

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PELOTAS
Centro de Desenvolvimento Tecnológico
Programa de Pós-Graduação em Computação



Dissertação

Modelagem de Conectivos Fuzzy Intuicionistas via Computação Quântica

Alexandre Lemke

Pelotas, 2018

Alexandre Lemke

Modelagem de Conectivos Fuzzy Intuicionistas via Computação Quântica

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Computação da Universidade Federal de Pelotas, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Ciência da Computação

Orientadora: Prof. Dr. Renata Hax Sander Reiser
Coorientador: Prof. Dr. André Rauber Du Bois

Pelotas, 2018

Universidade Federal de Pelotas / Sistema de Bibliotecas
Catalogação na Publicação

L544m Lemke, Alexandre

Modelagem de Conectivos Fuzzy Intuicionistas via
computação quântica / Alexandre Lemke ; Renata Hax
Sander Reiser, orientadora ; André Rauber Du Bois,
coorientador. — Pelotas, 2017.

105 f. : il.

Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós-Graduação
em Computação, Centro de Desenvolvimento Tecnológico,
Universidade Federal de Pelotas, 2017.

1. Lógica Fuzzy Intuicionista. 2. Computação quântica.
3. Lógica Fuzzy. I. Reiser, Renata Hax Sander, orient. II.
Bois, André Rauber Du, coorient. III. Título.

CDD : 005

Dedico este trabalho para a minha família.

AGRADECIMENTOS

Quero agradecer a Deus pela vida que me proporcionou e pelas oportunidades que me fez surgir. Agradeço também ao meu pai João Mario Lemke e minha mãe Elisa Beatriz Kuhn Lemke pela educação e orientação que me deram. Agradeço também pela minha esposa Alessandra Britto dos Santos Lemke pela companhia especial que me faz todos os dias e agradeço ainda as minhas filhas Alice dos Santos Lemke e Felipa dos Santos Lemke por tornarem minha vida mais feliz.

**A imaginação é mais importante que a ciência,
porque a ciência é limitada, ao passo que
a imaginação abrange o mundo inteiro.**

— ALBERT EINSTEIN

RESUMO

LEMKE, Alexandre. **Modelagem de Conectivos Fuzzy Intuicionistas via Computação Quântica**. 2018. 106 f. Dissertação (Mestrado em Ciência da Computação) – Programa de Pós-Graduação em Computação, Centro de Desenvolvimento Tecnológico, Universidade Federal de Pelotas, Pelotas, 2018.

O objetivo principal deste trabalho consiste no desenvolvimento de metodologia de representação de operadores da Teoria dos Conjuntos Fuzzy Intuicionistas (CFIs), como propostos por Krassemir Atanassov, fazendo uso de propriedades como sobreposição, linearidade e distributividade do produto tensorial no espaço de estados e de transformações da Computação Quântica (CQ). A informação referente a cada conectivo fuzzy intuicionista está representada por pares de registrados quânticos, garantindo a unitariedade inerente aos estados e transformações quânticos bem como a flexibilidade da relação de complementaridade das funções de pertinência e não-pertinência que definem CFIs. Os resultados alcançados promovem avanços significativos; (i) consolidando a metodologia qfuzz-Analyzer para representação de conjuntos fuzzy via operadores e estados da CQ; e (ii) colaborando com o desenvolvimento da metodologia qfuzz2-Analyzer, estendo a representação da informação modelada por conjuntos fuzzy intuicionistas e operações, sendo ambas definidas por conectivos fuzzy intuicionistas via registradores e transformações quânticas no modelo de Circuitos Quânticos. Como principal contribuição, concebida como uma extensão da qfuzz-Analyzer, a metodologia qfuzz2-Analyzer garante a preservação da representabilidade dos conectivos fuzzy intuicionistas. O trabalho também considerou a validação da metodologia via extensão da biblioteca de operadores fuzzy intuicionistas no ambiente de simulação *Visual Programming Environment for Quantum Geometric Machine Model* (VPE-qGM). A simulação de operadores via interfaces dos componentes simulador e editores de memória e processos da VPE-qGM, contribui para geração dos resultados frente a problemas como aumento exponencial da memória e operações de medida, facilitando a interpretação e análise dos resultados na simulação dos algoritmos quânticos da qfuzz2-Analyzer.

Palavras-chave: Lógica Fuzzy Intuicionista, Computação Quântica.

ABSTRACT

LEMKE, Alexandre. **Modelling Intuitionist Fuzzy Connectives via Quantum Computing**. 2018. 106 f. Dissertação (Mestrado em Ciência da Computação) – Programa de Pós-Graduação em Computação, Centro de Desenvolvimento Tecnológico, Universidade Federal de Pelotas, Pelotas, 2018.

This work introduces a methodology representing operations of Intuitionistic Fuzzy Set Theory (CFIs), as proposed by Krassemir Atanassov, making use of properties such as superposition, linearity and distributivity of the tensorial product in the state space and transformations of Quantum Computation (QC). The information regarding each intuitionistic fuzzy connective is represented by pairs of quantum registers, guaranteeing the inherent unitarity of quantum states and transformations well as the flexibility of the complementarity relation of membership and non-membership functions characterizing CFIs. The achieved results make significant contributions: (i) consolidating the qfuzz-Analyzer methodology for representing fuzzy sets via operators and states of QC; and (ii) collaborating with the development of the qfuzz2-Analyzer methodology, extending the representation of information modelled by intuitionist fuzzy sets and their operations, both of which are defined by intuitionistic fuzzy connectors via registers and quantum transformations in the Quantum Circuits model. As the main contribution, based on the extensibility from qfuzz-Analyzer, the qfuzz2-Analyzer methodology guarantees the preservation of the representable intuitionistic fuzzy connectives. The work also considered the validation of the methodology by extending the library of intuitionistic fuzzy operators in the Visual Programming Environment for Quantum Geometric Machine Model (VPE-qGM). The simulation of quantum intuitionistic fuzzy operators via interfaces of the VPE-qGM components (simulator, memory and process editors), contributes to generation of the computations minimizing problems as the exponential increase in the quantum memory and the complexity of quantum measurement projection operations, facilitating the interpretation and analysis by applying quantum algorithms of qfuzz2-Analyzer.

Keywords: Intuitionist Fuzzy Logic, Quantum Computation.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Medida do estado ϕ	41
Figura 2	Medida do estado bidimensional $ \psi\rangle$	43
Figura 3	Representações do operador CNOT	44
Figura 4	Representações do operador Toffoli	46
Figura 5	Circuito quântico referente ao operador AND_I	58
Figura 6	Circuito quântico referente ao operador OR_I	63
Figura 7	Circuito quântico referente ao operador IMP_I	68
Figura 8	Circuito quântico referente ao operador $COIMP_I$	72
Figura 9	Circuito quântico referente ao operador DIF_I	77
Figura 10	Circuito quântico referente ao operador $CODIF_I$	81
Figura 11	Simulação do operador AND_I no VPE-qGM com leitura no quinto qbit. . .	87
Figura 12	Simulação do operador AND_I no VPE-qGM com leitura no sexto qbit. . .	87
Figura 13	Simulação do operador OR_I no VPE-qGM com leitura no quinto qbit. . .	88
Figura 14	Simulação do operador OR_I no VPE-qGM com leitura no sexto qbit. . .	89
Figura 15	Simulação do operador IMP_I no VPE-qGM com leitura no quinto qbit. . .	90
Figura 16	Simulação do operador IMP_I no VPE-qGM com leitura no sexto qbit. . .	90
Figura 17	Simulação do operador $COIMP_I$ no VPE-qGM com leitura no quinto qbit.	91
Figura 18	Simulação do operador $COIMP_I$ no VPE-qGM com leitura no sexto qbit.	92
Figura 19	Simulação do operador DIF_I no VPE-qGM com leitura no quinto qbit. . .	93
Figura 20	Simulação do operador DIF_I no VPE-qGM com leitura no sexto qbit. . .	93
Figura 21	Simulação do operador $CODIF_I$ no VPE-qGM com leitura no quinto qbit.	94
Figura 22	Simulação do operador $CODIF_I$ no VPE-qGM com leitura no sexto qbit.	95
Figura 23	Circuito quântico com entradas simuladas no operador AND_I . . .	96

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	Evolução temporal dos estados do operador AND_I	59
Tabela 2	Evolução temporal dos estados do operador OR_I	64
Tabela 3	Evolução temporal dos estados do operador IMP_I	68
Tabela 4	Evolução temporal dos estados do operador $COIMP_I$	73
Tabela 5	Evolução temporal dos estados do operador DIF_I	78
Tabela 6	Evolução temporal dos estados do operador $CODIF_I$	82
Tabela 7	Medida do registrador $ S\mu_{(A_I \cap B_I)}\rangle$ na interpretação para o GP de $A_I \cap B_I$	82
Tabela 8	Medida do registrador $ S\nu_{(A_I \cap B_I)}\rangle$ na interpretação para GNP de $A_I \cap B_I$	83
Tabela 9	Medida do registrador $ S\mu_{(A_I \cup B_I)}\rangle$ na interpretação para o GP $A_I \cup B_I$	83
Tabela 10	Medida do registrador $ S\nu_{(A_I \cup B_I)}\rangle$ na interpretação para o GNP $A_I \cup B_I$	83
Tabela 11	Medida do registrador $ S\mu_{(A_I \rightarrow B_I)}\rangle$ na interpretação para $A_I \rightarrow B_I$.	83
Tabela 12	Medida do registrador $ S\nu_{(A_I \rightarrow B_I)}\rangle$ na interpretação para $A_I \rightarrow B_I$.	83
Tabela 13	Medida do registrador $ S\mu_{(A_I \leftarrow B_I)}\rangle$ na interpretação para $A_I \leftarrow B_I$.	83
Tabela 14	Medida do registrador $ S\nu_{(A_I \leftarrow B_I)}\rangle$ na interpretação para $A_I \leftarrow B_I$.	83
Tabela 15	Medida do registrador $ S\mu_{(A_I - B_I)}\rangle$ na interpretação para $A_I - B_I$.	84
Tabela 16	Medida do registrador $ S\nu_{(A_I - B_I)}\rangle$ na interpretação para $A_I - B_I$.	84
Tabela 17	Medida do registrador $ S\mu_{(A_I -_c B_I)}\rangle$ na interpretação para $A_I -_c B_I$.	84
Tabela 18	Medida do registrador $ S\nu_{(A_I -_c B_I)}\rangle$ na interpretação para $A_I -_c B_I$.	84
Tabela 19	Evolução do operador AND_I , estados instanciados da simulação no VPE-qGM	96

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CFI	Conjunto Fuzzy Intuicionista
CFIC	Conjunto Fuzzy Intuicionista Clássico
NFI	Negação Fuzzy Intuicionista
CIFI	Coimplicação Fuzzy Intuicionista
CQ	Computação Quântica
EFC	Estados Fuzzy Clássicos
EFQ	Estados Fuzzy Quânticos
IFI	Implicação Fuzzy Intuicionista
NOT	Operador de Complemento
AND	Operador de Intersecção
OR	Operador de União
IMP	Operador de Implicação
COIMP	Operador de Coimplicação
DIF	Operador de Diferença
CODIF	Operador de Codiferença
LF	Lógica Fuzzy
LFI	Lógica Fuzzy Intuicionista
μ	Função de Pertinência
ν	Função de Não Pertinência
GP	Grau de Pertinência
GNP	Grau de Não Pertinência
TFI	T-Norma Fuzzy Intuicionista
SFI	T-Conorma Fuzzy Intuicionista
$\subset$	Relação de Inclusão
$\sum$	Símbolo de Somatório
$\oplus$	Operação Soma

$\in$	Símbolo de pertence - indica relação de pertinência
$\notin$	Símbolo de não pertence - indica relação de não pertinência
$\geq$	Sinal de comparação - maior ou igual
$\leq$	Sinal de comparação - menor ou igual
π	Número pi
$\cup$	União de conjuntos
$\cap$	Intersecção de conjuntos
$\forall$	Quantificação universal - para todo ou qualquer que seja
$\rightarrow$	Símbolo para Implicação
$\leftarrow$	Símbolo para Coimplicação
$\Leftrightarrow$	Símbolo para Equivalência material
$-_c$	Símbolo para a operação de Codiferença
$-$	Símbolo para a operação de Diferença
$\otimes$	Produto Tensor
U	Símbolo do Conjunto Universo Fuzzy
$\tilde{U}$	Símbolo do Conjunto Universo Fuzzy Intuicionista
α	Letra Alfa do alfabeto grego
β	Letra Beta do alfabeto grego
γ	Letra Gama do alfabeto grego
δ	Letra Delta do alfabeto grego
ϵ	Letra Epsilon do alfabeto grego
θ	Letra Teta do alfabeto grego
υ	Letra Upsilon do alfabeto grego
σ	Letra Sigma do alfabeto grego
Π	Letra Pi do alfabeto grego
ψ	Letra Psi do alfabeto grego
φ	Letra Fi do alfabeto grego

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	15
1.1	Contextualização	15
1.1.1	Relevância da Abordagem Fuzzy	16
1.1.2	Relevância da Computação Quântica	17
1.2	Objetivos	18
1.3	Trabalhos Relacionados	18
1.4	Organização do Texto	20
2	FUNDAMENTOS DA LÓGICA FUZZY INTUICIONISTA	21
2.1	Conceitos da Lógica Fuzzy	22
2.1.1	Conectivos Fuzzy e Operações entre Conjuntos Fuzzy	23
2.2	Conceitos da Lógica Fuzzy Intuicionista	26
2.2.1	Relações de Ordem em $\tilde{U}$	27
2.2.2	Funções de Projeção de $\tilde{U}$ em U	27
2.2.3	Índice Fuzzy Intuicionista	27
2.2.4	Negação Fuzzy Intuicionista e Operador de Complemento	27
2.2.5	Relação de Dualidade entre Funções Fuzzy Intuicionistas	28
2.2.6	Operadores de Intersecção e União	28
2.2.7	Operações de Implicação e Coimplicação	30
2.2.8	Operações de Diferença e Codiferença	30
2.3	Considerações Finais	31
3	FUNDAMENTAÇÃO PARA COMPUTAÇÃO QUÂNTICA	33
3.1	Espaço de Estados Quânticos	33
3.2	Evolução da Informação	35
3.2.1	Matrizes de Pauli e Operadores de Rotação	36
3.2.2	Geração de Superposição	37
3.2.3	Operador de Fase	38
3.2.4	Rotações na Esfera de Bloch	38
3.3	Efeitos da Operação de Medida	39
3.4	Expansão do Espaço de Estados	41
3.5	Operações Quânticas Controladas	44
3.6	Considerações Finais	46
4	INTERPRETAÇÃO DE CONJUNTOS FUZZY VIA OPERADORES QUÂNTICOS	47
4.1	Interpretação de Conjuntos Fuzzy	47
4.2	Interpretação de Operações sobre Conjuntos Fuzzy	48

4.2.1	Complemento Fuzzy	48
4.2.2	Adição e Multiplicação	48
4.2.3	(Co)Implicação Fuzzy	49
4.2.4	(Co)Diferença Fuzzy	50
4.3	Considerações Finais	51
5	INTERPRETAÇÃO DA LÓGICA FUZZY INTUICIONISTA VIA COMPUTAÇÃO QUÂNTICA	52
5.1	Interpretando CFIs via Estados Quânticos	52
5.2	Operação de Complemento de um CFI via CQ	54
5.3	Operação de Intersecção entre CFIs via CQ	55
5.3.1	Circuito Quântico de Representação Gráfica do Operador AND_I	58
5.4	Operação de União entre CFI via Operadores da CQ	60
5.4.1	Circuito Quântico de Representação Gráfica do Operador OR_I	63
5.5	Operação de Implicação entre CFI via CQ	64
5.5.1	Circuito Quântico de Representação Gráfica do Operador IMP_I	67
5.6	Coimplicação entre CFI via CQ	68
5.6.1	Circuito Quântico de Representação Gráfica do Operador $COIMP_I$	72
5.7	Diferença entre CVI via CQ	73
5.7.1	Circuito Quântico de Representação Gráfica do Operador DIF_I	76
5.8	Codiferença entre CFI via CQ	77
5.8.1	Circuito Quântico de Representação Gráfica do Operador $CODIF_I$	81
5.9	Considerações Finais	82
6	VALIDAÇÃO DE OPERAÇÕES FUZZY INTUICIONISTAS	85
6.1	Simulando Intersecção entre CFI via CQ	86
6.2	Simulando União entre CFI via CQ	86
6.3	Simulando Implicação entre CFI via CQ	88
6.4	Simulando Coimplicação entre CFI via CQ	89
6.5	Simulando Diferença entre CFI via CQ	91
6.6	Simulando Codiferença entre CFI via CQ	93
6.7	Considerações Finais	95
7	CONCLUSÃO	97
7.1	Principais contribuições	97
7.2	Trabalhos Futuros	98
	REFERÊNCIAS	100

1 INTRODUÇÃO

Esta proposta insere-se na pesquisa de novas relações entre lógica fuzzy (LF) e a computação quântica (CQ) pelo o estudo estrito da abordagem intuicionista de acordo com a proposta Atanassov, colaborando com a fundamentação de sistemas para tomada de decisões baseados em incertezas e/ou hesitações referentes a informações imprecisas e/ou insuficientes, respectivamente.

1.1 Contextualização

O trabalho considera a integração entre estas duas áreas relevantes da Ciência da Computação - a Lógica Fuzzy e suas extensões multivaloras e a Computação Quântica e os ambientes de simulação de algoritmos quânticos. Ambas áreas contribuem na busca por soluções para resolver e analisar mais rapidamente problemas difíceis de serem resolvidos pelo uso da lógica clássica e/ou por computadores clássicos. Neste projeto, as similaridades entre estas duas áreas são consideradas visando três principais metas:

- (i) a modelagem da incerteza da informação desde a abordagem lógica dos sistemas computacionais;
- (ii) o desenvolvimento de metodologia para representação e transformações de dados e preservação de propriedades, aplicando estados e operadores da Computação Quântica;
- (iv) a validação da metodologia pela manipulação da informação via ambiente de simulação quântica.

Portanto a principal motivação para seu desenvolvimento é usufruir de propriedades como a sobreposição de estados no paralelismo quântico, a linearidade e distributividade do produto tensorial no espaço de estados e de operadores para representar operações entre conjuntos fuzzy intuicionistas, preservando as principais propriedades dos conectivos e proporcionando uma melhor compreensão de sistemas computacionais fundamentados na Lógica Fuzzy Intuicionista.

1.1.1 Relevância da Abordagem Fuzzy

A Lógica Fuzzy vem contribuindo fortemente no desenvolvimento de sistemas que auxiliem a tomada de decisão baseados na análise de múltiplos dados, sendo amplamente usada em muitas áreas aplicadas e integradas às engenharias e à computação (KLIR, 1993; M et al., 2009).

Existem muitos processos complexos, com base em informações imprecisas, onde sistemas fuzzy podem modelar em termos matemáticos estes dados de acordo com a Teoria dos Conjuntos Fuzzy (TCF) e da Lógica Fuzzy (LF). Estes sistemas têm diversas aplicações como a área das engenharias, de tomada de decisões, mineração de dados, planejamento e otimização (HERRERA; MARTÍNEZ; SÁNCHEZ, 2005).

Destacam-se também aplicações em gestão de recursos, estratégias militares, diagnóstico médico, reconhecimento de padrões e análise de agrupamento em logística (BARROS; BASSANEZI, 2006).

Também existem aplicações envolvendo sistemas que utilizam a lógica fuzzy junto às ferramentas computacionais, como por exemplo, redes neurais e a programação evolutiva (DENG FENG; CHUNTIAN, 2002; YE, 2011; MITCHELL, 2005; WANG; XIN, 2005). Também possui aplicações em sistemas especialistas, raciocínio aproximativo e processamento de imagens digitais (BEZDEK; DUBOIS; PRADE, 1999; XU, 2009; ZADEH, 1975).

Entretanto, apesar dos inúmeros avanços, não se tem convergência para uma solução consolidada a nortear o embasamento teórico bem como os métodos matemáticos para apoio à área de tomada de decisão, baseada em múltiplos atributos (KOSHELEVA; REISER; KREINOVICH, 2015). Esta convergência constitui-se ainda um grande desafio de pesquisa, justificado por muitos fatores, dentre os quais destacam-se: (i) o conhecimento insuficiente dos decisores; (ii) a sempre crescente necessidade de agregar duas ou mais possibilidades de julgamentos; (iii) a desafiadora habilidade de lidar com características subjetivas das alternativas. Todos estes fatores geram informações incertas que devem ser mapeadas desde a modelagem dos sistemas de tomada de decisões baseados em múltiplos atributos (DUBOIS; PRADE, 1994).

Em processos decisórios, tomadores de decisões podem assegurar que uma determinada alternativa é (ou não) compatível com um (ou mais) dos múltiplos atributos associados aos conjuntos fuzzy. Mas frequentemente, face às múltiplas informações, inviabiliza-se a certeza sobre o grau de (não) pertinência aos conjuntos, caracterizando a hesitação na expressão da preferência sobre tal alternativa. Justifica-se assim a dificuldade ao lidar com hesitação inerente às avaliações subjetivas (LIN; XIA, 2003).

Krassimir T. Atanassov introduz a teoria dos Conjuntos Fuzzy Intuicionista e os fundamentos da Lógica Fuzzy Intuicionista (LFI) (ATANASSOV, 2003), apresentando

a importância tanto da função de pertinência, quanto da função de não pertinência, ou seja, a cada elemento do universo $\mathcal{X}$ está associado a um grau de pertinência e um grau de não-pertinência (ATANASSOV; GARGOV, 1998)

A LFI baseada na Teoria dos Conjuntos Fuzzy Intuicionistas de Atanassov é uma lógica multivalorada capaz de capturar tanto a incerteza inerente a linguagem natural quanto a hesitação ao expressar a preferência sobre uma dada alternativa em processos decisórios (CORNELIS; DESCHRIJVER; KERRE, 2002). Ou seja, a LFI oferece uma abordagem lógica capaz de lidar com os tipos de dados e informações envolvendo as características subjetivas dos seres humanos, provendo uma modelagem lógica intuitiva aos sistemas de inferência, de forma que efetivamente contribuam nos processos de tomada de decisão (DESCHRIJVER; KERRE, 2005a).

E, para análise via valores reais, considera-se o coeficiente de correlação entre IFSs, considerando ambos, o grau de pertinência e o de não-pertinência, como proposto por Bustince et. al (BEZDEK; DUBOIS; PRADE, 1999).

1.1.2 Relevância da Computação Quântica

A Computação Quântica (CQ) é um novo modelo computacional despertando uma área de pesquisa interessante para suporte ao conhecimento e desenvolvimento de algoritmos e computadores quânticos que usem os fenômenos previstos pela Mecânica Quântica como superposição de estados, paralelismo quântico, interferência e emaranhamento, visando melhor desempenho que os computadores atuais, para tarefas específicas mas extremamente relevantes como processamento da informação, criptografia e teleportação (NIELSEN; CHUANG, 2003).

Com base nos fundamentos e fenômenos descritos na Mecânica Quântica podem ser desenvolvidos novos algoritmos. Em contraste com algoritmos clássicos que manipulam bits de informação, onde cada bit armazena um 1 ou um 0, algoritmos quânticos atuam sobre uma memória global constituída por qubits, manipulando 1, 0 ou uma sobreposição destes valores booleanos, que ocorrem simultaneamente. O principal problema ao computar com qubits, ocorrem muitas perturbações e o tempo de coerência dos estados da partícula é muito pequeno para administrar o sistema.

Um sistema quântico é probabilístico e o processo de observação dos objetos quânticos ocorre de modo imprevisível. A observação muda o estado corrente do sistema caracterizado como Princípio da Incerteza na teoria quântica (TARTAS et al., 2009).

Procurando uma performance sempre maior no processamento e armazenamento de dados, na solução de grandes e difíceis problemas que na computação clássica levaria muito tempo, estudiosos trabalham no desenvolvimento do computador quântico e algoritmos quânticos. A superposição e o emaranhamento são muito utilizadas em computadores e algoritmos quânticos, permitindo reais vantagens em relação

aos computadores e algoritmos clássicos. Por enquanto, como o computador quântico só está disponível em laboratório de pesquisa, tem-se uma alternativa real com a simulação quântica.

O paralelismo quântico potencializa uma velocidade de processamento muito maior que os atuais computadores. Entretanto, decorre desta vantagem a dificuldade enfrentada na construção do computador quântico – a alta incidência de erros pela influência do meio que pode alterar o qubit e destruir a superposição de estados. Uma vez realizada a medida, o estado de superposição deixa de existir, ou ainda, não é possível conhecer todos os estados sobrepostos. Dificuldades também ocorrem na correção de erro ao medir o sistema, caracterizando a coerência de fase.

Este trabalho considera o paralelismo quântico na modelagem síncrona das relações de pertinência e não-pertinência que definem os conjuntos e operadores duais da Teoria dos Conjuntos Fuzzy Intuicionistas.

1.2 Objetivos

O objetivo principal deste trabalho consiste em obter uma metodologia de representação de conjuntos fuzzy intuicionistas, como propostos por Atanassov, por estruturas do espaço de estados e processos da Computação Quântica.

Para tal são considerados os seguintes objetivos parciais:

- (i) consolidar a metodologia já introduzida de representação de conjuntos fuzzy via operadores e estados da computação quântica;
- (ii) estender esta metodologia para representação da informação modelada por conjuntos fuzzy intuicionistas e operações definidas por conectivos fuzzy intuicionistas via registradores e transformações quânticas no modelo de Circuitos Quânticos;
- (iii) preservar a propriedade de representabilidade dos conectivos fuzzy intuicionistas na metodologia desenvolvida fazendo uso da sobreposição, linearidade e distributividade do produto tensorial no espaço de estados e de operadores quânticos;
- (iv) validar a metodologia desenvolvida considerando o ambiente de simulação *Visual Programming Environment for Quantum Geometric Machine Model* (VPE-qGM).

1.3 Trabalhos Relacionados

Existem diversos estudos que exploram o paralelismo quântico para a modelagem de CFIs definidos por conectivos fuzzy intuicionistas representáveis e correspondentes operações sobre CFIs. Neste contexto, as interpretações das representações via ope-

radores quânticos são obtidas através das operações de medida executadas sobre os estados quânticos.

Destacam-se diferentes trabalhos que estudam diferentes aspectos a representação da LF a partir de estruturas da CQ.

Em Chiara (LEPORINI, 2016), mostra-se que as lógicas computacionais quânticas são exemplos especiais de lógica quântica considerando que fórmulas denotam pedaços de informação quântica através de sistemas de qubits e/ou qtrits, onde os conectivos lógicos são interpretados como portas lógicas quânticas reversíveis. neste contexto, qualquer fórmula da linguagem computacional quântica representa uma descrição lógica sintética de um circuito quântico. O trabalho apresenta uma importante abordagem para a informação quântica, onde a noção básica de qubit foi substituída pela noção mais geral de qudit. A semântica correspondente permite representar portas reversíveis com algumas operações lógicas básicas em lógicas multivaloradas, como de Lukasiewicz.

Muitos autores têm mencionado a similaridade entre CQ e LF. O trabalho desenvolvido por Kreinovich et. al. (KREINOVICH; KOHOUTB; KIMC, 2008) mostra que essas lógicas não são idênticas, apesar das muitas similaridades. Enfatiza-se que, embora a operação especial “raiz quadrada do NOT” seja amplamente aplicada na modelagem de circuitos quânticos na CQ, este operador não tem uma interpretação por operadores da teoria dos Conjuntos Fuzzy. A partir deste resultados, este trabalho busca contextualizar os conceitos da LF por estruturas da CQ.

Mannucci (MANNUCCI, 2006) introduz uma maneira pela qual a CQ pudesse ser usada para representação do conceito de conjuntos fuzzy. A idéia central associa estados de registradores quântico aos valores de funções de pertinência associados a um elemento x de um universo $X \neq \emptyset$, formalizado a noção de conjuntos fuzzy clássicos. De acordo com esta abordagem, os valores fuzzy no intervalo unitário $U = [0, 1]$ são então representados na esfera de Bloch. A generalização de conjunto fuzzy quântico pode ser obtida pela superposição, possivelmente emaranhada, de muitos conjuntos fuzzy clássicos, oferecendo novas oportunidades para a modelagem da incerteza em sistemas baseados na LF. Mannucci expõe a estrutura principal da teoria do conjunto fuzzy quântico, possibilitando a análise de operações padrão de união e intersecção, apontando as possibilidades para extensão desta abordagem para etapas de fuzzificação e defuzzificação.

O grupo de FMMFCC vem desenvolvendo extensões desta em vários trabalhos desde 2012, todos centrados na abordagem fuzzy via CQ (VISINTIN et al., 2012; MARON et al., 2012, 2013). Mais recentemente, em (MARON et al., 2013) (VIEIRA, 2015), explora-se a integração entre a Teoria dos Conjuntos Fuzzy e a Computação Quântica visando a modelagem de conectivos da lógica fuzzy via operadores da computação quântica, contribuindo com a descrição, via operadores quânticos, de classes deriva-

das do conectivo fuzzy XOR, bem como as implicações fuzzy baseadas em conectivos fuzzy XOR. O trabalho também desenvolveu a modelagem dos conectivos fuzzy XOR usando o modelo tradicional de circuitos quânticos, implementando os conectivos fuzzy XOR e simulando através das interfaces gráficas da ferramenta VPE-qGM.

Em (AVILA et al., 2015), apresenta-se a modelagem de conectivos fuzzy via CQ executados simultaneamente, via superposição de registradores quânticos para expressar o correspondente grau de pertinência de um mesmo elemento em diferentes conjuntos fuzzy. Foram modelados classes de conectivos fuzzy representáveis, como as implicações e as diferenças fuzzy, incluindo suas construções duais. Interpretações baseadas em circuitos quânticos com simulação no ambiente de programação com interface gráfica VPE-qGM proveram uma validação dos conceitos modelados.

1.4 Organização do Texto

O presente texto está organizada em de sete capítulos, resumidos a seguir.

O Capítulo 1 se refere à introdução, onde descreve-se a principal motivação contextualizando o trabalho nas áreas de Lógica Fuzzy e Computação Quântica, incluindo os objetivos bem como os trabalhos relacionados ao tema desta dissertação.

No Capítulo 2 é retratado um estudo sobre a Lógica Fuzzy Intuicionista, originando sobre o estudo de conectivos fuzzy, relatando alguns conceitos importantes como as relações de ordem, as funções de projeção, o índice fuzzy intuicionista, a negação fuzzy intuicionista e a relação de dualidade entre funções fuzzy intuicionistas. Ainda são apresentadas os principais conectivos, as normas e conormas triangulares intuicionistas, bem como as operações obtidas através destes conectivos, como complemento, intersecção, união, implicação, coimplicação, diferença e codiferença.

O Capítulo 3 apresenta os principais conceitos da computação quântica como fundamentação para o Capítulo 4, onde são considerados os aspectos mais importantes da metodologia de interpretação da LF através da CQ.

No Capítulo 5, encontra-se a principal contribuição deste trabalho, onde ocorre a extensão da modelagem fuzzy via da computação quântica, para a modelagem da lógica fuzzy intuicionista, também através da computação quântica, apresentando a metodologia de representação de operações sobre conjuntos fuzzy intuicionistas via transformações e estados quânticas.

No Capítulo 6, ilustram-se as simulações executadas no ambiente VPE-qGM, das operações sobre conjuntos fuzzy intuicionistas através dos operadores quânticos definidos neste trabalho, bem como seus resultados e a verificação das principais propriedades para a validação desses operadores.

No Capítulo 7, destacam-se as contribuições, apresentando as conclusões.

2 FUNDAMENTOS DA LÓGICA FUZZY INTUICIONISTA

A teoria dos Conjuntos Fuzzy Intuicionistas (CFIs) é uma teoria de Conjuntos Fuzzy Tipos-2 (CFT2), onde os conjuntos fuzzy têm graus de pertinência que são conjuntos fuzzy (tipo-1) e não apenas um único valor no intervalo U . CF2 são conjuntos frequentemente usados na modelagem de problemas onde existe incerteza a respeito dos graus de pertinência, do formato das funções de pertinência ou de alguns parâmetros das funções de pertinência (KARNIK; MENDEL; LIANG, 1999).

A fundamentação teórica provida pelos CFIs com suporte na teoria dos CFT2, potencializa ambas vantagens:

- (i) apropriação de informações vagas normalmente descritas em linguagem natural;
- (ii) inclusão de informações incertas decorrentes de hesitação de especialistas ou uso de diferentes metodologias,

quando da determinação da relação de pertinência e não-pertinência na modelagem dos conjuntos considerando sistemas fuzzy (ATANASSOV, 1999).

A extensão proposta por Atanassov (ATANASSOV, 1999) generaliza operadores e propriedades da lógica fuzzy, incorporando ainda relevantes propriedades inerentemente fuzzy intuicionistas, como a diferença ente o grau de pertinência e o grau de não-pertinência determinando o índice fuzzy intuicionista, modelando a hesitação da pertinência (não-pertinência) dos elementos de um CFI.

A teoria dos conjuntos fuzzy intuicionistas (ATANASSOV; GARGOV, 1989), estende a teoria dos conjuntos fuzzy, associando a cada elemento x em um conjunto universo $\mathcal{X}$, $\mathcal{X} \neq \emptyset$, um grau de pertinência (GP) e um grau de não-pertinência (GNP), ambos definidos no intervalo unitário pelas correspondentes expressões ($\mu_A(x)$) and ($\nu_A(x)$), e tais que a seguinte restrição natural é satisfeita:

$$0 \leq \mu_A(x) + \nu_A(x) \leq 1. \quad (1)$$

Um CFI A_I consiste num conjunto de pares (μ_A, ν_A) , cujas componentes satisfazem a restrição natural (ATANASSOV, 1986) dada pela Eq. (1). Logo, tem-se que:

$$A_I = \{(x, \mu_{A_I}(x), \nu_{A_I}(x)) : x \in \mathcal{X} \text{ e } \mu_{A_I}(x) + \nu_{A_I}(x) \leq 1\},$$

onde $\mu_{A_I}, \nu_{A_I} : \mathcal{X} \rightarrow U$ são as funções de pertinência e de não-pertinência de um elemento $x \in \mathcal{X}$ em A_I . Esta teoria dos CFI é equivalente a teoria dos conjuntos fuzzy valorados intervalarmente (CORNELIS; ATANASSOV; KERRE, 2003) associando às componentes de cada par, os extremos de um intervalo.

A desigualdade estabelecida na Eq. (1) generaliza os conjuntos fuzzy pois a relação entre pertinência e não pertinência não é necessariamente complementar. Ou ainda, pode-se pensar em um CF como um caso especial de um CFI cujo grau de não pertinência pode ser obtido através da seguinte igualdade:

$$\nu_{A_I}(x) = 1 - \mu_{A_I}(x).$$

Assim, na modelagem de um sistema de regras de inferência baseado em LFI, o grau de não-pertinência $\nu_{A_I}(x)$ associado a cada elemento $x \in \mathcal{X}$, nem sempre coincide com o complemento do grau de pertinência $\mu_{A_I}(x)$.

Logo a seguir, exemplifica-se o uso desta abordagem.

Observação 1. *Em (CORNELIS; ATANASSOV; KERRE, 2003), está descrito um procedimento de votação onde as pessoas têm de expressar seu sentimento a uma série de propostas. É óbvio que, enquanto um pode ser a favor, outro vote em desfavor de uma proposta e, da mesma maneira, podem ocorrer abstenções. Usando somente o grau de pertinência, torna-se um trabalho árduo e de difícil compreensão a separação entre um defensor e um adversário da proposta. Para tal, parece natural aplicar uma modelagem em conjuntos fuzzy intuicionistas. Nesta abordagem, flexibiliza-se a modelagem associando-se a cada proposta, o número de defensores e de adversários, permitindo que o cardinal do complemento do conjunto de defensores não seja exatamente igual ao cardinal do conjunto de adversos à proposta em votação.*

2.1 Conceitos da Lógica Fuzzy

Nesta seção, conceitos básicos sobre os conectivos fuzzy t-norma, t-conorma e a negação fuzzy são descritos e, para informações adicionais, veja (DUBOIS; PRADE, 1994, 2000; M et al., 2009).

Definição 1. Função de Pertinência (ZADEH, 1965): *Seja χ um conjunto universo não vazio. Um conjunto fuzzy A em χ é definido pela função de pertinência $\mu_A : \chi \rightarrow U = [0, 1]$, sendo $\mu_A(x)$ o grau pertinência (GP) de x em A :*

$$A = \{(x, \mu_A(x)) : x \in \chi\} \quad (2)$$

Os valores $\mu_A(x) = 1$ e $\mu_A(x) = 0$ indicam, respectivamente, a pertinência plena e a não pertinência plena do elemento x no conjunto fuzzy A .

Sejam $A_1, A_2, \dots, A_n$ conjuntos fuzzy referente a conjunto universo $\mathcal{X}$. O conjunto fuzzy $f[A_1, A_2, \dots, A_n]$ definido por um conetivo fuzzy $f : U^n \rightarrow U$, em relação ao universo $\mathcal{X}$, é dado pela expressão

$$A_{f[A_1, A_2, \dots, A_n]} = \{(x, \mu_{A_{f[A_1, A_2, \dots, A_n]}}(x)) : x \in \mathcal{X}\}$$

sempre que $\mu_{A_{f[A_1, A_2, \dots, A_n]}} : \mathcal{X} \rightarrow U$ é uma função definida por:

$$\mu_{f[A_1, A_2, \dots, A_n]}(x) = f(\mu_{A_1}(x), \mu_{A_2}(x), \dots, \mu_{A_n}(x)), \forall x \in \mathcal{X}. \quad (3)$$

2.1.1 Conectivos Fuzzy e Operações entre Conjuntos Fuzzy

Nesta seção são revisados as definições axiomáticas dos conectivos fuzzy e propriedades das operações entre conjuntos fuzzy.

2.1.1.1 Complemento fuzzy

Apresenta-se nesta seção definição axiomática, propriedades básicas e exemplos de funções de negação fuzzy (ou complemento fuzzy). Para informações adicionais sobre propriedades, exemplos e conceitos relacionados veja (BUSTINCE; BURILLO; SORIA, 2003; KLEMENT; MESIAR; PAP, 2000).

A função $N : U \rightarrow U$ é uma **negação fuzzy** se satisfaz as duas seguintes propriedades:

N1: $N(0) = 1$ e $N(1) = 0$;

N2: Se $x \geq y$ então $N(x) \leq N(y)$, para todo $x, y \in U$.

As negações fuzzy forte ainda que satisfazem a propriedade involutiva

N3: $N(N(x)) = x$.

Exemplo 1. A função N_S é uma negação fuzzy forte definida pela expressão:

$$N_S(x) = 1 - x. \quad (4)$$

Definição 2. Sejam $N : U \rightarrow U$ uma negação fuzzy. O **complemento** de A definido com referencia a $x \in \mathcal{X}$, resulta no CF expresso conforme a Eq. (5):

$$A' = \{(x, \mu_{A'}(x)) : (x, N(\mu_A(x)) : x \in \mathcal{X}\}; \quad (5)$$

Na sequência, considera-se a relação de dualidade entre operadores fuzzy (BA-ETS, 1997, Definição 12).

Sejam N uma negação fuzzy forte em U e $f : U^n \rightarrow U$ uma função real. A função **N -dual de f** é definida pela expressão:

$$f_N(x_1, x_2, \dots, x_n) = N^{-1}(f(N(x_1), N(x_2), \dots, N(x_n))), \forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in U^n. \quad (6)$$

De acordo com Eq. (6), f e f_N são chamadas **funções mutuamente duais**.

