_rf_op1 = (3-soma_rf_op1)/k;
129 ref_rf_op2 = (3-soma_rf_op2)/k;
130
131 ref_pr_op_05 = (3-soma_pr_op_05)/k;
132 ref_pr_op1 = (3-soma_pr_op1)/k;
133 ref_pr_op2 = (3-soma_pr_op2)/k;
134
135 % consenso entre os conjuntos fuzzy
136 cc_ra = (1/n)*sum(ref_ra);
137 cc_rf = (1/n)*sum(ref_rf);
138 cc_pr = (1/n)*sum(ref_pr);
139
140 cc_ra_op_05 = (1/n)*sum(ref_ra_op_05);
141 cc_ra_op1 = (1/n)*sum(ref_ra_op1);
142 cc_ra_op2 = (1/n)*sum(ref_ra_op2);
143
144 cc_rf_op_05 = (1/n)*sum(ref_rf_op_05);
145 cc_rf_op1 = (1/n)*sum(ref_rf_op1);
146 cc_rf_op2 = (1/n)*sum(ref_rf_op2);
147
148 cc_pr_op_05 = (1/n)*sum(ref_pr_op_05);
149 cc_pr_op1 = (1/n)*sum(ref_pr_op1);
150 cc_pr_op2 = (1/n)*sum(ref_pr_op2);
151
152 disp('-----')
153 fprintf('CC para as REF F e LK \n');
154 disp('-----')
155 fprintf('O grau de consenso entre os conjuntos e CC_RA = %f.\n', cc_ra);
156 fprintf('O grau de consenso entre os conjuntos e CC_RF/WF = %f.\n', cc_rf);
157 fprintf('O grau de consenso entre os conjuntos e CC_PR = %f.\n', cc_pr);
158 disp('-----')
159
160 disp('-----')
161 fprintf('CC para a REF Op,I_LK(x,y) \n');
162 disp('-----')
163 fprintf('O grau de consenso entre os conjuntos e CC_RA_O(0.5) = %f.\n', cc_ra_op_05);
164 fprintf('O grau de consenso entre os conjuntos e CC_RA_O(1.0) = %f.\n', cc_ra_op1);
165 fprintf('O grau de consenso entre os conjuntos e CC_RA_O(2.0) = %f.\n', cc_ra_op2);
166 fprintf('\n')

```

```
167 fprintf('O grau de consenso entre os conjuntos e CC_RF_O(0.5) = %f.\n', cc_rf_op_05);
168 fprintf('O grau de consenso entre os conjuntos e CC_RF_O(1.0) = %f.\n', cc_rf_op1);
169 fprintf('O grau de consenso entre os conjuntos e CC_RF_O(2.0) = %f.\n', cc_rf_op2);
170
171 fprintf('\n')
172 fprintf('O grau de consenso entre os conjuntos e CC_PR_O(0.5) = %f.\n', cc_pr_op_05);
173 fprintf('O grau de consenso entre os conjuntos e CC_PR_O(1.0) = %f.\n', cc_pr_op1);
174 fprintf('O grau de consenso entre os conjuntos e CC_PR_O(2.0) = %f.\n', cc_pr_op2);
175 disp('-----')
```

APÊNDICE D – Rotina cc_exp_t1.m

```

1 % UFPel - Doutorado em Computacao
2 % Lizandro S Oliveira - 07/2021
3 % cc_exp_t1: rotina para o calculo de consenso entre conjuntos fuzzy T1
4 % considerando o agregador EXP e as REF 1-|x-y|, LK e Op
5 clc;
6 n = 100; % nr elementos de entrada
7 k = 3; % nr conjuntos ordenados
8 alfa = 1;
9 % REF F (1-|x-y|) e LK
10 xra1 = xlsread('cexp_dexp - t1.xlsx','cc_ra','C3:C102'); % le entrada RA1
11 xra3 = xlsread('cexp_dexp - t1.xlsx','cc_ra','E3:E102'); % le entrada RA3
12
13 xrf1 = xlsread('cexp_dexp - t1.xlsx','cc_rf','C3:C102'); % le entrada RF1
14 xrf3 = xlsread('cexp_dexp - t1.xlsx','cc_rf','E3:E102'); % le entrada RF3
15
16 xpr1 = xlsread('cexp_dexp - t1.xlsx','cc_pr','C3:C102'); % le entrada PR1
17 xpr3 = xlsread('cexp_dexp - t1.xlsx','cc_pr','E3:E102'); % le entrada PR3
18
19 % REF OP
20
21 % ra
22
23 % p=0.5
24 xra1_op05 = xlsread('cexp_dexp - t1.xlsx','cc_ra','O3:O102');
25 xra3_op05 = xlsread('cexp_dexp - t1.xlsx','cc_ra','Q3:Q102');
26
27 % p=1.0
28 xra1_op1 = xlsread('cexp_dexp - t1.xlsx','cc_ra','R3:R102');
29 xra3_op1 = xlsread('cexp_dexp - t1.xlsx','cc_ra','T3:T102');
30
31 % p=2.0
32 xra1_op2 = xlsread('cexp_dexp - t1.xlsx','cc_ra','U3:U102');
33 xra3_op2 = xlsread('cexp_dexp - t1.xlsx','cc_ra','W3:W102');
34
35
36 % rf
37
38 % p=0.5
39 xrf1_op05 = xlsread('cexp_dexp - t1.xlsx','cc_rf','O3:O102');
40 xrf3_op05 = xlsread('cexp_dexp - t1.xlsx','cc_rf','Q3:Q102');
41
42 % p=1.0
43 xrf1_op1 = xlsread('cexp_dexp - t1.xlsx','cc_rf','R3:R102');
44 xrf3_op1 = xlsread('cexp_dexp - t1.xlsx','cc_rf','T3:T102');
45
46 % p=2.0
47 xrf1_op2 = xlsread('cexp_dexp - t1.xlsx','cc_rf','U3:U102');
48 xrf3_op2 = xlsread('cexp_dexp - t1.xlsx','cc_rf','W3:W102');

```

```

49
50 % pr
51
52 % p=0.5
53 xpr1_op05 = xlsread('cexp_dexp - t1.xlsx','cc_pr','O3:O102');
54 xpr3_op05 = xlsread('cexp_dexp - t1.xlsx','cc_pr','Q3:Q102');
55
56 % p=1.0
57 xpr1_op1 = xlsread('cexp_dexp - t1.xlsx','cc_pr','R3:R102');
58 xpr3_op1 = xlsread('cexp_dexp - t1.xlsx','cc_pr','T3:T102');
59
60 % p=2.0
61 xpr1_op2 = xlsread('cexp_dexp - t1.xlsx','cc_pr','U3:U102');
62 xpr3_op2 = xlsread('cexp_dexp - t1.xlsx','cc_pr','W3:W102');
63
64 i=1:n;
65 % modulo da diferenca entre os elementos ordenados de RA
66 d1_ra(i) = abs(xra1(i)-xra3(i));
67 d2_ra(i) = abs(xra3(i)-xra1(i));
68
69 d1_rf(i) = abs(xrf1(i)-xrf3(i));
70 d2_rf(i) = abs(xrf3(i)-xrf1(i));
71
72 d1_pr(i) = abs(xpr1(i)-xpr3(i));
73 d2_pr(i) = abs(xpr3(i)-xpr1(i));
74
75 % ra_op
76 exp1_ra_op05(i) = exp(1-abs(xra1_op05(i)-xra3_op05(i)))./n;
77 exp2_ra_op05(i) = exp(1)./n;
78 exp3_ra_op05(i) = exp(1-abs(xra3_op05(i)-xra1_op05(i)))./n;
79
80 exp1_ra_op1(i) = exp(1-abs(xra1_op1(i)-xra3_op1(i)))./n;
81 exp2_ra_op1(i) = exp(1)./n;
82 exp3_ra_op1(i) = exp(1-abs(xra3_op1(i)-xra1_op1(i)))./n;
83
84 exp1_ra_op2(i) = exp(1-abs(xra1_op2(i)-xra3_op2(i)))./n;
85 exp2_ra_op2(i) = exp(1)./n;
86 exp3_ra_op2(i) = exp(1-abs(xra3_op2(i)-xra1_op2(i)))./n;
87
88 % rf_op
89 exp1_rf_op05(i) = exp(1-abs(xrf1_op05(i)-xrf3_op05(i)))./n;
90 exp2_rf_op05(i) = exp(1)./n;
91 exp3_rf_op05(i) = exp(1-abs(xrf3_op05(i)-xrf1_op05(i)))./n;
92
93 exp1_rf_op1(i) = exp(1-abs(xrf1_op1(i)-xrf3_op1(i)))./n;
94 exp2_rf_op1(i) = exp(1)./n;
95 exp3_rf_op1(i) = exp(1-abs(xrf3_op1(i)-xrf1_op1(i)))./n;
96
97 exp1_rf_op2(i) = exp(1-abs(xrf1_op2(i)-xrf3_op2(i)))./n;
98 exp2_rf_op2(i) = exp(1)./n;
99 exp3_rf_op2(i) = exp(1-abs(xrf3_op2(i)-xrf1_op2(i)))./n;
100
101 % pr_op
102 exp1_pr_op05(i) = exp(1-abs(xpr1_op05(i)-xpr3_op05(i)))./n;
103 exp2_pr_op05(i) = exp(1)./n;
104 exp3_pr_op05(i) = exp(1-abs(xpr3_op05(i)-xpr1_op05(i)))./n;
105
106 exp1_pr_op1(i) = exp(1-abs(xpr1_op1(i)-xpr3_op1(i)))./n;
107 exp2_pr_op1(i) = exp(1)./n;

```

```

108 exp3_pr_op1(i) = exp(1-abs(xpr3_op1(i)-xpr1_op1(i)))/n;
109
110 exp1_pr_op2(i) = exp(1-abs(xpr1_op2(i)-xpr3_op2(i)))/n;
111 exp2_pr_op2(i) = exp(1)/n;
112 exp3_pr_op2(i) = exp(1-abs(xpr3_op2(i)-xpr1_op2(i)))/n;
113
114 % soma dos modulos
115 soma_ra = (exp(1-d1_ra(i))/3+exp(1-d2_ra(i))/3+exp(1)/3)/n;
116 s_ra = sum(soma_ra(i));
117 soma_rf = (exp(1-d1_rf(i))/3+exp(1-d2_rf(i))/3+exp(1)/3)/n;
118 s_rf = sum(soma_rf(i));
119 soma_pr = (exp(1-d1_pr(i))/3+exp(1-d2_pr(i))/3+exp(1)/3)/n;
120 s_pr = sum(soma_pr(i));
121
122 % ra_Op
123 soma_ra_op05 = (exp1_ra_op05(i)+exp2_ra_op05(i)+exp3_ra_op05(i))/k;
124 s_ra_op05 = sum(soma_ra_op05(i));
125
126 soma_ra_op1 = (exp1_ra_op1(i)+exp2_ra_op1(i)+exp3_ra_op1(i))/k;
127 s_ra_op1 = sum(soma_ra_op1(i));
128
129 soma_ra_op2 = (exp1_ra_op2(i)+exp2_ra_op2(i)+exp3_ra_op2(i))/k;
130 s_ra_op2 = sum(soma_ra_op2(i));
131
132 % rf_Op
133 soma_rf_op05 = (exp1_rf_op05(i)+exp2_rf_op05(i)+exp3_rf_op05(i))/k;
134 s_rf_op05 = sum(soma_rf_op05(i));
135
136 soma_rf_op1 = (exp1_rf_op1(i)+exp2_rf_op1(i)+exp3_rf_op1(i))/k;
137 s_rf_op1 = sum(soma_rf_op1(i));
138
139 soma_rf_op2 = (exp1_rf_op2(i)+exp2_rf_op2(i)+exp3_rf_op2(i))/k;
140 s_rf_op2 = sum(soma_rf_op2(i));
141
142 % pr_Op
143 soma_pr_op05 = (exp1_pr_op05(i)+exp2_pr_op05(i)+exp3_pr_op05(i))/k;
144 s_pr_op05 = sum(soma_pr_op05(i));
145
146 soma_pr_op1 = (exp1_pr_op1(i)+exp2_pr_op1(i)+exp3_pr_op1(i))/k;
147 s_pr_op1 = sum(soma_pr_op1(i));
148
149 soma_pr_op2 = (exp1_pr_op2(i)+exp2_pr_op2(i)+exp3_pr_op2(i))/k;
150 s_pr_op2 = sum(soma_pr_op2(i));
151
152 % consenso entre os conjuntos fuzzy
153 cc_ra = (1/alfa)*log(s_ra);
154 cc_rf = (1/alfa)*log(s_rf);
155 cc_pr = (1/alfa)*log(s_pr);
156
157 cc_ra_op_05 = (1/alfa)*log(s_ra_op05);
158 cc_ra_op_1 = (1/alfa)*log(s_ra_op1);
159 cc_ra_op_2 = (1/alfa)*log(s_ra_op2);
160
161 cc_rf_op_05 = (1/alfa)*log(s_rf_op05);
162 cc_rf_op_1 = (1/alfa)*log(s_rf_op1);
163 cc_rf_op_2 = (1/alfa)*log(s_rf_op2);
164
165 cc_pr_op_05 = (1/alfa)*log(s_pr_op05);
166 cc_pr_op_1 = (1/alfa)*log(s_pr_op1);

```

```

167 cc_pr_op_2 = (1/alfa)*log(s_pr_op2);
168
169 disp('-----')
170 fprintf('CC para as REF F e LK \n');
171 disp('-----')
172 fprintf('O grau de consenso entre os conjuntos e CC_RA = %f.\n', cc_ra);
173 fprintf('O grau de consenso entre os conjuntos e CC_RF/WF = %f.\n', cc_rf);
174 fprintf('O grau de consenso entre os conjuntos e CC_PR = %f.\n', cc_pr);
175 disp('-----')
176
177 disp('-----')
178 fprintf('CC para a REF Op, I_LK(x,y) \n');
179 disp('-----')
180 fprintf('O grau de consenso entre os conjuntos e CC_RA_O(0.5) = %f.\n', cc_ra_op_05);
181 fprintf('O grau de consenso entre os conjuntos e CC_RA_O(1.0) = %f.\n', cc_ra_op_1);
182 fprintf('O grau de consenso entre os conjuntos e CC_RA_O(2.0) = %f.\n', cc_ra_op_2);
183 fprintf('\n')
184 fprintf('O grau de consenso entre os conjuntos e CC_RF_O(0.5) = %f.\n', cc_rf_op_05);
185 fprintf('O grau de consenso entre os conjuntos e CC_RF_O(1.0) = %f.\n', cc_rf_op_1);
186 fprintf('O grau de consenso entre os conjuntos e CC_RF_O(2.0) = %f.\n', cc_rf_op_2);
187
188 fprintf('\n')
189 fprintf('O grau de consenso entre os conjuntos e CC_PR_O(0.5) = %f.\n', cc_pr_op_05);
190 fprintf('O grau de consenso entre os conjuntos e CC_PR_O(1.0) = %f.\n', cc_pr_op_1);
191 fprintf('O grau de consenso entre os conjuntos e CC_PR_O(2.0) = %f.\n', cc_pr_op_2);
192 disp('-----')

```

APÊNDICE E – Rotina cc_am_int.m