Neste trabalho, tal como considerado em (KLEMENT; MESIAR; PAP, 2004; MAES; BAETS, 2009), quando $N = N_S$, a Equação (6) é dada pela expressão:

$$1 - f_N(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(1 - x_1, 1 - x_2, \dots, 1 - x_n), \forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in U^n. \quad (7)$$

2.1.1.2 União e Intersecção entre Conjuntos Fuzzy

Uma **(co)norma triangular** (t-(co)norma) $T(S) : U^2 \rightarrow U$ satisfaz, para todo $x, y, z \in U$, as seguintes propriedades (KLEMENT; MESIAR; PAP, 2000):

$$\begin{array}{ll} \mathbf{T1:} T(x, y) = T(y, x); & \mathbf{S1:} S(x, y) = S(y, x); \\ \mathbf{T2:} T(x, T(y, z)) = T(T(x, y), z); & \mathbf{S2:} S(x, S(y, z)) = S(S(x, y), z); \\ \mathbf{T3:} \text{Se } y \leq z \text{ então } T(x, y) \leq T(x, z); & \mathbf{S3:} \text{Se } y \leq z \text{ então } S(x, y) \leq S(x, z); \\ \mathbf{T4:} T(x, 1) = x. & \mathbf{S4:} S(x, 0) = x. \end{array}$$

Exemplo 2. A t-(co)norma considerada neste trabalho e o produto e a soma probabilística, com respectivas expressões nas Eqs. (8)a e (8)b:

$$T_P(x, y) = xy; \quad S_P(x, y) = x + y - xy. \quad (8)$$

A função $T(S) : U^2 \rightarrow U$ é uma t-norma (t-conorma) se, e somente se, existe uma t-conorma T_N (t-norma S_N) tal que, para todo $(x, y) \in U^2$, tem-se

$$T_N(x, y) = N(T(N(x), N(y))), \quad S_N(x, y) = N(S(N(x), N(y))). \quad (9)$$

Sejam a t-norma e t-conorma apresentada na Eq. (2). Tem-se que as funções (T_P, S_P) na Eq. (2) constituem em um par de t-normas e t-conormas mutuamente duais em relação a N_S (negação padrão)(KLEMENT; MESIAR; PAP, 2000).

Definição 3. Sejam $S, T : U^2 \rightarrow U$ uma t-norma e t-conorma fuzzy. A **intersecção e união** entre os CFs A e B , ambos definidos com referencia a $x \in \mathcal{X}$, resulta nos correspondentes CFs expressos conforme as Eqs. (10) e (11):

$$A \cap B = \{(x, \mu_{A \cap B}(x)) = (x, T(\mu_A(x), \mu_B(x))) : x \in \mathcal{X}\}; \quad (10)$$

$$A \cup B = \{(x, \mu_{A \cup B}(x)) = (x, S(\mu_A(x), \mu_B(x))) : x \in \mathcal{X}\}. \quad (11)$$

2.1.1.3 (Co)Implicação entre Conjuntos Fuzzy

Uma função binária $I : U^2 \rightarrow U$ é um **(co)implicador fuzzy** se satisfaz as seguintes condições da tabela da (co)implicação Booleana:

$$\mathbf{I0} : I(1, 1) = I(0, 1) = I(0, 0) = 1; \quad \mathbf{J0} : J(0, 0) = I(1, 0) = I(1, 1) = 0.$$

$$\mathbf{I1} : I(1, 0) = 0; \quad \mathbf{J1} : J(0, 1) = 1;$$

Segundo (FODOR; ROUBENS, 1994; DUBOIS; PRADE, 1994), a função $I : U^2 \rightarrow U$ é uma (co)implicação fuzzy se, para todo $x, y, z \in U$, satisfaz as seguintes propriedades:

$$\mathbf{I2} : x \leq z \Rightarrow I(x, y) \geq I(z, y); \quad \mathbf{J2} : x \leq z \Rightarrow J(x, y) \geq J(z, y);$$

$$\mathbf{I3} : y \leq z \Rightarrow I(x, y) \leq I(x, z); \quad \mathbf{J3} : y \leq z \Rightarrow J(x, y) \leq J(x, z);$$

$$\mathbf{I4} : I(0, y) = 1; \quad \mathbf{J4} : J(1, y) = 0;$$

$$\mathbf{I5} : I(x, 1) = 1; \quad \mathbf{I5} : J(x, 0) = 0;$$

$$\mathbf{I6} : I(1, y) = y; \quad \mathbf{I6} : I(1, y) = y.$$

A classe (S,N)-(co)implicações considera funções definidas pelas expressões:

$$I_{S,N}(x, y) = S(N(x), y), \quad J_{T,N}(x, y) = T(N(x), y), \quad \forall x, y \in U, \quad (12)$$

sempre que T (S) é uma t-(co)norma e N é uma negação fuzzy. Esta classe generaliza a seguinte equivalência clássica: $p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$. Se N é uma negação fuzzy forte, então $I_{S,N}$ é uma implicação forte referida como S-implicação. A correspondente construção N -dual é uma **S-coimplicação** dada por:

$$(I_{S,N})_N(x, y) = S_N(N(x), y), \quad \forall x, y \in U, \quad (13)$$

sendo S_N a função N -dual da t-conorma S .

Exemplo 3. A (co)implicação de Reichenbach (J_{RC}) I_{RC} definida pela expressão

$$I(x, y) = 1 - x + xy; \quad J(x, y) = y - xy, \quad (14)$$

e uma S-(co)implicação.

Definição 4. Sejam $I, J : U^2 \rightarrow U$ uma implicação e coimplicação fuzzy. O conjunto fuzzy obtido pela ação destes operadores nos CFs A e B , ambos definidos com referência a $x \in \mathcal{X}$, resulta nos CFs expressos conforme as Eqs. (15) e (16):

$$Imp(A, B) = \{(x, \mu_{Imp(A,B)}(x)) = (x, I(\mu_A(x), \mu_B(x))) : x \in \mathcal{X}\}; \quad (15)$$

$$CoImp(A, B) = \{(x, \mu_{CoImp(A,B)}(x)) = (x, J(\mu_A(x), \mu_B(x))) : x \in \mathcal{X}\}. \quad (16)$$

2.1.1.4 (Co)Difereça entre Conjuntos Fuzzy

Em (HUAWEN, 1987, Definition 4), o **operador (co)diferença fuzzy** está definido pela função $D(E) : U^2 \rightarrow U$ satisfazendo, para todos $x, y, z \in U$, as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned} \mathbf{D1:} & D(x, y) \leq x; & \mathbf{E1:} & E(x, y) \geq x; \\ \mathbf{D2:} & D(x, 0) = x; & \mathbf{E2:} & E(x, 1) = x; \\ \mathbf{D3:} & y \leq z \rightarrow D(x, y) \geq Dif(x, z); & \mathbf{E3:} & y \leq z \rightarrow E(x, y) \leq E(x, z); \\ \mathbf{D4:} & x \leq y \rightarrow E(x, y) \leq E(z, y) & \mathbf{E4:} & x \leq y \rightarrow E(x, y) \geq E(z, y) \\ \mathbf{D5:} & Dif(1, x) = N(x) & \mathbf{E5:} & (0, x) = x. \end{aligned}$$

Sejam T (S) e N , uma t-(co)norma e uma negação fuzzy, respectivamente. A função $Dif_{T,N}(CoDif_{S,N}) : U^2 \rightarrow U$ dada por:

$$Dif_{T,N}(x, y) = T(x, N(y)); \quad (17)$$

$$CoDif_{S,N}(x, y) = S(x, N(y)), \quad \forall x, y, z \in U. \quad (18)$$

é um operador de (co)diferença fuzzy (ALSINA; TRILLAS, 2008).

A classe dos operadores de (co)diferença usada neste trabalho é definida pela expressão

$$Dif(A, B) = \{(x, \mu_A(x) - \mu_A(x)\mu_B(x)) : x \in \mathcal{X}\}; \quad (19)$$

$$CoDif(A, B) = \{(x, 1 - \mu_B(x) + \mu_A(x)\mu_B(x)) : x \in \mathcal{X}\}. \quad (20)$$

Definição 5. Sejam $S, T : U^2 \rightarrow U$ uma t-norma e t-conorma fuzzy. A ação do **(co)diferença** nos CFs A e B , ambos definidos com referencia a $x \in \mathcal{X}$, resulta nos correspondentes CFs expressos conforme as Eqs. (21) e (22):

$$Dif(A, B) = \{(x, \mu_{Dif(A,B)}(x)) = (x, T(\mu_A(x), N_S(\mu_B(x)))) : x \in \mathcal{X}\}; \quad (21)$$

$$CoDif(A, B) = \{(x, \mu_{CoDif(A,B)}(x)) = (x, S(\mu_A(x), N_S(\mu_B(x)))) : x \in \mathcal{X}\}. \quad (22)$$

A classe dos operadores de (co)diferença usada neste trabalho é definida por:

$$Dif(A, B) = \{(x, \mu_A(x) - \mu_A(x)\mu_B(x)) : x \in \mathcal{X}\}; \quad (23)$$

$$CoDif(A, B) = \{(x, 1 - \mu_B(x) + \mu_A(x)\mu_B(x)) : x \in \mathcal{X}\}. \quad (24)$$

2.2 Conceitos da Lógica Fuzzy Intuicionista

Para compreenssão da LFI, conceitos serão apresentados na sequência, tais como relações de ordem, funções de projeção, índice e algumas funções fuzzy intuicionistas.

Seja $\mathcal{X} \neq \emptyset$. A expressão de um conjunto fuzzy intuicionista (CFI) A_I , dada por

$$A_I = \{(x, (\mu_{A_I}(x), \nu_{A_I}(x))) : x \in \mathcal{X}, \mu_{A_I}(x) + \nu_{A_I}(x) \leq 1\},$$

estende um conjunto fuzzy $A_I = \{(x, \mu_{A_I}(x), 1 - \mu_{A_I}(x)) : x \in \mathcal{X}\}$, sendo o GNP $\nu_{A_I}(x)$ de um elemento $x \in \mathcal{X}$ menor, no máximo igual ao seu complemento, o GP $\mu_{A_I}(x)$.

2.2.1 Relações de Ordem em $\tilde{U}$

Seja $\tilde{U} = \{\tilde{x} = (x_1, x_2) \in U^2 : x_1 + x_2 \leq 1\}$. A relação de ordem em $\tilde{U}$ considerada neste trabalho é expressa por:

$$(x_1, x_2) \leq_{\tilde{U}} (y_1, y_2) \text{ se, e somente se, } x_1 \leq y_1 \text{ e } x_2 \geq y_2. \quad (25)$$

Se $\tilde{0} = (0, 1)$ e $\tilde{1} = (1, 0) \in \tilde{U}$, tem-se $\tilde{0} \leq_{\tilde{U}} \tilde{x} \leq_{\tilde{U}} \tilde{1}$, para todo $\tilde{x} = (x_1, x_2) \in \tilde{U}$ (BUSTINCE; BURILLO; SORIA, 2003).

2.2.2 Funções de Projeção de $\tilde{U}$ em U

As funções $l_I, r_I : \tilde{U} \rightarrow U$, denotam as respectivas projeções à esquerda e à direita, as quais estão definidas, para todo $\tilde{x} = (x_1, x_2) \in \tilde{U}$, pelas expressões:

$$l_{\tilde{U}}(\tilde{x}) = l_{\tilde{U}}(x_1, x_2) = x_1; \quad \text{e} \quad r_{\tilde{U}}(\tilde{x}) = r_{\tilde{U}}(x_1, x_2) = x_2. \quad (26)$$

Na sequência, apresenta-se algumas das principais funções da LFI, suas propriedades algébricas, exemplos e demais conceitos relacionados.

2.2.3 Índice Fuzzy Intuicionista

O **índice fuzzy intuicionista** de um elemento de $x \in \mathcal{X}$ referente a um conjunto fuzzy intuicionista A_I é (IFIx) indicado pela expressão $\pi_{A_I}(x)$ e denominado **degrau de hesitação** ou ainda, **grau de indeterminação** de x em A . De acordo com (XU; YAGER, 2009; ATANASSOV, 1999), para todo $x \in \mathcal{X}$, o IFIX de x referente a A_I está definido pela expressão:

$$\pi_{A_I}(x) = 1 - \mu_{A_I}(x) - \nu_{A_I}(x). \quad (27)$$

Se $\pi_{A_I}(x) = 0$, A_I é um conjunto fuzzy (SZMIDT; KACPRZYK, 2004).

Propriedades inerentes às implicações fuzzy intuicionistas frequentemente fazem uso do grau de hesitação, de acordo com a expressão acima. Generalizações do IFIx foram apresentadas em (TARTAS et al., 2009).

2.2.4 Negação Fuzzy Intuicionista e Operador de Complemento

De acordo com (G. CORNELIS G. DESCHRIJVER, 2004), a função $\tilde{N} : \tilde{U} \rightarrow \tilde{U}$ é uma **negação fuzzy intuicionista** (NFI) se satisfaz as seguintes condições:

N_{I1}: $N_I(\tilde{0}) = \tilde{1}$ e $N_I(\tilde{1}) = \tilde{0}$;

N_{I2}: Se $\tilde{x} \geq_{\tilde{U}} \tilde{y}$ então $N_I(\tilde{x}) \leq_{\tilde{U}} N_I(\tilde{y})$, para todo $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{U}$.

Negações fuzzy intuicionistas fortes são *negações fuzzy intuicionistas* que satisfazem a propriedade involutiva (BUSTINCE; BURILLO; SORIA, 2003):

$$N_I3: N_I(\tilde{N}(\tilde{x})) = \tilde{x}, \text{ para todo } \tilde{x} \in \tilde{U}.$$

De acordo com (BACZYNSKI, 2003; DESCHRIJVER; KERRE, 2005b), a negação fuzzy intuicionista $N_I : \tilde{U} \rightarrow \tilde{U}$ é forte se, e somente se, para todo $\tilde{x} = (x_1, x_2) \in \tilde{U}$, existe uma negação fuzzy forte $N : U \rightarrow U$ e $N_S = 1 - x$, tal que:

$$N_I(\tilde{x}) = (N(N_S(x_2)), (N_S(N(x_1)))). \quad (28)$$

Exemplo 4. A extensão intuicionista da negação padrão N_S (ZADEH, 1965) é um exemplo de uma negação fuzzy intuicionista forte. Aplicando a definição da negação padrão N_S na Eq. (28), resulta na expressão:

$$N_{IS}(\tilde{x}) = (N_S(N_S(x_2)), (N_S(N_S(x_1)))) = (x_2, x_1).$$

Seja N_I uma negação fuzzy intuicionista. Pelas projeções definidas em Eqs. (26a) e (26b), as funções $N_{l_{\tilde{U}}}, N_{r_{\tilde{U}}} : U \rightarrow U$ são negações fuzzy dadas pelas expressões:

$$N_{l_{\tilde{U}}}(x) = l_{\tilde{U}}(\tilde{N}(x, 1 - x)); \quad N_{r_{\tilde{U}}}(x) = 1 - r_{\tilde{U}}(\tilde{N}(x, 1 - x)). \quad (29)$$

Definição 6. Sejam $N_I : \tilde{U} \rightarrow \tilde{U}$ uma negação fuzzy intuicionista. O **complemento** de A_I definido com referencia a $x \in \mathcal{X}$, resulta no CFI expresso conforme a Eq. (30):

$$A_I' = \{(x, (\mu_{A_I'}(x), \nu_{A_I'}(x))) : x \in \mathcal{X}\}, \quad (30)$$

sempre que $\mu_{A_I'}(x) + \nu_{A_I'}(x) \leq 1$.

2.2.5 Relação de Dualidade entre Funções Fuzzy Intuicionistas

Seja $N_I : \tilde{U} \rightarrow \tilde{U}$ uma negação fuzzy intuicionista. A **função intuicionista N -dual** de uma função $f_I : \tilde{U}^n \rightarrow \tilde{U}$ é dada pela expressão:

$$f_{IN}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n) = N_I(f_I(N_I(\tilde{x}_1), \dots, N_I(\tilde{x}_n))). \quad (31)$$

Se N_I é forte, $(f_{IN_I}) = f_I$, ou seja, f_I e f_{IN_I} são funções mutuamente duais em $\tilde{U}^n$.

2.2.6 Operadores de Intersecção e União

Agregações que qualificam as intersecções e uniões fuzzy intuicionista são referidas na literatura como t-normas e t-conormas intuicionistas, respectivamente.

De acordo com (BACZYNSKI, 2003), a operações de intersecção(união) fuzzy intuicionista representada pela função $(S_I)T_I : \tilde{U}^2 \rightarrow \tilde{U}$ é uma função t-(co)norma, se ela é um função comutativa, associativa, decrescente e possui elemento neutro ($\tilde{0}$) $\tilde{1}$ ou seja, para todo $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z} \in \tilde{U}$, as seguintes propriedades são satisfeitas:

$$\begin{aligned}
\mathbf{T_I1}: T_I(\tilde{x}, \tilde{1}) &= \tilde{x}; & \mathbf{S_I1}: S_I(\tilde{x}, \tilde{0}) &= \tilde{x}; \\
\mathbf{T_I2}: T_I(\tilde{x}, \tilde{y}) &= T_I(\tilde{y}, \tilde{x}); & \mathbf{S_I2}: S_I(\tilde{x}, \tilde{y}) &= S_I(\tilde{y}, \tilde{x}); \\
\mathbf{T_I3}: T_I(\tilde{x}, T_I(\tilde{y}, \tilde{z})) &= T_I(T_I(\tilde{x}, \tilde{y}), \tilde{z}); & \mathbf{S_I3}: S_I(\tilde{x}, S_I(\tilde{y}, \tilde{z})) &= S_I(S_I(\tilde{x}, \tilde{y}), \tilde{z}); \\
\mathbf{T_I4}: T_I(\tilde{x}, \tilde{y}) \leq T_I(\tilde{z}, \tilde{y}), & \text{ se } \tilde{x} \leq \tilde{z}; & \mathbf{S_I4}: S_I(\tilde{x}, \tilde{y}) \leq S_I(\tilde{z}, \tilde{y}) & \text{ se } \tilde{x} \leq \tilde{z}.
\end{aligned}$$

Uma t-(co)norma intuicionista $(S_I)T_I : \tilde{U}^2 \rightarrow \tilde{U}$ é representável se existe uma t-norma $T : U^2 \rightarrow U$ e uma t-conorma $S : U^2 \rightarrow U$ tal que $T(x, y) \leq N_S(S(N_S(x), N_S(y)))$ e satisfazem as propriedades:

$$T_I(\tilde{x}, \tilde{y}) = T_I((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = (T(x_1, y_1), S(x_2, y_2)); \quad (32)$$

$$S_I(\tilde{x}, \tilde{y}) = S_I((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = (S(x_1, y_1), T(x_2, y_2)). \quad (33)$$

Neste trabalho, consideram-se ambas agregações fuzzy intuicionistas: a t-norma produto T_{IP} e a soma algébrica S_{IP} , respectivamente descritas para todo $\tilde{x} = (x_1, x_2), \tilde{y} = (y_1, y_2) \in \tilde{U}$, pelas Eqs. (34) e (35) abaixo:

$$T_{IP}(\tilde{x}, \tilde{y}) = (T_P(x_1, y_1), S_P(x_2, y_2)) = (x_1 \cdot y_1, x_2 + y_2 - x_2 \cdot y_2); \quad (34)$$

$$S_{IP}(\tilde{x}, \tilde{y}) = (S_P(x_1, y_1), T_P(x_2, y_2)) = (x_1 + y_1 - x_1 \cdot y_1, x_2 \cdot y_2). \quad (35)$$

As operações de união e inteseccção são reportadas na sequência.

Definição 7. Sejam $S_I, T_I : \tilde{U}^2 \rightarrow \tilde{U}$ como t-norma e t-conorma fuzzy intuicionista, respectivamente TFI e SFI. A **intersecção e união** entre os CFIs A_I e B_I , ambos definidos com referencia a $x \in \mathcal{X}$ e tal que $\tilde{x} = (\mu_{A_I}(x), \nu_{A_I}(x)), \tilde{y} = (\mu_{B_I}(x), \nu_{B_I}(x)) \in \tilde{U}$, resulta nos correspondentes CFIs, conforme Eqs. (36) e (37):

$$A_I \cap B_I = \{(x, T_I(\tilde{x}, \tilde{y})) = (\mu_{A_I \cap B_I}(x), \nu_{A_I \cap B_I}(x)) : x \in \mathcal{X}\}; \quad (36)$$

$$A_I \cup B_I = \{(x, S_I(\tilde{x}, \tilde{y})) = (\mu_{A_I \cup B_I}(x), \nu_{A_I \cup B_I}(x)) : x \in \mathcal{X}\}. \quad (37)$$

Pela representabilidade (DESCHRIJVER; CORNELIS; KERRE, 2004, Definiton 5) de uma TFI e SFI, as Eqs. (36) e (37) podem ser descritas em termos de uma t-norma T e uma t-conorma S , respectivamente. E, resultam nas Eqs. (38) e (39) logo a seguir:

$$A_I \cap B_I = \{(x, T(\mu_{A_I}(x), \mu_{B_I}(x)), S(\nu_{A_I}(x), \nu_{B_I}(x))) : x \in \mathcal{X}\}; \quad (38)$$

$$A_I \cup B_I = \{(x, S(\mu_{A_I}(x), \mu_{B_I}(x)), T(\nu_{A_I}(x), \nu_{B_I}(x))) : x \in \mathcal{X}\}. \quad (39)$$

Seguindo, sendo $\tilde{x} = (x_1, x_2)$ e $\tilde{y} = (y_1, y_2)$ tal que $\mu_{A_I}(x) = x_1, \nu_{A_I}(x) = x_2, \mu_{B_I}(x) = y_1, \nu_{B_I}(x) = y_2 \in U$ os GPs e GNPs relacionados as operações de intersecção e união

de CFIs A_I e B_I nas Eqs.(38) e (39) são , respectivamente, dadas como:

$$\begin{aligned}\mu_{A_I \cap B_I}(x) &= x_1 \cdot y_1; & \nu_{A_I \cap B_I}(x) &= x_2 + y_2 - x_2 \cdot y_2; \\ \mu_{A_I \cup B_I}(x) &= x_1 + y_1 - x_1 \cdot y_1; & \nu_{A_I \cup B_I}(x) &= x_1 \cdot y_1.\end{aligned}$$

2.2.7 Operações de Implicação e Coimplicação

A (co)-implicação fuzzy intuicionistas de Atanassov é estudada na sequência, esclarecendo as propriedades e funções de projeção para a definir a representação das (co)-implicações fuzzy.

Definição 8. *Uma (co)implicação fuzzy intuicionista ((CIFI-A) IFI-A) $(J_I)I_I : \tilde{U}^2 \rightarrow \tilde{U}$ é uma função binária que verifica as seguintes condições limites:*

$$\mathbf{I_11}: I_I(\tilde{0}, \tilde{0}) = I_I(\tilde{0}, \tilde{1}) = I_I(\tilde{1}, \tilde{1}) = \tilde{1}; I_I(\tilde{1}, \tilde{0}) = \tilde{0};$$

$$\mathbf{J_11}: J_I(\tilde{0}, \tilde{0}) = J_I(\tilde{1}, \tilde{0}) = J_I(\tilde{1}, \tilde{1}) = \tilde{0}; J_I(\tilde{0}, \tilde{1}) = \tilde{1}.$$

A definição (8) pode ser reduzida para uma (co)implicação fuzzy se $\tilde{x} = (x_1, x_2)$ e $\tilde{y} = (y_1, y_2) \in \tilde{U}$, tal que $x_1 = N_S(x_2)$ e $y_1 = N_S(y_2)$ (ATANASSOV; GARGOV, 1998). As (co)-implicações fuzzy intuicionistas são definidas por J. Fodor e M. Roubens (FODOR, 1991; BACZYŃSKI, 2007).

Definição 9. *Uma ((CIFI-A) IFI-A) $(J_I)I_I : \tilde{U}^2 \rightarrow \tilde{U}$ satisfaz, para todo $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z} \in \tilde{U}$, as condições descritas na sequência:*

$$\mathbf{I_12}: \tilde{x} \leq \tilde{z} \Rightarrow I_I(\tilde{x}, \tilde{y}) \geq I_I(\tilde{z}, \tilde{y}); \quad \mathbf{J_12}: \tilde{x} \leq \tilde{z} \Rightarrow J_I(\tilde{x}, \tilde{y}) \geq J_I(\tilde{z}, \tilde{y});$$

$$\mathbf{I_13}: \tilde{y} \leq \tilde{z} \Rightarrow I_I(\tilde{x}, \tilde{y}) \leq I_I(\tilde{x}, \tilde{z}); \quad \mathbf{J_13}: \tilde{y} \leq \tilde{z} \Rightarrow J_I(\tilde{x}, \tilde{y}) \leq J_I(\tilde{x}, \tilde{z});$$

$$\mathbf{I_14}: I_I(\tilde{0}, \tilde{y}) = \tilde{1};$$

$$\mathbf{J_14}: J_I(\tilde{1}, \tilde{y}) = \tilde{0};$$

$$\mathbf{I_15}: I_I(\tilde{x}, \tilde{1}) = \tilde{1};$$

$$\mathbf{J_15}: J_I(\tilde{x}, \tilde{0}) = \tilde{0};$$

Neste trabalho, para todo $\tilde{x} = (x_1, x_2), \tilde{y} = (y_1, y_2) \in \tilde{U}$, consideramos a (co)implicação fuzzy intuicionista de Reichenbach:

$$I_{RCI}(\tilde{x}, \tilde{y}) = S_{PI}(N_{SI}(\tilde{x}), \tilde{y}) = (x_2 + y_1 - x_2 y_1, x_1 y_2) \quad (40)$$

$$J_{RCI}(\tilde{x}, \tilde{y}) = T_{PI}(N_{SI}(\tilde{x}), \tilde{y}) = (x_2 y_1, x_1 + y_2 - x_1 y_2) \quad (41)$$

que pode ser definida com base sobre as equações (40) e (41), respectivamente (BUSTINCE; BARRENECHEA; MOHEDANO, 2004).

2.2.8 Operações de Diferença e Codiferença

Estendem-se a seguir os resultados em (HUAUWEN, 1987, Definition 4):

$D_I(E_I) : \tilde{U}^2 \rightarrow \tilde{U}$ é uma (co)diferença fuzzy intuicionista se as seguintes condições são verificadas:

$$\begin{aligned}
D_{I1} : D_I(\tilde{x}, \tilde{y}) &\leq \tilde{x}; & E_{I1} : E_I(\tilde{x}, \tilde{y}) &\geq \tilde{x}; \\
D_{I2} : D_I(\tilde{x}, \tilde{0}) &= \tilde{x}; & E_{I2} : E_I(\tilde{x}, \tilde{1}) &= \tilde{x}; \\
D_{I3} : \text{Se } \tilde{y} \leq \tilde{z}, D_I(\tilde{x}, \tilde{y}) &\geq D_I(\tilde{x}, \tilde{z}); & E_{I3} : \text{Se } \tilde{y} \leq \tilde{z}, E_I(\tilde{x}, \tilde{y}) &\geq E_I(\tilde{x}, \tilde{z}); \\
D_{I4} : \text{Se } \tilde{x} \leq \tilde{y}, D_I(\tilde{x}, \tilde{z}) &\leq D_I(\tilde{y}, \tilde{z}); & E_{I4} : \text{Se } \tilde{x} \leq \tilde{y}, E_I(\tilde{x}, \tilde{z}) &\leq E_I(\tilde{y}, \tilde{z}); \\
D_{I4} : D_I(\tilde{1}, \tilde{x}) &= N_I(\tilde{x}), N_I \text{ é uma NFI.} & E_{I5} : E_I(\tilde{0}, \tilde{x}) &= N_I(\tilde{x}), N_I \text{ é uma NFI.}
\end{aligned}$$

Proposição 1. Para todo $\tilde{x}, \tilde{y} \in U$, o operador $D_{I1}(E_{I1}) : U^2 \rightarrow U$ definido por

$$D_{I1}(\tilde{x}, \tilde{y}) = (T_I(\tilde{x}, N_I(\tilde{y}))); \quad E_{I1}(\tilde{x}, \tilde{y}) = (S_I(\tilde{x}, N_I(\tilde{y}))), \quad (42)$$

é um operador de (co)diferença entre CFIs.

Proposição 2. Seja $D(E) : U^2 \rightarrow U$ o operador de (co)diferença fuzzy. Os operadores $D_I(E_I) : U^2 \rightarrow U$ nas Eqs.(42)a e b, podem ser dadas por:

$$D_I(\tilde{x}, \tilde{y}) = (T(x_1, y_2), S(x_2, y_1)); \quad E_I(\tilde{x}, \tilde{y}) = (S(x_1, y_2), T(x_2, y_1)). \quad (43)$$

Exemplo 5. Pelas Eqs.(32) e (33) e os resultados na Proposição 2, tem-se que:

$$D_{T_P, N_{S_I}}(\tilde{x}, \tilde{y}) = (x_1 y_2, x_2 + y_1 - x_2 y_1); \quad E_{S_P, N_{S_I}}(\tilde{x}, \tilde{y}) = (x_1 + y_2 - x_1 y_2, x_2 y_1), \quad (44)$$

é uma TFI-A (SFI-A) obtida pelas t-(co)normas T_P (S_P) e negação padrão N_S .

A expressão do CFI resultante da ação do operador de (co)diferença entre A_I e B_I é dada por (HUAWEN, 1987):

$$\begin{aligned}
Dif(A_I, B_I) &= \{(\mu_{Dif(A_I, B_I)}(x), \nu_{Dif(A_I, B_I)}(x)) | x \in \chi\} \\
CoDif(A_I, B_I) &= \{(\mu_{CoDif(A_I, B_I)}(x), \nu_{CoDif(A_I, B_I)}(x)) | x \in \chi\}
\end{aligned}$$

sempre que tem-se verificadas as inequações $0 \leq \mu_{CoDif(A_I, B_I)}(x) + \nu_{Dif(A_I, B_I)}(x) \leq 1$ e $0 \leq \mu_{Dif(A_I, B_I)}(x) + \nu_{CoDif(A_I, B_I)}(x) \leq 1$ e sendo $\mu_{Dif(A_I, B_I)}, \nu_{CoDif(A_I, B_I)} : \chi \rightarrow U$ a função que determina o GP e GNP de $x \in \chi$ no CFI $A_I - B_I$.

Neste caso, pela Eq.(43) e Eqs.(23) e (24) tem-se que:

$$\begin{aligned}
(\mu_{Dif(A_I, B_I)}(x), \nu_{CoDif(A_I, B_I)}(x)) &= D_I((\mu_A(x), \nu_A(x)), (\mu_B(x), \nu_B(x))) \\
&\quad (T(\mu_A(x), \nu_B(x)), S(\nu_A(x), \mu_B(x))) \\
&\quad (D(\mu_A(x), N_S(\nu_B(x))), E(\nu_A(x), N_S(\mu_B(x)))).
\end{aligned}$$

2.3 Considerações Finais

A fundamentação da Lógica Fuzzy Intuicionista, extendida da lógica fuzzy, é vista neste capítulo onde conceitos sobre relações de ordem, funções de projeção,

relação de dualidade e índice fuzzy intuicionista expõem suas características básicas. Além disso, são apresentados os operadores fuzzy intuicionistas de complemento, intersecção, união, implicação, coimplicação, diferença e codiferença e suas principais propriedades, representados por conectivos da lógica fuzzy. A descrição dos conceitos da Lógica Fuzzy Intuicionista, realizada neste capítulo, é de fundamental importância para aplicações computacionais na área de processamento de imagens, veja (BEZDEK; DUBOIS; PRADE, 1999; XU, 2009; ZADEH, 1975). A interpretação de operadores via conectivos fuzzy intuicionistas, estende os fundamentos da lógica fuzzy e possibilitam novas aplicações para sistemas computacionais já existentes.

3 FUNDAMENTAÇÃO PARA COMPUTAÇÃO QUÂNTICA

A teoria da mecânica quântica surge no início do século XX na tentativa de esclarecer os fenômenos envolvendo partículas nanoatômicas, atômicas e subatômicas. Estendendo e complementando a teoria da física clássica, a mecânica quântica revolucionou o modo de interpretar os fenômenos de natureza ora ondulatória, ora corpuscular, das partículas atômicas (SAKURAI, 1994).

Destaca-se também no início da década de 1930, nos trabalhos dos matemáticos Alonzo Church (1903-1995) e Alan Turing (1912-1954), a consolidação dos fundamentos teóricos da computação, estabelecendo a equivalência entre o conceito de realização de algoritmos em sistemas físicos e o conceito matemático para os modelos de máquina capazes de prover interpretação para memória e processos computacionais.

Essa manipulação e processamento da informação pela computação baseada nos fundamentos da mecânica quântica começou despertar interesse na década de 1960, com a descoberta de Moore (NIELSEN; CHUANG, 2003) conhecida como a lei sobre a evolução dos *chips*, observando que após 2020, um bit será representado em escalas atômicas (KAYE; LAFLAMME; MOSCA, 2007).

Este capítulo contribui com conceitos básicos e notações referentes a mecânica quântica como fundamentação para a computação quântica. Entretanto, a revisão restringe-se ao escopo desta dissertação, visando a melhor compreensão do trabalho em desenvolvimento, apresentado nos próximos capítulos.

De acordo com os postulados básicos da mecânica quântica (DAS; MELISSINOS, 1986), as idéias principais e os conceitos introdutórios da computação quântica (DAS; MELISSINOS, 1986) (NIELSEN; CHUANG, 2003) foram organizados, revisando os principais aspectos formais.

3.1 Espaço de Estados Quânticos

Apresenta-se, primeiramente, a definição do espaço de Hilbert, espaço vetorial complexo munido de produto interno consistindo no espaço de estados de sistemas

quânticos, restrito neste trabalho a estados de dimensão finita.

Um espaço vetorial $\mathcal{V} = (\mathbb{C}^m, +, \cdot)$ sobre o conjunto de números complexos $\mathbb{C}$ é um conjunto estruturado cujos elementos são vetores de dimensão finita de números complexos, juntamente com as operações de adição de vetores e de multiplicação escalar, sendo $\mathcal{V}$ fechado para ambas operações. Acrescenta-se a $\mathcal{V}$ a estrutura geométrica ao espaço vetorial na forma do produto interno, garantindo a relação entre pares de vetores e induzindo a medida de distância ou métrica no espaço.

Um vetor no espaço de Hilbert e sua construção dual são denotados pelas expressões $|\psi\rangle$ e $\langle\psi|$, símbolos denominados “ket” e “bra” na notação de Dirac.

O produto interno é uma operação binária $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{V}^2 \rightarrow \mathbb{C}$, satisfazendo as seguintes propriedades:

$$\text{P1: } \langle x, y \rangle = \langle y^\dagger, x \rangle;$$

$$\text{P2: } \langle x, ay + bz \rangle = a\langle x, y \rangle + b\langle x, z \rangle;$$

$$\text{P3: } \langle x, x \rangle \geq 0, \langle x, x \rangle = 0 \text{ se, e somente se, } x = 0,$$

para todo $x, y, x \in \mathcal{V}$ e sempre que $(\cdot)^\dagger$ representa a operação de conjugação complexa. A norma de um vetor x é obtida pela expressão $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ e a distância $d : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ é definida por $d(x, y) = \|x - y\|$.

Definição 10. *Um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ é um espaço vetorial complexo dotado de um produto interno.*

Definição 11. *Seja $\mathcal{I}$ um conjunto de indexadores e $B = \{x_i \in \mathcal{H}, i \in \mathcal{I}\}$ uma base de $\mathcal{H}$, um conjunto finito de vetores linearmente independentes e mutuamente ortogonais, tal que, para todo vetor $x \in \mathcal{H}$, existe uma sequência única de escalares $\alpha_i \in \mathbb{C}$ tal que*

$$x = \sum_{i \in \mathcal{I}} \alpha_i x_i, \quad (45)$$

e, onde a dimensão de $\mathcal{H}$ é determinada pela cardinalidade de $\mathcal{I}$. Para todo conjunto $B = \{x_i\}_{i=0(1)m}$ de estados básicos, o espaço de Hilbert $\mathcal{H}(\mathbb{C}^m)$ é o espaço vetorial complexo de vetores m -dimensionais, cujas componentes são números complexos.

Assim, pela Eq.(45) os escalares $\alpha_i \in \mathbb{C}$ são as coordenadas de um vetor $x = \sum_{i \in \mathcal{I}} \alpha_i |x_i\rangle$ pertencente a $\mathcal{H}(\mathbb{C}^m)$ se, e somente se, tem-se que $\sum_{i \in \mathcal{I}} \alpha_i \alpha_i^* = 1$. Neste espaço, se α_i e β_i são as respectivas coordenadas dos vetores x e y , o produto interno é definido pela expressão

$$\langle x, y \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^m \alpha_i |x_i\rangle, \sum_{i=1}^m \beta_i |x_i\rangle \right\rangle = \sum_{i=1}^m \alpha_i \beta_i^\dagger.$$

Definição 12. *O espaço de Hilbert $\mathcal{H}(\mathbb{C}^m)$ restrito aos vetores normalizados corresponde ao espaço de vetores de estados para sistemas quânticos.*

As possíveis configurações de um sistema físico são descritas pelo espaço de estados em $\mathcal{H}(\mathbb{C}^m)$, o qual é gerado pelos estados básicos em B . O número de estados básicos define a dimensão de $\mathcal{H}(\mathbb{C}^m)$ e pode ser infinito ou mesmo não-enumerável. No contexto deste trabalho, consideram-se espaços de estados de dimensão finita.

3.2 Evolução da Informação

A evolução temporal de um sistema quântico isolado é matematicamente descrita por uma transformação linear (NIELSEN; CHUANG, 2003) (KNILL et al., 2002) (IMRE; BALÁZS, 2005). Como os estados quânticos são vetores unitários, um operador U deve preservar a normalidade dos vetores, atuando simultaneamente sobre a superposição de estados básicos. Dada a *transformação unitária* U , tem-se que:

$$U^\dagger U = U U^\dagger = I$$

onde $U^\dagger$ é a matriz conjugada transposta de U .

A evolução dos sistemas físicos quânticos é determinística, sendo modelada por portas quânticas unitárias que correspondem a operadores lineares unitários do espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Assim, pode-se dizer que as transformações de estados quânticos ocorrem pela execução de um operador unitário ou de combinações de operadores unitários.

Consequentemente, pela definição de processo evolutivo de um sistema quântico como um processo descrito por uma operação unitária, garante-se que as transformações de estados são reversíveis.

A seguir, considera-se a discretização do tempo para descrição do relacionamento dos vetores de estados entre dois instantes de tempo t e t' de um sistema quântico fechado. Para a versão mais genérica, descrevendo a evolução em tempo contínuo, veja (NIELSEN; CHUANG, 2003) (SAKURAI, 1994).

Postulados 1. *A evolução de um sistema quântico fechado é descrita por uma transformação unitária. Ou seja, o estado $|\psi\rangle$ de um sistema em um tempo t está relacionado ao estado $|\psi'\rangle$ do sistema em t' por um operador unitário U que depende somente de t e t' (NIELSEN; CHUANG, 2003):*

$$|\psi'\rangle = U|\psi\rangle$$

De acordo com (R. SERWAY, 2004; KAYE; LAFLAMME; MOSCA, 2007), o Postulado 1 considera que a evolução de um sistema deve preservar a condição de normalização dos estados que definem um processo computacional.

No modelo de circuitos quânticos, consideram-se os operadores unitários como operações lógicas reversíveis (portas quânticas), os quais atuam sobre os vetores de estados (registradores de um único qubit) durante a evolução de um sistema quântico fechado. A seguir, exemplos de representações de operações unitárias U (cada uma descrita por uma matriz (2×2) sobre o estado $|\psi\rangle$ de um qubit, fazendo-o evoluir para o estado $U|\psi\rangle$.