```

1  % UFPel - Doutorado em Computacao
2  % Lizandro S Oliveira - 07/2021
3  % cc_am_int: rotina para o calculo de consenso IvFS
4  % considerando o agregador AM e as REF  $1-|x-y|$ , LK e Op
5  clc;
6  n = 100; % nr elementos de entrada
7  k = 3; % nr elementos L/M/H ordenados
8  i=1:n;
9  % REF F ( $1-|x-y|$ ) e LK
10
11 % RA sup
12 xra1_sup = xlsread('cam_dam - t2.xlsx','CC_RA','C3:C102'); % le entrada RA1 sup
13 xra3_sup = xlsread('cam_dam - t2.xlsx','CC_RA','E3:E102'); % le entrada RA3 sup
14
15 % RA inf
16 xra1_inf = xlsread('cam_dam - t2.xlsx','CC_RA','Z3:Z102'); % le entrada RA1 inf
17 xra3_inf = xlsread('cam_dam - t2.xlsx','CC_RA','AB3:AB102'); % le entrada RA3 inf
18
19 % RF sup
20 xrf1_sup = xlsread('cam_dam - t2.xlsx','CC_RF','C3:C102'); % le entrada RF1 sup
21 xrf3_sup = xlsread('cam_dam - t2.xlsx','CC_RF','E3:E102'); % le entrada RF3 sup
22
23 % RF inf
24 xrf1_inf = xlsread('cam_dam - t2.xlsx','CC_RF','Z3:Z102'); % le entrada RF1 inf
25 xrf3_inf = xlsread('cam_dam - t2.xlsx','CC_RF','AB3:AB102'); % le entrada RF3 inf
26
27 % PR sup
28 xpr1_sup = xlsread('cam_dam - t2.xlsx','CC_PR','C3:C102'); % le entrada PR1 sup
29 xpr3_sup = xlsread('cam_dam - t2.xlsx','CC_PR','E3:E102'); % le entrada PR3 sup
30
31 % PR inf
32 xpr1_inf = xlsread('cam_dam - t2.xlsx','CC_PR','Z3:Z102'); % le entrada PR1 inf
33 xpr3_inf = xlsread('cam_dam - t2.xlsx','CC_PR','AB3:AB102'); % le entrada PR3 inf
34
35 % REF OP
36
37 % ra
38 % p=0.5
39 xra1_op05_sup = xlsread('cam_dam - t2.xlsx','CC_RA','K3:K102');
40 xra3_op05_sup = xlsread('cam_dam - t2.xlsx','CC_RA','M3:M102');
41
42 xra1_op05_inf = xlsread('cam_dam - t2.xlsx','CC_RA','AH3:AH102');
43 xra3_op05_inf = xlsread('cam_dam - t2.xlsx','CC_RA','AJ3:AJ102');
44
45 % p=1
46 xra1_op1_sup = xlsread('cam_dam - t2.xlsx','CC_RA','N3:N102');
47 xra3_op1_sup = xlsread('cam_dam - t2.xlsx','CC_RA','P3:P102');
48

```



```

49 xra1_op1_inf = xlsread('cam_dam - t2.xlsx','CC_RA','AK3:AK102');
50 xra3_op1_inf = xlsread('cam_dam - t2.xlsx','CC_RA','AN3:AN102');
51
52 % p=2
53 xra1_op2_sup = xlsread('cam_dam - t2.xlsx','CC_RA','Q3:Q102');
54 xra3_op2_sup = xlsread('cam_dam - t2.xlsx','CC_RA','S3:S102');
55
56 xra1_op2_inf = xlsread('cam_dam - t2.xlsx','CC_RA','AN3:AN102');
57 xra3_op2_inf = xlsread('cam_dam - t2.xlsx','CC_RA','AP3:AP102');
58
59 % rf
60 % p=0.5
61 xrf1_op05_sup = xlsread('cam_dam - t2.xlsx','CC_RF','K3:K102');
62 xrf3_op05_sup = xlsread('cam_dam - t2.xlsx','CC_RF','M3:M102');
63
64 xrf1_op05_inf = xlsread('cam_dam - t2.xlsx','CC_RF','AH3:AH102');
65 xrf3_op05_inf = xlsread('cam_dam - t2.xlsx','CC_RF','AJ3:AJ102');
66
67 % p=1
68 xrf1_op1_sup = xlsread('cam_dam - t2.xlsx','CC_RF','N3:N102');
69 xrf3_op1_sup = xlsread('cam_dam - t2.xlsx','CC_RF','P3:P102');
70
71 xrf1_op1_inf = xlsread('cam_dam - t2.xlsx','CC_RF','AK3:AK102');
72 xrf3_op1_inf = xlsread('cam_dam - t2.xlsx','CC_RF','AM3:AM102');
73
74 % p=2
75 xrf1_op2_sup = xlsread('cam_dam - t2.xlsx','CC_RF','Q3:Q102');
76 xrf3_op2_sup = xlsread('cam_dam - t2.xlsx','CC_RF','S3:S102');
77
78 xrf1_op2_inf = xlsread('cam_dam - t2.xlsx','CC_RF','AN3:AN102');
79 xrf3_op2_inf = xlsread('cam_dam - t2.xlsx','CC_RF','AP3:AP102');
80
81 % pr
82 % p=0.5
83 xpr1_op05_sup = xlsread('cam_dam - t2.xlsx','CC_PR','K3:K102');
84 xpr3_op05_sup = xlsread('cam_dam - t2.xlsx','CC_PR','M3:M102');
85
86 xpr1_op05_inf = xlsread('cam_dam - t2.xlsx','CC_PR','AH3:AH102');
87 xpr3_op05_inf = xlsread('cam_dam - t2.xlsx','CC_PR','AJ3:AJ102');
88
89 % p=1
90 xpr1_op1_sup = xlsread('cam_dam - t2.xlsx','CC_PR','N3:N102');
91 xpr3_op1_sup = xlsread('cam_dam - t2.xlsx','CC_PR','P3:P102');
92
93 xpr1_op1_inf = xlsread('cam_dam - t2.xlsx','CC_PR','AK3:AK102');
94 xpr3_op1_inf = xlsread('cam_dam - t2.xlsx','CC_PR','AM3:AM102');
95
96 % p=2
97 xpr1_op2_sup = xlsread('cam_dam - t2.xlsx','CC_PR','Q3:Q102');
98 xpr3_op2_sup = xlsread('cam_dam - t2.xlsx','CC_PR','S3:S102');
99
100 xpr1_op2_inf = xlsread('cam_dam - t2.xlsx','CC_PR','AN3:AN102');
101 xpr3_op2_inf = xlsread('cam_dam - t2.xlsx','CC_PR','AP3:AP102');
102
103 % ra_op
104 d1_ra_op_05_sup(i) = abs(xra1_op05_sup(i)-xra3_op05_sup(i));
105 d2_ra_op_05_sup(i) = abs(xra3_op05_sup(i)-xra1_op05_sup(i));
106
107 d1_ra_op_05_inf(i) = abs(xra1_op05_inf(i)-xra3_op05_inf(i));

```