3.2.1 Matrizes de Pauli e Operadores de Rotação

Considerando a correspondência entre os vetores de estados quânticos unidimensionais e os pontos da esfera de Bloch, as portas quânticas reversíveis de sistemas de 1 qubit, podem ser pensadas como rotações da esfera Bloch. De acordo com (KNILL et al., 2002), a rotação em torno dos eixos $\vec{OX}$, $\vec{OY}$ e $\vec{OZ}$ podem ser descritas pelas matrizes de Pauli:

- A porta Pauli σ_Z é representado pela matriz bi-dimensional I_2 e sua aplicação não altera os estados básicos, ou seja, $I|0\rangle = |0\rangle$ e $I|1\rangle = |1\rangle$. A expressão matriz identidade 2×2 :

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- O operador X , correspondendo porta quântica Pauli $\sigma_1 = \sigma_X$, tem efeito análogo à porta clássica *NOT* quando aplicada aos estados da base computacional de um qubit, ou seja, $X|0\rangle = |1\rangle$ e $X|1\rangle = |0\rangle$, e possui a expressão matricial:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Considerando o qubit em uma superposição dos estados $|0\rangle$ e $|1\rangle$, $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$, ao aplicar a porta X ao estado $|\psi\rangle$, obtém-se: $X|\psi\rangle = \beta|0\rangle + \alpha|1\rangle$

- O operador Y corresponde a outra porta quântica Pauli, denotada por $\sigma_2 = \sigma_Y$, e quando aplicada aos estados da base computacional de um qubit tem-se $Y|0\rangle = -|1\rangle$ e $Y|1\rangle = i|0\rangle$ ($i = \sqrt{-1}$), de acordo com sua expressão matricial:

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

- O operador Z , correspondendo a última das portas quânticas de Pauli, é indicado por $\sigma_3 = \sigma_Z$, e quando aplicado aos estados da base computacional de um qubit tem-se $Z|0\rangle = |0\rangle$ e $Z|1\rangle = -|1\rangle$, com expressão matricial dada por:

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

As matrizes de Pauli dão origem a operadores de rotação em torno dos eixos coordenados, definidos por um ângulo θ , nas expressões:

$$\begin{aligned} R_X(\theta) &= e^{\frac{iX\theta}{2}} = \cos \frac{\theta}{2} I + i \sin \frac{\theta}{2} X = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & -i \sin \frac{\theta}{2} \\ -i \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow R_X\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix}; \\ R_Y(\theta) &= e^{\frac{iY\theta}{2}} = \cos \frac{\theta}{2} I + i \sin \frac{\theta}{2} Y = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & -\sin \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow R_Y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \\ R_Z(\theta) &= e^{\frac{iZ\theta}{2}} = \cos \frac{\theta}{2} I + i \sin \frac{\theta}{2} Z = \begin{pmatrix} e^{-\frac{i\theta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{i\theta}{2}} \end{pmatrix} \Rightarrow R_Z\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1-i & 0 \\ 0 & 1+i \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

- A inversão dos operadores de rotação por um ângulo θ , quando consideramos a representação tridimensional da Esfera de Bloch (NIELSEN; CHUANG, 2003), é obtida pela aplicação do operador de rotação ao simétrico do ângulo θ :

$$R_Z\left(\frac{\pi}{2}\right) R_Z\left(-\frac{\pi}{2}\right) |\psi\rangle = |\psi\rangle,$$

pois, tem-se que $\frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1-i & 0 \\ 0 & 1+i \end{pmatrix} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

3.2.2 Geração de Superposição

A porta quântica *Hadamard*, H , é normalmente utilizada para gerar superposição, uniformemente distribuída em todos os vetores da base computacional, de tal forma que somente o sinal das amplitudes pode variar.

- A descrição matricial da porta Hadamard é dada pela expressão:

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

- A aplicação da porta H aos estados da base computacional $|0\rangle$ e $|1\rangle$ gera uma superposição igualmente distribuída sobre os estados $|0\rangle$ e $|1\rangle$:

$$H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \quad \text{e} \quad H|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle);$$

- O operador *Hadamard* tem especiais conexões com as portas de Pauli, úteis nas simplificações de circuitos. As seguintes identidades são válidas $HH = Z$, $HYH = -Y$, e ainda $HZH = X$.

- Considerando que H é reversível, $H = H^\dagger$, tem-se

$$H(H|0\rangle) = H\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)\right) = |0\rangle \quad \text{e} \quad H(H|1\rangle) = H\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)\right) = |1\rangle.$$

Assim, como o comportamento de duas sucessivas aplicações da porta *Hadamard* é igual a porta identidade, H é também conhecida pela expressão literal “raiz quadrada da identidade” ($\sqrt{I_2}$).

3.2.3 Operador de Fase

A porta de fase S introduz uma fase relativa, dada pela expressão $e^{\frac{i\phi}{2}}$, sendo ϕ um dado escalar real.

- A descrição matricial é dada por: $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\frac{i\phi}{2}} \end{pmatrix}$
- Aplicando $S_{\phi=\pi}$ a um estado genérico $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$, tem-se $S|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + i\beta|1\rangle$. Diz-se então que os estados $|\psi\rangle$ e $S|\psi\rangle$, quando descritos na base canônica, são iguais a menos de um fator de fase relativo, pois as amplitudes de $|0\rangle$ são idênticas (com fator de fase igual a 1) e as amplitudes de $|1\rangle$ diferem por um fator de fase igual a i .
- Diferentemente da fase global, onde tem-se o vetor de estado $e^{i\gamma}|\psi\rangle$ que é igual ao vetor de estado $|\psi\rangle$ a menos de um fase global $e^{i\gamma}$, a diferença de fase relativa é dependente da base usada na representação dos vetores de estado em sistemas quânticos, e portanto não podem ser consideradas equivalentes (NIELSEN; CHUANG, 2003).

3.2.4 Rotações na Esfera de Bloch

Outras portas quânticas, indicadas pela expressão U_θ , são consideradas como operadores de rotação sobre vetores de estados quânticos de 1 qubit, as quais estão parametrizadas por um ângulo θ :

- Aplicando U_θ a um estado genérico $|\psi\rangle$, tem-se

$$U_\theta|0\rangle = \cos\theta|0\rangle - \sin\theta|1\rangle$$

$$U_\theta|1\rangle = \sin\theta|0\rangle + \cos\theta|1\rangle,$$

e, portanto, a descrição matricial é dada por: $U_\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

- Para as portas Pauli I e Y tem-se as correspondentes expressões de rotação:

$$U_{\theta=0} = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad U_{\theta=\frac{\pi}{2}} = Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

3.3 Efeitos da Operação de Medida

Nesta abordagem, a operação de medida corresponde a uma projeção do vetor de estado representando o qubit em um dos estados da base computacional, juntamente com a probabilidade deste qubit de medida estar nesta posição. As medidas geralmente são consideradas como operações irreversíveis, que destroem parte informação quântica. Esta alteração do estado do sistema pela ação de uma medição é comumente chamado “colapso da função de onda”.

Surgem então as dificuldades no acesso à informação quântica nos resultados obtidos por computações sobre a memória global. Além disso, pela execução da operação de medida, ocorre também a perturbação do estado quântico, sendo parte da informação original perdida. Soma-se ainda a tudo isso, a natureza probabilística das observações do processo de medida.

Então, medir o qubit $|\psi\rangle = \alpha_0|0\rangle + \alpha_1|1\rangle$ várias vezes leva ao mesmo resultado, ou seja, não se acumulam estatísticas para se estimar o valor das amplitudes α_0 e α_1 . Assim, a medição remove a possibilidade de extração de qualquer informação adicional acerca do estado original $|\psi\rangle$.

Postulados 2. *As medidas quânticas são descritas por determinados operadores de medida M_m . Estes operadores atuam sobre o espaço de estados do sistema. O índice M se refere aos possíveis resultados da medida. Se o estado de um sistema quântico for $|\psi\rangle$ imediatamente antes da medida a probabilidade de um resultado m ocorrer é dada por (NIELSEN; CHUANG, 2003):*

$$p(m) = \langle\psi|M_m^\dagger M_m|\psi\rangle$$

e o estado do sistema após a medida será:

$$\frac{M_m|\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|M_m^\dagger M_m|\psi\rangle}}$$

Os operadores de medida satisfazem a relação de completude:

$$\sum_m M_m^\dagger M_m = I.$$

Considere um vetor de estado de um sistema de 1 qubit, dado pela expressão $|\psi\rangle = \alpha_0|0\rangle + \alpha_1|1\rangle$, com amplitudes normalizadas $|\alpha_0|^2 + |\alpha_1|^2 = 1$, $\forall \alpha_0, \alpha_1 \in \mathbb{C}$. A interpretação física do qubit mostra que os estados podem estar, simultaneamente, em $|0\rangle$ e $|1\rangle$.

Sejam os operadores Hermitianos representados pelas matrizes:

$$M_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = M_0^\dagger$$

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = M_1^\dagger$$

Observe que os operadores de medidas são obviamente operações não-reversíveis, mas satisfazem a relação de completude tais que

$$M_0^2 = M_0, M_1^2 = M_1 \text{ e } M_0^\dagger M_0 + M_1^\dagger M_1 = M_0 + M_1 = I_2.$$

Com base no Postulado 2, o resultado da operação de medida no estado $|\psi\rangle$ será:

$$\begin{cases} |0\rangle, \text{ com probabilidade } p(0) = \langle\psi|M_0^\dagger M_0|\psi\rangle = \langle\psi|M_0|\psi\rangle = |\alpha_0|^2; \\ |1\rangle, \text{ com probabilidade } p(1) = \langle\psi|M_1^\dagger M_1|\psi\rangle = \langle\psi|M_1|\psi\rangle = |\alpha_1|^2. \end{cases} \quad (46)$$

Resumindo-se, pela análise apresentada na Equação 46, se o qubit está no estado $|\psi\rangle = \alpha_0|0\rangle + \alpha_1|1\rangle$, a probabilidade de uma medição encontrá-lo no estado $|x\rangle$, onde $x \in \{0, 1\}$, é dada por:

$$p_\psi(x) = |\langle x|\psi\rangle|^2. \quad (47)$$

Por exemplo, aplicando a Equação 47 para $x = 0$ e $|\psi\rangle = \alpha_0|0\rangle + \alpha_1|1\rangle$, obtém-se:

$$\begin{aligned} p_\psi(0) &= |\langle 0|\phi\rangle|^2 = |\langle 0|\alpha_0|0\rangle + \alpha_1|1\rangle|^2 \\ &= |\langle 0|\alpha_0|0\rangle + \langle 0|\alpha_1|1\rangle|^2 = |\alpha_0\langle 0|0\rangle + \alpha_1\langle 0|1\rangle|^2 = |\alpha_0|^2 \end{aligned}$$

Exemplo 6. Considerando o estado $|\phi\rangle = \frac{(1+i)}{\sqrt{3}}|0\rangle - \frac{i}{\sqrt{3}}|1\rangle$, a medida deste estado resulta como saída o estado:

- $|0\rangle$, com probabilidade $p(0) = \left| \frac{1+i}{\sqrt{3}} \right|^2 = \left(\frac{1+i}{\sqrt{3}} \right) \left(\frac{1-i}{\sqrt{3}} \right) = \frac{2}{3}$; e
- $|1\rangle$, com probabilidade $p(1) = \left| \frac{-i}{\sqrt{3}} \right|^2 = \left(\frac{-i}{\sqrt{3}} \right) \left(\frac{i}{\sqrt{3}} \right) = \frac{1}{3}$, conforme mostra o diagrama 1, cujos os nodos estão rotulados com os estados e as transições estão rotuladas com as probabilidades.

Exemplo 7. Seja correspondente a porta quântica $\pi/8$ dada pelo operador unitário T definido sobre um sistema unidimensional pela matriz

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \exp(i\pi/4) \end{pmatrix} \quad (48)$$

Aplicando a matriz unitária T em um estado genérico $|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$ obtemos $T|\psi\rangle = a|0\rangle + \exp(i\pi/4)b|1\rangle$. A exemplo do que ocorre como operador de fase S , as probabilidades de se obter o estado $|0\rangle$ ou o estado $|1\rangle$ são as mesmas tanto para o estado inicial $|\psi\rangle$ quanto para o estado modificado $T|\psi\rangle$, representado pelo qubit $|\phi\rangle = \frac{1+i}{\sqrt{3}}|0\rangle + \frac{-1}{\sqrt{3}}|1\rangle$ na Figura 1, logo a seguir:

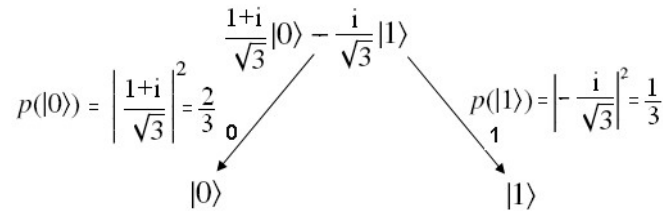


Figura 1: Medida do estado ϕ .

3.4 Expansão do Espaço de Estados

Definição 13. Considere dois subespaços vetoriais $\mathcal{H}_u$ e $\mathcal{H}_v$ gerados por $U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ e $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, respectivamente. O espaço vetorial expandido, de dimensão mn , definido pela operação de produto tensor entre $\mathcal{H}_U$ e $\mathcal{H}_V$, indicado pela expressão

$$\mathcal{H}_{U \times V} = \mathcal{H}_U \otimes \mathcal{H}_V \subseteq \mathcal{H}_W$$

é um espaço de estados quânticos gerado pelos vetores básicos

$$|u_i\rangle \otimes |v_j\rangle = |u_i, v_j\rangle = |w_{ij}\rangle, \forall u_i \in U, v_j \in V, u_i \otimes v_j = w_{ij} \in W. \quad (49)$$

O produto tensor $\otimes : (\mathcal{H}_U, \mathcal{H}_V) \rightarrow \mathcal{H}_W$ é um operador linear, determinando todos os vetores de $\mathcal{H}_W$ pela expressão:

$$|X\rangle = \sum_{i=1}^m \alpha_i |u_i\rangle \in \mathcal{H}_U, \quad |Y\rangle = \sum_{j=1}^n \beta_j |v_j\rangle \in \mathcal{H}_V \Rightarrow |X\rangle \otimes |Y\rangle = \sum_{i,j=1}^{m,n} \alpha_i \beta_j |u_i, v_j\rangle \in \mathcal{H}_U \otimes \mathcal{H}_V.$$

Na notação matricial, tem-se o estado $|XY\rangle = |X\rangle \otimes |Y\rangle \in \mathbb{C}^{mn}$ expresso por:

$$|XY\rangle = |X\rangle \otimes |Y\rangle = \begin{pmatrix} \alpha_1 |Y\rangle \\ \alpha_2 |Y\rangle \\ \vdots \\ \alpha_m |Y\rangle \end{pmatrix} = (\alpha_1 \beta_1, \dots, \alpha_1 \beta_n, \alpha_2 \beta_1, \dots, \alpha_2 \beta_n, \dots, \alpha_m \beta_1, \dots, \alpha_m \beta_n)^t$$

O conjunto de estados produtos de um espaço de estados $\mathcal{H}_U \otimes \mathcal{H}_V$ é um subconjunto próprio de $\mathcal{H}_W$. Os estados que não são estado-produtos são chamados estados emaranhados, apresentando uma correlação entre os vetores básicos em $\mathcal{H}_U$ e $\mathcal{H}_V$. Em 1935, Einstein, Podolsky e Rosen (EPR) (KNILL et al., 2002) fizeram uma observação importante sobre os estados emaranhados da teoria quântica. Mostraram que a mecânica quântica prevê que, se duas partículas interagem e, em seguida, são separadas, a medição de uma das partículas determina os valores os quais as propriedades (como o momento e a posição) da outra partícula devem assumir. Este

fato sempre ocorre, mesmo quando as partículas são separadas espacialmente e/ou não estão interagindo no momento da medição.

Os estados emaranhados desempenham um papel relevante na computação quântica e na informação quântica. Dentre os exemplos, tem-se o teletransporte e a codificação densa (NIELSEN; CHUANG, 2003), (PRESKILL, 2002),.

Se $P \in \mathcal{H}_U \subset \mathbb{C}^m$ e $Q \in \mathcal{H}_V \subset \mathbb{C}^n$. Então $P \otimes Q \in \mathbb{C}^{mn} \in \mathcal{H}_W$ é definido por:

$$P \otimes Q = \begin{pmatrix} p_{11}Q & p_{12}Q & \cdots & p_{1n}Q \\ p_{21}Q & p_{22}Q & \cdots & p_{2n}Q \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{m1}Q & p_{m2}Q & \cdots & p_{mn}Q \end{pmatrix}.$$

Postulados 3. *O espaço de estados de um sistema físico composto é o produto tensorial dos espaços de estados dos sistemas físicos individuais. Se os sistemas forem enumerados de 1 até n e o sistema i for preparado no estado $|\psi_i\rangle$, decorre que o estado do sistema composto será (NIELSEN; CHUANG, 2003)*

$$\bigotimes_{i=1}^n |\psi_i\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \otimes \cdots \otimes |\psi_n\rangle.$$

Exemplo 8. *Na descrição de sistemas quânticos de dois qubits (bidimensionais), são considerados quatro estados na base canônica. Usando a expansão binária, os vetores básicos são indicados por $|00\rangle$, $|01\rangle$, $|10\rangle$ e $|11\rangle$. A representação matricial de cada um dos vetores da base canônica de estados quânticos de sistemas de 2 qubits é expressa por:*

$$|00\rangle \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad |01\rangle \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad |10\rangle \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad |11\rangle \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

De forma análoga, um par de qubits pode também existir em superposição dos quatro estados básicos, sendo que cada estado básico está associado a um coeficiente complexo, o qual determina sua correspondente amplitude. Assim, o vetor de estado de um sistema quântico bidimensional pode ser indicado pela expressão:

$$|\psi\rangle = \alpha_{00}|00\rangle + \alpha_{01}|01\rangle + \alpha_{10}|10\rangle + \alpha_{11}|11\rangle = \sum_{i \in \{0,1\}^2} \alpha_i |i\rangle,$$

satisfazendo a condição de normalização $\sum_{i \in \{0,1\}^2} |\alpha_i|^2 = 1$. O espaço de Hilbert ($\mathbb{C}^4$) provê uma interpretação para toda combinação linear gerada a partir dos vetores da base canônica. Assim, aplicando o produto tensorial, o estado $|01\rangle$ é representado

por:

$$|01\rangle = |0\rangle \otimes |1\rangle = (1, 0)^t \otimes (0, 1)^t = (0, 1, 0, 0)^t$$

e considerando a porta Hadamard, tem-se

$$H^2 = H \otimes H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1H & 1H \\ 1H & -1H \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Generalizando, o estado de um sistema quântico de n -qubits é descrito por um vetor, chamado vetor de estado multidimensional, definido por uma combinação de estados básicos de dimensão 2^n ,

$$|\psi\rangle = \alpha_0|0\rangle + \alpha_1|1\rangle + \dots + \alpha_{2^n-2}|2^n-2\rangle + \alpha_{2^n-1}|2^n-1\rangle = \sum_{i \in \{0,1\}^n} \alpha_i |i\rangle,$$

tal que $|\psi\rangle$ satisfaz a condição de normalidade, $\sum_{i \in \{0,1\}^n} |\alpha_i|^2 = 1$ e onde, pela expansão binária, tem-se que

$$|0\rangle = |0 \dots 00\rangle, |1\rangle = |0 \dots 01\rangle, |2\rangle = |0 \dots 10\rangle, \dots |2^n-2\rangle = |1 \dots 10\rangle \text{ e } |2^n-1\rangle = |1 \dots 11\rangle.$$

Exemplo 9. Considerando o estado normalizado $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{4}}|01\rangle + \frac{1}{\sqrt{4}}|10\rangle$, a medida deste estado segue a mesma seqüência apresentada no diagrama da Figura 2.

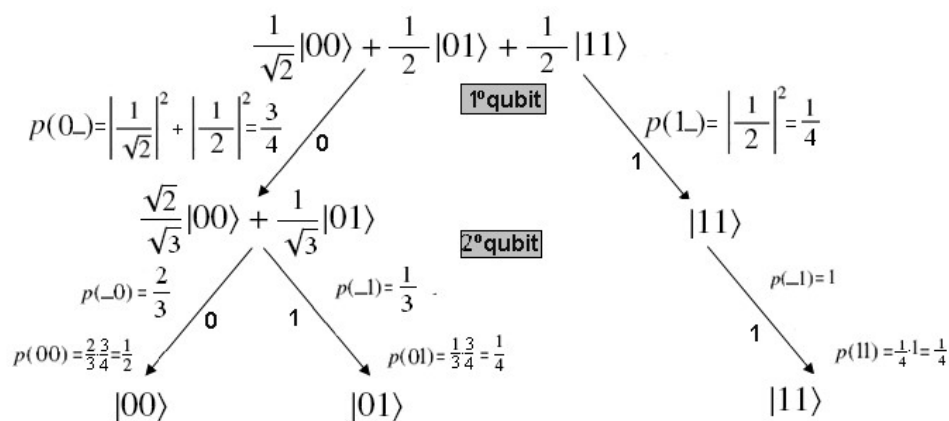


Figura 2: Medida do estado bidimensional $|\psi\rangle$.

Observa-se que a probabilidade de observar o estado $|00\rangle$ é igual a $|\alpha_{00}|^2$ e pode ser obtida através do produto da medida do primeiro qubit, $p(|0_- \rangle)$, com a medida do segundo qubit, $p(|0 \rangle)$. De forma análoga para o estado $|11\rangle$:

- $p(0_-) = \frac{3}{4}$ e $p(-0) = \frac{2}{3}$ logo $p(00) = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$; e
- $p(1_-) = \frac{1}{4}$ e $p(-1) = 1$ logo $p(11) = \frac{3}{4} \cdot 1 = \frac{1}{4}$.

Destaca-se ainda que estas probabilidades do Exemplo 9 são independentes da ordem da medida, ou seja, o resultado não é alterado se a medida for realizada, simultaneamente, ou em qualquer ordem.

3.5 Operações Quânticas Controladas

Considera-se a seguir uma classe de operadores de múltiplos qubits, ou seja, que atuam sobre dois ou mais qubits, e não são fatoradas como produtos tensoriais de matrizes. Casos particularmente importantes de operações lógicas atuantes em mais de um *qubit* são as portas *controladas*.

A porta genérica U -Controlada ou simplesmente porta $C-U$ (Controlled- U) aplica o operador unitário U em um dos qubits, chamado de qubit alvo, dependendo do estado dos outros qubits, conhecido como qubits de controle.

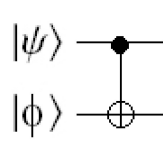
Exemplo 10. Operando sobre 2 qubits, a porta Não-Controlado ou simplesmente porta $CNOT$ (Controlled-NOT) aplica o operador NOT correspondendo a operação de inversão (definida pela matriz de Pauli- X) ao qubit alvo (qubit inferior), se o estado do qubit de controle (qubit superior) estiver no estado $|1\rangle$, Figura 3. Caso contrário, estado do qubit alvo não é alterado. Considerando a expansão binária da base canônica em $\mathcal{H}(\mathbb{C}^2)$ dada por $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$, tem-se que a aplicação da operação $CNOT$ aos componentes da base canônica:

$$CNOT(|x\rangle|y\rangle) = |x\rangle|x \oplus y\rangle, \quad (50)$$

onde $\oplus$ indica a operação soma módulo 2. Ou ainda, o operador $CNOT$ é um operador unitário, portanto um operador linear invertível ($CNOT^2 = I_2$), e ao contrário do operador clássico XOR , pode ser aplicado a superposição de estados básicos:

$$CNOT(\alpha_0|0\rangle|0\rangle + \alpha_1|1\rangle|0\rangle) = \alpha_0|00\rangle + \alpha_1|11\rangle, \text{ se } \alpha_0, \alpha_1 \neq 0 \text{ e } \alpha_0^2 + \alpha_1^2 = 1.$$

O circuito e a correspondente notação matricial e dada na Figura 3.



$$CNOT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Figura 3: Representações do operador CNOT

Observa-se ainda que a Eq. (50) mostra que o operador $CNOT$ clássico (XOR) executa a tarefa de copiar um bit clássico: $CNOT|x\rangle|0\rangle = |x\rangle|x \oplus 0\rangle = |x\rangle|x\rangle$. Entretanto, tal propriedade não pode ser estendida aos qubits, é o que diz o teorema da não-clonagem (NIELSEN; CHUANG, 2003).

Exemplo 11. Pode-se considerar o operador controlado sobre 2 qubits que aplica a operação de inversão do segundo qubit (qubit alvo) se o estado do primeiro qubit (qubit de controle) é $|0\rangle$, caso contrário, o valor do qubit alvo não se altera, e a correspondente expressão matricial é dada por:

$$\overline{CNOT} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (51)$$

Sua expressão matricial (51) quando aplicada ao estado de superposição $\alpha_{00}|00\rangle + \alpha_{01}|01\rangle + \alpha_{10}|10\rangle + \alpha_{11}|11\rangle$ resulta em $\alpha_{01}|00\rangle + \alpha_{00}|01\rangle + \alpha_{10}|10\rangle + \alpha_{11}|11\rangle$.

Exemplo 12. De forma análoga, o operador controlado sobre 2 qubits que aplica a operação de inversão do qubit alvo (primeiro qubit) se o estado do qubit de controle (segundo qubit) é $|1\rangle$, caso contrário, o valor do qubit alvo não se altera, é representado por:

$$\overline{CNOT} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (52)$$

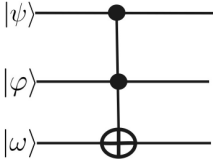
A expressão matricial (52) quando aplicada ao estado de superposição $\alpha_{00}|00\rangle + \alpha_{01}|01\rangle + \alpha_{10}|10\rangle + \alpha_{11}|11\rangle$ resulta em $\alpha_{00}|00\rangle + \alpha_{11}|01\rangle + \alpha_{10}|10\rangle + \alpha_{01}|11\rangle$.

Exemplo 13. Caso particularmente importante de operação lógica, atuantes em mais de um qubit, é o operador swap, porta que atua em múltiplos qubits trocando seus valores, simultaneamente. Verifica-se a composição $CNOT \circ \overline{CNOT} \circ CNOT$ resulta no operador *swap* que atua sobre 2 qubits, cuja expressão matricial é dada por:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (53)$$

A expressão matricial na Eq. (53), quando aplicada ao estado de superposição $\alpha_{00}|00\rangle + \alpha_{01}|01\rangle + \alpha_{10}|10\rangle + \alpha_{11}|11\rangle$, resulta em $\alpha_{00}|00\rangle + \alpha_{10}|01\rangle + \alpha_{01}|10\rangle + \alpha_{11}|11\rangle$.

Exemplo 14. Veja na Figura 4(a) uma transformação de Toffoli descrevendo uma operação controlada para um sistema de 3-qubits. Neste caso, o operador NOT é aplicado ao terceiro qubit $|\sigma\rangle$ quando os estados atuais dos dois primeiros qubits $|\Psi\rangle$ e $|\varphi\rangle$ estão ambos em $|1\rangle$. Na Figura 4(b) tem-se o circuito que representa graficamente o operador $T_3^{1,2}$. Na Figura 4(b), tem-se a ação da transformação quântica $T_3^{1,2}$ em um sistema de 3-qubits na estrutura matricial, considerando $|\mathcal{X}\rangle$ como estado inicial.



$$T_3^{1,2}|\mathcal{X}\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \\ \epsilon \\ \theta \\ v \\ \sigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \\ \epsilon \\ \theta \\ \sigma \\ v \end{pmatrix}$$

Figura 4: Representações do operador Toffoli

3.6 Considerações Finais

Neste capítulo, foram caracterizados os conceitos básicos de espaço vetorial de estados, a descrição da evolução temporal de sistemas quântico multidimensionais, incluindo o produto tensorial, a composição de operadores unitários e operações de medida e controle sobre qubits.

A representação de operadores quânticos atuando sobre vetores de estados de n qubits envolve matrizes unitárias de dimensão $2^n \times 2^n$. A aplicação simultânea de um operador P sobre o qubit $|\phi_P\rangle$ e de outro operador Q o qubit $|\phi_Q\rangle$ representada pelo produto tensorial $P \otimes Q$ entre as matrizes associadas a cada operador, resulta em novo operador, onde os vetores de estados estão em $\mathcal{H}(\mathbb{C}^{2^n \times 2^n})$. Assim, o produto tensor modela a sincronização temporal de operadores quânticos, aplicada sobre distintos qubits com expansão exponencial dos estados da base computacional.

A execução seqüencial de um operador P sobre o qubit $|\phi_P\rangle$ e de outro operador Q o qubit $|\phi_Q\rangle$, modelada pela composição dos operadores unitários obtida a partir do produto entre as matrizes P e Q que representam cada operador, e também resulta num novo operador, onde os vetores de estados pertencem ao espaço vetorial $\mathcal{H}(\mathbb{C}^{2^n})$. Neste sentido, a composição modela a evolução temporal de estados quânticos, cada operador atua em instantes de tempo distintos.

4 INTERPRETACAO DE CONJUNTOS FUZZY VIA OPERADORES QUÂNTICOS

No trabalho proposto por Mannucci (MANNUCCI, 2006), introduz-se a interpretação de conjuntos fuzzy pela superposição de conjuntos fuzzy clássicos associados a estados quânticos. As interpretações para operações sobre conjuntos fuzzy tais como complemento, intersecção e união são obtidas, respectivamente, através das transformações quânticas *NOT*, *AND* and *OR*.

Na continuidade, seguem-se trabalhos que estendem esta abordagem (VISINTIN et al., 2012), incluindo interpretação para operadores de agregação (MARON et al., 2013) e outros conectivos como classes de implicações fuzzy (MARON et al., 2013), diferença fuzzy e de operadores X(N)OR fuzzy (AVILA et al., 2015), mostrando uma metodologia de construção de conjuntos fuzzy e correspondentes operações sobre conjuntos fuzzy.

Este capítulo resume as principais interpretações para operações sobre conjuntos fuzzy via computação quântica.

4.1 Interpretação de Conjuntos Fuzzy

Definição 14. (MANNUCCI, 2006, Definição 1) Sejam $\mathcal{X} \neq \emptyset, |\mathcal{X}| = N, i \in \mathbb{N}_N = \{1, 2, \dots, N\}$ e a função $\mu : \mathcal{X} \rightarrow U$. O estado de um registrador quântico N -dimensional, dado por:

$$|s_f\rangle = \bigotimes_{1 \leq i \leq N} [\sqrt{1 - \mu_A(x_i)}|0\rangle + \sqrt{\mu_A(x_i)}|1\rangle] \quad (54)$$

é denominado **estado fuzzy clássico** of N -qubits (CFS). E, $[CFS]$ indica o conjunto de todos os CFS_S .

Observação 2. Seja $\mathcal{A} = \{A_j\}$ uma coleção finita de conjuntos fuzzy com respeito a um conjunto $\mathcal{X} \neq \emptyset$. Para todo $x \in \mathcal{X}$, tem-se que $|s_{\mu_{A_j}}\rangle$ é um estado fuzzy clássico dado por:

$$|s_{\mu_{A_j}}\rangle = \sqrt{1 - \mu_{A_j}(x)}|0\rangle + \sqrt{\mu_{A_j}(x)}|1\rangle.$$

Esta interpretação pode ser estendida para um conjunto fuzzy clássico $|\phi\rangle$ N -dimensional de acordo com a expressão:

$$|\phi\rangle = \bigotimes_{1 \leq j \leq N} |s_{\mu_{A_j}}(x)\rangle, \forall x \in \mathcal{X}.$$

Neste trabalho, consideram-se interpretações apenas de operações unárias (complemento) e binárias (união, intersecção, (co)implicação, (co)diferença) logo, tem-se $\mu_A, \mu_B : \mathcal{X} \rightarrow U$ como funções de pertinência relacionadas aos conjuntos fuzzy A e B .

E, o par $(|S_{\mu_A}\rangle, |S_{\mu_B}\rangle)$ correspondente a um conjunto fuzzy clássico de acordo com as seguintes expressões:

$$|S_{\mu_A}\rangle = \sqrt{\mu_A(x)}|1\rangle + \sqrt{1 - \mu_A(x)}|0\rangle \text{ e } |S_{\mu_B}\rangle = \sqrt{\mu_B(x)}|1\rangle + \sqrt{1 - \mu_B(x)}|0\rangle. \quad (55)$$

4.2 Interpretação de Operações sobre Conjuntos Fuzzy

Para interpretação da ação dos conectivos fuzzy sobre conjuntos fuzzy, consideram-se os estados quânticos $|S_{\mu_A}\rangle$ e $|S_{\mu_B}\rangle$ dados pelas Eqs. (55)a and (55)b. Os resultados apresentados nesta seção estão detalhados nos trabalhos (MARON et al., 2013; VISINTIN et al., 2012; MARON et al., 2013).

4.2.1 Complemento Fuzzy

O **complemento de um conjunto fuzzy** definido pela é executado pela negação padrão, que é obtida pelo **operador NOT**, com base na Eq.(56) definida como

$$NOT(|S_{\mu_A}\rangle) = (\sqrt{\mu_A(x)}|0\rangle + \sqrt{1 - \mu_A(x)}|1\rangle) \quad (56)$$

Entretanto, quando $|S_{\mu_A}\rangle = \bigotimes_{1 \leq i \leq N} (\sqrt{1 - \mu_A(x_i)}|0\rangle + \sqrt{\mu_A(x_i)}|1\rangle)$, o operador complemento NOT^N preserva um estado de superposição quântica N -dimensional e expresso pela Eq.(57) seguinte:

$$NOT^N(|S_{\mu_A}\rangle) = \bigotimes_{1 \leq i \leq N} (\sqrt{\mu_A(x_i)}|0\rangle + \sqrt{1 - \mu_A(x_i)}|1\rangle) \quad (57)$$

4.2.2 Adição e Multiplicação

Sejam $|S_{\mu_A}\rangle$ e $|S_{\mu_B}\rangle$ os estados quânticos dados pelas Eqs. (55)a and (55)b.

A **intersecção e união** entre conjuntos fuzzy A e B , são modeladas pelos operadores **AND** e **OR** expressos respectivamente através das transformações *Toffoli* que seguem, respectivamente, nas Eqs.(58) e (59):

$$AND(|S_{\mu_A}\rangle, |S_{\mu_B}\rangle) = T(|S_{\mu_A}\rangle, |S_{\mu_B}\rangle, |0\rangle) \quad (58)$$

$$OR(|S_{\mu_A}\rangle, |S_{\mu_B}\rangle) = NOT^3(T(NOT|S_{\mu_A}\rangle, NOT|S_{\mu_B}\rangle, |0\rangle)). \quad (59)$$

A expansão da Eq.(58) está descrita na Eq.(60), considerando os componentes da base computacional que descreve um estado de sistema quântico tridimensional.

$$\begin{aligned}
 AND(|S_{\mu_A}\rangle, |S_{\mu_B}\rangle) &= T(|S_{\mu_A}\rangle, |S_{\mu_B}\rangle, |0\rangle) = \\
 &= T\left((\sqrt{x_1}|1\rangle + \sqrt{1-x_1}|0\rangle) \otimes (\sqrt{y_1}|1\rangle + \sqrt{1-y_1}|0\rangle) \otimes |0\rangle\right) \\
 &= (\sqrt{1-x_1}\sqrt{1-y_1}|000\rangle + (\sqrt{1-x_1}\sqrt{y_1}|010\rangle + (\sqrt{x_1}\sqrt{1-y_1}|100\rangle + (\sqrt{x_1}\sqrt{y_1}|111\rangle) \quad (60)
 \end{aligned}$$

Portanto, executando uma operação de medida sobre o terceiro *qubit* no estado $(|1\rangle)$, a primeira componente de um estado quântico final, que está expressa pela Eq. (60), provem a saída com probabilidade $p_{AND}(1) = x_1 \cdot y_1$. Analogamente, um operação de medida sobre o terceiro *qubit* no estado $(|0\rangle)$ pela Eq. (60), retorna uma saída com probabilidade $p_{AND}(0) = 1 - x_1 \cdot y_1$.

Analogamente, a expansão da Eq.(59) está descrita na Eq.(61), considerando os componentes da base computacional descrevendo um estado de sistema quântico tridimensional:

$$\begin{aligned}
 OR(|S_{\nu_A}\rangle, |S_{\nu_B}\rangle) &= NOT^3\left(T(NOT(|S_{\nu_A}\rangle), NOT(|S_{\nu_B}\rangle), |0\rangle)\right) = \\
 &= T((\sqrt{x_1}|0\rangle + \sqrt{1-x_1}|1\rangle) \otimes (\sqrt{y_1}|0\rangle + \sqrt{1-y_1}|1\rangle) \otimes |1\rangle) \\
 &= \sqrt{x_1 y_1}|001\rangle + \sqrt{x_1(1-y_1)}|011\rangle + \sqrt{(1-x_1)y_1}|101\rangle + \sqrt{(1-x_1)(1-y_1)}|110\rangle \quad (61)
 \end{aligned}$$

Observando uma medida, executada sobre o terceiro *qubit* de um estado quântico mostrado na Eq. (61), com relação ao estado:

- (i) $|1\rangle$, retorna $\frac{1}{\sqrt{x_1+y_1-x_1y_1}}\left(\sqrt{x_1 y_1}|001\rangle + \sqrt{x_2(1-y_2)}|011\rangle + \sqrt{(1-x_1)y_1}|101\rangle\right)$ e a correspondente probabilidade $p_{OR}(1) = x_1 + y_1 - x_1 \cdot y_1$;
- (ii) $|0\rangle$, resulta sobre $|110\rangle$ com probabilidade $p_{OR}(0) = (1 - x_2) \cdot (1 - y_2)$.

Os resultados das medidas estão de acordo com a Eq.(14)a e b.

4.2.3 (Co)Implicação Fuzzy

Os CFs obtidos pela ação do operador de **implicação fuzzy** e a seu dual, **coimplicação fuzzy**, aplicados sobre conjuntos fuzzy A e B , provêm interpretação para operadores **IMP** e **COIMP** expressos através das transformações *Toffoli*, respectivamente dadas pelas Eqs.(62) e (63) logo a seguir:

$$Imp(|S_{\mu_A}\rangle, |S_{\mu_B}\rangle) = T(|S_{\mu_A}\rangle, NOT|S_{\mu_B}\rangle, |0\rangle) \quad (62)$$

$$CoImp(|S_{\mu_A}\rangle, |S_{\mu_B}\rangle) = T(NOT|S_{\mu_A}\rangle, |S_{\mu_B}\rangle, |1\rangle). \quad (63)$$

A expansão da Eq.(62) está descrita na Eq.(64), considerando os componentes da base computacional que descrevem um estado quântico como a seguir:

$$\begin{aligned}
Imp(|S_{\nu_{A_I}}\rangle, |S_{\nu_{A_I}}\rangle) &= NOT^3 \left(T(|S_{\nu_{A_I}}\rangle, NOT(|S_{\nu_{A_I}}\rangle), |0\rangle) \right) = \\
&= T((\sqrt{x_1}|1\rangle + \sqrt{1-x_1}|0\rangle) \otimes (\sqrt{y_1}|0\rangle + \sqrt{1-y_1}|1\rangle) \otimes |1\rangle) \\
&= \sqrt{x_1 y_1}|101\rangle + \sqrt{x_1(1-y_1)}|110\rangle + \sqrt{(1-x_1)y_1}|001\rangle + \sqrt{(1-x_1)(1-y_1)}|011\rangle \quad (64)
\end{aligned}$$

Portanto, executando uma operação de medida sobre o terceiro *qubit* no estado $(|1\rangle)$, a primeira componente de um estado quântico final, que está expressa pela Eq. (60), provem a saída com probabilidade $p_{AND}(1) = 1 - x_1 + x_1 \cdot y_1$. Analogamente, um operação de medida sobre o terceiro *qubit* no estado $(|0\rangle)$ pela Eq. (60), retorna uma saída com probabilidade $p_{AND}(0) = x_1 - x_1 \cdot y_1$.

Nos mesmos termos pode ser expandida a Eq.(63).

4.2.4 (Co)Diferença Fuzzy

Analogamente, a ação do operador **diferença** e seu dual, o operador de **codiferença**, aplicado sobre conjuntos fuzzy A e B , provêm interpretação para os operadores **Dif** e **CoDif**, os quais são, respectivamente, expressos através das transformações *Toffoli* e seguem das Eqs.(65) e (66) logo a seguir:

$$Dif(|S_{\mu_A}\rangle, |S_{\mu_B}\rangle) = T(|S_{\mu_A}\rangle, NOT|S_{\mu_B}\rangle, |0\rangle) \quad (65)$$

$$CoDif(|S_{\mu_A}\rangle, |S_{\mu_B}\rangle) = T(NOT|S_{\mu_A}\rangle, |S_{\mu_B}\rangle, |1\rangle). \quad (66)$$

A expansão da Eq.(65) está descrita na Eq.(67), descrita logo a seguir:

$$\begin{aligned}
Dif(|S_{\mu_A}\rangle, |S_{\mu_B}\rangle) &= T(|S_{\mu_A}\rangle, NOT(|S_{\mu_B}\rangle), |0\rangle) = \\
&= T((\sqrt{x_1}|1\rangle + \sqrt{1-x_1}|0\rangle) \otimes (\sqrt{y_1}|0\rangle + \sqrt{1-y_1}|1\rangle) \otimes |0\rangle) \\
&= (\sqrt{1-x_1}\sqrt{1-y_1}|010\rangle + (\sqrt{1-x_1}\sqrt{y_1}|000\rangle + (\sqrt{x_1}\sqrt{1-y_1}|111\rangle + (\sqrt{x_1}\sqrt{y_1}|100\rangle) \quad (67)
\end{aligned}$$

Portanto, executando uma operação de medida sobre o terceiro *qubit* no estado $(|1\rangle)$, a primeira componente de um estado quântico final, que está expressa pela Eq. (60), provem a saída com probabilidade $p_{Dif}(1) = x_1 - x_1 \cdot y_1$. Analogamente, um operação de medida sobre o terceiro *qubit* no estado $(|0\rangle)$ pela Eq. (60), retorna uma saída com probabilidade $p_{Dif}(0) = 1 - x_1 + x_1 \cdot y_1$.

Nos mesmos termos pode ser expandida a Eq.(66).

4.3 Considerações Finais

Neste capítulo está definido o estado de um registrador quântico, $|s_f\rangle = [\sqrt{1 - \mu_A(x_i)}|0\rangle + \sqrt{\mu_A(x_i)}|1\rangle]$, denominado **estado fuzzy clássico**. Também são demonstradas as principais interpretações para operações sobre conjuntos fuzzy via computação quântica interpretação de conjuntos fuzzy pela superposição de conjuntos fuzzy clássicos associados a estados quânticos.

Operações de complemento, multiplicação, soma probabilística, implicação, coimplicação, diferença e codiferença são modeladas, respectivamente, pelos operadores *NOT*, *AND*, *OR*, *IMP*, *COIMP*, *DIF* e *CODIF*. As interpretações para operações sobre conjuntos fuzzy são obtidas através das transformações quânticas.

Ainda foi retratada a operação de medida, sobre o terceiro *qubit* de um operador, onde pode estar no estado ($|1\rangle$) provendo a saída com uma probabilidade para o grau de pertinência de um elemento em relação a operação executada, ou pode estar no estado ($|0\rangle$) com o complemento para o grau de pertinência.

5 INTERPRETAÇÃO DA LÓGICA FUZZY INTUICIONISTA VIA COMPUTAÇÃO QUÂNTICA

Neste capítulo, considera-se primeiramente a descrição de Conjuntos Fuzzy Intuicionistas (*CFIs*), através do ponto de vista da *CQ*, embasado no trabalho de interpretação de CF via *CQ* introduzido por Mannucci (MANNUCCI, 2006), estendido por Maron et. al. (MARON et al., 2012; VISINTIN et al., 2012; MARON et al., 2013) e mais recentemente, estudado por outros pesquisadores do grupos GPMFFM e LUPS (VIEIRA, 2015; AVILA et al., 2015).

Nesta proposta de extensão dos *CF* considerando uma abordagem fuzzy intuicionista, consideram-se também representações das operações de complemento, intersecção e união sobre *CFIs* usando operadores da *CQ*. A partir destes, apresentam-se as descrições dos operadores de implicação, coimplicação, diferença e codiferença.

Também são ilustrados os circuitos quânticos e inclusas tabelas para representação da evolução temporal dos correspondentes estados quânticos configurando a descrição da memória apicada em cada um dos operadores modelados.

5.1 Interpretando CFIs via Estados Quânticos

Nesta interpretação, cada *CFI* indicado por A_I está definido pelas funções de pertinência e não-pertinência $\mu_{A_I}, \nu_{A_I} : \mathcal{X} \rightarrow \tilde{U}$, respectivamente.

E, para cada $x \in \mathcal{X} \neq \emptyset$, a modelagem de um elemento $\tilde{x} = (\mu_{A_I}(x), \nu_{A_I}(x)) \in A_I$ é definida por um par de registradores quânticos $(|S_{\mu_{A_I}}\rangle, |S_{\nu_{A_I}}\rangle)$, contendo em seu primeiro componente a descrição $\mu_{A_I}(x)$ do grau de pertinência de x em A_I e, em seu segundo componente uma descrição do grau de não-pertinência $\nu_{A_I}(x)$ de x em A_I . Assim, tem-se que um valor intuicionista $\tilde{x}$ é representado pelo par de registradores:

$$|S_{A_I}\rangle \equiv (|S_{\mu_{A_I}}\rangle, |S_{\nu_{A_I}}\rangle) = \left(\sqrt{\mu_{A_I}(x)}|1\rangle + \sqrt{1 - \mu_{A_I}(x)}|0\rangle, \sqrt{\nu_{A_I}(x)}|1\rangle + \sqrt{1 - \nu_{A_I}(x)}|0\rangle \right) \quad (68)$$

E, operações fuzzy intuicionistas aplicadas sobre $\tilde{x}$ são então modeladas através

de transformações quânticas.

Seja subconjunto $\mathcal{X} \neq \emptyset$ com cardinalidade N , $|\mathcal{X}| = N$. Seja $i \in \mathcal{N}_N = \{1, 2, \dots, N\}$ um conjunto de índices. As funções de pertinência e de não pertinência $\mu_{A_I}, \nu_{A_I} : \mathcal{X} \rightarrow U$ associam a cada $x_i \in \mathcal{X}$ os correspondentes graus de pertinência e não pertinência de um valor fuzzy intuicionista $\tilde{x}_i \in \tilde{U}$ onde:

$$\tilde{x}_i = (\mu_{A_I}(x_i), \nu_{A_I}(x_i)) = (x_{1i}, x_{2i}), \forall i \in \mathcal{N}_N.$$

Numa abordagem intuicionista e multidimensional para os sistemas fuzzy, tem-se na sequência a definição conjunto fuzzy intuicionista clássico multidimensional:

Definição 15. Um **conjunto fuzzy intuicionista clássico (CFIC)** de N -qubits é um par de estados quânticos N -dimensional, indicado por $|S_{A_I}\rangle$ e descrito por um par de registradores, cujos componentes são definidos pelo produto tensorial a seguir:

$$(|S_{\mu_{A_I}}\rangle |S_{\nu_{A_I}}\rangle) = \left(\bigotimes_{1 \leq i \leq N} [\sqrt{1-\mu_{A_I}(x_i)}|0\rangle + \sqrt{\mu_{A_I}(x_i)}|1\rangle] \right) \bigotimes_{1 \leq i \leq N} [\sqrt{1-\nu_{A_I}(x_i)}|0\rangle + \sqrt{\nu_{A_I}(x_i)}|1\rangle] \quad (69)$$

satisfazendo a condição de normalidade $\mu_{A_I}(x_i) + \nu_{A_I}(x_i) \leq 1$.

De acordo com a Definição 15, se um CFIC A_I gerado por indexadores em $\mathcal{N}_N$, tem-se que cada CFIC de N -qubits é descrito por um par de estados quânticos N -dimensionais de acordo com a Eq.(69). A aplicação de uma função f_I para cada elemento em um conjunto-imagem $f_I[\mathcal{X}]$ define um novo estado quântico escrito por um operador quântico multi-qubit.

Observação 3. No caso de $\mathcal{N}_1$, observa-se que um CFIC A_I unitário, cujo valor intuicionista $\tilde{x} = (\mu_{A_I}(x_1), \nu_{A_I}(x_1)) = (x_1, x_2)$ está associada aos estados quânticos correspondentes ao par de registradores dados na Eq. (68).

Observação 4. No caso de $\mathcal{N}_2$, tem-se que $\mu_{A_I}(x_i) = x_{1i}, \nu_{A_I}(x_i) = x_{2i} \in U - \{0, 1\}$, consistindo num par $(|S_{\mu_{A_I}}\rangle, |S_{\nu_{A_I}}\rangle)$ de registradores em superposição de estados quânticos bi-dimensional dados pelas expressões:

$$\begin{aligned} |S_{\mu_{A_I}}\rangle &= (\sqrt{x_{11}}|1\rangle + \sqrt{1-x_{11}}|0\rangle) \otimes (\sqrt{x_{12}}|1\rangle + \sqrt{1-x_{12}}|0\rangle) \\ &= \sqrt{(1-x_{11})(1-x_{12})}|00\rangle + \sqrt{(1-x_{11})x_{12}}|01\rangle + \sqrt{x_{11}(1-x_{12})}|10\rangle + \sqrt{x_{11}x_{12}}|11\rangle; \\ |S_{\nu_{A_I}}\rangle &= (\sqrt{x_{21}}|1\rangle + \sqrt{1-x_{21}}|0\rangle) \otimes (\sqrt{x_{22}}|1\rangle + \sqrt{1-x_{22}}|0\rangle) \\ &= \sqrt{(1-x_{21})(1-x_{22})}|00\rangle + \sqrt{(1-x_{21})x_{22}}|01\rangle + \sqrt{x_{21}(1-x_{22})}|10\rangle + \sqrt{x_{21}x_{22}}|11\rangle. \end{aligned}$$

Portanto, para um CFICs A_I gerado por $\mathcal{N}_n$, uma base canônica ortonormal em $\bigotimes^N \mathcal{C} \times \bigotimes^N \mathcal{C}$ denota um par de registradores quânticos clássicos de N -qubits, significando que cada par $(\mu_{A_I}(x_i), \nu_{A_I}(x_i)) \in \tilde{U}$ a Eq.(69) representa um dos n valores fuzzy intuicionistas correspondentes.

Nas próximas seções, considera-se o caso $\mathcal{N}_1$ simplificando a expressão pelo produto tensorial de operadores de 1-qubits (f_I resulta do produto tensor de operadores uni-idimensionais). Entretanto, esta representacao poderia ser generalizada para o caso $\mathcal{N}_n$.

A seguir, tem-se a interpretando de operações entre CFIs via transformações quânticas.

5.2 Operação de Complemento de um CFI via CQ

Para a interpretação das operações entre conjuntos fuzzy intuicionistas através da computação quântica, que serão apresentadas nas próximas subseções, consideraremos a mesma definição de CFIs A_I e B_I . Dados A_I e B_I CFIs respectivamente definidos por $\mu_{A_I}(x) = x_1$, $\nu_{A_I}(x) = x_2$ e $\mu_{B_I}(x) = y_1$, $\nu_{B_I}(x) = y_2$ para todo $x \in \mathcal{X}$. Considerando os pares de registradores quânticos nas Eqs. (70) e (71), temos:

$$|S_{A_I}\rangle \equiv \left(|S_{\mu_{A_I}}\rangle, |S_{\nu_{A_I}}\rangle \right) = \left(\sqrt{x_1}|1\rangle + \sqrt{1-x_1}|0\rangle, \sqrt{x_2}|1\rangle + \sqrt{1-x_2}|0\rangle \right) \quad (70)$$

$$|S_{B_I}\rangle \equiv \left(|S_{\mu_{B_I}}\rangle, |S_{\nu_{B_I}}\rangle \right) = \left(\sqrt{y_1}|1\rangle + \sqrt{1-y_1}|0\rangle, \sqrt{y_2}|1\rangle + \sqrt{1-y_2}|0\rangle \right) \quad (71)$$

O **operador de complemento** NOT_I de um CFI A_I é dado por:

$$|S_{A'_I}\rangle \equiv NOT_I \left(|S_{\mu_{A_I}}\rangle, |S_{\nu_{A_I}}\rangle \right). \quad (72)$$

Considera-se a seguir a representação da negação padrão fuzzy intuicionista de acordo com Eq.(68), interpretando o complemento A'_I de A_I .

Teorema 1. *O operador de complemento NOT_I de um CFI A_I é dado por:*

$$|S_{A'_I}\rangle \equiv NOT_I \left(|S_{\mu_{A_I}}\rangle, |S_{\nu_{A_I}}\rangle \right) = \left(|S_{\nu_{A_I}}\rangle, |S_{\mu_{A_I}}\rangle \right). \quad (73)$$

Proof. Pela Eq.(28), $A'_I = \{(x, N_{SI}(x_1, x_2) = (x_2, x_1)) : x_1 + x_2 \leq 1\}$. Assim, tem-se que

$$|S_{A'_I}\rangle \equiv \left(|S_{\mu_{A'_I}}\rangle, |S_{\nu_{A'_I}}\rangle \right) = \left(\sqrt{x_2}|1\rangle + \sqrt{1-x_2}|0\rangle, \sqrt{x_1}|1\rangle + \sqrt{1-x_1}|0\rangle \right) = \left(|S_{\nu_{A_I}}\rangle, |S_{\mu_{A_I}}\rangle \right),$$

sempre que $\mu_{A_I}(x) = x_1$, $\nu_{A_I}(x) = x_2$, para todo $x \in \mathcal{X}$. $\square$

Indica-se por $NOT_I^{(N)}$ a iteração do operador complemento, negando simultaneamente todos os qubits de um estado quântico N -dimensional (superposição de N -qubits).

Proposição 3. *Seja o estado quântico descrito pela como descrito em Eq.(69), então*

tem-se a seguinte expressão para o operador $NOT_I^{(N)}$:

$$\begin{aligned} NOT_I^N(|S_{A_I}\rangle) &\equiv NOT_I^N(|S_{\mu_{A_I}}\rangle, |S_{\nu_{A_I}}\rangle) = \\ &= \left(\bigotimes_{1 \leq i \leq N} \left[\sqrt{1-\nu_{A_I}(x_i)}|0\rangle + \sqrt{\nu_{A_I}(x_i)}|1\rangle \right], \bigotimes_{1 \leq i \leq N} \left[\sqrt{1-\mu_{A_I}(x_i)}|0\rangle + \sqrt{\mu_{A_I}(x_i)}|1\rangle \right] \right) \end{aligned} \quad (74)$$

Proof. Segue diretamente da Definição 15. $\square$

5.3 Operação de Intersecção entre CFIs via CQ

Consideram-se os CFIs A_I e B_I , ambos definidos pelas funções de pertinência e não-pertinência $\mu_{A_I}, \nu_{A_I} : \mathcal{X} \rightarrow \tilde{U}$, sendo $\mu_{A_I}(x) = x_1$, $\nu_{A_I}(x) = x_2$ e $\mu_{B_I}(x) = y_1$, $\nu_{B_I}(x) = y_2$ para cada $x \in \mathcal{X}$ onde $(|S_{\mu_{A_I}}\rangle, |S_{\nu_{A_I}}\rangle), (|S_{\mu_{B_I}}\rangle, |S_{\nu_{B_I}}\rangle)$ e os pares de registradores quânticos dados pelas Eqs. (70) e (71), representando os GP e GNP de um elemento $x_i \in \mathcal{X}$ referentes aos CFIs A_I e B_I , respectivamente.

A **intersecção entre os CFIs A_I e B_I** ($A_I \cap B_I$) é modelado pelo operador AND_I descrito logo a seguir:

$$|S_{A_I \cap B_I}\rangle = AND_I(|S_{\mu_{A_I}}\rangle, |S_{\nu_{A_I}}\rangle, |S_{\mu_{B_I}}\rangle, |S_{\nu_{B_I}}\rangle, |0\rangle, |0\rangle). \quad (75)$$

As propriedades de linearidade e distributividade do produto tensorial preservam a representabilidade do conectivo fuzzy intuicionista AND_I , ou seja, cada CIFIC $|S_{A_I \cap B_I}\rangle$ é definido por pares de registradores $(|S_{\mu_{A_I \cap B_I}}\rangle, |S_{\nu_{A_I \cap B_I}}\rangle)$, sendo cada componente correspondendo às relações de pertinência e a não-pertinência, respectivamente.

O próximo teorema provê a expressão para representação do operador de intersecção entre os CFIs A_I e B_I .

Teorema 2. *Sejam $(|S_{\mu_{A_I}}\rangle, |S_{\nu_{A_I}}\rangle), (|S_{\mu_{B_I}}\rangle, |S_{\nu_{B_I}}\rangle)$ os pares de registradores quânticos dados pelas Eqs. (70) e (71). A expressão para interpretação do operador de intersecção entre os CFIs A_I e B_I é dada pelo par de registradores $(|S_{\mu_{A_I \cap B_I}}\rangle, |S_{\nu_{A_I \cap B_I}}\rangle)$ cujos componentes são definidos pelas seguintes expressões:*

$$|S_{\mu_{A_I \cap B_I}}\rangle = M_1^5 \circ AND^{1,3,5}(|S_{\mu_{A_I}}\rangle, |S_{\nu_{A_I}}\rangle, |S_{\mu_{B_I}}\rangle, |S_{\nu_{B_I}}\rangle, |0\rangle, |0\rangle); \quad (76)$$

$$|S_{\nu_{A_I \cap B_I}}\rangle = M_1^6 \circ OR^{2,4,6}(|S_{\mu_{A_I}}\rangle, |S_{\nu_{A_I}}\rangle, |S_{\mu_{B_I}}\rangle, |S_{\nu_{B_I}}\rangle, |0\rangle, |0\rangle). \quad (77)$$

E, as correspondentes expressões para os CFIs complementares:

$$|S_{\mu_{(A_I \cap B_I)'}}\rangle = M_0^5 \circ AND^{1,3,5}(|S_{\mu_{A_I}}\rangle, |S_{\nu_{A_I}}\rangle, |S_{\mu_{B_I}}\rangle, |S_{\nu_{B_I}}\rangle, |0\rangle, |0\rangle); \quad (78)$$

$$|S_{\nu_{(A_I \cap B_I)'}}\rangle = M_0^6 \circ OR^{2,4,6}(|S_{\mu_{A_I}}\rangle, |S_{\nu_{A_I}}\rangle, |S_{\mu_{B_I}}\rangle, |S_{\nu_{B_I}}\rangle, |0\rangle, |0\rangle). \quad (79)$$

Proof. Na sequência, consideram-se os operadores fuzzy das Eqs.(58) e (59).

(i) Seja o operador $AND^{1,3,5}$ expresso através do operador *Toffoli* $T_{1,3}^5$. Então, tem-se que:

$$\begin{aligned}
 AND^{1,3,5} & \left(|S_{\mu_{A_I}}\rangle, |S_{\nu_{A_I}}\rangle, |S_{\mu_{B_I}}\rangle, |S_{\nu_{B_I}}\rangle, |0\rangle, |0\rangle \right) = \\
 & = T^{1,3,5} \left(|S_{\mu_{A_I}}\rangle, |S_{\nu_{A_I}}\rangle, |S_{\mu_{B_I}}\rangle, |S_{\nu_{B_I}}\rangle, |0\rangle, |0\rangle \right) \\
 & = \left[\left(\sqrt{1-x_1}|0\rangle \otimes (\sqrt{1-x_2}|0\rangle + \sqrt{x_2}|1\rangle) \otimes \sqrt{1-y_1}|0\rangle \otimes (\sqrt{1-y_2}|0\rangle + \sqrt{y_2}|1\rangle) \right) \right. \\
 & \quad + \left(\sqrt{1-x_1}|0\rangle \otimes (\sqrt{1-x_2}|0\rangle + \sqrt{x_2}|1\rangle) \otimes \sqrt{y_1}|1\rangle \otimes (\sqrt{1-y_2}|0\rangle + \sqrt{y_2}|1\rangle) \right) \\
 & \quad + \left(\sqrt{x_1}|1\rangle \otimes (\sqrt{1-x_2}|0\rangle + \sqrt{x_2}|1\rangle) \otimes \sqrt{1-y_1}|0\rangle \otimes (\sqrt{1-y_2}|0\rangle + \sqrt{y_2}|1\rangle) \right) \Big] \otimes |00\rangle \\
 & \quad + \left(\sqrt{x_1}|1\rangle \otimes (\sqrt{1-x_2}|0\rangle + \sqrt{x_2}|1\rangle) \otimes \sqrt{y_1}|1\rangle \otimes (\sqrt{1-y_2}|0\rangle + \sqrt{y_2}|1\rangle) \right) \otimes |10\rangle. \quad (80)
 \end{aligned}$$

Portanto, executando o operador de medida M_1^5 no estado quântico da Eq. (80), ou seja, sobre o quinto *qubit* no estado $|1\rangle$, tem-se o registrador de saída:

$$\begin{aligned}
 |S_{\mu_{A_I \cap B_I}}\rangle & = \sqrt{x_1(1-x_2)y_1(1-y_2)}|101010\rangle + \sqrt{x_1x_2y_1(1-y_2)}|111010\rangle + \\
 & \quad \sqrt{x_1x_2y_1y_2}|111110\rangle + \sqrt{x_1(1-x_2)y_1y_2}|101110\rangle \quad (81)
 \end{aligned}$$

A correspondente probabilidade $p_{AND}(1) = x_1 \cdot y_1$, expressa o grau de pertinência de um elemento x_1 no *CFI* $A_I \cap B_I$, ou seja, $p_{AND}(1) = \mu_{A_I \cap B_I}(x_i)$.

Analogamente, a medida M_0^5 no estado quântico da Eq. (80) retorna o registrador:

$$\begin{aligned}
 |S_{\mu_{(A_I \cap B_I)'}}\rangle & = \\
 & = \sqrt{(1-x_1)(1-x_2)(1-y_1)(1-y_2)}|000000\rangle + \sqrt{(1-x_1)(1-x_2)(1-y_1)y_2}|000100\rangle \\
 & \quad + \sqrt{(1-x_1)x_2(1-y_1)(1-y_2)}|010000\rangle + \sqrt{(1-x_1)x_2(1-y_1)y_2}|010100\rangle \\
 & \quad + \sqrt{(1-x_1)(1-x_2)y_1(1-y_2)}|001000\rangle + \sqrt{(1-x_1)(1-x_2)y_1y_2}|001100\rangle \\
 & \quad + \sqrt{(1-x_1)x_2y_1(1-y_2)}|011000\rangle + \sqrt{(1-x_1)x_2y_1y_2}|011100\rangle \\
 & \quad + \sqrt{x_1(1-x_2)(1-y_1)(1-y_2)}|100000\rangle + \sqrt{x_1(1-x_2)(1-y_1)y_2}|100100\rangle \\
 & \quad + \sqrt{x_1x_2(1-y_1)(1-y_2)}|110100\rangle + \sqrt{x_1x_2(1-y_1)y_2}|110000\rangle. \quad (82)
 \end{aligned}$$

com probabilidade $p_{AND}(0) = 1 - x_1 \cdot y_1$, expressando o complemento do grau de pertinência de x_1 no *CFI* $(A_I \cap B_I)'$, ou seja, $p_{AND}(0) = 1 - \mu_{A_I \cap B_I}(x_i)$ ou ainda $p_{AND}(0) = \mu_{(A_I \cap B_I)'}(x_i)$.

Assim, pelas Eqs.(81) e (82), tem-se que $|S_{\mu_{A_I \cap B_I}}\rangle = AND(|S_{\mu_{A_I}}\rangle, |S_{\mu_{B_I}}\rangle)$, ou ainda:

$$AND(|S_{\mu_{A_I}}\rangle, |S_{\mu_{B_I}}\rangle) = \sqrt{\mu_{A_I \cap B_I}(x_i)}|1\rangle + \sqrt{1 - \mu_{A_I \cap B_I}(x_i)}|0\rangle \quad (83)$$

- (ii) Da mesma forma, pela Eq.(88) considera-se o operador $OR^{2,4,6}(|S_{\nu_{A_I}}\rangle, |S_{\nu_{B_I}}\rangle)$ através da composição dos operadores: $NOT^{2,4}$, $Toffoli T_{2,4}^6$ e NOT^6 (negando somente o sexto qubit). Então, tem-se que —REFAZER:

$$\begin{aligned}
 & OR^{2,4,6}(|S_{\mu_{A_I}}\rangle, |S_{\nu_{A_I}}\rangle, |S_{\mu_{B_I}}\rangle, |S_{\nu_{B_I}}\rangle, |0\rangle, |0\rangle) = \\
 & = NOT^{2,4,6} \circ T^{2,4,6} \circ NOT^{2,4}(|S_{\mu_{A_I}}\rangle, |S_{\nu_{A_I}}\rangle, |S_{\mu_{B_I}}\rangle, |S_{\nu_{B_I}}\rangle, |0\rangle, |0\rangle) \\
 & = NOT^{2,4,6} \circ T^{2,4,6}(|S_{\mu_{A_I}}\rangle, NOT|S_{\nu_{A_I}}\rangle, |S_{\mu_{B_I}}\rangle, NOT|S_{\nu_{B_I}}\rangle, |0\rangle, |0\rangle) \\
 & = \left((\sqrt{1-x_1}|0\rangle + \sqrt{x_1}|1\rangle) \otimes (\sqrt{1-x_2}|1\rangle) \otimes (\sqrt{1-y_1}|0\rangle + \sqrt{y_1}|1\rangle) \otimes \sqrt{1-y_2}|1\rangle \right) \otimes |01\rangle \\
 & \quad + \left[\left((\sqrt{1-x_1}|0\rangle + \sqrt{x_1}|1\rangle) \otimes (\sqrt{1-x_2}|1\rangle) \otimes (\sqrt{1-y_1}|0\rangle + \sqrt{y_1}|1\rangle) \otimes \sqrt{y_2}|0\rangle \right) \right. \\
 & \quad + \left((\sqrt{1-x_1}|0\rangle + \sqrt{x_1}|1\rangle) \otimes (\sqrt{x_2}|0\rangle) \otimes (\sqrt{1-y_1}|0\rangle + \sqrt{y_1}|1\rangle) \otimes \sqrt{1-y_2}|1\rangle \right) \\
 & \quad \left. + \left((\sqrt{1-x_1}|0\rangle + \sqrt{x_1}|1\rangle) \otimes (\sqrt{x_2}|0\rangle) \otimes (\sqrt{1-y_1}|0\rangle + \sqrt{y_1}|1\rangle) \otimes \sqrt{y_2}|0\rangle \right) \right] \otimes |00\rangle. \quad (84)
 \end{aligned}$$

Portanto, executando uma operação de medida no estado quântico da Eq. (84), sobre o sexto *qubit* no estado ($|1\rangle$), tem-se que resulta no registrador de saída:

$$\begin{aligned}
 & |S_{\nu_{A_I \cap B_I}}\rangle = \\
 & = \sqrt{x_1(1-x_2)y_1y_2}|000001\rangle + \sqrt{(1-x_1)(1-x_2)(1-y_1)y_2}|000101\rangle \\
 & \quad + \sqrt{(1-x_1)x_2(1-y_1)(1-y_2)}|010001\rangle + \sqrt{(1-x_1)x_2(1-y_1)y_2}|010101\rangle \\
 & \quad + \sqrt{x_1x_2y_1(1-y_2)}|001001\rangle + \sqrt{(1-x_1)(1-x_2)y_1y_2}|001101\rangle \\
 & \quad + \sqrt{(1-x_1)x_2y_1(1-y_2)}|011001\rangle + \sqrt{(1-x_1)x_2y_1y_2}|011101\rangle \\
 & \quad + \sqrt{x_1x_2y_1y_2}|100001\rangle + \sqrt{x_1(1-x_2)(1-y_1)y_2}|100101\rangle \\
 & \quad + \sqrt{x_1x_2(1-y_1)(1-y_2)}|110101\rangle + \sqrt{x_1x_2(1-y_1)y_2}|110001\rangle. \quad (85)
 \end{aligned}$$

com probabilidade $p_{OR}(1) = x_2 + y_2 - x_2 \cdot y_2$, provendo uma interpretação do grau de não-pertinência de $x \in \chi$ no *CFI* $A_I \cap B_I$, ou seja, $p_{OR}(1) = \nu_{A_I \cap B_I}(x_i)$.

Analogamente, uma operação de medida no estado quântico da Eq. (84), sobre o sexto *qubit* no estado ($|0\rangle$) pela Eq. (96), retorna o estado:

$$\begin{aligned}
 |S_{\nu_{(A_I \cap B_I)'}}\rangle = & \sqrt{(1-x_1)(1-x_2)(1-y_1)(1-y_2)}|010100\rangle + \sqrt{(1-x_1)(1-x_2)(y_1)(1-y_2)}|011100\rangle + \\
 & \sqrt{(x_1)(1-x_2)(1-y_1)(1-y_2)}|110100\rangle + \sqrt{(x_1)(1-x_2)(y_1)(1-y_2)}|111100\rangle
 \end{aligned} \quad (86)$$

com probabilidade $p_{OR}(0) = 1 - x_2 - y_2 + x_2 \cdot y_2$, provendo uma interpretação do complemento da não-pertinência de x_1 no *CFI* $(A_I \cap B_I)'$, ou seja, $p_{OR}(0) =$

$$1 - \nu_{A_I \cap B_I}(x_i).$$

Assim, pelos resultados em Eqs.(81),(82) e Eqs.(85),(86), tem-se que

$$|S_{A_I \cap B_I}\rangle \equiv \left(\left(|S_{\mu_{A_I \cap B_I}}\rangle, |S_{\mu_{(A_I \cap B_I)'}}\rangle \right), \left(|S_{\nu_{A_I \cap B_I}}\rangle, |S_{\nu_{(A_I \cap B_I)'}}\rangle \right) \right).$$

Portanto teorema é verificado. $\square$

Os resultados descritos no Teorema mostram que a interpretação da LFI baseada em CQ, preserva a representabilidade dos conectivo fuzzy intuicionista AND_I .

5.3.1 Circuito Quântico de Representação Gráfica do Operador AND_I

O operador AND_I dado pela Eq. (75) está graficamente descrito pelo circuito quântico da Figura 6. Neste contexto, ao final da execução, os quatro primeiros registradores retornam aos correspondentes valores no estado inicial.

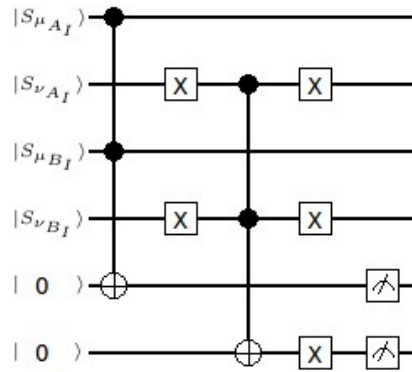


Figura 5: Circuito quântico referente ao operador AND_I

A expansão dos estados quânticos que interpretam a evolução temporal da aplicação do operador AND_I (de T_0 a T_4) descrevendo todos os coeficientes (valores de memória) não nulos do total de ($2^6 = 64$) registrados que compõem a base computacional, está apresentada nas colunas da Tabela 1. Em especial, salienta-se que a medida resulta em um estado adicional (T_5), brevemente descrito em equações anteriores, Eq.(80) e Eq.(84).

Nesta descrição, verifica-se facilmente que o estado quântico descrito pela Eq.(80) corresponde a soma dos coeficientes dos registradores que contém $|1\rangle$ no quinto qubit, na coluna T_4 . De forma análoga, a expansão da Eq.(84) é dada pela soma dos coeficientes dos registradores que contém $|0\rangle$ no quinto qubit, da mesma coluna T_4 .

Tabela 1: Evolução temporal dos estados do operador AND_I

Memória	$T0$	$T1$	$T2$	$T3$	$T4$
$\sqrt{(1-x1)} \cdot \sqrt{(1-x2)} \cdot \sqrt{(1-y1)} \cdot \sqrt{(1-y2)}$	000000	000000	010100	010101	000000
$\sqrt{(1-x1)} \cdot \sqrt{(1-x2)} \cdot \sqrt{(1-y1)} \cdot \sqrt{y2}$	000100	000100	010000	010000	000101
$\sqrt{(1-x1)} \cdot \sqrt{(1-x2)} \cdot \sqrt{y1} \cdot \sqrt{(1-y2)}$	001000	001000	011100	011101	001000
$\sqrt{(1-x1)} \cdot \sqrt{(1-x2)} \cdot \sqrt{y1} \cdot \sqrt{y2}$	001100	001100	011000	011000	001101
$\sqrt{(1-x1)} \cdot \sqrt{x2} \cdot \sqrt{(1-y1)} \cdot \sqrt{(1-y2)}$	010000	010000	000100	000100	010001
$\sqrt{(1-x1)} \cdot \sqrt{x2} \cdot \sqrt{(1-y1)} \cdot \sqrt{y2}$	010100	010100	000000	000000	010101
$\sqrt{(1-x1)} \cdot \sqrt{x2} \cdot \sqrt{y1} \cdot \sqrt{(1-y2)}$	011000	011000	001100	001100	011001
$\sqrt{(1-x1)} \cdot \sqrt{x2} \cdot \sqrt{y1} \cdot \sqrt{y2}$	011100	011100	001000	001000	011101
$\sqrt{x1} \cdot \sqrt{(1-x2)} \cdot \sqrt{(1-y1)} \cdot \sqrt{(1-y2)}$	100000	100000	110100	110101	100000
$\sqrt{x1} \cdot \sqrt{(1-x2)} \cdot \sqrt{(1-y1)} \cdot \sqrt{y2}$	100100	100100	110000	110000	100101
$\sqrt{x1} \cdot \sqrt{(1-x2)} \cdot \sqrt{y1} \cdot \sqrt{(1-y2)}$	101000	101010	111110	111111	101010
$\sqrt{x1} \cdot \sqrt{(1-x2)} \cdot \sqrt{y1} \cdot \sqrt{y2}$	101100	101110	111010	111010	101111
$\sqrt{x1} \cdot \sqrt{x2} \cdot \sqrt{(1-y1)} \cdot \sqrt{(1-y2)}$	110000	110000	100100	100100	110001
$\sqrt{x1} \cdot \sqrt{x2} \cdot \sqrt{(1-y1)} \cdot \sqrt{y2}$	110100	110100	100000	100000	110101
$\sqrt{x1} \cdot \sqrt{x2} \cdot \sqrt{y1} \cdot \sqrt{(1-y2)}$	111000	111010	101110	101110	111011
$\sqrt{x1} \cdot \sqrt{x2} \cdot \sqrt{y1} \cdot \sqrt{y2}$	111100	111110	101010	101010	111111

5.4 Operação de União entre CFI via Operadores da CQ

Consideram-se os CFIs A_I e B_I , ambos definidos pelas funções de pertinência e não-pertinência $\mu_{A_I}, \nu_{A_I} : \mathcal{X} \rightarrow \tilde{U}$, sendo $\mu_{A_I}(x) = x_1$, $\nu_{A_I}(x) = x_2$ e $\mu_{B_I}(x) = y_1$, $\nu_{B_I}(x) = y_2$ para cada $x \in \mathcal{X}$ onde $(|S_{\mu_{A_I}}\rangle, |S_{\nu_{A_I}}\rangle)$, $(|S_{\mu_{B_I}}\rangle, |S_{\nu_{B_I}}\rangle)$ e os pares de registradores quânticos dados pelas Eqs. (70) e (71), representando os GP e GNP de um elemento $x_i \in \mathcal{X}$ referentes aos CFIs A_I e B_I , respectivamente.

A **união entre os CFIs A_I e B_I** ($A_I \cup B_I$) é modelado pelo operador OR_I considerando os pares de registradores $(|S_{\mu_{A_I}}\rangle, |S_{\nu_{A_I}}\rangle)$, $(|S_{\mu_{B_I}}\rangle, |S_{\nu_{B_I}}\rangle)$ e $(|0\rangle, |0\rangle)$:

$$|S_{A_I \cup B_I}\rangle = OR_I \left(|S_{\mu_{A_I}}\rangle, |S_{\nu_{A_I}}\rangle, |S_{\mu_{B_I}}\rangle, |S_{\nu_{B_I}}\rangle, |0\rangle, |0\rangle \right). \quad (87)$$

As propriedades de linearidade e distributividade do protudo tensorial preservam a representabilidade do conectivo fuzzy intuicionista OR_I , ou seja, cada CIFIC $|S_{A_I \cup B_I}\rangle$ é definido por pares de registradores $(|S_{\mu_{A_I}}\rangle, |S_{\nu_{A_I}}\rangle)$, sendo cada componente correspondendo às relações de pertinência e a não-pertinência, respectivamente.

O próximo teorema provê a expressão para representação do operador de união entre os CFIs A_I e B_I .

Teorema 3. *Sejam $(|S_{\mu_{A_I}}\rangle, |S_{\nu_{A_I}}\rangle)$, $(|S_{\mu_{B_I}}\rangle, |S_{\nu_{B_I}}\rangle)$ os pares de registradores quânticos dados pelas Eqs. (70) e (71). A expressão para interpretação do operador de união entre os CFIs A_I e B_I é dada pelo par de registradores $(|S_{\mu_{A_I \cup B_I}}\rangle, |S_{\nu_{A_I \cup B_I}}\rangle)$ cujos componentes são definidos pelas seguintes expressões:*

$$|S_{\mu_{A_I \cup B_I}}\rangle = M_1^5 \circ OR^{1,3,5} \left(|S_{\mu_{A_I}}\rangle, |S_{\nu_{A_I}}\rangle, |S_{\mu_{B_I}}\rangle, |S_{\nu_{B_I}}\rangle, |0\rangle, |0\rangle \right); \quad (88)$$

$$|S_{\nu_{A_I \cup B_I}}\rangle = M_1^6 \circ AND^{2,4,6} \left(|S_{\mu_{A_I}}\rangle, |S_{\nu_{A_I}}\rangle, |S_{\mu_{B_I}}\rangle, |S_{\nu_{B_I}}\rangle, |0\rangle, |0\rangle \right). \quad (89)$$

Considerando os respectivas CFIs complementares, tem-se que:

$$|S_{\mu_{(A_I \cup B_I)'}}\rangle = M_0^5 \circ OR^{1,3,5} \left(|S_{\mu_{A_I}}\rangle, |S_{\nu_{A_I}}\rangle, |S_{\mu_{B_I}}\rangle, |S_{\nu_{B_I}}\rangle, |0\rangle, |0\rangle \right); \quad (90)$$

$$|S_{\nu_{(A_I \cup B_I)'}}\rangle = M_0^6 \circ AND^{2,4,6} \left(|S_{\mu_{A_I}}\rangle, |S_{\nu_{A_I}}\rangle, |S_{\mu_{B_I}}\rangle, |S_{\nu_{B_I}}\rangle, |0\rangle, |0\rangle \right). \quad (91)$$

Proof. Na sequência, consideram-se os operadores fuzzy das Eqs.(58) e (59).