```

108 d2_ra_op_05_inf(i) = abs(xra3_op05_inf(i)-xra1_op05_inf(i));
109
110 d1_ra_op1_sup(i) = abs(xra1_op1_sup(i)-xra3_op1_sup(i));
111 d2_ra_op1_sup(i) = abs(xra3_op1_sup(i)-xra1_op1_sup(i));
112
113 d1_ra_op1_inf(i) = abs(xra1_op1_inf(i)-xra3_op1_inf(i));
114 d2_ra_op1_inf(i) = abs(xra3_op1_inf(i)-xra1_op1_inf(i));
115
116 d1_ra_op2_sup(i) = abs(xra1_op2_sup(i)-xra3_op2_sup(i));
117 d2_ra_op2_sup(i) = abs(xra3_op2_sup(i)-xra1_op2_sup(i));
118
119 d1_ra_op2_inf(i) = abs(xra1_op2_inf(i)-xra3_op2_inf(i));
120 d2_ra_op2_inf(i) = abs(xra3_op2_inf(i)-xra1_op2_inf(i));
121
122 % rf/wf_op
123 d1_rf_op_05_sup(i) = abs(xrf1_op05_sup(i)-xrf3_op05_sup(i));
124 d2_rf_op_05_sup(i) = abs(xrf3_op05_sup(i)-xrf1_op05_sup(i));
125
126 d1_rf_op_05_inf(i) = abs(xrf1_op05_inf(i)-xrf3_op05_inf(i));
127 d2_rf_op_05_inf(i) = abs(xrf3_op05_inf(i)-xrf1_op05_inf(i));
128
129 d1_rf_op1_sup(i) = abs(xrf1_op1_sup(i)-xrf3_op1_sup(i));
130 d2_rf_op1_sup(i) = abs(xrf3_op1_sup(i)-xrf1_op1_sup(i));
131
132 d1_rf_op1_inf(i) = abs(xrf1_op1_inf(i)-xrf3_op1_inf(i));
133 d2_rf_op1_inf(i) = abs(xrf3_op1_inf(i)-xrf1_op1_inf(i));
134
135 d1_rf_op2_sup(i) = abs(xrf1_op2_sup(i)-xrf3_op2_sup(i));
136 d2_rf_op2_sup(i) = abs(xrf3_op2_sup(i)-xrf1_op2_sup(i));
137
138 d1_rf_op2_inf(i) = abs(xrf1_op2_inf(i)-xrf3_op2_inf(i));
139 d2_rf_op2_inf(i) = abs(xrf3_op2_inf(i)-xrf1_op2_inf(i));
140
141 % pr_op
142 d1_pr_op_05_sup(i) = abs(xpr1_op05_sup(i)-xpr3_op05_sup(i));
143 d2_pr_op_05_sup(i) = abs(xpr3_op05_sup(i)-xpr1_op05_sup(i));
144
145 d1_pr_op_05_inf(i) = abs(xpr1_op05_inf(i)-xpr3_op05_inf(i));
146 d2_pr_op_05_inf(i) = abs(xpr3_op05_inf(i)-xpr1_op05_inf(i));
147
148 d1_pr_op1_sup(i) = abs(xpr1_op1_sup(i)-xpr3_op1_sup(i));
149 d2_pr_op1_sup(i) = abs(xpr3_op1_sup(i)-xpr1_op1_sup(i));
150
151 d1_pr_op1_inf(i) = abs(xpr1_op1_inf(i)-xpr3_op1_inf(i));
152 d2_pr_op1_inf(i) = abs(xpr3_op1_inf(i)-xpr1_op1_inf(i));
153
154 d1_pr_op2_sup(i) = abs(xpr1_op2_sup(i)-xpr3_op2_sup(i));
155 d2_pr_op2_sup(i) = abs(xpr3_op2_sup(i)-xpr1_op2_sup(i));
156
157 d1_pr_op2_inf(i) = abs(xpr1_op2_inf(i)-xpr3_op2_inf(i));
158 d2_pr_op2_inf(i) = abs(xpr3_op2_inf(i)-xpr1_op2_inf(i));
159
160 % modulo da diferenca entre os elementos ordenados de RA
161 d1_ra_sup(i) = abs(xra1_sup(i)-xra3_sup(i));
162 d2_ra_sup(i) = abs(xra3_sup(i)-xra1_sup(i));
163
164 d1_ra_inf(i) = abs(xra1_inf(i)-xra3_inf(i));
165 d2_ra_inf(i) = abs(xra3_inf(i)-xra1_inf(i));
166

```

```

167 % modulo da diferenca entre os elementos ordenados de RF
168 d1_rf_sup(i) = abs(xrf1_sup(i)-xrf3_sup(i));
169 d2_rf_sup(i) = abs(xrf3_sup(i)-xrf1_sup(i));
170
171 d1_rf_inf(i) = abs(xrf1_inf(i)-xrf3_inf(i));
172 d2_rf_inf(i) = abs(xrf3_inf(i)-xrf1_inf(i));
173
174 % modulo da diferenca entre os elementos ordenados de PR
175 d1_pr_sup(i) = abs(xpr1_sup(i)-xpr3_sup(i));
176 d2_pr_sup(i) = abs(xpr3_sup(i)-xpr1_sup(i));
177
178 d1_pr_inf(i) = abs(xpr1_inf(i)-xpr3_inf(i));
179 d2_pr_inf(i) = abs(xpr3_inf(i)-xpr1_inf(i));
180
181 % soma dos modulos
182 soma_ra_sup = d1_ra_sup(i)+d2_ra_sup(i);
183 soma_ra_inf = d1_ra_inf(i)+d2_ra_inf(i);
184 soma_rf_sup = d1_rf_sup(i)+d2_rf_sup(i);
185 soma_rf_inf = d1_rf_inf(i)+d2_rf_inf(i);
186 soma_pr_sup = d1_pr_sup(i)+d2_pr_sup(i);
187 soma_pr_inf = d1_pr_inf(i)+d2_pr_inf(i);
188
189 soma_ra_op05_sup = d1_ra_op05_sup(i)+d2_ra_op05_sup(i);
190 soma_ra_op05_inf = d1_ra_op05_inf(i)+d2_ra_op05_inf(i);
191 soma_ra_op1_sup = d1_ra_op1_sup(i)+d2_ra_op1_sup(i);
192 soma_ra_op1_inf = d1_ra_op1_inf(i)+d2_ra_op1_inf(i);
193 soma_ra_op2_sup = d1_ra_op2_sup(i)+d2_ra_op2_sup(i);
194 soma_ra_op2_inf = d1_ra_op2_inf(i)+d2_ra_op2_inf(i);
195
196 soma_rf_op05_sup = d1_rf_op05_sup(i)+d2_rf_op05_sup(i);
197 soma_rf_op05_inf = d1_rf_op05_inf(i)+d2_rf_op05_inf(i);
198 soma_rf_op1_sup = d1_rf_op1_sup(i)+d2_rf_op1_sup(i);
199 soma_rf_op1_inf = d1_rf_op1_inf(i)+d2_rf_op1_inf(i);
200 soma_rf_op2_sup = d1_rf_op2_sup(i)+d2_rf_op2_sup(i);
201 soma_rf_op2_inf = d1_rf_op2_inf(i)+d2_rf_op2_inf(i);
202
203 soma_pr_op05_sup = d1_pr_op05_sup(i)+d2_pr_op05_sup(i);
204 soma_pr_op05_inf = d1_pr_op05_inf(i)+d2_pr_op05_inf(i);
205 soma_pr_op1_sup = d1_pr_op1_sup(i)+d2_pr_op1_sup(i);
206 soma_pr_op1_inf = d1_pr_op1_inf(i)+d2_pr_op1_inf(i);
207 soma_pr_op2_sup = d1_pr_op2_sup(i)+d2_pr_op2_sup(i);
208 soma_pr_op2_inf = d1_pr_op2_inf(i)+d2_pr_op2_inf(i);
209
210 ref_ra_sup = (3-soma_ra_sup)/k;
211 ref_ra_inf = (3-soma_ra_inf)/k;
212 ref_rf_sup = (3-soma_rf_sup)/k;
213 ref_rf_inf = (3-soma_rf_inf)/k;
214 ref_pr_sup = (3-soma_pr_sup)/k;
215 ref_pr_inf = (3-soma_pr_inf)/k;
216
217 ref_ra_op05_sup = (3-soma_ra_op05_sup)/k;
218 ref_ra_op05_inf = (3-soma_ra_op05_inf)/k;
219 ref_ra_op1_sup = (3-soma_ra_op1_sup)/k;
220 ref_ra_op1_inf = (3-soma_ra_op1_inf)/k;
221 ref_ra_op2_sup = (3-soma_ra_op2_sup)/k;
222 ref_ra_op2_inf = (3-soma_ra_op2_inf)/k;
223
224 ref_rf_op05_sup = (3-soma_rf_op05_sup)/k;
225 ref_rf_op05_inf = (3-soma_rf_op05_inf)/k;

```