(i) Seja o operador $OR^{1,3,5}$ expresso através da composição dos operadores: $NOT^{1,3}$,

Toffoli $T_{1,3}^5$ e *NOT*⁵ (negando somente o quinto qubit). Então, tem-se que:

$$\begin{aligned}
& OR^{1,3,5} \left(|S_{\mu_{A_I}}\rangle, |S_{\nu_{A_I}}\rangle, |S_{\mu_{B_I}}\rangle, |S_{\nu_{B_I}}\rangle, |0\rangle, |0\rangle \right) = \\
& = NOT^{1,3,5} \circ T^{1,3,5} \circ NOT^{1,3} \left(|S_{\mu_{A_I}}\rangle, |S_{\nu_{A_I}}\rangle, |S_{\mu_{B_I}}\rangle, |S_{\nu_{B_I}}\rangle, |0\rangle, |0\rangle \right) \\
& = NOT^{1,3,5} \circ T^{1,3,5} \left(NOT|S_{\mu_{A_I}}\rangle, |S_{\nu_{A_I}}\rangle, NOT|S_{\mu_{B_I}}\rangle, |S_{\nu_{B_I}}\rangle, NOT|0\rangle, |0\rangle \right) \\
& = \left((\sqrt{1-x_1}|1\rangle \otimes (\sqrt{x_2}|1\rangle + \sqrt{1-x_2}|0\rangle)) \otimes (\sqrt{1-y_1}|1\rangle \otimes (\sqrt{1-y_2}|0\rangle + \sqrt{y_2}|1\rangle)) \right) \otimes |00\rangle \\
& + \left[\left((\sqrt{1-x_1}|1\rangle) \otimes (\sqrt{x_2}|1\rangle + \sqrt{1-x_2}|0\rangle) \otimes (\sqrt{y_1}|0\rangle) \otimes (\sqrt{1-y_2}|0\rangle + \sqrt{y_2}|1\rangle) \right) \right. \\
& + \left((\sqrt{x_1}|0\rangle) \otimes (\sqrt{x_2}|1\rangle + \sqrt{1-x_2}|0\rangle) \otimes (\sqrt{y_1}|0\rangle) \otimes (\sqrt{1-y_2}|0\rangle + \sqrt{y_2}|1\rangle) \right) \\
& + \left. \left((\sqrt{x_1}|0\rangle) \otimes (\sqrt{x_2}|1\rangle + \sqrt{1-x_2}|0\rangle) \otimes (\sqrt{1-y_1}|1\rangle \otimes (\sqrt{1-y_2}|0\rangle + \sqrt{y_2}|1\rangle)) \right) \right] \otimes |10\rangle \quad (92)
\end{aligned}$$

Portanto, executando o operador de medida M_1^5 no estado quântico da Eq. (92), ou seja, sobre o quinto *qubit* no estado $|1\rangle$, tem-se o registrador de saída:

$$\begin{aligned}
& |S_{\mu_{A_I \cup B_I}}\rangle = \\
& = \sqrt{x_1(1-x_2)y_1y_2}|000110\rangle + \sqrt{(1-x_1)(1-x_2)(y_1)(1-y_2)}|100010\rangle \\
& + \sqrt{(x_1)(1-x_2)(1-y_1)(1-y_2)}|001010\rangle + \sqrt{(x_1)(1-x_2)(y_1)(1-y_2)}|000010\rangle \\
& + \sqrt{x_1x_2y_1(1-y_2)}|010010\rangle + \sqrt{(1-x_1)(1-x_2)y_1y_2}|100110\rangle \\
& + \sqrt{(1-x_1)x_2y_1(1-y_2)}|110010\rangle + \sqrt{(1-x_1)x_2y_1y_2}|110110\rangle \\
& + \sqrt{x_1x_2y_1y_2}|010110\rangle + \sqrt{x_1(1-x_2)(1-y_1)y_2}|001110\rangle \\
& + \sqrt{x_1x_2(1-y_1)(1-y_2)}|011010\rangle + \sqrt{x_1x_2(1-y_1)y_2}|011110\rangle. \quad (93)
\end{aligned}$$

A correspondente probabilidade $p_{OR}(1) = x_1 + y_1 - x_1 \cdot y_1$, expressa o grau de pertinência de um elemento x_1 no *CFI* $A_I \cup B_I$, ou seja, $p_{OR}(1) = \mu_{A_I \cup B_I}(x_i)$.

De maneira similar, a medida M_0^5 no estado quântico da Eq. (92) retorna o registrador

$$\begin{aligned}
|S_{\nu_{(A_I \cup B_I)'}}\rangle = & \sqrt{(1-x_1)(1-x_2)(1-y_1)(1-y_2)}|101000\rangle + \sqrt{(1-x_1)(1-x_2)(1-y_1)y_2}|101100\rangle + \\
& \sqrt{(1-x_1)x_2(1-y_1)(1-y_2)}|111000\rangle + \sqrt{(1-x_1)x_2(1-y_1)y_2}|111100\rangle \quad (94)
\end{aligned}$$

com probabilidade $p_{OR}(0) = 1 - x_1 - y_1 + x_1 \cdot y_1$, expressando o complemento do grau de pertinência de x_1 no *CFI* $(A_I \cup B_I)'$, ou seja, $p_{OR}(0) = 1 - \mu_{A_I \cup B_I}(x_i)$ ou ainda $p_{OR}(0) = \mu_{(A_I \cup B_I)'}(x_i)$.

Assim, pelas Eqs.(93) e (94), tem-se que $|S_{\mu_{A_I \cup B_I}}\rangle = OR(|S_{\mu_{A_I}}\rangle, |S_{\mu_{B_I}}\rangle)$, ou ainda:

$$OR(|S_{\mu_{A_I}}\rangle, |S_{\mu_{B_I}}\rangle) = \sqrt{\mu_{A_I \cup B_I}(x_i)}|1\rangle + \sqrt{1 - \mu_{A_I \cup B_I}(x_i)}|0\rangle \quad (95)$$

(ii) Da mesma forma, pela Eq.(96) considera-se o operador $AND^{2,4,6}(|S_{\nu_{A_I}}\rangle, |S_{\nu_{B_I}}\rangle)$ através de cálculos similares:

$$\begin{aligned} & AND^{2,4,6}(|S_{\mu_{A_I}}\rangle, |S_{\nu_{A_I}}\rangle, |S_{\mu_{B_I}}\rangle, |S_{\nu_{B_I}}\rangle, |0\rangle, |0\rangle) = \\ & = T_{2,4}^6(|S_{\mu_{A_I}}\rangle, |S_{\nu_{A_I}}\rangle, |S_{\mu_{B_I}}\rangle, |S_{\nu_{B_I}}\rangle, |0\rangle, |0\rangle) \\ & = \left[\left((\sqrt{1-x_1}|0\rangle + \sqrt{x_1}|1\rangle) \otimes (\sqrt{1-x_2}|0\rangle + \sqrt{x_2}|1\rangle) \otimes (\sqrt{1-y_1}|0\rangle + \sqrt{y_1}|1\rangle) \otimes (\sqrt{1-y_2}|0\rangle + \sqrt{y_2}|1\rangle) \right) \right. \\ & \quad + \left((\sqrt{1-x_1}|0\rangle + \sqrt{x_1}|1\rangle) \otimes (\sqrt{1-x_2}|0\rangle + \sqrt{x_2}|1\rangle) \otimes (\sqrt{1-y_1}|0\rangle + \sqrt{y_1}|1\rangle) \otimes (\sqrt{y_2}|1\rangle) \right) \\ & \quad + \left((\sqrt{1-x_1}|0\rangle + \sqrt{x_1}|1\rangle) \otimes (\sqrt{x_2}|1\rangle) \otimes (\sqrt{1-y_1}|0\rangle + \sqrt{y_1}|1\rangle) \otimes (\sqrt{1-y_2}|0\rangle) \right) \\ & \quad \left. + \left((\sqrt{1-x_1}|0\rangle + \sqrt{x_1}|1\rangle) \otimes (\sqrt{x_2}|1\rangle) \otimes (\sqrt{1-y_1}|0\rangle + \sqrt{y_1}|1\rangle) \otimes (\sqrt{y_2}|1\rangle) \right) \right] \otimes |00\rangle \\ & \quad + \left[\left((\sqrt{1-x_1}|0\rangle + \sqrt{x_1}|1\rangle) \otimes (\sqrt{x_2}|1\rangle) \otimes (\sqrt{1-y_1}|0\rangle + \sqrt{y_1}|1\rangle) \otimes (\sqrt{y_2}|1\rangle) \right) \right] \otimes |01\rangle \quad (96) \end{aligned}$$

Portanto, executando uma operação de medida no estado quântico da Eq. (96), sobre o sexto *qubit* no estado ($|1\rangle$), tem-se que resulta no registrador de saída

$$\begin{aligned} |S_{\nu_{A_I \cup B_I}}\rangle &= \sqrt{(1-x_1)x_2y_1y_2}|011101\rangle + \sqrt{x_1x_2(1-y_1)y_2}|110101\rangle + \\ & \quad \sqrt{x_1x_2y_1y_2}|111101\rangle + \sqrt{(1-x_1)x_2(1-y_1)y_2}|010101\rangle \quad (97) \end{aligned}$$

com probabilidade $p_{AND}(1) = x_2 \cdot y_2$, provendo uma interpretação do grau de não-pertinência de $x \in \chi$ no *CFI* $A_I \cup B_I$, ou seja, $p_{AND}(1) = \nu_{A_I \cup B_I}(x_i)$.

Analogamente, um operação de medida no estado quântico da Eq. (92), sobre o sexto *qubit* no estado ($|0\rangle$) pela Eq. (96), retorna o estado

$$\begin{aligned} & |S_{\nu_{(A_I \cup B_I)'}}\rangle = \\ & = \sqrt{x_1(1-x_2)y_1y_2}|101100\rangle + \sqrt{(1-x_1)(1-x_2)(1-y_1)y_2}|000100\rangle \\ & \quad + \sqrt{(1-x_1)x_2(1-y_1)(1-y_2)}|010000\rangle + \sqrt{(1-x_1)(1-x_2)(1-y_1)(1-y_2)}|000000\rangle \\ & \quad + \sqrt{x_1x_2y_1(1-y_2)}|111000\rangle + \sqrt{(1-x_1)(1-x_2)y_1y_2}|001100\rangle \\ & \quad + \sqrt{(1-x_1)x_2y_1(1-y_2)}|011000\rangle + \sqrt{(1-x_1)(1-x_2)y_1(1-y_2)}|001000\rangle \\ & \quad + \sqrt{x_1(1-x_2)y_1(1-y_2)}|101000\rangle + \sqrt{x_1(1-x_2)(1-y_1)(1-y_2)}|100000\rangle \\ & \quad + \sqrt{x_1x_2(1-y_1)(1-y_2)}|110000\rangle + \sqrt{x_1(1-x_2)(1-y_1)y_2}|100100\rangle. \quad (98) \end{aligned}$$

com probabilidade $p_{AND}(0) = 1 - x_2 \cdot y_2$, provendo uma interpretação do complemento da não-pertinência de x_1 no *CFI* $(A_I \cup B_I)'$, ou seja, $p_{AND}(0) = 1 - \nu_{A_I \cup B_I}(x_i)$.

Assim, pelos resultados em Eqs.(93),(94) e Eqs.(97),(98), tem-se que

$$|S_{A_I \cup B_I}\rangle \equiv \left(\left(|S_{\mu_{A_I \cup B_I}}\rangle, |S_{\mu_{(A_I \cup B_I)'} }\rangle \right), \left(|S_{\nu_{A_I \cup B_I}}\rangle, |S_{\nu_{(A_I \cup B_I)'} }\rangle \right) \right).$$

Portanto teorema é verificado. $\square$

Os resultados descritos no Teorema mostram que a interpretação da LFI baseada em CQ, preserva a representabilidade dos conectivo fuzzzy intuicionista OR_I .

5.4.1 Circuito Quântico de Representação Gráfica do Operador OR_I

O operador OR_I dado pela Eq. (87) está graficamente descrito pelo circuito quântico da Figura 6. Neste contexto, ao final da execução, os quatro primeiros registradores retornam aos correspondentes valores no estado inicial.

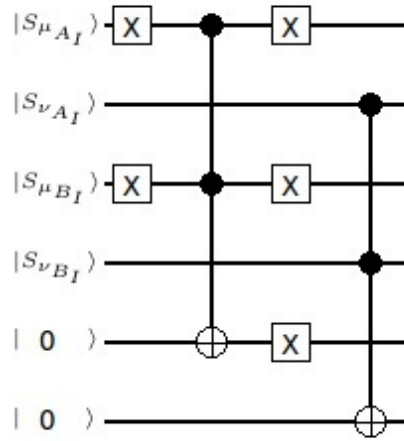


Figura 6: Circuito quântico referente ao operador OR_I

A expansão dos estados quânticos que interpretam a evolução temporal da aplicação do operador OR_I (de $T0$ a $T4$) descrevendo todos os coeficientes (valores de memória) não nulos do total de ($2^6 = 64$) registrados que compõem a base computacional, está apresentada nas colunas da Tabela 2. Em especial, salienta-se que a medida resulta em um estado adicional ($T5$), brevemente descrito em equações anteriores, Eq.(93) e Eq.(94).

Nesta descrição, verifica-se facilmente que o estado quântico descrito pela Eq.(93) corresponde a soma dos coeficientes dos registradores que contém $|1\rangle$ no quinto qubit, na coluna $T4$. De forma análoga, a expansão da Eq.(94) é dada pela soma dos coeficientes dos registradores que contém $|0\rangle$ no quinto qubit, da mesma coluna $T4$.

Tabela 2: Evolução temporal dos estados do operador OR_I

Memória	$T0$	$T1$	$T2$	$T3$	$T4$
$\sqrt{(1-x1)} \cdot \sqrt{(1-x2)} \cdot \sqrt{(1-y1)} \cdot \sqrt{(1-y2)}$	000000	101000	101010	000000	000000
$\sqrt{(1-x1)} \cdot \sqrt{(1-x2)} \cdot \sqrt{(1-y1)} \cdot \sqrt{y2}$	000100	101100	101110	000100	000100
$\sqrt{(1-x1)} \cdot \sqrt{(1-x2)} \cdot \sqrt{y1} \cdot \sqrt{(1-y2)}$	001000	100000	100000	001010	001010
$\sqrt{(1-x1)} \cdot \sqrt{(1-x2)} \cdot \sqrt{y1} \cdot \sqrt{y2}$	001100	100100	100100	001110	001110
$\sqrt{(1-x1)} \cdot \sqrt{x2} \cdot \sqrt{(1-y1)} \cdot \sqrt{(1-y2)}$	010000	111000	111010	010000	010000
$\sqrt{(1-x1)} \cdot \sqrt{x2} \cdot \sqrt{(1-y1)} \cdot \sqrt{y2}$	010100	111100	111110	010100	010101
$\sqrt{(1-x1)} \cdot \sqrt{x2} \cdot \sqrt{y1} \cdot \sqrt{(1-y2)}$	011000	110000	110000	011010	011010
$\sqrt{(1-x1)} \cdot \sqrt{x2} \cdot \sqrt{y1} \cdot \sqrt{y2}$	011100	110100	110100	011110	011111
$\sqrt{x1} \cdot \sqrt{(1-x2)} \cdot \sqrt{(1-y1)} \cdot \sqrt{(1-y2)}$	100000	001000	001000	100010	100010
$\sqrt{x1} \cdot \sqrt{(1-x2)} \cdot \sqrt{(1-y1)} \cdot \sqrt{y2}$	100100	001100	001100	100110	100110
$\sqrt{x1} \cdot \sqrt{(1-x2)} \cdot \sqrt{y1} \cdot \sqrt{(1-y2)}$	101000	000000	000000	101010	101010
$\sqrt{x1} \cdot \sqrt{(1-x2)} \cdot \sqrt{y1} \cdot \sqrt{y2}$	101100	000100	000100	101110	101110
$\sqrt{x1} \cdot \sqrt{x2} \cdot \sqrt{(1-y1)} \cdot \sqrt{(1-y2)}$	110000	011000	011000	110010	110010
$\sqrt{x1} \cdot \sqrt{x2} \cdot \sqrt{(1-y1)} \cdot \sqrt{y2}$	110100	011100	011100	110110	110111
$\sqrt{x1} \cdot \sqrt{x2} \cdot \sqrt{y1} \cdot \sqrt{(1-y2)}$	111000	010000	010000	111010	111010
$\sqrt{x1} \cdot \sqrt{x2} \cdot \sqrt{y1} \cdot \sqrt{y2}$	111100	010100	010100	111110	111111

5.5 Operação de Implicação entre CFI via CQ

Consideram-se os CFIs A_I e B_I , ambos definidos pelas funções de pertinência e não-pertinência $\mu_{A_I}, \nu_{A_I} : \mathcal{X} \rightarrow \tilde{U}$, sendo $\mu_{A_I}(x) = x_1$, $\nu_{A_I}(x) = x_2$ e $\mu_{B_I}(x) = y_1$, $\nu_{B_I}(x) = y_2$ para cada $x \in \mathcal{X}$ onde $(|S_{\mu_{A_I}}\rangle, |S_{\nu_{A_I}}\rangle)$, $(|S_{\mu_{B_I}}\rangle, |S_{\nu_{B_I}}\rangle)$ e os pares de registradores quânticos dados pelas Eqs. (70) e (71), representando os GP e GNP de um elemento $x_i \in \mathcal{X}$ referentes aos CFIs A_I e B_I , respectivamente.

A implicação entre os CFIs A_I e B_I ($A_I \rightarrow B_I$) é modelado pelo operador IMP_I considerando os pares de registradores $(|S_{\mu_{A_I}}\rangle, |S_{\nu_{A_I}}\rangle)$, $(|S_{\mu_{B_I}}\rangle, |S_{\nu_{B_I}}\rangle)$ e $(|0\rangle, |0\rangle)$:

$$|S_{A_I \rightarrow B_I}\rangle = IMP_I \left(|S_{\mu_{A_I}}\rangle, |S_{\nu_{A_I}}\rangle, |S_{\mu_{B_I}}\rangle, |S_{\nu_{B_I}}\rangle, |0\rangle, |0\rangle \right). \quad (99)$$

As propriedades de linearidade e distributividade do produto tensorial preservam a representabilidade do conectivo fuzzy intuicionista IMP_I , ou seja, cada CIFIC $|S_{A_I \rightarrow B_I}\rangle$ é definido por pares de registradores $(|S_{\mu_{A_I}}\rangle, |S_{\nu_{A_I}}\rangle)$, sendo cada componente correspondendo às relações de pertinência e a não-pertinência, respectivamente.

O próximo teorema provê a expressão para representação do operador de união entre os CFIs A_I e B_I .

Teorema 4. *Sejam $(|S_{\mu_{A_I}}\rangle, |S_{\nu_{A_I}}\rangle)$, $(|S_{\mu_{B_I}}\rangle, |S_{\nu_{B_I}}\rangle)$ os pares de registradores quânticos dados pelas Eqs. (70) e (71). A expressão para interpretação do operador de união entre os CFIs A_I e B_I e dada pelo par de registradores $(|S_{\mu_{A_I \rightarrow B_I}}\rangle, |S_{\nu_{A_I \rightarrow B_I}}\rangle)$*

cujos componentes são definidos pelas seguintes expressões:

$$|S_{\mu_{A_I \rightarrow B_I}}\rangle = M_1^5 \circ OR^{2,3,5} \left(|S_{\mu_{A_I}}\rangle, |S_{\nu_{A_I}}\rangle, |S_{\mu_{B_I}}\rangle, |S_{\nu_{B_I}}\rangle, |0\rangle, |0\rangle \right); \quad (100)$$

$$|S_{\nu_{A_I \rightarrow B_I}}\rangle = M_1^6 \circ AND^{1,4,6} \left(|S_{\mu_{A_I}}\rangle, |S_{\nu_{A_I}}\rangle, |S_{\mu_{B_I}}\rangle, |S_{\nu_{B_I}}\rangle, |0\rangle, |0\rangle \right). \quad (101)$$

Considerando os respectivas CFIs complementares, tem-se que:

$$|S_{\mu_{(A_I \rightarrow B_I)'}}\rangle = M_0^5 \circ OR^{2,3,5} \left(|S_{\mu_{A_I}}\rangle, |S_{\nu_{A_I}}\rangle, |S_{\mu_{B_I}}\rangle, |S_{\nu_{B_I}}\rangle, |0\rangle, |0\rangle \right); \quad (102)$$

$$|S_{\nu_{(A_I \rightarrow B_I)'}}\rangle = M_0^6 \circ AND^{1,4,6} \left(|S_{\mu_{A_I}}\rangle, |S_{\nu_{A_I}}\rangle, |S_{\mu_{B_I}}\rangle, |S_{\nu_{B_I}}\rangle, |0\rangle, |0\rangle \right). \quad (103)$$

Proof. A seguir, consideram-se os operadores fuzzy das Eqs.(58) e (59).

(i) Seja o operador $OR^{2,3,5}$ expresso através da composição dos operadores: $NOT^{2,3}$, $Toffoli T_{2,3}^5$ e NOT^5 (negando somente o quinto qubit). Então, tem-se que:

$$\begin{aligned} & OR^{2,3,5} \left(|S_{\mu_{A_I}}\rangle, |S_{\nu_{A_I}}\rangle, |S_{\mu_{B_I}}\rangle, |S_{\nu_{B_I}}\rangle, |0\rangle, |0\rangle \right) = \\ & = NOT^{2,3,5} \circ T^{2,3,5} \circ NOT^{2,3} \left(|S_{\mu_{A_I}}\rangle, |S_{\nu_{A_I}}\rangle, |S_{\mu_{B_I}}\rangle, |S_{\nu_{B_I}}\rangle, |0\rangle, |0\rangle \right) \\ & = NOT^{2,3,5} \circ T^{2,3,5} \left(|S_{\mu_{A_I}}\rangle, NOT|S_{\nu_{A_I}}\rangle, NOT|S_{\mu_{B_I}}\rangle, |S_{\nu_{B_I}}\rangle, |0\rangle, |0\rangle \right) \\ & = \left((\sqrt{1-x_1}|0\rangle + \sqrt{x_1}|1\rangle) \otimes (\sqrt{1-x_2}|1\rangle) \otimes (\sqrt{1-y_1}|1\rangle) \otimes (\sqrt{y_2}|1\rangle + \sqrt{1-y_2}|0\rangle) \right) \otimes |00\rangle \\ & \quad + \left[\left((\sqrt{1-x_1}|0\rangle + \sqrt{x_1}|1\rangle) \otimes (\sqrt{1-x_2}|1\rangle) \otimes (\sqrt{y_1}|0\rangle) \otimes (\sqrt{y_2}|1\rangle + \sqrt{1-y_2}|0\rangle) \right) \right. \\ & \quad + \left((\sqrt{1-x_1}|0\rangle + \sqrt{x_1}|1\rangle) \otimes (\sqrt{x_2}|0\rangle) \otimes (\sqrt{1-y_1}|1\rangle) \otimes (\sqrt{y_2}|1\rangle + \sqrt{1-y_2}|0\rangle) \right) \\ & \quad \left. + \left((\sqrt{1-x_1}|0\rangle + \sqrt{x_1}|1\rangle) \otimes (\sqrt{x_2}|0\rangle) \otimes (\sqrt{y_1}|0\rangle) \otimes (\sqrt{y_2}|1\rangle + \sqrt{1-y_2}|0\rangle) \right) \right] \otimes |10\rangle. \quad (104) \end{aligned}$$

Portanto, executando o operador de medida M_1^5 no estado quântico da Eq. (104), ou seja, sobre o quinto *qubit* no estado $|1\rangle$, tem-se o registrador de saída:

$$\begin{aligned} & |S_{\mu_{A_I \rightarrow B_I}}\rangle = \\ & = \sqrt{(1-x_1)(1-x_2)y_1(1-y_2)}|001010\rangle + \sqrt{(1-x_1)(1-x_2)y_1y_2}|001110\rangle \\ & \quad + \sqrt{(1-x_1)x_2(1-y_1)(1-y_2)}|010010\rangle + \sqrt{(1-x_1)x_2(1-y_1)y_2}|010110\rangle \\ & \quad + \sqrt{(1-x_1)x_2y_1(1-y_2)}|011010\rangle + \sqrt{(1-x_1)x_2y_1y_2}|011110\rangle \\ & \quad + \sqrt{x_1x_2(1-y_1)(1-y_2)}|110010\rangle + \sqrt{x_1(1-x_2)y_1y_2}|101110\rangle \\ & \quad + \sqrt{x_1x_2(1-y_1)y_2}|110110\rangle + \sqrt{x_1x_2y_1(1-y_2)}|111010\rangle \\ & \quad + \sqrt{x_1x_2y_1y_2}|111110\rangle + \sqrt{x_1(1-x_2)y_1(1-y_2)}|101010\rangle. \quad (105) \end{aligned}$$

A correspondente probabilidade $p_{OR}(1) = x_2 + y_1 - x_2 \cdot y_1$, expressa o grau de pertinência de um elemento x_1 no CFI $A_I \rightarrow B_I$, ou seja, $p_{OR}(1) = \mu_{A_I \rightarrow B_I}(x_i)$.

De modo semelhante, a medida M_0^5 no estado quântico da Eq. (104) retorna o

registrador

$$|S_{\mu_{(A_I \rightarrow B_I)'}}\rangle = \sqrt{(1-x_1)(1-x_2)(1-y_1)(1-y_2)}|000000\rangle + \sqrt{(1-x_1)(1-x_2)(1-y_1)y_2}|000100\rangle + \\ \sqrt{(x_1)(1-x_2)(1-y_1)(1-y_2)}|100000\rangle + \sqrt{(x_1)(1-x_2)(1-y_1)y_2}|100100\rangle \quad (106)$$

com probabilidade $p_{OR}(0) = 1 - x_2 - y_1 + x_2 \cdot y_1$, expressando o complemento do grau de pertinência de x_1 no $CFI (A_I \rightarrow B_I)'$, ou seja, $p_{OR}(0) = 1 - \mu_{A_I \rightarrow B_I}(x_i)$ ou ainda $p_{OR}(0) = \mu_{(A_I \rightarrow B_I)'}(x_i)$.

Assim, pelas Eqs.(93) e (94), tem-se que $|S_{\mu_{A_I \rightarrow B_I}}\rangle = OR(|S_{\mu_{A_I}}\rangle, |S_{\mu_{B_I}}\rangle)$, ou ainda:

$$OR(|S_{\mu_{A_I}}\rangle, |S_{\mu_{B_I}}\rangle) = \sqrt{\mu_{A_I \rightarrow B_I}(x_i)}|1\rangle + \sqrt{1 - \mu_{A_I \rightarrow B_I}(x_i)}|0\rangle \quad (107)$$

(ii) Da mesma forma, considera-se o operador $AND^{1,4,6}(|S_{\nu_{A_I}}\rangle, |S_{\nu_{B_I}}\rangle)$ através de cálculos similares:

$$AND^{1,4,6}(|S_{\mu_{A_I}}\rangle, |S_{\nu_{A_I}}\rangle, |S_{\mu_{B_I}}\rangle, |S_{\nu_{B_I}}\rangle, |0\rangle, |0\rangle) = \\ = T_{1,4}^6(|S_{\mu_{A_I}}\rangle, |S_{\nu_{A_I}}\rangle, |S_{\mu_{B_I}}\rangle, |S_{\nu_{B_I}}\rangle, |0\rangle, |0\rangle) \\ = \left[\left(\sqrt{1-x_1}|0\rangle \otimes (\sqrt{1-x_2}|0\rangle + \sqrt{x_2}|1\rangle) \otimes (\sqrt{1-y_1}|0\rangle + \sqrt{y_1}|1\rangle) \otimes \sqrt{1-y_2}|0\rangle \right) \right. \\ + \left(\sqrt{1-x_1}|0\rangle \otimes (\sqrt{1-x_2}|0\rangle + \sqrt{x_2}|1\rangle) \otimes (\sqrt{1-y_1}|0\rangle + \sqrt{y_1}|1\rangle) \otimes \sqrt{y_2}|1\rangle \right) \\ + \left(\sqrt{x_1}|1\rangle \otimes (\sqrt{1-x_2}|0\rangle + \sqrt{x_2}|1\rangle) \otimes (\sqrt{1-y_1}|0\rangle + \sqrt{y_1}|1\rangle) \otimes \sqrt{1-y_2}|0\rangle \right) \\ \left. + \left(\sqrt{x_1}|1\rangle \otimes (\sqrt{1-x_2}|0\rangle + \sqrt{x_2}|1\rangle) \otimes (\sqrt{1-y_1}|0\rangle + \sqrt{y_1}|1\rangle) \otimes \sqrt{y_2}|1\rangle \right) \right] \otimes |00\rangle \\ + \left(\sqrt{x_1}|1\rangle \otimes (\sqrt{1-x_2}|0\rangle + \sqrt{x_2}|1\rangle) \otimes (\sqrt{1-y_1}|0\rangle + \sqrt{y_1}|1\rangle) \otimes \sqrt{y_2}|1\rangle \right) \otimes |01\rangle. \quad (108)$$

Portanto, executando uma operação de medida no estado quântico da Eq. (108), sobre o sexto *qubit* no estado ($|1\rangle$), tem-se que resulta no registrador de saída

$$|S_{\nu_{A_I \rightarrow B_I}}\rangle = \sqrt{x_1(1-x_2)y_1y_2}|101101\rangle + \sqrt{x_1(1-x_2)(1-y_1)y_2}|100101\rangle + \\ \sqrt{x_1x_2y_1y_2}|111101\rangle + \sqrt{x_1x_2(1-y_1)y_2}|110101\rangle \quad (109)$$

com probabilidade $p_{AND}(1) = x_1 \cdot y_2$, provendo uma interpretação do grau de não-pertinência de $x \in \chi$ no $CFI A_I \rightarrow B_I$, ou seja, $p_{AND}(1) = \nu_{A_I \rightarrow B_I}(x_i)$.

De modo parecido, um operação de medida no estado quântico da Eq. (108),

sobre o sexto *qubit* no estado $(|0\rangle)$, retorna o estado

$$\begin{aligned}
|S_{\nu_{(A_I \rightarrow B_I)'}}\rangle = & \\
= & \sqrt{(1-x_1)(1-x_2)(1-y_1)(1-y_2)}|000000\rangle + \sqrt{(1-x_1)(1-x_2)(1-y_1)y_2)}|000100\rangle \\
& + \sqrt{(1-x_1)(1-x_2)y_1(1-y_2)}|001000\rangle + \sqrt{(1-x_1)(1-x_2)y_1y_2)}|001100\rangle \\
& + \sqrt{(1-x_1)x_2(1-y_1)(1-y_2)}|010000\rangle + \sqrt{(1-x_1)x_2(1-y_1)y_2)}|010100\rangle \\
& + \sqrt{(1-x_1)x_2y_1(1-y_2)}|011000\rangle + \sqrt{x_1(1-x_2)(1-y_1)(1-y_2)}|100000\rangle \\
& + \sqrt{x_1x_2y_1(1-y_2)}|111000\rangle + \sqrt{x_1x_2(1-y_1)(1-y_2)}|110000\rangle \\
& + \sqrt{x_1(1-x_2)y_1(1-y_2)}|101000\rangle + \sqrt{(1-x_1)x_2y_1y_2)}|011100\rangle.
\end{aligned} \tag{110}$$

com probabilidade $p_{AND}(0) = 1 - x_1 \cdot y_2$, provendo uma interpretação do complemento da não-pertinência de x_1 no CFI $(A_I \rightarrow B_I)'$, ou seja, $p_{AND}(0) = 1 - \nu_{A_I \rightarrow B_I}(x_i)$.

Assim, pelos resultados em Eqs.(93),(94) e Eqs.(97),(98), tem-se que

$$|S_{A_I \rightarrow B_I}\rangle \equiv \left(\left(|S_{\mu_{A_I \rightarrow B_I}}\rangle, |S_{\mu_{(A_I \rightarrow B_I)'}}\rangle \right), \left(|S_{\nu_{A_I \rightarrow B_I}}\rangle, |S_{\nu_{(A_I \rightarrow B_I)'}}\rangle \right) \right).$$

Portanto teorema é verificado. $\square$

Os resultados descritos no Teorema mostram que a interpretação da LFI baseada em CQ, preserva a representabilidade dos conectivo fuzzy intuicionista IMP_I .

5.5.1 Circuito Quântico de Representação Gráfica do Operador IMP_I

O operador IMP_I dado pela Eq. (99) está graficamente descrito pelo circuito quântico da Figura 7. Neste contexto, ao final da execução, os quatro primeiros registradores retornam aos correspondentes valores no estado inicial.

A expansão dos estados quânticos que interpretam a evolução temporal da aplicação do operador IMP_I (de $T0$ a $T4$) descrevendo todos os coeficientes (valores de memória) não nulos do total de $(2^6 = 64)$ registrados que compõem a base computacional, está apresentada nas colunas da Tabela 2. Em especial, salienta-se que a medida resulta em um estado adicional ($T5$), brevemente descrito em equações anteriores, Eq.(105) e Eq.(106).

Nesta descrição, verifica-se facilmente que o estado quântico descrito pela Eq.(105) corresponde a soma dos coeficientes dos registradores que contém $|1\rangle$ no quinto qubit, na coluna $T4$. De forma análoga, a expansão da Eq.(106) é dada pela soma dos coeficientes dos registradores que contém $|0\rangle$ no quinto qubit, da mesma coluna $T4$.

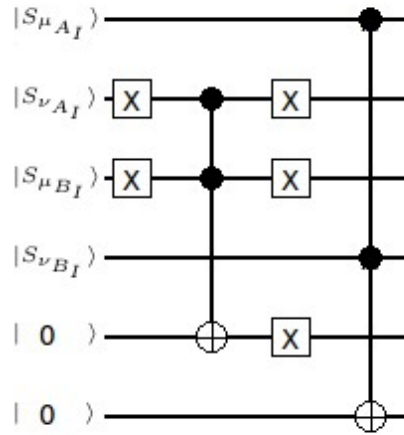


Figura 7: Circuito quântico referente ao operador IMP_I

Tabela 3: Evolução temporal dos estados do operador IMP_I

Memória	T0	T1	T2	T3	T4
$\sqrt{(1-x_1)} \cdot \sqrt{(1-x_2)} \cdot \sqrt{(1-y_1)} \cdot \sqrt{(1-y_2)}$	000000	011000	011010	000000	000000
$\sqrt{(1-x_1)} \cdot \sqrt{(1-x_2)} \cdot \sqrt{(1-y_1)} \cdot \sqrt{y_2}$	000100	011100	011110	000100	000100
$\sqrt{(1-x_1)} \cdot \sqrt{(1-x_2)} \cdot \sqrt{y_1} \cdot \sqrt{(1-y_2)}$	001000	010000	010000	001010	001010
$\sqrt{(1-x_1)} \cdot \sqrt{(1-x_2)} \cdot \sqrt{y_1} \cdot \sqrt{y_2}$	001100	010100	010100	001110	001110
$\sqrt{(1-x_1)} \cdot \sqrt{x_2} \cdot \sqrt{(1-y_1)} \cdot \sqrt{(1-y_2)}$	010000	001000	001000	010010	010010
$\sqrt{(1-x_1)} \cdot \sqrt{x_2} \cdot \sqrt{(1-y_1)} \cdot \sqrt{y_2}$	010100	001100	001100	010110	010110
$\sqrt{(1-x_1)} \cdot \sqrt{x_2} \cdot \sqrt{y_1} \cdot \sqrt{(1-y_2)}$	011000	000000	000000	011010	011010
$\sqrt{(1-x_1)} \cdot \sqrt{x_2} \cdot \sqrt{y_1} \cdot \sqrt{y_2}$	011100	000100	000100	011110	011110
$\sqrt{x_1} \cdot \sqrt{(1-x_2)} \cdot \sqrt{(1-y_1)} \cdot \sqrt{(1-y_2)}$	100000	111000	111010	100000	100000
$\sqrt{x_1} \cdot \sqrt{(1-x_2)} \cdot \sqrt{(1-y_1)} \cdot \sqrt{y_2}$	100100	111100	111110	100100	100101
$\sqrt{x_1} \cdot \sqrt{(1-x_2)} \cdot \sqrt{y_1} \cdot \sqrt{(1-y_2)}$	101000	110000	110000	101010	101010
$\sqrt{x_1} \cdot \sqrt{(1-x_2)} \cdot \sqrt{y_1} \cdot \sqrt{y_2}$	101100	110100	110100	101110	101111
$\sqrt{x_1} \cdot \sqrt{x_2} \cdot \sqrt{(1-y_1)} \cdot \sqrt{(1-y_2)}$	110000	101000	101000	110010	110010
$\sqrt{x_1} \cdot \sqrt{x_2} \cdot \sqrt{(1-y_1)} \cdot \sqrt{y_2}$	110100	101100	101100	110110	110111
$\sqrt{x_1} \cdot \sqrt{x_2} \cdot \sqrt{y_1} \cdot \sqrt{(1-y_2)}$	111000	100000	100000	111010	111010
$\sqrt{x_1} \cdot \sqrt{x_2} \cdot \sqrt{y_1} \cdot \sqrt{y_2}$	111100	100100	100100	111110	111111

5.6 Coimplicação entre CFI via CQ

Consideram-se os CFIs A_I e B_I , ambos definidos pelas funções de pertinência e não-pertinência $\mu_{A_I}, \nu_{A_I} : \mathcal{X} \rightarrow \tilde{U}$, sendo $\mu_{A_I}(x) = x_1$, $\nu_{A_I}(x) = x_2$ e $\mu_{B_I}(x) = y_1$, $\nu_{B_I}(x) = y_2$ para cada $x \in \mathcal{X}$ onde $(|S_{\mu_{A_I}}\rangle, |S_{\nu_{A_I}}\rangle)$, $(|S_{\mu_{B_I}}\rangle, |S_{\nu_{B_I}}\rangle)$ e os pares de registradores quânticos dados pelas Eqs. (70) e (71), representando os GP e GNP de um elemento $x_i \in \mathcal{X}$ referentes aos CFIs A_I e B_I , respectivamente.

A coimplicação entre os CFIs A_I e B_I ($A_I \leftarrow B_I$) é modelado pelo operador

$COIMP_I$ descrito logo a seguir:

$$|S_{A_I \leftarrow B_I}\rangle = COIMP_I \left(|S_{\mu_{A_I}}\rangle, |S_{\nu_{A_I}}\rangle, |S_{\mu_{B_I}}\rangle, |S_{\nu_{B_I}}\rangle, |0\rangle, |0\rangle \right). \quad (111)$$

As propriedades de linearidade e distributividade do produto tensorial preservam a representabilidade do conectivo fuzzy intuicionista $COIMP_I$, ou seja, cada CIFC $|S_{A_I \leftarrow B_I}\rangle$ é definido por pares de registradores $\left(|S_{\mu_{A_I \leftarrow B_I}}\rangle, |S_{\nu_{A_I \leftarrow B_I}}\rangle \right)$, sendo cada componente correspondendo às relações de pertinência e a não-pertinência, respectivamente.

O próximo teorema provê a expressão para representação do operador de intersecção entre os CFIs A_I e B_I .

Teorema 5. *Sejam $\left(|S_{\mu_{A_I}}\rangle, |S_{\nu_{A_I}}\rangle \right), \left(|S_{\mu_{B_I}}\rangle, |S_{\nu_{B_I}}\rangle \right)$ os pares de registradores quânticos dados pelas Eqs. (70) e (71). A expressão para interpretação do operador de intersecção entre os CFIs A_I e B_I e dada pelo par de registradores $\left(|S_{\mu_{A_I \leftarrow B_I}}\rangle, |S_{\nu_{A_I \leftarrow B_I}}\rangle \right)$ cujos componentes são definidos pelas seguintes expressões:*

$$|S_{\mu_{A_I \leftarrow B_I}}\rangle = M_1^5 \circ AND^{2,3,5} \left(|S_{\mu_{A_I}}\rangle, |S_{\nu_{A_I}}\rangle, |S_{\mu_{B_I}}\rangle, |S_{\nu_{B_I}}\rangle, |0\rangle, |0\rangle \right); \quad (112)$$

$$|S_{\nu_{A_I \leftarrow B_I}}\rangle = M_1^6 \circ OR^{1,4,6} \left(|S_{\mu_{A_I}}\rangle, |S_{\nu_{A_I}}\rangle, |S_{\mu_{B_I}}\rangle, |S_{\nu_{B_I}}\rangle, |0\rangle, |0\rangle \right). \quad (113)$$

E, as correspondentes expressões para os CFIs complementares:

$$|S_{\mu_{(A_I \leftarrow B_I)'}}\rangle = M_0^5 \circ AND^{2,3,5} \left(|S_{\mu_{A_I}}\rangle, |S_{\nu_{A_I}}\rangle, |S_{\mu_{B_I}}\rangle, |S_{\nu_{B_I}}\rangle, |0\rangle, |0\rangle \right); \quad (114)$$

$$|S_{\nu_{(A_I \leftarrow B_I)'}}\rangle = M_0^6 \circ OR^{1,4,6} \left(|S_{\mu_{A_I}}\rangle, |S_{\nu_{A_I}}\rangle, |S_{\mu_{B_I}}\rangle, |S_{\nu_{B_I}}\rangle, |0\rangle, |0\rangle \right). \quad (115)$$

Proof. Na sequência, consideram-se os operadores fuzzy das Eqs.(58) e (59).

(i) Seja o operador $AND^{2,3,5}$ expresso através do operador *Toffoli* $T_{2,3}^5$. Então, tem-se que:

$$\begin{aligned} & AND^{2,3,5} \left(|S_{\mu_{A_I}}\rangle, |S_{\nu_{A_I}}\rangle, |S_{\mu_{B_I}}\rangle, |S_{\nu_{B_I}}\rangle, |0\rangle, |0\rangle \right) = \\ & = T^{2,3,5} \left(|S_{\mu_{A_I}}\rangle, |S_{\nu_{A_I}}\rangle, |S_{\mu_{B_I}}\rangle, |S_{\nu_{B_I}}\rangle, |0\rangle, |0\rangle \right) \\ & = \left[\left((\sqrt{1-x_1}|0\rangle + \sqrt{x_1}|1\rangle) \otimes (\sqrt{1-x_2}|0\rangle + \sqrt{x_2}|1\rangle) \otimes \sqrt{1-y_1}|0\rangle \otimes (\sqrt{1-y_2}|0\rangle + \sqrt{y_2}|1\rangle) \right) \right. \\ & \quad + \left((\sqrt{1-x_1}|0\rangle + \sqrt{x_1}|1\rangle) \otimes (\sqrt{1-x_2}|1\rangle) \otimes \sqrt{y_1}|1\rangle \otimes (\sqrt{1-y_2}|0\rangle + \sqrt{y_2}|1\rangle) \right) \\ & \quad + \left((\sqrt{1-x_1}|0\rangle + \sqrt{x_1}|1\rangle) \otimes (\sqrt{x_2}|0\rangle) \otimes \sqrt{1-y_1}|0\rangle \otimes (\sqrt{1-y_2}|0\rangle + \sqrt{y_2}|1\rangle) \right) \Big] \otimes |00\rangle \\ & \quad + \left((\sqrt{1-x_1}|0\rangle + \sqrt{x_1}|1\rangle) \otimes (\sqrt{x_2}|1\rangle) \otimes \sqrt{y_1}|1\rangle \otimes (\sqrt{1-y_2}|0\rangle + \sqrt{y_2}|1\rangle) \right) \otimes |10\rangle. \quad (116) \end{aligned}$$

Portanto, executando o operador de medida M_1^5 no estado quântico da Eq. (116),

ou seja, sobre o quinto *qubit* no estado $|1\rangle$, tem-se o registrador de saída:

$$|S_{\mu_{A_I \leftarrow B_I}}\rangle = \sqrt{(1-x_1)x_2y_1(1-y_2)}|011010\rangle + \sqrt{(1-x_1)x_2y_1y_2}|011110\rangle + \\ \sqrt{x_1x_2y_1(1-y_2)}|111010\rangle + \sqrt{x_1x_2y_1y_2}|111110\rangle \quad (117)$$

A correspondente probabilidade $p_{AND}(1) = x_2 \cdot y_1$, expressa o grau de pertinência de um elemento x_1 no *CFI* $A_I \leftarrow B_I$, ou seja, $p_{AND}(1) = \mu_{A_I \leftarrow B_I}(x_i)$.

Analogamente, a medida M_0^5 no estado quântico da Eq. (116) retorna o registrador:

$$|S_{\mu_{(A_I \leftarrow B_I)'}}\rangle = \\ = \sqrt{(1-x_1)(1-x_2)(1-y_1)(1-y_2)}|000000\rangle + \sqrt{(1-x_1)(1-x_2)(1-y_1)y_2}|000100\rangle \\ + \sqrt{(1-x_1)(1-x_2)y_1(1-y_2)}|001000\rangle + \sqrt{(1-x_1)(1-x_2)y_1y_2}|001100\rangle \\ + \sqrt{x_1(1-x_2)(1-y_1)(1-y_2)}|100000\rangle + \sqrt{x_1(1-x_2)(1-y_1)y_2}|100100\rangle \\ + \sqrt{x_1(1-x_2)y_1(1-y_2)}|101000\rangle + \sqrt{x_1(1-x_2)y_1y_2}|101100\rangle \\ + \sqrt{x_1x_2(1-y_1)(1-y_2)}|110000\rangle + \sqrt{x_1x_2(1-y_1)y_2}|110100\rangle \\ + \sqrt{(1-x_1)x_2(1-y_1)(1-y_2)}|010000\rangle + \sqrt{(1-x_1)x_2(1-y_1)y_2}|010100\rangle. \quad (118)$$

com probabilidade $p_{AND}(0) = 1 - x_2 \cdot y_1$, expressando o complemento do grau de pertinência de x_1 no *CFI* $(A_I \leftarrow B_I)'$, ou seja, $p_{AND}(0) = 1 - \mu_{A_I \leftarrow B_I}(x_i)$ ou ainda $p_{AND}(0) = \mu_{(A_I \leftarrow B_I)'}(x_i)$.

Assim, pelas Eqs.(93) e (94), tem-se que $|S_{\mu_{A_I \leftarrow B_I}}\rangle = AND(|S_{\mu_{A_I}}\rangle, |S_{\mu_{B_I}}\rangle)$, ou ainda:

$$AND(|S_{\mu_{A_I}}\rangle, |S_{\mu_{B_I}}\rangle) = \sqrt{\mu_{A_I \leftarrow B_I}(x_i)}|1\rangle + \sqrt{1 - \mu_{A_I \leftarrow B_I}(x_i)}|0\rangle \quad (119)$$

- (ii) Da mesma forma, pela Eq.(88) considera-se o operador $OR^{1,4,6}(|S_{\nu_{A_I}}\rangle, |S_{\nu_{B_I}}\rangle)$ através da composição dos operadores: $NOT^{1,4}$, *Toffoli* $T_{1,4}^6$ e $NOT^{1,4,6}$ (negando

somente o sexto qubit). Entao, tem-se que:

$$\begin{aligned}
& OR^{1,4,6} \left(|S_{\mu_{A_I}}\rangle, |S_{\nu_{A_I}}\rangle, |S_{\mu_{B_I}}\rangle, |S_{\nu_{B_I}}\rangle, |0\rangle, |0\rangle \right) = \\
& = NOT^{1,4,6} \circ T^{1,4,6} \circ NOT^{1,4} \left(|S_{\mu_{A_I}}\rangle, |S_{\nu_{A_I}}\rangle, |S_{\mu_{B_I}}\rangle, |S_{\nu_{B_I}}\rangle, |0\rangle, |0\rangle \right) \\
& = NOT^{1,4,6} \circ T^{1,4,6} \left(NOT|S_{\mu_{A_I}}\rangle, |S_{\nu_{A_I}}\rangle, |S_{\mu_{B_I}}\rangle, NOT|S_{\nu_{B_I}}\rangle, |0\rangle, NOT|0\rangle \right) \\
& = \left((\sqrt{1-x_1}|1\rangle) \otimes (\sqrt{1-x_2}|0\rangle + \sqrt{x_2}|1\rangle) \otimes (\sqrt{1-y_1}|0\rangle + \sqrt{y_1}|1\rangle) \otimes \sqrt{1-y_2}|1\rangle \right) \otimes |00\rangle \\
& \quad + \left[\left((\sqrt{1-x_1}|1\rangle) \otimes (\sqrt{1-x_2}|0\rangle + \sqrt{x_2}|1\rangle) \otimes (\sqrt{1-y_1}|0\rangle + \sqrt{y_1}|1\rangle) \otimes \sqrt{y_2}|0\rangle \right) \right. \\
& \quad + \left((\sqrt{x_1}|0\rangle) \otimes (\sqrt{1-x_2}|0\rangle + \sqrt{x_2}|1\rangle) \otimes (\sqrt{1-y_1}|0\rangle + \sqrt{y_1}|1\rangle) \otimes \sqrt{1-y_2}|1\rangle \right) \\
& \quad \left. + \left((\sqrt{x_1}|0\rangle) \otimes (\sqrt{1-x_2}|0\rangle + \sqrt{x_2}|1\rangle) \otimes (\sqrt{1-y_1}|0\rangle + \sqrt{y_1}|1\rangle) \otimes \sqrt{y_2}|0\rangle \right) \right] \otimes |01\rangle. \quad (120)
\end{aligned}$$

Portanto, executando uma operação de medida no estado quântico da Eq. (120), sobre o sexto *qubit* no estado ($|1\rangle$), tem-se que resulta no registrador de saída:

$$\begin{aligned}
& |S_{\nu_{A_I \leftarrow B_I}}\rangle = \\
& = \sqrt{(1-x_1)(1-x_2)(1-y_1)y_2}|100001\rangle + \sqrt{(1-x_1)(1-x_2)y_1y_2}|101001\rangle \\
& \quad + \sqrt{(1-x_1)x_2(1-y_1)y_2}|110001\rangle + \sqrt{(1-x_1)x_2y_1y_2}|111001\rangle \\
& \quad + \sqrt{x_1(1-x_2)y_1(1-y_2)}|001101\rangle + \sqrt{x_1(1-x_2)y_1y_2}|001001\rangle \\
& \quad + \sqrt{x_1x_2(1-y_1)(1-y_2)}|010101\rangle + \sqrt{x_1x_2(1-y_1)y_2}|010001\rangle \\
& \quad + \sqrt{x_1x_2y_1y_2}|011001\rangle + \sqrt{x_1x_2y_1(1-y_2)}|011101\rangle \\
& \quad + \sqrt{x_1(1-x_2)(1-y_1)(1-y_2)}|000101\rangle + \sqrt{x_1(1-x_2)(1-y_1)y_2}|000001\rangle. \quad (121)
\end{aligned}$$

com probabilidade $p_{OR}(1) = x_1 + y_2 - x_1 \cdot y_2$, provendo uma interpretação do grau de não-pertinência de $x \in \chi$ no CFI $A_I \leftarrow B_I$, ou seja, $p_{OR}(1) = \nu_{A_I \leftarrow B_I}(x_i)$.

Analogamente, um operação de medida no estado quântico da Eq. (120), sobre o sexto *qubit* no estado ($|0\rangle$) retorna o estado:

$$\begin{aligned}
|S_{\nu_{(A_I \leftarrow B_I)'}}\rangle = & \sqrt{(1-x_1)x_2(1-y_1)(1-y_2)}|110100\rangle + \sqrt{(1-x_1)x_2y_1(1-y_2)}|111100\rangle + \\
& \sqrt{(1-x_1)(1-x_2)(1-y_1)(1-y_2)}|100100\rangle + \sqrt{(1-x_1)(1-x_2)y_1(1-y_2)}|101100\rangle
\end{aligned} \quad (122)$$

com probabilidade $p_{OR}(0) = 1 - x_1 - y_2 + x_1 \cdot y_2$, provendo uma interpretação do complemento da não-pertinência de x_1 no CFI $(A_I \leftarrow B_I)'$, ou seja, $p_{OR}(0) = 1 - \nu_{A_I \leftarrow B_I}(x_i)$.

Assim, pelos resultados em Eqs.(93),(94) e Eqs.(97),(98), tem-se que

$$|S_{A_I \leftarrow B_I}\rangle \equiv \left(\left(|S_{\mu_{A_I \leftarrow B_I}}\rangle, |S_{\mu_{(A_I \leftarrow B_I)'} }\rangle \right), \left(|S_{\nu_{A_I \leftarrow B_I}}\rangle, |S_{\nu_{(A_I \leftarrow B_I)'} }\rangle \right) \right).$$

Portanto teorema é verificado. $\square$

Os resultados descritos no Teorema mostram que a interpretação da LFI baseada em CQ, preserva a representabilidade dos conectivo fuzzyzzy intuicionista $COIMP_I$.

5.6.1 Circuito Quântico de Representação Gráfica do Operador $COIMP_I$

O operador $COIMP_I$ dado pela Eq. (111) está graficamente descrito pelo circuito quântico da Figura 8. Neste contexto, ao final da execução, os quatro primeiros registradores retornam aos correspondentes valores no estado inicial.

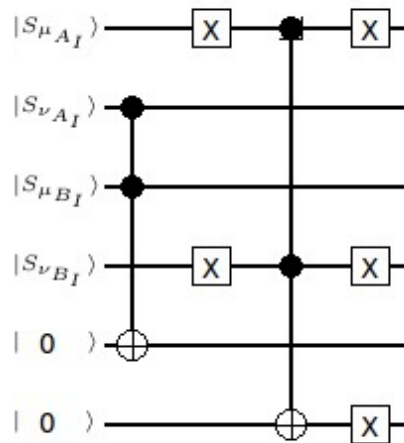


Figura 8: Circuito quântico referente ao operador $COIMP_I$

A expansão dos estados quânticos que interpretam a evolução temporal da aplicação do operador $COIMP_I$ (de T_0 a T_4) descrevendo todos os coeficientes (valores de memória) não nulos do total de $(2^6 = 64)$ registrados que compõem a base computacional, está apresentada nas colunas da Tabela 1. Em especial, salienta-se que a medida resulta em um estado adicional (T_5), brevemente descrito em equações anteriores, Eq.(117) e Eq.(118).

Nesta descrição, verifica-se facilmente que o estado quântico descrito pela Eq.(117) corresponde a soma dos coeficientes dos registradores que contém $|1\rangle$ no quinto qubit, na coluna T_4 . De forma análoga, a expansão da Eq.(118) é dada pela soma dos coeficientes dos registradores que contém $|0\rangle$ no quinto qubit, da mesma coluna T_4 .

Tabela 4: Evolução temporal dos estados do operador $COIMP_I$

Memória	T_0	T_1	T_2	T_3	T_4
$\sqrt{(1-x_1)} \cdot \sqrt{(1-x_2)} \cdot \sqrt{(1-y_1)} \cdot \sqrt{(1-y_2)}$	000000	000000	100100	100101	000000
$\sqrt{(1-x_1)} \cdot \sqrt{(1-x_2)} \cdot \sqrt{(1-y_1)} \cdot \sqrt{y_2}$	000100	000100	100000	100000	000101
$\sqrt{(1-x_1)} \cdot \sqrt{(1-x_2)} \cdot \sqrt{y_1} \cdot \sqrt{(1-y_2)}$	001000	001000	101100	101101	001000
$\sqrt{(1-x_1)} \cdot \sqrt{(1-x_2)} \cdot \sqrt{y_1} \cdot \sqrt{y_2}$	001100	001100	101000	101000	001101
$\sqrt{(1-x_1)} \cdot \sqrt{x_2} \cdot \sqrt{(1-y_1)} \cdot \sqrt{(1-y_2)}$	010000	010000	110100	110101	010000
$\sqrt{(1-x_1)} \cdot \sqrt{x_2} \cdot \sqrt{(1-y_1)} \cdot \sqrt{y_2}$	010100	010100	110000	110000	010101
$\sqrt{(1-x_1)} \cdot \sqrt{x_2} \cdot \sqrt{y_1} \cdot \sqrt{(1-y_2)}$	011000	011010	111110	111111	011010
$\sqrt{(1-x_1)} \cdot \sqrt{x_2} \cdot \sqrt{y_1} \cdot \sqrt{y_2}$	011100	011110	111010	111010	011111
$\sqrt{x_1} \cdot \sqrt{(1-x_2)} \cdot \sqrt{(1-y_1)} \cdot \sqrt{(1-y_2)}$	100000	100000	000100	000100	100001
$\sqrt{x_1} \cdot \sqrt{(1-x_2)} \cdot \sqrt{(1-y_1)} \cdot \sqrt{y_2}$	100100	100100	000000	000000	100101
$\sqrt{x_1} \cdot \sqrt{(1-x_2)} \cdot \sqrt{y_1} \cdot \sqrt{(1-y_2)}$	101000	101000	001100	001100	101001
$\sqrt{x_1} \cdot \sqrt{(1-x_2)} \cdot \sqrt{y_1} \cdot \sqrt{y_2}$	101100	101100	001000	001000	101101
$\sqrt{x_1} \cdot \sqrt{x_2} \cdot \sqrt{(1-y_1)} \cdot \sqrt{(1-y_2)}$	110000	110000	010100	010100	110001
$\sqrt{x_1} \cdot \sqrt{x_2} \cdot \sqrt{(1-y_1)} \cdot \sqrt{y_2}$	110100	110100	010000	010000	110101
$\sqrt{x_1} \cdot \sqrt{x_2} \cdot \sqrt{y_1} \cdot \sqrt{(1-y_2)}$	111000	111010	011110	011110	111011
$\sqrt{x_1} \cdot \sqrt{x_2} \cdot \sqrt{y_1} \cdot \sqrt{y_2}$	111100	111110	011010	011010	111111

5.7 Diferença entre CVI via CQ

Consideram-se os CFIs A_I e B_I , ambos definidos pelas funções de pertinência e não-pertinência $\mu_{A_I}, \nu_{A_I} : \mathcal{X} \rightarrow \tilde{U}$, sendo $\mu_{A_I}(x) = x_1$, $\nu_{A_I}(x) = x_2$ e $\mu_{B_I}(x) = y_1$, $\nu_{B_I}(x) = y_2$ para cada $x \in \mathcal{X}$ onde $(|S_{\mu_{A_I}}\rangle, |S_{\nu_{A_I}}\rangle), (|S_{\mu_{B_I}}\rangle, |S_{\nu_{B_I}}\rangle)$ e os pares de registradores quânticos dados pelas Eqs. (70) e (71), representando os GP e GNP de um elemento $x_i \in \mathcal{X}$ referentes aos CFIs A_I e B_I , respectivamente.

A diferença entre os CFIs A_I e B_I ($A_I - B_I$) é modelado pelo operador DIF_I descrito logo a seguir:

$$|S_{A_I-B_I}\rangle = DIF_I \left(|S_{\mu_{A_I}}\rangle, |S_{\nu_{A_I}}\rangle, |S_{\mu_{B_I}}\rangle, |S_{\nu_{B_I}}\rangle, |0\rangle, |0\rangle \right). \quad (123)$$

As propriedades de linearidade e distributividade do produto tensorial preservam a representabilidade do conectivo fuzzy intuicionista DIF_I , ou seja, cada CIFIC $|S_{A_I-B_I}\rangle$ é definido por pares de registradores $(|S_{\mu_{A_I-B_I}}\rangle, |S_{\nu_{A_I-B_I}}\rangle)$, sendo cada componente correspondendo às relações de pertinência e a não-pertinência, respectivamente.

O próximo teorema provê a expressão para representação do operador de intersecção entre os CFIs A_I e B_I .

Teorema 6. *Sejam $(|S_{\mu_{A_I}}\rangle, |S_{\nu_{A_I}}\rangle), (|S_{\mu_{B_I}}\rangle, |S_{\nu_{B_I}}\rangle)$ os pares de registradores quânticos dados pelas Eqs. (70) e (71). A expressão para interpretação do operador de intersecção entre os CFIs A_I e B_I é dada pelo par de registradores*

$(|S_{\mu_{A_I-B_I}}\rangle, |S_{\nu_{A_I-B_I}}\rangle)$ cujos componentes são definidos pelas seguintes expressões:

$$|S_{\mu_{A_I-B_I}}\rangle = M_1^5 \circ AND^{1,4,5} \left(|S_{\mu_{A_I}}\rangle, |S_{\nu_{A_I}}\rangle, |S_{\mu_{B_I}}\rangle, |S_{\nu_{B_I}}\rangle, |0\rangle, |0\rangle \right); \quad (124)$$

$$|S_{\nu_{A_I-B_I}}\rangle = M_1^6 \circ OR^{2,3,6} \left(|S_{\mu_{A_I}}\rangle, |S_{\nu_{A_I}}\rangle, |S_{\mu_{B_I}}\rangle, |S_{\nu_{B_I}}\rangle, |0\rangle, |0\rangle \right). \quad (125)$$

E, as correspondentes expressões para os CFIs complementares:

$$|S_{\mu_{(A_I-B_I)'}}\rangle = M_0^5 \circ AND^{1,4,5} \left(|S_{\mu_{A_I}}\rangle, |S_{\nu_{A_I}}\rangle, |S_{\mu_{B_I}}\rangle, |S_{\nu_{B_I}}\rangle, |0\rangle, |0\rangle \right); \quad (126)$$

$$|S_{\nu_{(A_I-B_I)'}}\rangle = M_0^6 \circ OR^{2,3,6} \left(|S_{\mu_{A_I}}\rangle, |S_{\nu_{A_I}}\rangle, |S_{\mu_{B_I}}\rangle, |S_{\nu_{B_I}}\rangle, |0\rangle, |0\rangle \right). \quad (127)$$

Proof. Na sequência, consideram-se os operadores fuzzy das Eqs.(58) e (59).

(i) Seja o operador $AND^{1,4,5}$ expresso através do operador *Toffoli* $T_{1,4}^5$. Então, tem-se que:

$$\begin{aligned} & AND^{1,4,5} \left(|S_{\mu_{A_I}}\rangle, |S_{\nu_{A_I}}\rangle, |S_{\mu_{B_I}}\rangle, |S_{\nu_{B_I}}\rangle, |0\rangle, |0\rangle \right) = \\ &= T_{1,4}^5 \left(|S_{\mu_{A_I}}\rangle, |S_{\nu_{A_I}}\rangle, |S_{\mu_{B_I}}\rangle, |S_{\nu_{B_I}}\rangle, |0\rangle, |0\rangle \right) \\ &= \left[\left(\sqrt{1-x_1}|0\rangle \otimes (\sqrt{1-x_2}|0\rangle + \sqrt{x_2}|1\rangle) \otimes (\sqrt{1-y_1}|0\rangle + \sqrt{y_1}|1\rangle) \otimes \sqrt{1-y_2}|0\rangle \right) \right. \\ &\quad + \left(\sqrt{1-x_1}|0\rangle \otimes (\sqrt{1-x_2}|0\rangle + \sqrt{x_2}|1\rangle) \otimes (\sqrt{1-y_1}|0\rangle + \sqrt{y_1}|1\rangle) \otimes \sqrt{y_2}|1\rangle \right) \\ &\quad + \left(\sqrt{x_1}|1\rangle \otimes (\sqrt{1-x_2}|0\rangle + \sqrt{x_2}|1\rangle) \otimes (\sqrt{1-y_1}|0\rangle + \sqrt{y_1}|1\rangle) \otimes \sqrt{1-y_2}|0\rangle \right) \Big] \otimes |00\rangle \\ &\quad + \left(\sqrt{x_1}|1\rangle \otimes (\sqrt{1-x_2}|0\rangle + \sqrt{x_2}|1\rangle) \otimes (\sqrt{1-y_1}|0\rangle + \sqrt{y_1}|1\rangle) \otimes \sqrt{y_2}|1\rangle \right) \otimes |10\rangle. \quad (128) \end{aligned}$$

Portanto, executando o operador de medida M_1^5 no estado quântico da Eq. (128), ou seja, sobre o quinto *qubit* no estado $|1\rangle$, tem-se o registrador de saída:

$$\begin{aligned} |S_{\mu_{A_I-B_I}}\rangle = & \sqrt{x_1(1-x_2)y_1y_2}|101110\rangle + \sqrt{x_1(1-x_2)(1-y_1)y_2}|100110\rangle + \\ & \sqrt{x_1x_2y_1y_2}|111110\rangle + \sqrt{x_1x_2(1-y_1)y_2}|110110\rangle \quad (129) \end{aligned}$$

A correspondente probabilidade $p_{AND}(1) = x_1 \cdot y_2$, expressa o grau de pertinência de um elemento x_1 no CFI $A_I - B_I$, ou seja, $p_{AND}(1) = \mu_{A_I-B_I}(x_i)$.

Analogamente, a medida M_0^5 no estado quântico da Eq. (128) retorna o registra-

dor:

$$\begin{aligned}
& |S_{\nu_{(A_I-B_I)'}}\rangle = \\
& = \sqrt{(1-x_1)(1-x_2)(1-y_1)(1-y_2)}|000000\rangle + \sqrt{(1-x_1)(1-x_2)(1-y_1)y_2)}|000100\rangle \\
& + \sqrt{(1-x_1)(1-x_2)y_1(1-y_2)}|001000\rangle + \sqrt{(1-x_1)(1-x_2)y_1y_2)}|001100\rangle \\
& + \sqrt{(1-x_1)x_2(1-y_1)(1-y_2)}|010000\rangle + \sqrt{(1-x_1)x_2(1-y_1)y_2)}|010100\rangle \\
& + \sqrt{(1-x_1)x_2y_1(1-y_2)}|011000\rangle + \sqrt{x_1(1-x_2)(1-y_1)(1-y_2)}|100000\rangle \\
& + \sqrt{x_1x_2y_1(1-y_2)}|111000\rangle + \sqrt{x_1x_2(1-y_1)(1-y_2)}|110000\rangle \\
& + \sqrt{x_1(1-x_2)y_1(1-y_2)}|101000\rangle + \sqrt{(1-x_1)x_2y_1y_2)}|011100\rangle. \tag{130}
\end{aligned}$$

com probabilidade $p_{AND}(0) = 1 - x_1 \cdot y_2$, expressando o complemento do grau de pertinência de x_1 no CFI $(A_I - B_I)'$, ou seja, $p_{AND}(0) = 1 - \mu_{A_I-B_I}(x_i)$ ou ainda $p_{AND}(0) = \mu_{(A_I-B_I)'}(x_i)$.

Assim, pelas Eqs.(93) e (94), tem-se que $|S_{\mu_{A_I-B_I}}\rangle = AND(|S_{\mu_{A_I}}\rangle, |S_{\mu_{B_I}}\rangle)$, ou ainda:

$$AND(|S_{\mu_{A_I}}\rangle, |S_{\mu_{B_I}}\rangle) = \sqrt{\mu_{A_I-B_I}(x_i)}|1\rangle + \sqrt{1 - \mu_{A_I-B_I}(x_i)}|0\rangle \tag{131}$$

(ii) Da mesma forma, pela Eq.(88) considera-se o operador $OR^{2,3,6}(|S_{\nu_{A_I}}\rangle, |S_{\nu_{B_I}}\rangle)$ através da composição dos operadores: $NOT^{2,3}$, *Toffoli* $T_{2,3}^6$ e NOT^6 (negando somente o sexto qubit). Então, tem-se que:

$$\begin{aligned}
& OR^{2,3,6}(|S_{\mu_{A_I}}\rangle, |S_{\nu_{A_I}}\rangle, |S_{\mu_{B_I}}\rangle, |S_{\nu_{B_I}}\rangle, |0\rangle, |0\rangle) = \\
& = NOT^{2,3,6} \circ T^{2,3,6} \circ NOT^{2,3}(|S_{\mu_{A_I}}\rangle, |S_{\nu_{A_I}}\rangle, |S_{\mu_{B_I}}\rangle, |S_{\nu_{B_I}}\rangle, |0\rangle, |0\rangle) \\
& = NOT^{2,3,6} \circ T^{2,3,6}(|S_{\mu_{A_I}}\rangle, NOT|S_{\nu_{A_I}}\rangle, NOT|S_{\mu_{B_I}}\rangle, |S_{\nu_{B_I}}\rangle, |0\rangle, |0\rangle) \\
& = \left((\sqrt{1-x_1}|0\rangle + \sqrt{x_1}|1\rangle) \otimes (\sqrt{1-x_2}|1\rangle) \otimes (\sqrt{1-y_1}|1\rangle) \otimes (\sqrt{y_2}|1\rangle + \sqrt{1-y_2}|0\rangle) \right) \otimes |00\rangle \\
& + \left[\left((\sqrt{1-x_1}|0\rangle + \sqrt{x_1}|1\rangle) \otimes (\sqrt{1-x_2}|1\rangle) \otimes (\sqrt{y_1}|0\rangle) \otimes (\sqrt{y_2}|1\rangle + \sqrt{1-y_2}|0\rangle) \right) \right. \\
& + \left((\sqrt{1-x_1}|0\rangle + \sqrt{x_1}|1\rangle) \otimes (\sqrt{x_2}|0\rangle) \otimes (\sqrt{1-y_1}|1\rangle) \otimes (\sqrt{y_2}|1\rangle + \sqrt{1-y_2}|0\rangle) \right) \\
& \left. + \left((\sqrt{1-x_1}|0\rangle + \sqrt{x_1}|1\rangle) \otimes (\sqrt{x_2}|0\rangle) \otimes (\sqrt{y_1}|0\rangle) \otimes (\sqrt{y_2}|1\rangle + \sqrt{1-y_2}|0\rangle) \right) \right] \otimes |01\rangle. \tag{132}
\end{aligned}$$

Portanto, executando uma operação de medida no estado quântico da Eq. (132),

sobre o sexto *qubit* no estado ($|1\rangle$), tem-se que resulta no registrador de saída:

$$\begin{aligned}
 |S_{\nu_{A_I-B_I}}\rangle = & \sqrt{(1-x_1)(1-x_2)y_1(1-y_2)}|001001\rangle + \sqrt{(1-x_1)(1-x_2)y_1y_2}|001101\rangle \\
 & + \sqrt{(1-x_1)x_2(1-y_1)(1-y_2)}|010001\rangle + \sqrt{(1-x_1)x_2(1-y_1)y_2}|010101\rangle \\
 & + \sqrt{(1-x_1)x_2y_1(1-y_2)}|011001\rangle + \sqrt{(1-x_1)x_2y_1y_2}|101101\rangle \\
 & + \sqrt{x_1x_2(1-y_1)(1-y_2)}|110001\rangle + \sqrt{x_1(1-x_2)y_1y_2}|101101\rangle \\
 & + \sqrt{x_1x_2(1-y_1)y_2}|110101\rangle + \sqrt{x_1x_2y_1(1-y_2)}|111001\rangle \\
 & + \sqrt{x_1x_2y_1y_2}|111101\rangle + \sqrt{x_1(1-x_2)y_1(1-y_2)}|101001\rangle.
 \end{aligned} \tag{133}$$

com probabilidade $p_{OR}(1) = x_2 + y_1 - x_2 \cdot y_1$, provendo uma interpretação do grau de não-pertinência de $x \in \chi$ no CFI $A_I - B_I$, ou seja, $p_{OR}(1) = \nu_{A_I-B_I}(x_i)$.

Analogamente, uma operação de medida no estado quântico da Eq. (132), sobre o sexto *qubit* no estado ($|0\rangle$), retorna o estado:

$$\begin{aligned}
 |S_{\nu_{(A_I-B_I)'}}\rangle = & \sqrt{(1-x_1)(1-x_2)(1-y_1)(1-y_2)}|000000\rangle + \sqrt{(1-x_1)(1-x_2)(1-y_1)y_2}|000100\rangle + \\
 & \sqrt{(x_1)(1-x_2)(1-y_1)(1-y_2)}|100000\rangle + \sqrt{(x_1)(1-x_2)(1-y_1)y_2}|100100\rangle
 \end{aligned} \tag{134}$$

com probabilidade $p_{OR}(0) = 1 - x_2 - y_1 + x_2 \cdot y_1$, provendo uma interpretação do complemento da não-pertinência de x_1 no CFI $(A_I - B_I)'$, ou seja, $p_{OR}(0) = 1 - \nu_{A_I-B_I}(x_i)$.

Assim, pelos resultados em Eqs.(129),(130) e Eqs.(133),(134), tem-se que

$$|S_{A_I-B_I}\rangle \equiv \left(\left(|S_{\mu_{A_I-B_I}}\rangle, |S_{\mu_{(A_I-B_I)'}}\rangle \right), \left(|S_{\nu_{A_I-B_I}}\rangle, |S_{\nu_{(A_I-B_I)'}}\rangle \right) \right).$$

Portanto teorema é verificado. $\square$

Os resultados descritos no Teorema mostram que a interpretação da LFI baseada em CQ, preserva a representabilidade dos conectivo fuzzy intuicionista DIF_I .

5.7.1 Circuito Quântico de Representação Gráfica do Operador DIF_I

O operador DIF_I dado pela Eq. (123) está graficamente descrito pelo circuito quântico da Figura 9. Neste contexto, ao final da execução, os quatro primeiros registradores retornam aos correspondentes valores no estado inicial.

A expansão dos estados quânticos que interpretam a evolução temporal da aplicação do operador DIF_I (de T_0 a T_4) descrevendo todos os coeficientes (valores de memória) não nulos do total de ($2^6 = 64$) registrados que compõem a base

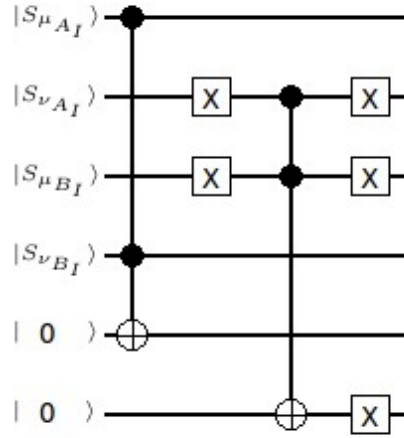


Figura 9: Circuito quântico referente ao operador DIF_I

computacional, está apresentada nas colunas da Tabela 1. Em especial, salienta-se que a medida resulta em um estado adicional ($T5$), brevemente descrito em equações anteriores, Eq.(128) e Eq.(129).

Nesta descrição, verifica-se facilmente que o estado quântico descrito pela Eq.(128) corresponde a soma dos coeficientes dos registradores que contém $|1\rangle$ no quinto qubit, na coluna $T4$. De forma análoga, a expansão da Eq.(129) é dada pela soma dos coeficientes dos registradores que contém $|0\rangle$ no quinto qubit, da mesma coluna $T4$.

5.8 Codiferença entre CFI via CQ

Consideram-se os CFIs A_I e B_I , ambos definidos pelas funções de pertinência e não-pertinência $\mu_{A_I}, \nu_{A_I} : \mathcal{X} \rightarrow \tilde{U}$, sendo $\mu_{A_I}(x) = x_1$, $\nu_{A_I}(x) = x_2$ e $\mu_{B_I}(x) = y_1$, $\nu_{B_I}(x) = y_2$ para cada $x \in \mathcal{X}$ onde $(|S_{\mu_{A_I}}\rangle, |S_{\nu_{A_I}}\rangle)$, $(|S_{\mu_{B_I}}\rangle, |S_{\nu_{B_I}}\rangle)$ e os pares de registradores quânticos dados pelas Eqs. (70) e (71), representando os GP e GNP de um elemento $x_i \in \mathcal{X}$ referentes aos CFIs A_I e B_I , respectivamente.

A **união entre os CFIs A_I e B_I** ($A_I -_c B_I$) é modelado pelo operador $CODIF_I$ considerando os pares de registradores $(|S_{\mu_{A_I}}\rangle, |S_{\nu_{A_I}}\rangle)$, $(|S_{\mu_{B_I}}\rangle, |S_{\nu_{B_I}}\rangle)$ e $(|0\rangle, |0\rangle)$:

$$|S_{A_I -_c B_I}\rangle = CODIF_I \left(|S_{\mu_{A_I}}\rangle, |S_{\nu_{A_I}}\rangle, |S_{\mu_{B_I}}\rangle, |S_{\nu_{B_I}}\rangle, |0\rangle, |0\rangle \right). \quad (135)$$

As propriedades de linearidade e distributividade do produto tensorial preservam a representabilidade do conectivo fuzzy intuicionista $CODIF_I$, ou seja, cada CIFIC $|S_{A_I -_c B_I}\rangle$ é definido por pares de registradores $(|S_{\mu_{A_I}}\rangle, |S_{\nu_{A_I}}\rangle)$, sendo cada componente correspondendo às relações de pertinência e a não-pertinência, respectiva-

Tabela 5: Evolução temporal dos estados do operador DIF_I

Memória	$T0$	$T1$	$T2$	$T3$	$T4$
$\sqrt{(1-x1)} \cdot \sqrt{(1-x2)} \cdot \sqrt{(1-y1)} \cdot \sqrt{(1-y2)}$	000000	000000	011000	011001	000000
$\sqrt{(1-x1)} \cdot \sqrt{(1-x2)} \cdot \sqrt{(1-y1)} \cdot \sqrt{y2}$	000100	000100	011100	011101	000100
$\sqrt{(1-x1)} \cdot \sqrt{(1-x2)} \cdot \sqrt{y1} \cdot \sqrt{(1-y2)}$	001000	001000	010000	010000	001001
$\sqrt{(1-x1)} \cdot \sqrt{(1-x2)} \cdot \sqrt{y1} \cdot \sqrt{y2}$	001100	001100	010100	010100	001101
$\sqrt{(1-x1)} \cdot \sqrt{x2} \cdot \sqrt{(1-y1)} \cdot \sqrt{(1-y2)}$	010000	010000	001000	001000	010001
$\sqrt{(1-x1)} \cdot \sqrt{x2} \cdot \sqrt{(1-y1)} \cdot \sqrt{y2}$	010100	010100	001100	001100	010101
$\sqrt{(1-x1)} \cdot \sqrt{x2} \cdot \sqrt{y1} \cdot \sqrt{(1-y2)}$	011000	011000	000000	000000	011001
$\sqrt{(1-x1)} \cdot \sqrt{x2} \cdot \sqrt{y1} \cdot \sqrt{y2}$	011100	011100	000100	000100	011101
$\sqrt{x1} \cdot \sqrt{(1-x2)} \cdot \sqrt{(1-y1)} \cdot \sqrt{(1-y2)}$	100000	100000	111000	111001	100000
$\sqrt{x1} \cdot \sqrt{(1-x2)} \cdot \sqrt{(1-y1)} \cdot \sqrt{y2}$	100100	100110	111110	111111	100110
$\sqrt{x1} \cdot \sqrt{(1-x2)} \cdot \sqrt{y1} \cdot \sqrt{(1-y2)}$	101000	101000	110000	110000	101001
$\sqrt{x1} \cdot \sqrt{(1-x2)} \cdot \sqrt{y1} \cdot \sqrt{y2}$	101100	101110	110110	110110	101111
$\sqrt{x1} \cdot \sqrt{x2} \cdot \sqrt{(1-y1)} \cdot \sqrt{(1-y2)}$	110000	110000	101000	101000	110001
$\sqrt{x1} \cdot \sqrt{x2} \cdot \sqrt{(1-y1)} \cdot \sqrt{y2}$	110100	110110	101110	101110	110111
$\sqrt{x1} \cdot \sqrt{x2} \cdot \sqrt{y1} \cdot \sqrt{(1-y2)}$	111000	111000	100000	100000	111001
$\sqrt{x1} \cdot \sqrt{x2} \cdot \sqrt{y1} \cdot \sqrt{y2}$	111100	111110	100110	100110	111111

mente.