```

226 ref_rf_op1_sup = (3-soma_rf_op1_sup)/k;
227 ref_rf_op1_inf = (3-soma_rf_op1_inf)/k;
228 ref_rf_op2_sup = (3-soma_rf_op2_sup)/k;
229 ref_rf_op2_inf = (3-soma_rf_op2_inf)/k;
230
231 ref_pr_op05_sup = (3-soma_pr_op05_sup)/k;
232 ref_pr_op05_inf = (3-soma_pr_op05_inf)/k;
233 ref_pr_op1_sup = (3-soma_pr_op1_sup)/k;
234 ref_pr_op1_inf = (3-soma_pr_op1_inf)/k;
235 ref_pr_op2_sup = (3-soma_pr_op2_sup)/k;
236 ref_pr_op2_inf = (3-soma_pr_op2_inf)/k;
237
238 % consenso entre os conjuntos fuzzy
239 cc_ra_sup = (1/n)*sum(ref_ra_sup);
240 cc_ra_inf = (1/n)*sum(ref_ra_inf);
241 cc_rf_sup = (1/n)*sum(ref_rf_sup);
242 cc_rf_inf = (1/n)*sum(ref_rf_inf);
243 cc_pr_sup = (1/n)*sum(ref_pr_sup);
244 cc_pr_inf = (1/n)*sum(ref_pr_inf);
245
246 cc_ra_op05_sup = (1/n)*sum(ref_ra_op05_sup);
247 cc_ra_op05_inf = (1/n)*sum(ref_ra_op05_inf);
248 cc_ra_op1_sup = (1/n)*sum(ref_ra_op1_sup);
249 cc_ra_op1_inf = (1/n)*sum(ref_ra_op1_inf);
250 cc_ra_op2_sup = (1/n)*sum(ref_ra_op2_sup);
251 cc_ra_op2_inf = (1/n)*sum(ref_ra_op2_inf);
252
253 cc_rf_op05_sup = (1/n)*sum(ref_rf_op05_sup);
254 cc_rf_op05_inf = (1/n)*sum(ref_rf_op05_inf);
255 cc_rf_op1_sup = (1/n)*sum(ref_rf_op1_sup);
256 cc_rf_op1_inf = (1/n)*sum(ref_rf_op1_inf);
257 cc_rf_op2_sup = (1/n)*sum(ref_rf_op2_sup);
258 cc_rf_op2_inf = (1/n)*sum(ref_rf_op2_inf);
259
260 cc_pr_op05_sup = (1/n)*sum(ref_pr_op05_sup);
261 cc_pr_op05_inf = (1/n)*sum(ref_pr_op05_inf);
262 cc_pr_op1_sup = (1/n)*sum(ref_pr_op1_sup);
263 cc_pr_op1_inf = (1/n)*sum(ref_pr_op1_inf);
264 cc_pr_op2_sup = (1/n)*sum(ref_pr_op2_sup);
265 cc_pr_op2_inf = (1/n)*sum(ref_pr_op2_inf);
266
267 disp('-----')
268 fprintf('Consenso de Conjuntos Fuzzy para as REF F e LK \n');
269 disp('-----')
270 fprintf('O grau de FSCM de CC_RA_sup = %f.\n', cc_ra_sup);
271 fprintf('O grau de FSCM de CC_RA_inf = %f.\n', cc_ra_inf);
272 fprintf('O grau de FSCM de CC_RF/WF_sup = %f.\n', cc_rf_sup);
273 fprintf('O grau de FSCM de CC_RF/WF_inf = %f.\n', cc_rf_inf);
274 fprintf('O grau de FSCM de CC_PR_sup = %f.\n', cc_pr_sup);
275 fprintf('O grau de FSCM de CC_PR_inf = %f.\n', cc_pr_inf);
276 disp('-----')
277
278 disp('-----')
279 fprintf('Consenso de Conjuntos Fuzzy para a REF Op,I_LK(x,y) \n');
280 disp('-----')
281 fprintf('O grau de FSCM de CC_RA_O(0.5)_sup = %f.\n', cc_ra_op05_sup);
282 fprintf('O grau de FSCM de CC_RA_O(0.5)_inf = %f.\n', cc_ra_op05_inf);
283 fprintf('O grau de FSCM de CC_RA_O(1.0)_sup = %f.\n', cc_ra_op1_sup);
284 fprintf('O grau de FSCM de CC_RA_O(1.0)_inf = %f.\n', cc_ra_op1_inf);

```

```

285 fprintf('O grau de FSCM de CC_RA_O(2.0)_sup = %f.\n', cc_ra_op2_sup);
286 fprintf('O grau de FSCM de CC_RA_O(2.0)_inf = %f.\n', cc_ra_op2_inf);
287 fprintf('\n')
288 fprintf('O grau de FSCM de CC_RF_O(0.5)_sup = %f.\n', cc_rf_op05_sup);
289 fprintf('O grau de FSCM de CC_RF_O(0.5)_inf = %f.\n', cc_rf_op05_inf);
290 fprintf('O grau de FSCM de CC_RF_O(1.0)_sup = %f.\n', cc_rf_op1_sup);
291 fprintf('O grau de FSCM de CC_RF_O(1.0)_inf = %f.\n', cc_rf_op1_inf);
292 fprintf('O grau de FSCM de CC_RF_O(2.0)_sup = %f.\n', cc_rf_op2_sup);
293 fprintf('O grau de FSCM de CC_RF_O(2.0)_inf = %f.\n', cc_rf_op2_inf);
294 fprintf('\n')
295 fprintf('O grau de FSCM de CC_PR_O(0.5)_sup = %f.\n', cc_pr_op05_sup);
296 fprintf('O grau de FSCM de CC_PR_O(0.5)_inf = %f.\n', cc_pr_op05_inf);
297 fprintf('O grau de FSCM de CC_PR_O(1.0)_sup = %f.\n', cc_pr_op1_sup);
298 fprintf('O grau de FSCM de CC_PR_O(1.0)_inf = %f.\n', cc_pr_op1_inf);
299 fprintf('O grau de FSCM de CC_PR_O(2.0)_sup = %f.\n', cc_pr_op2_sup);
300 fprintf('O grau de FSCM de CC_PR_O(2.0)_inf = %f.\n', cc_pr_op2_inf);
301 disp('-----')

```

APÊNDICE F – Rotina cc_exp_int.m

```

1 % UFPel - Doutorado em Computacao
2 % Lizandro S Oliveira - 07/2021
3 % cc_exp_int: rotina para o calculo de consenso IvFS
4 % considerando o agregador EXP e as REF 1-|x-y|, LK e Op
5 clc;
6 n = 100; % nr elementos de entrada
7 k = 3; % nr elementos consenso L/M/H ordenados
8 alfa = 1;
9 i=1:n;
10 % REF F (1-|x-y|) e LK
11
12 % RA sup
13 xra1_sup = xlsread('cexp_dexp - t2.xlsx','cc_ra','C3:C102'); % le entrada RA1 sup
14 xra3_sup = xlsread('cexp_dexp - t2.xlsx','cc_ra','E3:E102'); % le entrada RA3 sup
15
16 % RA inf
17 xra1_inf = xlsread('cexp_dexp - t2.xlsx','cc_ra','AJ3:AJ102'); % le entrada RA1 inf
18 xra3_inf = xlsread('cexp_dexp - t2.xlsx','cc_ra','AL3:AL102'); % le entrada RA3 inf
19
20 % RF sup
21 xrf1_sup = xlsread('cexp_dexp - t2.xlsx','cc_rf','C3:C102'); % le entrada RF1 sup
22 xrf3_sup = xlsread('cexp_dexp - t2.xlsx','cc_rf','E3:E102'); % le entrada RF3 sup
23
24 % RF inf
25 xrf1_inf = xlsread('cexp_dexp - t2.xlsx','cc_rf','AJ3:AJ102'); % le entrada RF1 inf
26 xrf3_inf = xlsread('cexp_dexp - t2.xlsx','cc_rf','AL3:AL102'); % le entrada RF3 inf
27
28 % PR sup
29 xpr1_sup = xlsread('cexp_dexp - t2.xlsx','cc_pr','C3:C102'); % le entrada PR1 sup
30 xpr3_sup = xlsread('cexp_dexp - t2.xlsx','cc_pr','E3:E102'); % le entrada PR3 sup
31
32 % PR inf
33 xpr1_inf = xlsread('cexp_dexp - t2.xlsx','cc_pr','AJ3:AJ102'); % le entrada PR1 inf
34 xpr3_inf = xlsread('cexp_dexp - t2.xlsx','cc_pr','AL3:AL102'); % le entrada PR3 inf
35
36 % REF OP
37
38 % ra
39
40 % p=0.5
41 xra1_op05_sup = xlsread('cexp_dexp - t2.xlsx','cc_ra','O3:O102');
42 xra3_op05_sup = xlsread('cexp_dexp - t2.xlsx','cc_ra','Q3:Q102');
43
44 xra1_op05_inf = xlsread('cexp_dexp - t2.xlsx','cc_ra','AV3:AV102');
45 xra3_op05_inf = xlsread('cexp_dexp - t2.xlsx','cc_ra','AX3:AX102');
46
47 % p=1.0
48 xra1_op1_sup = xlsread('cexp_dexp - t2.xlsx','cc_ra','R3:R102');
```

```

49 xra3_op1_sup = xlsread('cexp_dexp - t2.xlsx','cc_ra','T3:T102');
50
51 xra1_op1_inf = xlsread('cexp_dexp - t2.xlsx','cc_ra','AY3:AY102');
52 xra3_op1_inf = xlsread('cexp_dexp - t2.xlsx','cc_ra','BA3:BA102');
53
54 % p=2.0
55 xra1_op2_sup = xlsread('cexp_dexp - t2.xlsx','cc_ra','U3:U102');
56 xra3_op2_sup = xlsread('cexp_dexp - t2.xlsx','cc_ra','W3:W102');
57
58 xra1_op2_inf = xlsread('cexp_dexp - t2.xlsx','cc_ra','BB3:BB102');
59 xra3_op2_inf = xlsread('cexp_dexp - t2.xlsx','cc_ra','BD3:BD102');
60
61 % rf
62
63 % p=0.5
64 xrf1_op05_sup = xlsread('cexp_dexp - t2.xlsx','cc_rf','O3:O102');
65 xrf3_op05_sup = xlsread('cexp_dexp - t2.xlsx','cc_rf','Q3:Q102');
66
67 xrf1_op05_inf = xlsread('cexp_dexp - t2.xlsx','cc_rf','AV3:AV102');
68 xrf3_op05_inf = xlsread('cexp_dexp - t2.xlsx','cc_rf','AX3:AX102');
69
70 % p=1.0
71 xrf1_op1_sup = xlsread('cexp_dexp - t2.xlsx','cc_rf','R3:R102');
72 xrf3_op1_sup = xlsread('cexp_dexp - t2.xlsx','cc_rf','T3:T102');
73
74 xrf1_op1_inf = xlsread('cexp_dexp - t2.xlsx','cc_rf','AY3:AY102');
75 xrf3_op1_inf = xlsread('cexp_dexp - t2.xlsx','cc_rf','BA3:BA102');
76
77 % p=2.0
78 xrf1_op2_sup = xlsread('cexp_dexp - t2.xlsx','cc_rf','U3:U102');
79 xrf3_op2_sup = xlsread('cexp_dexp - t2.xlsx','cc_rf','W3:W102');
80
81 xrf1_op2_inf = xlsread('cexp_dexp - t2.xlsx','cc_rf','BB3:BB102');
82 xrf3_op2_inf = xlsread('cexp_dexp - t2.xlsx','cc_rf','BD3:BD102');
83
84 % pr
85
86 % p=0.5
87 xpr1_op05_sup = xlsread('cexp_dexp - t2.xlsx','cc_pr','O3:O102');
88 xpr3_op05_sup = xlsread('cexp_dexp - t2.xlsx','cc_pr','Q3:Q102');
89
90 xpr1_op05_inf = xlsread('cexp_dexp - t2.xlsx','cc_pr','AV3:AV102');
91 xpr3_op05_inf = xlsread('cexp_dexp - t2.xlsx','cc_pr','AX3:AX102');
92
93 % p=1.0
94 xpr1_op1_sup = xlsread('cexp_dexp - t2.xlsx','cc_pr','R3:R102');
95 xpr3_op1_sup = xlsread('cexp_dexp - t2.xlsx','cc_pr','T3:t202');
96
97 xpr1_op1_inf = xlsread('cexp_dexp - t2.xlsx','cc_pr','AY3:AY102');
98 xpr3_op1_inf = xlsread('cexp_dexp - t2.xlsx','cc_pr','BA3:BA102');
99
100 % p=2.0
101 xpr1_op2_sup = xlsread('cexp_dexp - t2.xlsx','cc_pr','U3:U102');
102 xpr3_op2_sup = xlsread('cexp_dexp - t2.xlsx','cc_pr','W3:W102');
103
104 xpr1_op2_inf = xlsread('cexp_dexp - t2.xlsx','cc_pr','BB3:BB102');
105 xpr3_op2_inf = xlsread('cexp_dexp - t2.xlsx','cc_pr','BD3:BD102');
106
107 % ra_op

```

```

108 exp1_ra_op05_sup(i) = exp(1-abs(xra1_op05_sup(i)-xra3_op05_sup(i)))./n;
109 exp2_ra_op05_sup(i) = exp(1)./n;
110 exp3_ra_op05_sup(i) = exp(1-abs(xra3_op05_sup(i)-xra1_op05_sup(i)))./n;
111
112 exp1_ra_op05_inf(i) = exp(1-abs(xra1_op05_inf(i)-xra3_op05_inf(i)))./n;
113 exp2_ra_op05_inf(i) = exp(1)./n;
114 exp3_ra_op05_inf(i) = exp(1-abs(xra3_op05_inf(i)-xra1_op05_inf(i)))./n;
115
116 exp1_ra_op1_sup(i) = exp(1-abs(xra1_op1_sup(i)-xra3_op1_sup(i)))./n;
117 exp2_ra_op1_sup(i) = exp(1)./n;
118 exp3_ra_op1_sup(i) = exp(1-abs(xra3_op1_sup(i)-xra1_op1_sup(i)))./n;
119
120 exp1_ra_op1_inf(i) = exp(1-abs(xra1_op1_inf(i)-xra3_op1_inf(i)))./n;
121 exp2_ra_op1_inf(i) = exp(1)./n;
122 exp3_ra_op1_inf(i) = exp(1-abs(xra3_op1_inf(i)-xra1_op1_inf(i)))./n;
123
124 exp1_ra_op2_sup(i) = exp(1-abs(xra1_op2_sup(i)-xra3_op2_sup(i)))./n;
125 exp2_ra_op2_sup(i) = exp(1)./n;
126 exp3_ra_op2_sup(i) = exp(1-abs(xra3_op2_sup(i)-xra1_op2_sup(i)))./n;
127
128 exp1_ra_op2_inf(i) = exp(1-abs(xra1_op2_inf(i)-xra3_op2_inf(i)))./n;
129 exp2_ra_op2_inf(i) = exp(1)./n;
130 exp3_ra_op2_inf(i) = exp(1-abs(xra3_op2_inf(i)-xra1_op2_inf(i)))./n;
131
132 % rf_op
133 exp1_rf_op05_sup(i) = exp(1-abs(xrf1_op05_sup(i)-xrf3_op05_sup(i)))./n;
134 exp2_rf_op05_sup(i) = exp(1)./n;
135 exp3_rf_op05_sup(i) = exp(1-abs(xrf3_op05_sup(i)-xrf1_op05_sup(i)))./n;
136
137 exp1_rf_op05_inf(i) = exp(1-abs(xrf1_op05_inf(i)-xrf3_op05_inf(i)))./n;
138 exp2_rf_op05_inf(i) = exp(1)./n;
139 exp3_rf_op05_inf(i) = exp(1-abs(xrf3_op05_inf(i)-xrf1_op05_inf(i)))./n;
140
141 exp1_rf_op1_sup(i) = exp(1-abs(xrf1_op1_sup(i)-xrf3_op1_sup(i)))./n;
142 exp2_rf_op1_sup(i) = exp(1)./n;
143 exp3_rf_op1_sup(i) = exp(1-abs(xrf3_op1_sup(i)-xrf1_op1_sup(i)))./n;
144
145 exp1_rf_op1_inf(i) = exp(1-abs(xrf1_op1_inf(i)-xrf3_op1_inf(i)))./n;
146 exp2_rf_op1_inf(i) = exp(1)./n;
147 exp3_rf_op1_inf(i) = exp(1-abs(xrf3_op1_inf(i)-xrf1_op1_inf(i)))./n;
148
149 exp1_rf_op2_sup(i) = exp(1-abs(xrf1_op2_sup(i)-xrf3_op2_sup(i)))./n;
150 exp2_rf_op2_sup(i) = exp(1)./n;
151 exp3_rf_op2_sup(i) = exp(1-abs(xrf3_op2_sup(i)-xrf1_op2_sup(i)))./n;
152
153 exp1_rf_op2_inf(i) = exp(1-abs(xrf1_op2_inf(i)-xrf3_op2_inf(i)))./n;
154 exp2_rf_op2_inf(i) = exp(1)./n;
155 exp3_rf_op2_inf(i) = exp(1-abs(xrf3_op2_inf(i)-xrf1_op2_inf(i)))./n;
156
157 % pr_op
158 exp1_pr_op05_sup(i) = exp(1-abs(xpr1_op05_sup(i)-xpr3_op05_sup(i)))./n;
159 exp2_pr_op05_sup(i) = exp(1)./n;
160 exp3_pr_op05_sup(i) = exp(1-abs(xpr3_op05_sup(i)-xpr1_op05_sup(i)))./n;
161
162 exp1_pr_op05_inf(i) = exp(1-abs(xpr1_op05_inf(i)-xpr3_op05_inf(i)))./n;
163 exp2_pr_op05_inf(i) = exp(1)./n;
164 exp3_pr_op05_inf(i) = exp(1-abs(xpr3_op05_inf(i)-xpr1_op05_inf(i)))./n;
165
166 exp1_pr_op1_sup(i) = exp(1-abs(xpr1_op1_sup(i)-xpr3_op1_sup(i)))./n;

```