O próximo teorema provê a expressão para representação do operador de união entre os $CFIs$ A_I e B_I .

Teorema 7. *Sejam $(|S_{\mu_{A_I}}\rangle, |S_{\nu_{A_I}}\rangle), (|S_{\mu_{B_I}}\rangle, |S_{\nu_{B_I}}\rangle)$ os pares de registradores quânticos dados pelas Eqs. (70) e (71). A expressão para interpretação do operador de união entre os $CFIs$ A_I e B_I e dada pelo par de registradores $(|S_{\mu_{A_I-cB_I}}\rangle, |S_{\nu_{A_I-cB_I}}\rangle)$ cujos componentes são definidos pelas seguintes expressões:*

$$|S_{\mu_{A_I-cB_I}}\rangle = M_1^5 \circ OR^{1,4,5} \left(|S_{\mu_{A_I}}\rangle, |S_{\nu_{A_I}}\rangle, |S_{\mu_{B_I}}\rangle, |S_{\nu_{B_I}}\rangle, |0\rangle, |0\rangle \right); \quad (136)$$

$$|S_{\nu_{A_I-cB_I}}\rangle = M_1^6 \circ AND^{2,3,6} \left(|S_{\mu_{A_I}}\rangle, |S_{\nu_{A_I}}\rangle, |S_{\mu_{B_I}}\rangle, |S_{\nu_{B_I}}\rangle, |0\rangle, |0\rangle \right). \quad (137)$$

Considerando os respectivas $CFIs$ complementares, tem-se que:

$$|S_{\mu_{(A_I-cB_I)'}}\rangle = M_0^5 \circ OR^{1,4,5} \left(|S_{\mu_{A_I}}\rangle, |S_{\nu_{A_I}}\rangle, |S_{\mu_{B_I}}\rangle, |S_{\nu_{B_I}}\rangle, |0\rangle, |0\rangle \right); \quad (138)$$

$$|S_{\nu_{(A_I-cB_I)'}}\rangle = M_0^6 \circ AND^{2,3,6} \left(|S_{\mu_{A_I}}\rangle, |S_{\nu_{A_I}}\rangle, |S_{\mu_{B_I}}\rangle, |S_{\nu_{B_I}}\rangle, |0\rangle, |0\rangle \right). \quad (139)$$

Proof. Na sequência, consideram-se os operadores fuzzy das Eqs.(58) e (59).

(i) Seja o operador $OR^{1,4,5}$ expresso através da composição dos operadores: $NOT^{1,4}$,

Toffoli $T_{1,4}^5$ e *NOT*⁵ (negando somente o quinto qubit). Então, tem-se que:

$$\begin{aligned}
& OR^{1,4,5} \left(|S_{\mu_{A_I}}\rangle, |S_{\nu_{A_I}}\rangle, |S_{\mu_{B_I}}\rangle, |S_{\nu_{B_I}}\rangle, |0\rangle, |0\rangle \right) = \\
& = NOT^{1,4,5} \circ T^{1,4,5} \circ NOT^{1,4} \left(|S_{\mu_{A_I}}\rangle, |S_{\nu_{A_I}}\rangle, |S_{\mu_{B_I}}\rangle, |S_{\nu_{B_I}}\rangle, |0\rangle, |0\rangle \right) \\
& = NOT^{1,4,5} \circ T^{1,4,5} \left(NOT|S_{\mu_{A_I}}\rangle, |S_{\nu_{A_I}}\rangle, |S_{\mu_{B_I}}\rangle, NOT|S_{\nu_{B_I}}\rangle, NOT|0\rangle, |0\rangle \right) \\
& = \left((\sqrt{1-x_1}|1\rangle) \otimes (\sqrt{1-x_2}|0\rangle + \sqrt{x_2}|1\rangle) \otimes (\sqrt{1-y_1}|0\rangle + \sqrt{y_1}|1\rangle) \otimes \sqrt{1-y_2}|1\rangle \right) \otimes |00\rangle \\
& + \left[\left((\sqrt{1-x_1}|1\rangle) \otimes (\sqrt{1-x_2}|0\rangle + \sqrt{x_2}|1\rangle) \otimes (\sqrt{1-y_1}|0\rangle + \sqrt{y_1}|1\rangle) \otimes \sqrt{y_2}|0\rangle \right) \right. \\
& + \left((\sqrt{x_1}|0\rangle) \otimes (\sqrt{1-x_2}|0\rangle + \sqrt{x_2}|1\rangle) \otimes (\sqrt{1-y_1}|0\rangle + \sqrt{y_1}|1\rangle) \otimes \sqrt{1-y_2}|1\rangle \right) \\
& \left. + \left((\sqrt{x_1}|0\rangle) \otimes (\sqrt{1-x_2}|0\rangle + \sqrt{x_2}|1\rangle) \otimes (\sqrt{1-y_1}|0\rangle + \sqrt{y_1}|1\rangle) \otimes \sqrt{y_2}|0\rangle \right) \right] \otimes |10\rangle. \quad (140)
\end{aligned}$$

Portanto, executando o operador de medida M_1^5 no estado quântico da Eq. (140), ou seja, sobre o quinto *qubit* no estado $|1\rangle$, tem-se o registrador de saída:

$$\begin{aligned}
& |S_{\mu_{A_I-cB_I}}\rangle = \\
& = \sqrt{(1-x_1)(1-x_2)(1-y_1)y_2}|100010\rangle + \sqrt{(1-x_1)(1-x_2)y_1y_2}|101010\rangle \\
& + \sqrt{(1-x_1)x_2(1-y_1)y_2}|110010\rangle + \sqrt{(1-x_1)x_2y_1y_2}|111010\rangle \\
& + \sqrt{x_1(1-x_2)y_1(1-y_2)}|001110\rangle + \sqrt{x_1(1-x_2)y_1y_2}|001010\rangle \\
& + \sqrt{x_1x_2(1-y_1)(1-y_2)}|010110\rangle + \sqrt{x_1x_2(1-y_1)y_2}|010010\rangle \\
& + \sqrt{x_1x_2y_1y_2}|011010\rangle + \sqrt{x_1x_2y_1(1-y_2)}|011110\rangle \\
& + \sqrt{x_1(1-x_2)(1-y_1)(1-y_2)}|000110\rangle + \sqrt{x_1(1-x_2)(1-y_1)y_2}|000010\rangle. \quad (141)
\end{aligned}$$

A correspondente probabilidade $p_{OR}(1) = x_1 + y_2 - x_1 \cdot y_2$, expressa o grau de pertinência de um elemento x_1 no *CFI* $A_I -_c B_I$, ou seja, $p_{OR}(1) = \mu_{A_I-cB_I}(x_i)$.

Analogamente, a medida M_0^5 no estado quântico da Eq. (92) retorna o registrador

$$\begin{aligned}
|S_{\mu_{(A_I-cB_I)'}}\rangle = & \sqrt{(1-x_1)x_2(1-y_1)(1-y_2)}|110100\rangle + \sqrt{(1-x_1)x_2y_1(1-y_2)}|111100\rangle + \\
& \sqrt{(1-x_1)(1-x_2)(1-y_1)(1-y_2)}|100100\rangle + \sqrt{(1-x_1)(1-x_2)y_1(1-y_2)}|101100\rangle
\end{aligned} \quad (142)$$

com probabilidade $p_{OR}(0) = 1 - x_1 - y_2 + x_1 \cdot y_2$, expressando o complemento do grau de pertinência de x_1 no *CFI* $(A_I -_c B_I)'$, ou seja, $p_{OR}(0) = 1 - \mu_{A_I-cB_I}(x_i)$ ou ainda $p_{OR}(0) = \mu_{(A_I-cB_I)'}(x_i)$.

Assim, pelas Eqs.(93) e (94), tem-se que $|S_{\mu_{A_I-cB_I}}\rangle = OR(|S_{\mu_{A_I}}\rangle, |S_{\mu_{B_I}}\rangle)$, ou

ainda:

$$OR(|S_{\mu_{A_I}}\rangle, |S_{\mu_{B_I}}\rangle) = \sqrt{\mu_{A_I-cB_I}(x_i)}|1\rangle + \sqrt{1 - \mu_{A_I-cB_I}(x_i)}|0\rangle \quad (143)$$

(ii) Da mesma forma, pela Eq.(88) considera-se o operador $AND^{2,3,6}(|S_{\nu_{A_I}}\rangle, |S_{\nu_{B_I}}\rangle)$ através de cálculos similares:

$$\begin{aligned} & AND^{2,3,6}(|S_{\mu_{A_I}}\rangle, |S_{\nu_{A_I}}\rangle, |S_{\mu_{B_I}}\rangle, |S_{\nu_{B_I}}\rangle, |0\rangle, |0\rangle) = \\ & = T^{2,3,6}(|S_{\mu_{A_I}}\rangle, |S_{\nu_{A_I}}\rangle, |S_{\mu_{B_I}}\rangle, |S_{\nu_{B_I}}\rangle, |0\rangle, |0\rangle) \\ & = \left[\left((\sqrt{1-x_1}|0\rangle + \sqrt{x_1}|1\rangle) \otimes (\sqrt{1-x_2}|0\rangle + \sqrt{x_2}|1\rangle) \otimes \sqrt{1-y_1}|0\rangle \otimes (\sqrt{1-y_2}|0\rangle + \sqrt{y_2}|1\rangle) \right) \right. \\ & \quad + \left((\sqrt{1-x_1}|0\rangle + \sqrt{x_1}|1\rangle) \otimes (\sqrt{1-x_2}|1\rangle) \otimes \sqrt{y_1}|1\rangle \otimes (\sqrt{1-y_2}|0\rangle + \sqrt{y_2}|1\rangle) \right) \\ & \quad + \left((\sqrt{1-x_1}|0\rangle + \sqrt{x_1}|1\rangle) \otimes (\sqrt{x_2}|0\rangle) \otimes \sqrt{1-y_1}|0\rangle \otimes (\sqrt{1-y_2}|0\rangle + \sqrt{y_2}|1\rangle) \right) \\ & \quad \left. + \left((\sqrt{1-x_1}|0\rangle + \sqrt{x_1}|1\rangle) \otimes (\sqrt{x_2}|1\rangle) \otimes \sqrt{y_1}|1\rangle \otimes (\sqrt{1-y_2}|0\rangle + \sqrt{y_2}|1\rangle) \right) \right] \otimes |00\rangle \\ & \quad + \left[\left((\sqrt{1-x_1}|0\rangle + \sqrt{x_1}|1\rangle) \otimes (\sqrt{x_2}|1\rangle) \otimes \sqrt{y_1}|1\rangle \otimes (\sqrt{1-y_2}|0\rangle + \sqrt{y_2}|1\rangle) \right) \right] \otimes |01\rangle. \quad (144) \end{aligned}$$

Portanto, executando uma operação de medida no estado quântico da Eq. (144), sobre o sexto *qubit* no estado ($|1\rangle$), tem-se que resulta no registrador de saída

$$\begin{aligned} |S_{\nu_{A_I-cB_I}}\rangle = & \sqrt{(1-x_1)x_2y_1(1-y_2)}|011001\rangle + \sqrt{(1-x_1)x_2y_1y_2}|011101\rangle + \\ & \sqrt{x_1x_2y_1(1-y_2)}|111001\rangle + \sqrt{x_1x_2y_1y_2}|111101\rangle \end{aligned} \quad (145)$$

com probabilidade $p_{AND}(1) = x_2 \cdot y_1$, provendo uma interpretação do grau de não-pertinência de $x \in \chi$ no $CFI A_I - c B_I$, ou seja, $p_{AND}(1) = \nu_{A_I-cB_I}(x_i)$.

Analogamente, um operação de medida no estado quântico da Eq. (144), sobre o sexto *qubit* no estado ($|0\rangle$), retorna o estado

$$\begin{aligned} & |S_{\mu_{(A_I-cB_I)'}}\rangle = \\ & = \sqrt{(1-x_1)(1-x_2)(1-y_1)(1-y_2)}|000000\rangle + \sqrt{(1-x_1)(1-x_2)(1-y_1)y_2}|000100\rangle \\ & \quad + \sqrt{(1-x_1)(1-x_2)y_1(1-y_2)}|001000\rangle + \sqrt{(1-x_1)(1-x_2)y_1y_2}|001100\rangle \\ & \quad + \sqrt{x_1(1-x_2)(1-y_1)(1-y_2)}|100000\rangle + \sqrt{x_1(1-x_2)(1-y_1)y_2}|100100\rangle \\ & \quad + \sqrt{x_1(1-x_2)y_1(1-y_2)}|101000\rangle + \sqrt{x_1(1-x_2)y_1y_2}|101100\rangle \\ & \quad + \sqrt{x_1x_2(1-y_1)(1-y_2)}|110000\rangle + \sqrt{x_1x_2(1-y_1)y_2}|110100\rangle \\ & \quad + \sqrt{(1-x_1)x_2(1-y_1)(1-y_2)}|010000\rangle + \sqrt{(1-x_1)x_2(1-y_1)y_2}|010100\rangle. \quad (146) \end{aligned}$$

com probabilidade $p_{AND}(0) = 1 - x_2 \cdot y_1$, provendo uma interpretação do complemento da não-pertinência de x_1 no $CFI (A_I - c B_I)'$, ou seja, $p_{AND}(0) = 1 - \nu_{A_I-cB_I}(x_i)$.

Tabela 6: Evolução temporal dos estados do operador $CODIF_I$

Memória	$T0$	$T1$	$T2$	$T3$	$T4$
$\sqrt{(1-x1)} \cdot \sqrt{(1-x2)} \cdot \sqrt{(1-y1)} \cdot \sqrt{(1-y2)}$	000000	100100	100110	000000	000000
$\sqrt{(1-x1)} \cdot \sqrt{(1-x2)} \cdot \sqrt{(1-y1)} \cdot \sqrt{y2}$	000100	100000	100000	000110	000110
$\sqrt{(1-x1)} \cdot \sqrt{(1-x2)} \cdot \sqrt{y1} \cdot \sqrt{(1-y2)}$	001000	101100	101110	001000	001000
$\sqrt{(1-x1)} \cdot \sqrt{(1-x2)} \cdot \sqrt{y1} \cdot \sqrt{y2}$	001100	101000	101000	001110	001110
$\sqrt{(1-x1)} \cdot \sqrt{x2} \cdot \sqrt{(1-y1)} \cdot \sqrt{(1-y2)}$	010000	110100	110110	010000	010000
$\sqrt{(1-x1)} \cdot \sqrt{x2} \cdot \sqrt{(1-y1)} \cdot \sqrt{y2}$	010100	110000	110000	010110	010110
$\sqrt{(1-x1)} \cdot \sqrt{x2} \cdot \sqrt{y1} \cdot \sqrt{(1-y2)}$	011000	111100	111110	011000	011001
$\sqrt{(1-x1)} \cdot \sqrt{x2} \cdot \sqrt{y1} \cdot \sqrt{y2}$	011100	111000	111000	011110	011111
$\sqrt{x1} \cdot \sqrt{(1-x2)} \cdot \sqrt{(1-y1)} \cdot \sqrt{(1-y2)}$	100000	000100	000100	100010	100010
$\sqrt{x1} \cdot \sqrt{(1-x2)} \cdot \sqrt{(1-y1)} \cdot \sqrt{y2}$	100100	000000	000000	100110	100110
$\sqrt{x1} \cdot \sqrt{(1-x2)} \cdot \sqrt{y1} \cdot \sqrt{(1-y2)}$	101000	001100	001100	101010	101010
$\sqrt{x1} \cdot \sqrt{(1-x2)} \cdot \sqrt{y1} \cdot \sqrt{y2}$	101100	001000	001000	101110	101110
$\sqrt{x1} \cdot \sqrt{x2} \cdot \sqrt{(1-y1)} \cdot \sqrt{(1-y2)}$	110000	010100	010100	110010	110010
$\sqrt{x1} \cdot \sqrt{x2} \cdot \sqrt{(1-y1)} \cdot \sqrt{y2}$	110100	010000	010000	110110	110110
$\sqrt{x1} \cdot \sqrt{x2} \cdot \sqrt{y1} \cdot \sqrt{(1-y2)}$	111000	011100	011100	111010	111011
$\sqrt{x1} \cdot \sqrt{x2} \cdot \sqrt{y1} \cdot \sqrt{y2}$	111100	011000	011000	111110	111111

5.9 Considerações Finais

Neste capítulo temos as principais contribuições deste trabalho, sendo realizada a construção e a modelagem de conjuntos fuzzy intuicionistas, utilizando a computação quântica. A modelagem descrita é obtida como uma extensão da modelagem de conjuntos fuzzy via computação quântica. Utilizando a computação quântica, são definidos os conjuntos fuzzy intuicionistas e operadores da lógica fuzzy intuicionista, como complemento, união, intersecção, implicação, coimplicação, diferença e codiferença.

Para cada registrador de saída existe uma probabilidade de saída que está vinculada a um estado $|0\rangle$ ou $|1\rangle$. Esta interpretação pode ser observada nas tabelas a seguir, de acordo com cada operador: AND_I (Tabela 7 e Tabela 8), OR_I (Tabela 9 e Tabela 10), IMP_I (Tabela 11 e Tabela 12), $COIMP_I$ (Tabela 13 e Tabela 14), DIF_I (Tabela 15 e Tabela 16) e $CODIF_I$ (Tabela 17 e Tabela 18).

Tabela 7: Medida do registrador $|S\mu_{(A_I \cap B_I)}\rangle$ na interpretação para o GP de $A_I \cap B_I$

Estado do 3o qbit	Probabilidade de Saída	Registrador de Saída
$ 1\rangle$ (GP de $A_I \cap B_I$)	$x_1 \cdot y_1 = \mu_{A_I \cap B_I}(x)$	$\sqrt{\mu_{A_I \cap B_I}(x)} 1\rangle$
$ 0\rangle$ (GP de $(A_I \cap B_I)'$)	$1 - x_1 \cdot y_1 = \mu_{(A_I \cap B_I)'}(x)$	$\sqrt{1 - \mu_{(A_I \cap B_I)'}(x)} 0\rangle$

Tabela 8: Medida do registrador $|S\nu_{(A_I \cap B_I)}\rangle$ na interpretação para GNP de $A_I \cap B_I$

Estado do 3o qbit	Probabilidade de Saída	Registrador de Saída
$ 1\rangle$ (GNP de $A_I \cap B_I$)	$x_2 + y_2 - x_2 \cdot y_2 = \nu_{A_I \cap B_I}(x)$	$\sqrt{\nu_{A_I \cap B_I}(x)} 1\rangle$
$ 0\rangle$ (GNP de $(A_I \cap B_I)'$)	$1 - x_2 - y_2 + x_2 \cdot y_2 = \nu_{(A_I \cap B_I)'}(x)$	$\sqrt{1 - \nu_{(A_I \cap B_I)'}(x)} 0\rangle$

Tabela 9: Medida do registrador $|S\mu_{(A_I \cup B_I)}\rangle$ na interpretação para o GP $A_I \cup B_I$

Estado do 3o qbit	Probabilidade de Saída	Registrador de Saída
$ 1\rangle$ (GP de $A_I \cup B_I$)	$x_1 + y_1 - x_1 \cdot y_1 = \mu_{A_I \cup B_I}(x)$	$\sqrt{\mu_{A_I \cup B_I}(x)} 1\rangle$
$ 0\rangle$ (GP de $(A_I \cup B_I)'$)	$1 - x_1 - y_1 + x_1 \cdot y_1 = \mu_{(A_I \cup B_I)'}(x)$	$\sqrt{1 - \mu_{(A_I \cup B_I)'}(x)} 0\rangle$

Tabela 10: Medida do registrador $|S\nu_{(A_I \cup B_I)}\rangle$ na interpretação para o GNP $A_I \cup B_I$

Estado do 3o qbit	Probabilidade de Saída	Registrador de Saída
$ 1\rangle$ (GNP de $A_I \cup B_I$)	$x_2 \cdot y_2 = \nu_{A_I \cup B_I}(x)$	$\sqrt{\nu_{A_I \cup B_I}(x)} 1\rangle$
$ 0\rangle$ (GNP de $(A_I \cup B_I)'$)	$1 - x_2 \cdot y_2 = \nu_{(A_I \cup B_I)'}(x)$	$\sqrt{1 - \nu_{(A_I \cup B_I)'}(x)} 0\rangle$

Tabela 11: Medida do registrador $|S\mu_{(A_I \rightarrow B_I)}\rangle$ na interpretação para $A_I \rightarrow B_I$

Estado do 3o qbit	Probabilidade de Saída	Registrador de Saída
$ 1\rangle$ (GP de $A_I \rightarrow B_I$)	$x_2 + y_1 - x_2 \cdot y_1 = \mu_{A_I \rightarrow B_I}(x)$	$\sqrt{\mu_{A_I \rightarrow B_I}(x)} 1\rangle$
$ 0\rangle$ (GP de $(A_I \rightarrow B_I)'$)	$1 - x_2 - y_1 + x_2 \cdot y_1 = \mu_{(A_I \rightarrow B_I)'}(x)$	$\sqrt{1 - \mu_{(A_I \rightarrow B_I)'}(x)} 0\rangle$

Tabela 12: Medida do registrador $|S\nu_{(A_I \rightarrow B_I)}\rangle$ na interpretação para $A_I \cap B_I$

Estado do 3o qbit	Probabilidade de Saída	Registrador de Saída
$ 1\rangle$ (GNP de $A_I \rightarrow B_I$)	$x_1 \cdot y_2 = \nu_{A_I \rightarrow B_I}(x)$	$\sqrt{\nu_{A_I \rightarrow B_I}(x)} 1\rangle$
$ 0\rangle$ (GNP de $(A_I \rightarrow B_I)'$)	$1 - x_1 \cdot y_2 = \nu_{(A_I \rightarrow B_I)'}(x)$	$\sqrt{1 - \nu_{(A_I \rightarrow B_I)'}(x)} 0\rangle$

Tabela 13: Medida do registrador $|S\mu_{(A_I \leftarrow B_I)}\rangle$ na interpretação para $A_I \leftarrow B_I$

Estado do 3o qbit	Probabilidade de Saída	Registrador de Saída
$ 1\rangle$ (GP de $A_I \leftarrow B_I$)	$x_2 \cdot y_1 = \mu_{A_I \leftarrow B_I}(x)$	$\sqrt{\mu_{A_I \leftarrow B_I}(x)} 1\rangle$
$ 0\rangle$ (GP de $(A_I \leftarrow B_I)'$)	$1 - x_2 \cdot y_1 = \mu_{(A_I \leftarrow B_I)'}(x)$	$\sqrt{1 - \mu_{(A_I \leftarrow B_I)'}(x)} 0\rangle$

Tabela 14: Medida do registrador $|S\nu_{(A_I \leftarrow B_I)}\rangle$ na interpretação para $A_I \leftarrow B_I$

Estado do 3o qbit	Probabilidade de Saída	Registrador de Saída
$ 1\rangle$ (GNP de $A_I \leftarrow B_I$)	$x_1 + y_2 - x_1 \cdot y_2 = \nu_{A_I \leftarrow B_I}(x)$	$\sqrt{\nu_{A_I \leftarrow B_I}(x)} 1\rangle$
$ 0\rangle$ (GNP de $(A_I \leftarrow B_I)'$)	$1 - x_1 + y_2 - x_1 \cdot y_2 = \nu_{(A_I \leftarrow B_I)'}(x)$	$\sqrt{1 - \nu_{(A_I \leftarrow B_I)'}(x)} 0\rangle$

Tabela 15: Medida do registrador $|S\mu_{(A_I - B_I)}\rangle$ na interpretação para $A_I - B_I$

Estado do 3o qbit	Probabilidade de Saída	Registrador de Saída
$ 1\rangle$ (GP de $A_I - B_I$)	$x_1 \cdot y_2 = \mu_{A_I - B_I}(x)$	$\sqrt{\mu_{A_I - B_I}(x)} 1\rangle$
$ 0\rangle$ (GP de $(A_I - B_I)'$)	$1 - x_1 \cdot y_2 = \mu_{(A_I - B_I)'}(x)$	$\sqrt{1 - \mu_{(A_I - B_I)'}(x)} 0\rangle$

Tabela 16: Medida do registrador $|S\nu_{(A_I - B_I)}\rangle$ na interpretação para $A_I - B_I$

Estado do 3o qbit	Probabilidade de Saída	Registrador de Saída
$ 1\rangle$ (GNP de $A_I - B_I$)	$x_2 + y_1 - x_2 \cdot y_1 = \nu_{A_I - B_I}(x)$	$\sqrt{\nu_{A_I - B_I}(x)} 1\rangle$
$ 0\rangle$ (GNP de $(A_I - B_I)'$)	$1 - x_2 + y_1 - x_2 \cdot y_1 = \nu_{(A_I - B_I)'}(x)$	$\sqrt{1 - \nu_{(A_I - B_I)'}(x)} 0\rangle$

Tabela 17: Medida do registrador $|S\mu_{(A_I -_c B_I)}\rangle$ na interpretação para $A_I -_c B_I$

Estado do 3o qbit	Probabilidade de Saída	Registrador de Saída
$ 1\rangle$ (GP de $A_I -_c B_I$)	$x_1 + y_2 - x_1 \cdot y_2 = \mu_{A_I -_c B_I}(x)$	$\sqrt{\mu_{A_I -_c B_I}(x)} 1\rangle$
$ 0\rangle$ (GP de $(A_I -_c B_I)'$)	$1 - x_1 - y_2 + x_1 \cdot y_2 = \mu_{(A_I -_c B_I)'}(x)$	$\sqrt{1 - \mu_{(A_I -_c B_I)'}(x)} 0\rangle$

Tabela 18: Medida do registrador $|S\nu_{(A_I -_c B_I)}\rangle$ na interpretação para $A_I -_c B_I$

Estado do 3o qbit	Probabilidade de Saída	Registrador de Saída
$ 1\rangle$ (GNP de $A_I -_c B_I$)	$x_2 \cdot y_1 = \nu_{A_I -_c B_I}(x)$	$\sqrt{\nu_{A_I -_c B_I}(x)} 1\rangle$
$ 0\rangle$ (GNP de $(A_I -_c B_I)'$)	$1 - x_2 \cdot y_1 = \nu_{(A_I -_c B_I)'}(x)$	$\sqrt{1 - \nu_{(A_I -_c B_I)'}(x)} 0\rangle$

6 VALIDAÇÃO DE OPERAÇÕES FUZZY INTUICIONISTAS

Neste capítulo, descreve-se como foi desenvolvida a etapa de a validação da biblioteca de métodos *qfuzzy2-Analyzer*, pela simulação via software das operações fuzzy intuicionistas através da instanciação dos correspondentes operadores quânticos em ambiente computacional.

As simulações de operações através de circuitos quânticos foram feitas usando as interfaces da ferramenta computacional VPE-qGM, consistindo em um ambiente de programação visual que disponibiliza o processamento paralelo de algoritmos quânticos (MARON; REISER; PILLA, 2013; MARON et al., 2013a,b).

Foram usadas as seguintes instanciações de registradores para os estados quânticos de entradas:

$$|S_A\rangle \equiv (|S_{\mu_{A_I}}\rangle, |S_{\nu_{A_I}}\rangle) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}|1\rangle + \frac{\sqrt{2}}{2}|0\rangle, \frac{\sqrt{3}}{3}|1\rangle + \frac{\sqrt{6}}{3}|0\rangle \right); \quad (147)$$

$$|S_B\rangle \equiv (|S_{\mu_{B_I}}\rangle, |S_{\nu_{B_I}}\rangle) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}|1\rangle + \frac{\sqrt{2}}{2}|0\rangle, \frac{\sqrt{2}}{2}|1\rangle + \frac{\sqrt{2}}{2}|0\rangle \right). \quad (148)$$

Tais escolhas mostram a seleção de par de registradores ($|S_A\rangle, |S_B\rangle$), onde $|S_A\rangle$ armazena dados de um elemento em relação a um CFI A_I enquanto que o registrador $|S_B\rangle$ armazena a informação de um elemento em relação ao CFI B_I , que em particular, restringe-se a abordagem fuzzy pela relação de complementaridade.

As simulações a seguir, validam os operadores AND_I , OR_I , IMP_I , $COIMP_I$, DIF_I e $CODIF_I$, descritos nos Capítulos 4 e 5, com adicionais informações em (AGOSTINI, 2017). Para cada operador executam-se duas simulações, uma simulação para medir o GP referente ao elemento x no CFI modelado, e outra simulação para medir o GNP desde mesmo elemento no mesmo CFI.

A simulação dessas novas construções são realizadas no ambiente VPE-qGM e confrontadas com as equações que definem as formas expandidas das definições na modelagem de circuitos quânticos e portas quânticas, no Capítulo 5.

Esta extensão considera a representabilidade dos conectivos fuzzy. Portanto, os demais conectivos fuzzy ((co)implicacoes, (co)diferencas) são representados pelas

t-(co)normas fuzzy, modeladas a partir de soma e o produto algébrico, incluindo a negação fuzzy padrão N_S .

6.1 Simulando Intersecção entre CFI via CQ

Para a simulação do operador AND_I , considerando a memória de entrada representada pelos registradores descritos pelas Eqs. (147) e (148), foi modelado e executado o processo quântico, considerando para cada construção os seguintes dados: operação, posição, qubits e parâmetros de programação, sendo todos apresentados como entrada na interface do Simulador da VPE-qGM.

A correspondência entre os quatro primeiros processos na Tabela (1) e as transformações unitárias referentes às quatro primeiras portas multi-qubits do circuito na Figura(5) é imediata. Na sequência, os dois últimos processos executam escolhas randômicas de projeções sobre as bases computacionais do qubit de medida e calculam a probabilidade associada, respectivamente.

A Figura (11), referente aos dados de memória, ilustra os coeficientes não nulos do estado de memória após a simulação, para GP quando da medida do quinto qbit no estado $|0\rangle$, salientando a valor da probabilidade $p_0 = 0,75$ (com arredondamento de duas casas decimais). Analogamente, se a medida é executada em relação ao qbit $|1\rangle$, tem-se a probabilidade $p_1 = 0,25$ que corresponde ao complemento do GNP, que não é necessariamente igual ao GP.

Já a Figura (12) ilustra o resultado obtido após uma segunda simulação, onde se apresenta o resultado do GNP, após a medida do sexto qbit em $|1\rangle$, com probabilidade $p_1 = 0,67$,

Observa-se que, ao realizar as medidas para o GP e o GNP, sendo para cada medida considerando o qbit no estado $|1\rangle$, a soma das medidas encontradas $0,25 + 0,67 \leq 1$. Este resultado refere-se a restrição da LFI, conforme a equação (1).

6.2 Simulando União entre CFI via CQ

Na a simulação do operador OR_I , considerando a memória de entrada representada pelos registradores descritos pelas Eqs. (147) e (148), foi modelado e executado o processo quântico, considerando para cada construção os seguintes dados: operação, posição, qubits e parâmetros de programação, sendo todos apresentados como entrada na interface do Simulador da VPE-qGM.

A correspondência entre os quatro primeiros processos na Tabela (2) e as transformações unitárias referentes às quatro primeiras portas multi-qubits do circuito na Figura(6) é imediata. Na sequência, os dois últimos processos executam escolhas randômicas de projeções sobre as bases computacionais do qubit de medida e

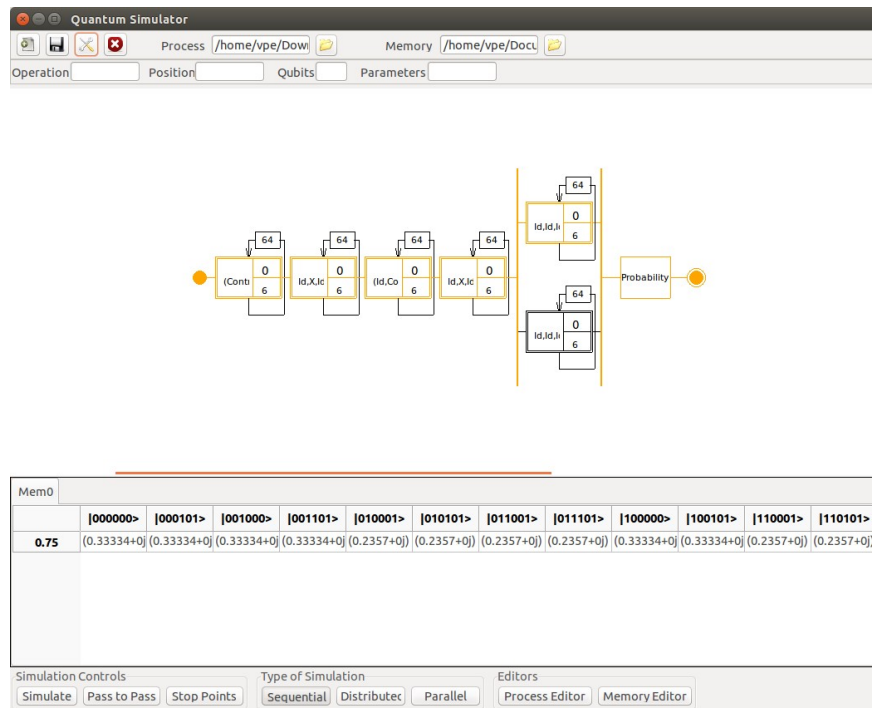


Figura 11: Simulação do operador AND_I no VPE-qGM com leitura no quinto qbit.

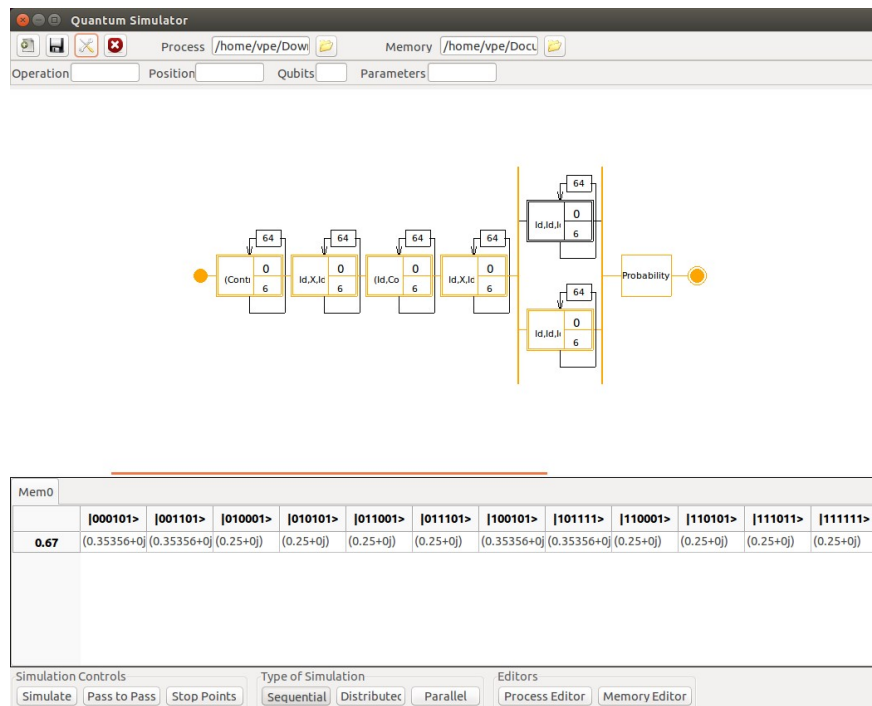


Figura 12: Simulação do operador AND_I no VPE-qGM com leitura no sexto qbit.

calculam a probabilidade associada, respectivamente.

A Figura (13), referente aos dados de memória, ilustra os coeficientes não nulos do estado de memória após a simulação, para GP quando da medida do quinto qbit

no estado $|1\rangle$, salientando a valor da probabilidade $p_1 = 0,67$ (com arredondamento de duas casas decimais).

Já a Figura (14) ilustra o resultado obtido após uma segunda simulação, onde se apresenta o resultado do GNP, após a medida do sexto qbit em $|0\rangle$, com probabilidade $p_0 = 0,75$, Analogamente, se a medida é executada em relação ao qbit $|1\rangle$, tem-se a probabilidade $p_1 = 0,25$ que corresponde ao complemento do GNP, que não é necessariamente igual ao GP.

Observa-se que, ao realizar as medidas para o GP e o GNP, sendo para cada medida considerando o qbit no estado $|1\rangle$, a soma das medidas encontradas $0,67 + 0,25 \leq 1$. Este resultado refere-se a restrição da LFI, conforme a equação (1).

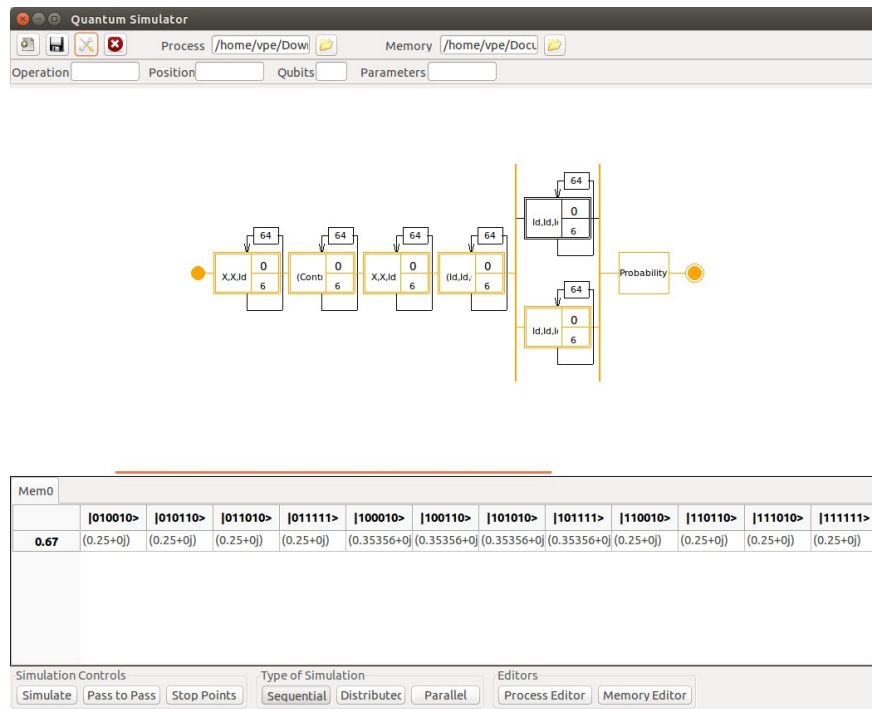


Figura 13: Simulação do operador OR_I no VPE-qGM com leitura no quinto qbit.

6.3 Simulando Implicação entre CFI via CQ

No caso da simulação do operador IMP_I , considerando a memória de entrada representada pelos registradores descritos pelas Eqs. (147) e (148), foi modelado e executado o processo quântico, considerando para cada construção os seguintes dados: operação, posição, qubits e parâmetros de programação, sendo todos apresentados como entrada na interface do Simulador da VPE-qGM.