```

167 exp2_pr_op1_sup(i) = exp(1)./n;
168 exp3_pr_op1_sup(i) = exp(1-abs(xpr3_op1_sup(i)-xpr1_op1_sup(i)))./n;
169
170 exp1_pr_op1_inf(i) = exp(1-abs(xpr1_op1_inf(i)-xpr3_op1_inf(i)))./n;
171 exp2_pr_op1_inf(i) = exp(1)./n;
172 exp3_pr_op1_inf(i) = exp(1-abs(xpr3_op1_inf(i)-xpr1_op1_inf(i)))./n;
173
174 exp1_pr_op2_sup(i) = exp(1-abs(xpr1_op2_sup(i)-xpr3_op2_sup(i)))./n;
175 exp2_pr_op2_sup(i) = exp(1)./n;
176 exp3_pr_op2_sup(i) = exp(1-abs(xpr3_op2_sup(i)-xpr1_op2_sup(i)))./n;
177
178 exp1_pr_op2_inf(i) = exp(1-abs(xpr1_op2_inf(i)-xpr3_op2_inf(i)))./n;
179 exp2_pr_op2_inf(i) = exp(1)./n;
180 exp3_pr_op2_inf(i) = exp(1-abs(xpr3_op2_inf(i)-xpr1_op2_inf(i)))./n;
181
182 % modulo da diferenca entre os elementos ordenados de RA
183 d1_ra_sup(i) = abs(xra1_sup(i)-xra3_sup(i));
184 d2_ra_sup(i) = abs(xra3_sup(i)-xra1_sup(i));
185
186 d1_ra_inf(i) = abs(xra1_inf(i)-xra3_inf(i));
187 d2_ra_inf(i) = abs(xra3_inf(i)-xra1_inf(i));
188
189 % modulo da diferenca entre os elementos ordenados de RF
190 d1_rf_sup(i) = abs(xrf1_sup(i)-xrf3_sup(i));
191 d2_rf_sup(i) = abs(xrf3_sup(i)-xrf1_sup(i));
192
193 d1_rf_inf(i) = abs(xrf1_inf(i)-xrf3_inf(i));
194 d2_rf_inf(i) = abs(xrf3_inf(i)-xrf1_inf(i));
195
196 % modulo da diferenca entre os elementos ordenados de PR
197 d1_pr_sup(i) = abs(xpr1_sup(i)-xpr3_sup(i));
198 d2_pr_sup(i) = abs(xpr3_sup(i)-xpr1_sup(i));
199
200 d1_pr_inf(i) = abs(xpr1_inf(i)-xpr3_inf(i));
201 d2_pr_inf(i) = abs(xpr3_inf(i)-xpr1_inf(i));
202
203 % soma dos modulos
204 soma_ra_sup = (exp(1-d1_ra_sup(i))/3+exp(1-d2_ra_sup(i))/3+exp(1)/3)/n;
205 s_ra_sup = sum(soma_ra_sup(i));
206
207 soma_ra_inf = (exp(1-d1_ra_inf(i))/3+exp(1-d2_ra_inf(i))/3+exp(1)/3)/n;
208 s_ra_inf = sum(soma_ra_inf(i));
209
210 soma_rf_sup = (exp(1-d1_rf_sup(i))/3+exp(1-d2_rf_sup(i))/3+exp(1)/3)/n;
211 s_rf_sup = sum(soma_rf_sup(i));
212
213 soma_rf_inf = (exp(1-d1_rf_inf(i))/3+exp(1-d2_rf_inf(i))/3+exp(1)/3)/n;
214 s_rf_inf = sum(soma_rf_inf(i));
215
216 soma_pr_sup = (exp(1-d1_pr_sup(i))/3+exp(1-d2_pr_sup(i))/3+exp(1)/3)/n;
217 s_pr_sup = sum(soma_pr_sup(i));
218
219 soma_pr_inf = (exp(1-d1_pr_inf(i))/3+exp(1-d2_pr_inf(i))/3+exp(1)/3)/n;
220 s_pr_inf = sum(soma_pr_inf(i));
221
222 % ra_Op
223 soma_ra_op05_sup = (exp1_ra_op05_sup(i)+exp2_ra_op05_sup(i)+exp3_ra_op05_sup(i))/k;
224 s_ra_op05_sup = sum(soma_ra_op05_sup(i));
225

```

```

226 soma_ra_op05_inf = (exp1_ra_op05_inf(i)+exp2_ra_op05_inf(i)+exp3_ra_op05_inf(i))/k;
227 s_ra_op05_inf = sum(soma_ra_op05_inf(i));
228
229 soma_ra_op1_sup = (exp1_ra_op1_sup(i)+exp2_ra_op1_sup(i)+exp3_ra_op1_sup(i))/k;
230 s_ra_op1_sup = sum(soma_ra_op1_sup(i));
231
232 soma_ra_op1_inf = (exp1_ra_op1_inf(i)+exp2_ra_op1_inf(i)+exp3_ra_op1_inf(i))/k;
233 s_ra_op1_inf = sum(soma_ra_op1_inf(i));
234
235 soma_ra_op2_sup = (exp1_ra_op2_sup(i)+exp2_ra_op2_sup(i)+exp3_ra_op2_sup(i))/k;
236 s_ra_op2_sup = sum(soma_ra_op2_sup(i));
237
238 soma_ra_op2_inf = (exp1_ra_op2_inf(i)+exp2_ra_op2_inf(i)+exp3_ra_op2_inf(i))/k;
239 s_ra_op2_inf = sum(soma_ra_op2_inf(i));
240
241 % rf_Op
242 soma_rf_op05_sup = (exp1_rf_op05_sup(i)+exp2_rf_op05_sup(i)+exp3_rf_op05_sup(i))/k;
243 s_rf_op05_sup = sum(soma_rf_op05_sup(i));
244
245 soma_rf_op05_inf = (exp1_rf_op05_inf(i)+exp2_rf_op05_inf(i)+exp3_rf_op05_inf(i))/k;
246 s_rf_op05_inf = sum(soma_rf_op05_inf(i));
247
248 soma_rf_op1_sup = (exp1_rf_op1_sup(i)+exp2_rf_op1_sup(i)+exp3_rf_op1_sup(i))/k;
249 s_rf_op1_sup = sum(soma_rf_op1_sup(i));
250
251 soma_rf_op1_inf = (exp1_rf_op1_inf(i)+exp2_rf_op1_inf(i)+exp3_rf_op1_inf(i))/k;
252 s_rf_op1_inf = sum(soma_rf_op1_inf(i));
253
254 soma_rf_op2_sup = (exp1_rf_op2_sup(i)+exp2_rf_op2_sup(i)+exp3_rf_op2_sup(i))/k;
255 s_rf_op2_sup = sum(soma_rf_op2_sup(i));
256
257 soma_rf_op2_inf = (exp1_rf_op2_inf(i)+exp2_rf_op2_inf(i)+exp3_rf_op2_inf(i))/k;
258 s_rf_op2_inf = sum(soma_rf_op2_inf(i));
259
260 % pr_Op
261 soma_pr_op05_sup = (exp1_pr_op05_sup(i)+exp2_pr_op05_sup(i)+exp3_pr_op05_sup(i))/k;
262 s_pr_op05_sup = sum(soma_pr_op05_sup(i));
263
264 soma_pr_op05_inf = (exp1_pr_op05_inf(i)+exp2_pr_op05_inf(i)+exp3_pr_op05_inf(i))/k;
265 s_pr_op05_inf = sum(soma_pr_op05_inf(i));
266
267 soma_pr_op1_sup = (exp1_pr_op1_sup(i)+exp2_pr_op1_sup(i)+exp3_pr_op1_sup(i))/k;
268 s_pr_op1_sup = sum(soma_pr_op1_sup(i));
269
270 soma_pr_op1_inf = (exp1_pr_op1_inf(i)+exp2_pr_op1_inf(i)+exp3_pr_op1_inf(i))/k;
271 s_pr_op1_inf = sum(soma_pr_op1_inf(i));
272
273 soma_pr_op2_sup = (exp1_pr_op2_sup(i)+exp2_pr_op2_sup(i)+exp3_pr_op2_sup(i))/k;
274 s_pr_op2_sup = sum(soma_pr_op2_sup(i));
275
276 soma_pr_op2_inf = (exp1_pr_op2_inf(i)+exp2_pr_op2_inf(i)+exp3_pr_op2_inf(i))/k;
277 s_pr_op2_inf = sum(soma_pr_op2_inf(i));
278
279 % consenso entre os conjuntos fuzzy
280 cc_ra_sup = (1/alfa)*log(s_ra_sup);
281 cc_ra_inf = (1/alfa)*log(s_ra_inf);
282
283 cc_rf_sup = (1/alfa)*log(s_rf_sup);
284 cc_rf_inf = (1/alfa)*log(s_rf_inf);

```

```

285
286 cc_pr_sup = (1/alfa)*log(s_pr_sup);
287 cc_pr_inf = (1/alfa)*log(s_pr_inf);
288
289 cc_ra_op_05_sup = (1/alfa)*log(s_ra_op05_sup);
290 cc_ra_op_05_inf = (1/alfa)*log(s_ra_op05_inf);
291
292 cc_ra_op_1_sup = (1/alfa)*log(s_ra_op1_sup);
293 cc_ra_op_1_inf = (1/alfa)*log(s_ra_op1_inf);
294
295 cc_ra_op_2_sup = (1/alfa)*log(s_ra_op2_sup);
296 cc_ra_op_2_inf = (1/alfa)*log(s_ra_op2_inf);
297
298 cc_rf_op_05_sup = (1/alfa)*log(s_rf_op05_sup);
299 cc_rf_op_05_inf = (1/alfa)*log(s_rf_op05_inf);
300
301 cc_rf_op_1_sup = (1/alfa)*log(s_rf_op1_sup);
302 cc_rf_op_1_inf = (1/alfa)*log(s_rf_op1_inf);
303
304 cc_rf_op_2_sup = (1/alfa)*log(s_rf_op2_sup);
305 cc_rf_op_2_inf = (1/alfa)*log(s_rf_op2_inf);
306
307 cc_pr_op_05_sup = (1/alfa)*log(s_pr_op05_sup);
308 cc_pr_op_05_inf = (1/alfa)*log(s_pr_op05_inf);
309
310 cc_pr_op_1_sup = (1/alfa)*log(s_pr_op1_sup);
311 cc_pr_op_1_inf = (1/alfa)*log(s_pr_op1_inf);
312
313 cc_pr_op_2_sup = (1/alfa)*log(s_pr_op2_sup);
314 cc_pr_op_2_inf = (1/alfa)*log(s_pr_op2_inf);
315
316 disp('-----')
317 fprintf('Consenso de Conjuntos Fuzzy para as REF F e LK \n');
318 disp('-----')
319 fprintf('O grau de FSCM de CC_RA_sup = %f.\n', cc_ra_sup);
320 fprintf('O grau de FSCM de CC_RA_inf = %f.\n', cc_ra_inf);
321 fprintf('O grau de FSCM de CC_RF/WF_sup = %f.\n', cc_rf_sup);
322 fprintf('O grau de FSCM de CC_RF/WF_inf = %f.\n', cc_rf_inf);
323 fprintf('O grau de FSCM de CC_PR_sup = %f.\n', cc_pr_sup);
324 fprintf('O grau de FSCM de CC_PR_inf = %f.\n', cc_pr_inf);
325 disp('-----')
326
327 disp('-----')
328 fprintf('Consenso de Conjuntos Fuzzy para a REF Op,I_LK(x,y) \n');
329 disp('-----')
330 fprintf('O grau de FSCM de CC_RA_O(0.5)_sup = %f.\n', cc_ra_op_05_sup);
331 fprintf('O grau de FSCM de CC_RA_O(0.5)_inf = %f.\n', cc_ra_op_05_inf);
332 fprintf('O grau de FSCM de CC_RA_O(1.0)_sup = %f.\n', cc_ra_op_1_sup);
333 fprintf('O grau de FSCM de CC_RA_O(1.0)_inf = %f.\n', cc_ra_op_1_inf);
334 fprintf('O grau de FSCM de CC_RA_O(2.0)_sup = %f.\n', cc_ra_op_2_sup);
335 fprintf('O grau de FSCM de CC_RA_O(2.0)_inf = %f.\n', cc_ra_op_2_inf);
336 fprintf('\n')
337 fprintf('O grau de FSCM de CC_RF_O(0.5)_sup = %f.\n', cc_rf_op_05_sup);
338 fprintf('O grau de FSCM de CC_RF_O(0.5)_inf = %f.\n', cc_rf_op_05_inf);
339 fprintf('O grau de FSCM de CC_RF_O(1.0)_sup = %f.\n', cc_rf_op_1_sup);
340 fprintf('O grau de FSCM de CC_RF_O(1.0)_inf = %f.\n', cc_rf_op_1_inf);
341 fprintf('O grau de FSCM de CC_RF_O(2.0)_sup = %f.\n', cc_rf_op_2_sup);
342 fprintf('O grau de FSCM de CC_RF_O(2.0)_inf = %f.\n', cc_rf_op_2_inf);
343 fprintf('\n')

```

```
344 fprintf('O grau de FSCM de CC_PR_O(0.5)_sup = %f.\n', cc_pr_op_05_sup);
345 fprintf('O grau de FSCM de CC_PR_O(0.5)_inf = %f.\n', cc_pr_op_05_inf);
346 fprintf('O grau de FSCM de CC_PR_O(1.0)_sup = %f.\n', cc_pr_op_1_sup);
347 fprintf('O grau de FSCM de CC_PR_O(1.0)_inf = %f.\n', cc_pr_op_1_inf);
348 fprintf('O grau de FSCM de CC_PR_O(2.0)_sup = %f.\n', cc_pr_op_2_sup);
349 fprintf('O grau de FSCM de CC_PR_O(2.0)_inf = %f.\n', cc_pr_op_2_inf);
350 disp('-----')
```