A relação entre os quatro primeiros processos na Tabela (3) e as transformações unitárias referentes às quatro primeiras portas multi-qubits do circuito na Figura(7) é imediata. Na sequência, os dois últimos processos executam escolhas randômicas de

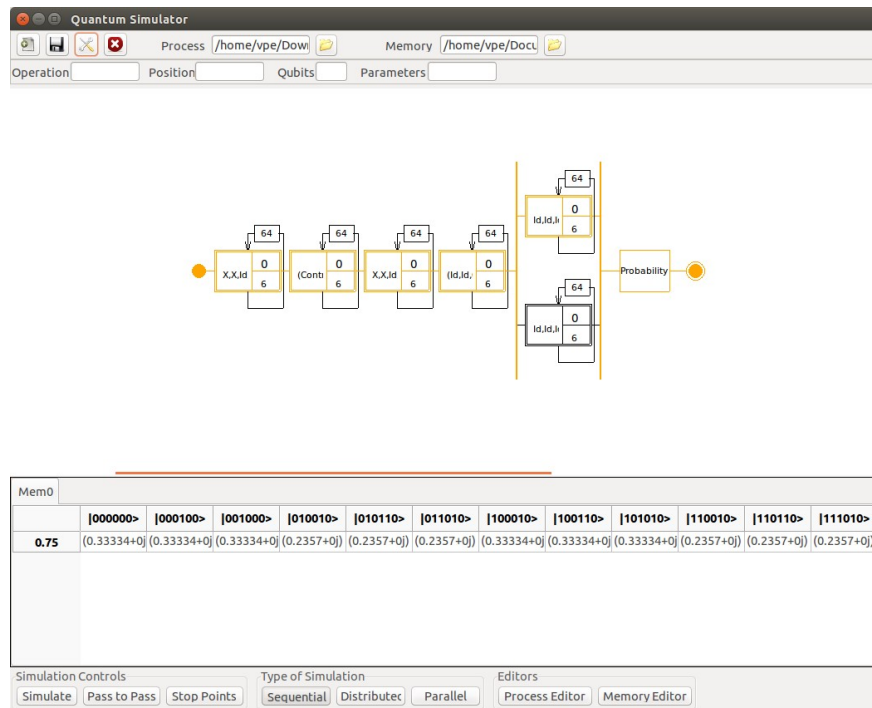


Figura 14: Simulação do operador OR_I no VPE-qGM com leitura no sexto qbit.

projeções sobre as bases computacionais do qubit de medida e calculam a probabilidade associada, respectivamente.

A Figura (15), referente aos dados de memória, expõe os coeficientes não nulos do estado de memória após a simulação, para GP quando da medida do quinto qbit no estado $|0\rangle$, salientando a valor da probabilidade $p_0 = 0,33$ (com arredondamento de duas casas decimais). Analogamente, se a medida é executada em relação ao qbit $|1\rangle$, tem-se a probabilidade $p_1 = 0,67$ que corresponde ao complemento do GNP, que não é necessariamente igual ao GP.

Já a Figura (16) ilustra o resultado obtido após uma segunda simulação, onde se apresenta o resultado do GNP, após a medida do sexto qbit em $|1\rangle$, com probabilidade $p_1 = 0,25$,

Observa-se que, ao realizar as medidas para o GP e o GNP, sendo para cada medida considerando o qbit no estado $|1\rangle$, a soma das medidas encontradas $0,67 + 0,25 \leq 1$. Este resultado refere-se a restrição da LFI, conforme a equação (1).

6.4 Simulando Coimplicação entre CFI via CQ

Para a simulação do operador $COIMP_I$, considerando a memória de entrada representada pelos registradores descritos pelas Eqs. (147) e (148), foi modelado e executado o processo quântico, considerando para cada construção os seguintes dados: operação, posição, qubits e parâmetros de programação, sendo todos apresentados

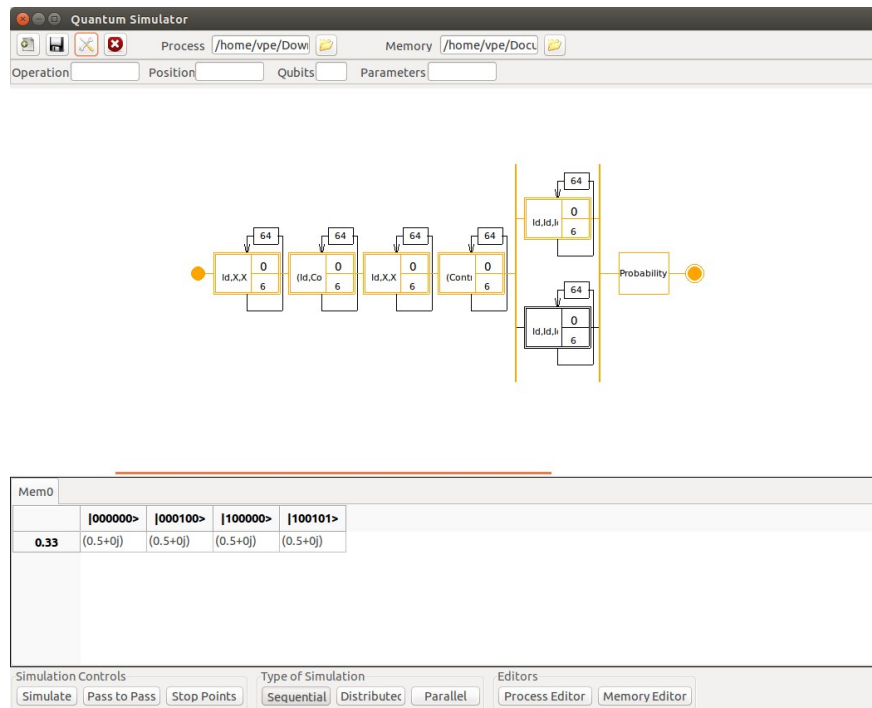


Figura 15: Simulação do operador IMP_I no VPE-qGM com leitura no quinto qbit.

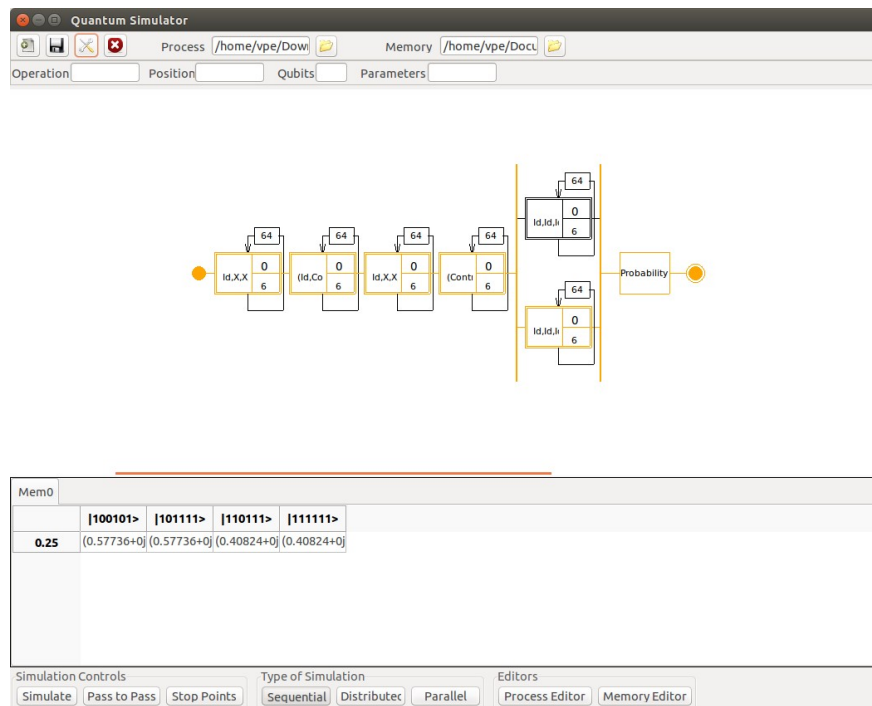


Figura 16: Simulação do operador IMP_I no VPE-qGM com leitura no sexto qbit.

como entrada na interface do Simulador da VPE-qGM.

A correspondência entre os quatro primeiros processos na Tabela (4) e as transformações unitárias referentes às quatro primeiras portas multi-qubits do circuito

na Figura(8) é imediata. Na sequência, os dois últimos processos executam escolhas randômicas de projeções sobre as bases computacionais do qubit de medida e calculam a probabilidade associada, respectivamente.

A Figura (17), referente aos dados de memória, ilustra os coeficientes não nulos do estado de memória após a simulação, para GP quando da medida do quinto qbit no estado $|1\rangle$, salientando a valor da probabilidade $p_1 = 0,17$ (com arredondamento de duas casas decimais).

A Figura (18) demonstra o resultado obtido após uma segunda simulação, onde se apresenta o resultado do GNP, após a medida do sexto qbit em $|0\rangle$, com probabilidade $p_0 = 0,25$. Analogamente, se a medida é executada em relação ao qbit $|1\rangle$, tem-se a probabilidade $p_1 = 0,75$ que corresponde ao complemento do GNP, que não é necessariamente igual ao GP.

Verifica-se que, ao executar as medidas para o GP e o GNP, sendo para cada medida considerando o qbit no estado $|1\rangle$, a soma das medidas encontradas $0,17 + 0,75 \leq 1$. Este resultado refere-se a restrição da LFI, conforme a equação (1).

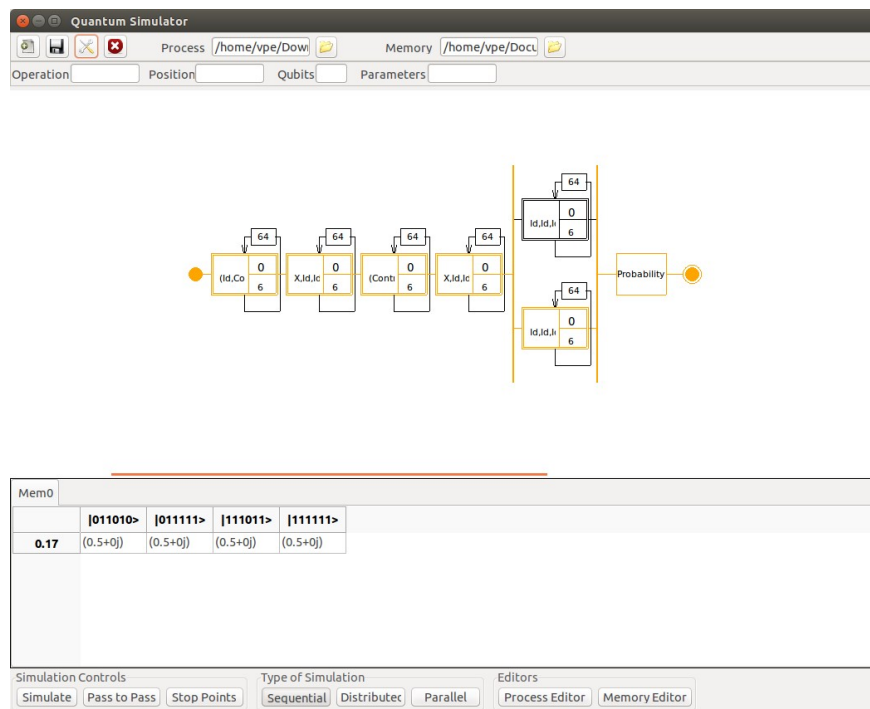


Figura 17: Simulação do operador $COIMP_I$ no VPE-qGM com leitura no quinto qbit.

6.5 Simulando Diferença entre CFI via CQ

Na a simulação do operador DIF_I , considerando a memória de entrada configurada pelos registradores descritos pelas Eqs. (147) e (148), foi modelado e executado o processo quântico, considerando para cada construção os seguintes dados:

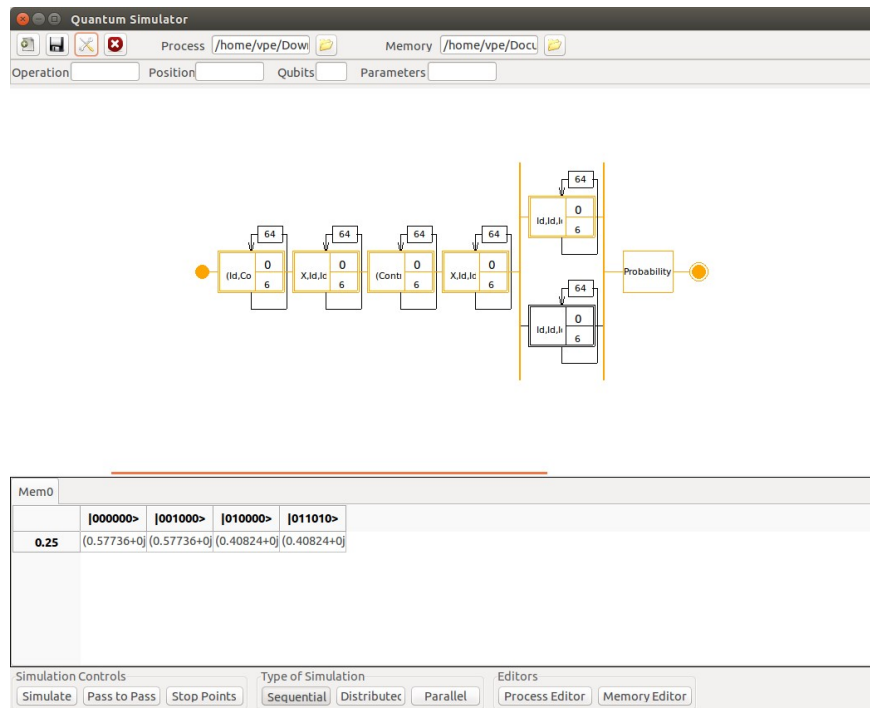


Figura 18: Simulação do operador $COIMP_I$ no VPE-qGM com leitura no sexto qbit.

operação, posição, qubits e parâmetros de programação, sendo todos apresentados como entrada na interface do Simulador da VPE-qGM.

A correspondência entre os quatro primeiros processos na Tabela (5) e as transformações unitárias referentes às quatro primeiras portas multi-qubits do circuito na Figura(9) é imediata. Na sequência, os dois últimos processos executam escolhas randômicas de projeções sobre as bases computacionais do qubit de medida e calculam a probabilidade associada, respectivamente.

A Figura (19), referente aos dados de memória, ilustra os coeficientes não nulos do estado de memória após a simulação, para GP quando da medida do quinto qbit no estado $|0\rangle$, salientando a valor da probabilidade $p_0 = 0,75$ (com arredondamento de duas casas decimais). Analogamente, se a medida é executada em relação ao qbit $|1\rangle$, tem-se a probabilidade $p_1 = 0,25$ que corresponde ao complemento do GNP, que não é necessariamente igual ao GP.

Já a Figura (20) ilustra o resultado obtido após uma segunda simulação, onde se apresenta o resultado do GNP, após a medida do sexto qbit em $|0\rangle$, com probabilidade $p_0 = 0,33$. Analogamente, se a medida é executada em relação ao qbit $|1\rangle$, tem-se a probabilidade $p_1 = 0,67$ que corresponde ao complemento do GNP, que não é necessariamente igual ao GP.

Percebe-se que, ao realizar as medidas para o GP e o GNP, sendo para cada medida considerando o qbit no estado $|1\rangle$, a soma das medidas encontradas $0,25 + 0,67 \leq 1$. Este resultado refere-se a restrição da LFI, conforme a equação (1).

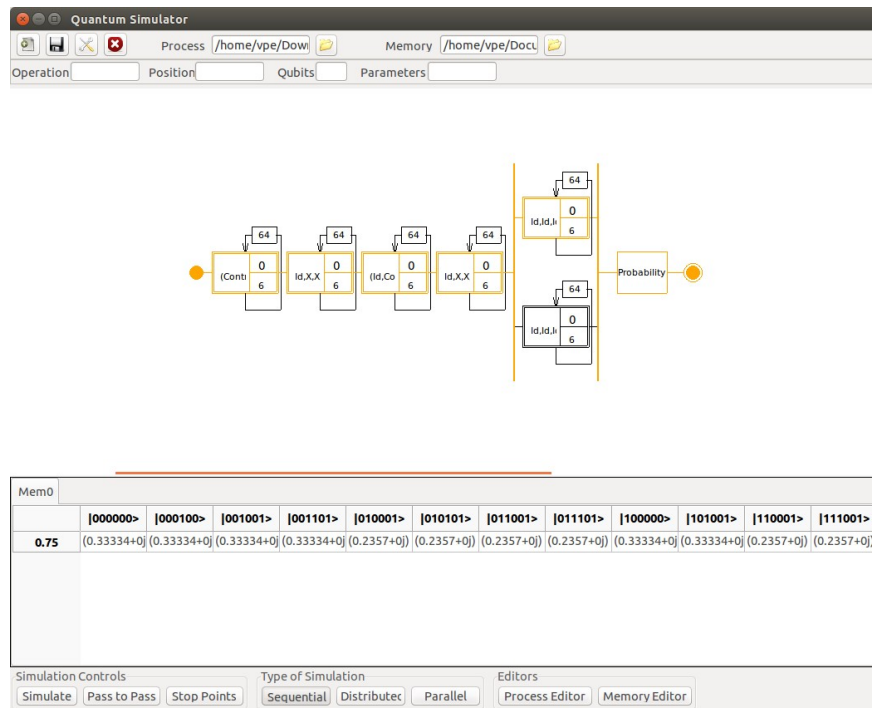


Figura 19: Simulação do operador DIF_I no VPE-qGM com leitura no quinto qbit.

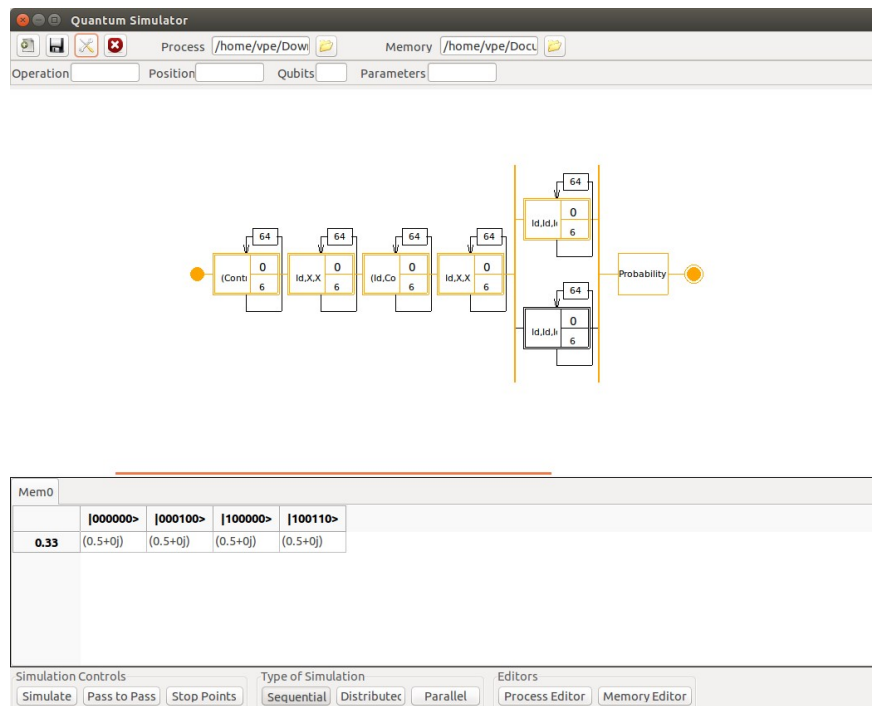


Figura 20: Simulação do operador DIF_I no VPE-qGM com leitura no sexto qbit.

6.6 Simulando Codiferença entre CFI via CQ

Para a simulação do operador $CODIF_I$, também considerando a memória de entrada representada pelos registradores descritos pelas Eqs. (147) e (148), foi mode-

lado e executado o processo quântico, considerando para cada construção os seguintes dados: operação, posição, qubits e parâmetros de programação, sendo todos apresentados como entrada na interface do Simulador da VPE-qGM.

A correspondência entre os quatro primeiros processos na Tabela (6) e as transformações unitárias referentes às quatro primeiras portas multi-qubits do circuito na Figura(10) é imediata. Na sequência, os dois últimos processos executam escolhas randômicas de projeções sobre as bases computacionais do qubit de medida e calculam a probabilidade associada, respectivamente.

A Figura (21), referente aos dados de memória, ilustra os coeficientes não nulos do estado de memória após a simulação, para GP quando da medida do quinto qbit no estado $|1\rangle$, salientando a valor da probabilidade $p_1 = 0,17$ (com arredondamento de duas casas decimais).

Já a Figura (22) mostra o resultado obtido após uma segunda simulação, onde se apresenta o resultado do GNP, após a medida do sexto qbit em $|0\rangle$, com probabilidade $p_0 = 0,25$. Semelhantemente, se a medida é executada em relação ao qbit $|1\rangle$, tem-se a probabilidade $p_1 = 0,75$ que corresponde ao complemento do GNP, que não é necessariamente igual ao GP.

Observa-se que, ao executar as medidas para o GP e o GNP, sendo para cada medida considerando o qbit no estado $|1\rangle$, a soma das medidas encontradas $0,17 + 0,75 \leq 1$. Este resultado refere-se a restrição da LFI, conforme a equação (1).

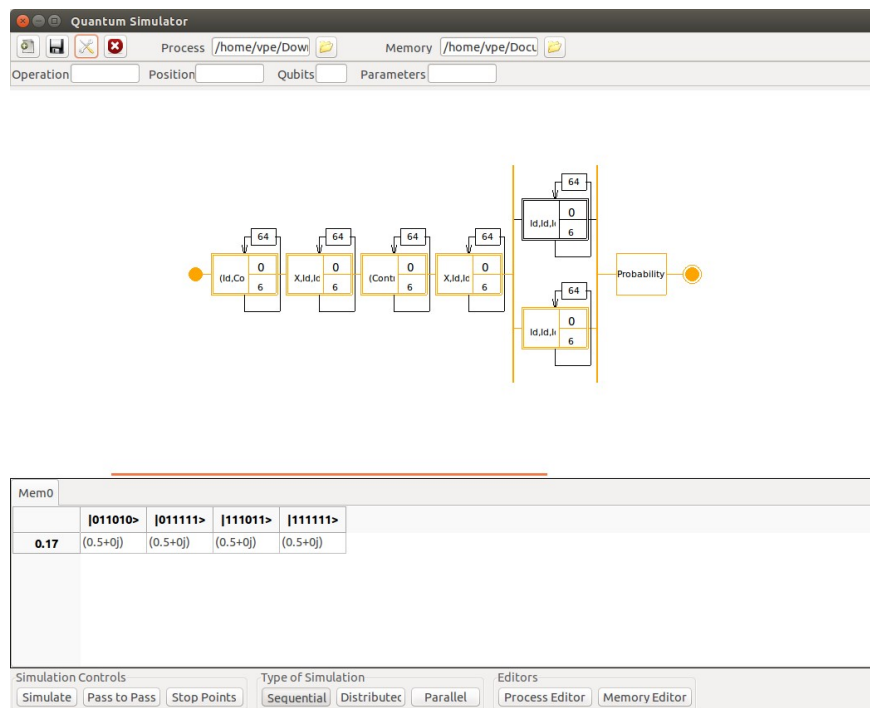


Figura 21: Simulação do operador $CODIF_I$ no VPE-qGM com leitura no quinto qbit.

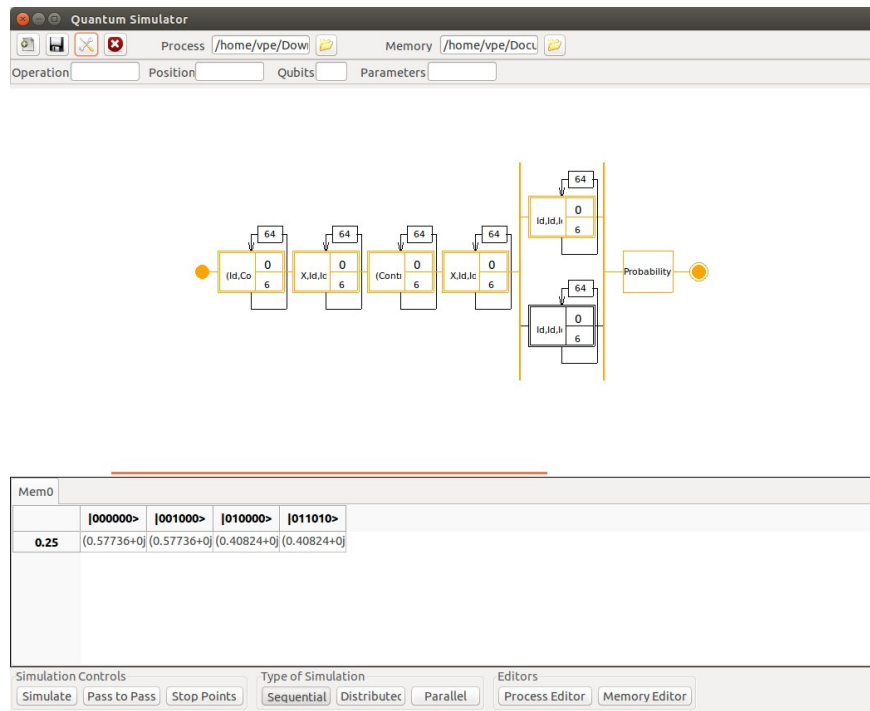


Figura 22: Simulação do operador $CODIF_I$ no VPE-qGM com leitura no sexto qbit.

6.7 Considerações Finais

Neste capítulo temos a validação dos operadores fuzzy intuicionistas quânticos, descritos neste trabalho, através de simulações no ambiente VPE-qGM. Considerando dois pares de estados quânticos como instâncias, foram validados os conectivos intuicionistas NOT_I , AND_I , OR_I , IMP_I , $COIMP_I$, DIF_I e $CODIF_I$, desenvolvidos neste trabalho. Definimos neste trabalho que o valor, tanto para o grau de pertinência quanto para o grau de não pertinência, será armazenado e lido no estado $|1\rangle$. Portanto, se o estado lido for o $|0\rangle$, então estaremos medindo o complemento do GP ou do GNP, conforme o caso.

A simulação do operador AND_I executada no ambiente VPE-qGM, com as entradas descritas nas equações (147) e (148), está exemplificada pelo circuito quântico que ilustrado na Figura (23). Já a Tabela (19) descreve o desenvolvimento temporal das operações sobre a memória conforme estas entradas.

O mesmo resumo referente à instanciação de memórias pode ser descrito para os demais operadores.

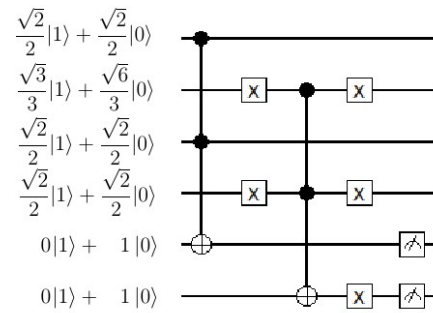


Figura 23: Circuito quântico com entradas simuladas no operador AND_I

Tabela 19: Evolução do operador AND_I , estados instanciados da simulação no VPE-qGM

Memória	Probab.	T0	T1	T2	T3	T4
$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$	0,083333	000000	000000	010100	010101	000000
$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$	0,083333	000100	000100	010000	010000	000101
$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$	0,083333	001000	001000	011100	011101	001000
$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$	0,083333	001100	001100	011000	011000	001101
$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$	0,041667	010000	010000	000100	000100	010001
$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$	0,041667	010100	010100	000000	000000	010101
$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$	0,041667	011000	011000	001100	001100	011001
$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$	0,041667	011100	011100	001000	001000	011101
$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$	0,083333	100000	100000	110100	110101	100000
$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$	0,083333	100100	100100	110000	110000	100101
$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$	0,083333	101000	101010	111110	111111	101010
$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$	0,083333	101100	101110	111010	111010	101111
$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$	0,041667	110000	110000	100100	100100	110001
$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$	0,041667	110100	110100	100000	100000	110101
$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$	0,041667	111000	111010	101110	101110	111011
$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$	0,041667	111100	111110	101010	101010	111111

7 CONCLUSÃO

Este trabalho descreve uma metodologia para representação dos conjuntos fuzzy intuicionistas propostos por Atanassov, incluindo operações sobre conjuntos fuzzy intuicionistas via registradores quânticos e portas quânticas.

Esta metodologia contribui para obter uma representação de operações entre conjuntos fuzzy intuicionistas que preserva a representabilidade dos conectivos fuzzy intuicionistas, a partir da aplicação propriedades como a sobreposição de estados, a linearidade e distributividade do produto tensorial no espaço de estados e de operadores da CQ.

7.1 Principais contribuições

As principais contribuições alcançadas com o desenvolvimento deste trabalho estão resumidas logo a seguir:

- (i) consolidação da metodologia qfuzzy-Analyser para representação de conjuntos fuzzy via operadores e estados da computação quântica;
- (ii) introdução e consolidação da metodologia qfuzzy2-Analyser para representação da informação modelada por conjuntos fuzzy intuicionistas e operações definidas por conectivos fuzzy intuicionistas, os quais estão representados via registradores e transformações quânticas no modelo de Circuitos Quânticos;
- (iii) extensibilidade da biblioteca de métodos qfuzz-Analyzer para a biblioteca qfuzzy2-Analyser garantindo a preservação da representabilidade dos conectivos fuzzy intuicionistas na metodologia desenvolvida, fazendo uso da sobreposição, linearidade e distributividade do produto tensorial no espaço de estados e de operadores quânticos;
- (iv) validação da metodologia e biblioteca de métodos desenvolvida considerando ambiente de simulação quântica via software dos algoritmos quânticos que implementam os métodos da biblioteca qfuzzy2-Analyzer, neste caso considerando as interfaces do ambiente de programação visual VPE-qGM.

Este estudo, embora restrinja-se à análise das operações de complemento, união e intersecção fuzzy, implicação e coimplicação fuzzy, diferença e codiferença fuzzy, estende a metodologia às construções duais com resultados publicados (REISER et al., 2016).

A representação de todos operadores está baseada em composições de transformações quânticas unitárias e controladas e a correspondente interpretação de operadores fuzzy sobre conjuntos fuzzy foi obtida aplicando operações de medidas projetiva. Para todos os operadores descrito por esta metodologia, apresentam-se implementações via simulação no VPE-qGM validando suas expressões e especificações.

As simulações destas novas portas quânticas, na ferramenta VPE-qGM, validam a modelagem proposta. Assim, ao confrontar os modelos matemáticos com as saídas da simulação no VPE-qGM, podemos avaliar a aproximação para as variáveis instanciadas que ocorrem na expressão algébrica dos estados de uma computação com a correspondente probabilidade de ocorrência destes estados durante a simulação.

A extensão da modelagem de conectivos fuzzy intuicionistas por algoritmos quânticos multi-dimensionais levou em consideração a composicao de algoritmos mais simples modelados por operadores fuzzy (portas controladas como CNOT, Toffoli e outras).

Perante o exposto, observou-se que para conectivos fuzzy de maior complexidade na expressão da representabilidade, faz-se uso de um maior número de qubits na validação do modelo pela simulação no VPE-qGM. Podemos então ressaltar a relevância da simulação no VPE-qGM para a validação do modelo matemático, considerando uma alternativa para manipulação de dados face à expansão exponencial da memória, refletindo no número de qubits nas novas construções.

7.2 Trabalhos Futuros

Trabalhos futuros consideram a especificação de outros conectivos fuzzy e construtores fuzzy como bi-implicações e agregadores da lógica fuzzy intuicionista bem como outros construtores, como a conjugação pela ação de automorfismo e operadores de reduções e composição. e a correspondente extensão da metodologia fuzzy e formas de estruturas.

Como extensão da metodologia consideram-se pesquisas aplicadas em áreas onde componentes de sistemas possuem componentes com diferentes características e com o alto grau de correlação, mas inerentemente proveem de informação incerta e/ou hesitante.

Avaliação de propriedades como emaranhamento e superposição estados e operadores quânticos aplicados para novos métodos, onde o nível de correlação entre as

variáveis pode ser controlado pela apropriação do estado quântico gerado por operadores unitários.

Desenvolvimento de novas simulações no ambiente de programação visual VPE-qGM, com possibilidade de simulação do paralelismo quântico em arquiteturas multi-processadas como GPUs.

Em andamento e na perspectiva de desenvolvimento e continuidade, o projeto busca agregar na biblioteca métodos para modelagem e composição de novos conectivos fuzzy intuicionistas, considerando entre muitas questões de pesquisa: (i) outras classes de implicações; conectivos XOR e classes representáveis; correspondentes formais duais e, outros operadores obtidos pela conjugação de automorfismos sobre conectivos fuzzy intuicionistas.

Além disso, podemos investigar a modelagem de relações fuzzy intuicionistas via processos quânticos e correspondente simulação das etapas de (de)fuzzyficação dos algoritmos fuzzy.

Concluindo, o estudo das afinidades entre a LFI e a CQ pode contribuir para novas aplicações da computação quântica. Considerando as abstrações fornecidas pelos conjuntos fuzzy intuicionistas quânticos e a interpretação dos conceitos relacionados com a nova extensão da biblioteca de componentes construídos com os resultados obtidos no projeto, pode-se expandir o uso e aplicação dos algoritmos quânticos criando novas soluções para problemas estudados no contexto da computação e informação quântica.

REFERÊNCIAS

- AGOSTINI, L. **Análise e Simulação dos Conectivos Fuzzy Intuicionistas via Computação Quântica**. [S.l.]: Universidade Federal de Pelotas, Brasil, 2017.
- ALSINA, C.; TRILLAS, E. On the difference of fuzzy sets. **International Journal of Intelligent Systems**, [S.l.], v.23, n.3, p.355–363, 2008.
- ATANASSOV, K. **Intuitionistic fuzzy sets: theory and applications**. [S.l.]: Physica Verlag, 1999. (Studies in fuzziness and soft computing).
- ATANASSOV, K.; GARGOV, G. Interval Valued Intuitionistic Fuzzy Sets. **Fuzzy Sets and Systems**, [S.l.], v.31, n.3, p.343–349, 1989.
- ATANASSOV, K.; GARGOV, G. Els. of Intuitionistic Fuzzy Logic. **Fuzzy Sets and Sysys.**, [S.l.], v.9, n.1, p.39–52, 1998.
- ATANASSOV, K. T. Intuitionistic Fuzzy Sets. **Fuzzy Sets and Systems**, [S.l.], v.20, p.87–96, 1986.
- ATANASSOV, K. T. Intuitionistic fuzzy sets: past, present and future. In: WAGENKNECHT, M.; HAMPEL, R. (Ed.). **EUSFLAT Conf**. [S.l.]: UASZG, Germany, 2003. p.12–19.
- AVILA, A. B. de; SCHMALFUSS, M.; REISER, R.; KREINOVICH, V. Fuzzy Xor Classes from Quantum Computing. In: RUTKOWSKI, L.; KORYTKOWSKI, M.; SCHERER, R.; TADEUSIEWICZ, R.; ZADEH, L. A.; ZURADA, J. M. (Ed.). **Artificial Intelligence and Soft Computing - 14th International Conference, ICAISC 2015, Zakopane, Poland, Proceedings Part II**. [S.l.]: Springer, 2015. p.305–317. (Lecture Notes in Computer Science, v.9120).
- BACZYNSKI, M. On some properties of intuitionistic fuzzy implications. In: EUSFLAT CONF, 2003. **Anais...** University of Applied Sciences at Zittau/Görlitz: Germany, 2003. p.168–171.
- BACZYŃSKI, M. On Some Properties of Intuitionistic Fuzzy Implications. **Katowice, ul. Bankowa**, [S.l.], n.14, p.1–4, 2007.

BAETS, B. Coimplicators, The Forgotten Connectives. **Tatra Mountains Mathematical Publications**, [S.l.], p.229–240, 1997.

BARROS, L. C.; BASSANEZI, R. C. **Tópicos de Lógica Fuzzy com Aplicações em Biomatemática**. Campinas, SP: UNICAMP/IMECC, 2006.

BEZDEK, J.; DUBOIS, D.; PRADE, H. (Ed.). **Fuzzy sets in Approximate Reasoning and Information Systems**. Boston, Mass., USA: Kluwer, 1999. (The Handbooks of Fuzzy Sets).

BUSTINCE, H.; BARRENECHEA, E.; MOHEDANO, V. Intuitionistic Fuzzy Implication Operators - An Expression and Main Properties. **Fuzziness and Knowledge-Based Systems**, [S.l.], v.12, p.387–406, 2004.

BUSTINCE, H.; BURILLO, P.; SORIA, F. Automorphisms, Negations and Implication Operators. **Fuzzy Sets and Systems**, [S.l.], v.134, n.2, p.209 – 229, 2003.

CORNELIS, C.; ATANASSOV, K. T.; KERRE, E. E. Intuitionistic Fuzzy Sets and Interval-Valued Fuzzy Sets: a Critical Comparison. In: EUSFLAT CONF, 2003. **Anais...** University of Applied Sciences at Zittau/Görlitz: Germany, 2003. p.159–163.

CORNELIS, C.; DESCHRIJVER, G.; KERRE, E. E. Classification Of Intuitionistic Fuzzy Implicators: An Algebraic Approach. In: JCIS, 2002. **Anais...** JCIS / Association for Intelligent Machinery: Inc, 2002. p.105–108.

DAS, A.; MELISSINOS, A. **Quantum Mechanics**: a modern introduction. [S.l.]: Gordon and Breach Science Publisher, 1986.

DENGFENG, L.; CHUNTIAN, C. New similarity measures of intuitionistic fuzzy sets and application to pattern recognitions. **Pattern Recognition Letters**, [S.l.], v.23, n.1-3, p.221–225, Jan. 2002.

DESCHRIJVER, G.; CORNELIS, C.; KERRE, E. On the representation of intuitionistic fuzzy t-norms and t-conorms. In: JCIS / ASSOCIATION FOR INTELLIGENT MACHINERY, INC, 2004. **Anais...** IEEE, 2004. p.45–61.

DESCHRIJVER, G.; KERRE, E. Implicators based on binary aggregation operators in interval-valued fuzzy set theory. **Fuzzy Sets and Systems**, [S.l.], v.153, n.2, p.229–248, 2005.

DESCHRIJVER, G.; KERRE, E. E. Smets-magrez Axioms for R-implicators in Interval-valued and Intuitionistic Fuzzy Set Theory. **International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems**, [S.l.], v.13, n.4, p.453–464, 2005.

DUBOIS, D.; PRADE, H. Fuzzy Preference Modelling and Multicriteria Decision Support. In: FODOR, J.; ROUBENS, M. (Ed.). **Series D: System Theory, Knowledge Engineering and problem Solving**. [S.l.]: Kluwer, 1994.

DUBOIS, D.; PRADE, H. **Fundamentals of Fuzzy Sets**. Boston: Kluwer Academic Publishers, 2000.

FODOR, J. C. On Fuzzy Implication Operators. **Fuzzy Sets and Systems**, [S.l.], v.42, n.3, p.293–300, 1991.

FODOR, J.; ROUBENS, M. **Fuzzy Preference Modelling and Multicriteria Decision Support**. Dordrecht: Kluwer Academic Publisher, 1994.

G. CORNELIS G. DESCHRIJVER, E. K. Implications in intuitionistic fuzzy and interval-valued fuzzy set theory: construction, classification and application. **International Journal of Approximate Reasoning**, [S.l.], n.35, p.55–95, 2004.

HERRERA, F.; MARTÍNEZ, L.; SÁNCHEZ, P. J. Managing non-homogeneous information in group decision making. **European Journal of Operational Research**, [S.l.], v.166, n.1, p.115–132, 2005.

HUAWEN, L. **Difference operation defined over the intuitionistic fuzzy sets**. [S.l.]: Shandong University, Jinan, Shandong 250100, China, 1987.

IMRE, S.; BALÁZS, F. **Quantum Computing and Communications - an Engineering Approach**. NJ: John Wiley & Sons, 2005. 283p.

KARNIK, N.; MENDEL, J.; LIANG, Q. Type-2 Fuzzy Logic Systems. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, [S.l.], v.7, n.6, p.643–658, 1999.

KAYE, P.; LAFLAMME, R.; MOSCA, M. **An Introduction to Quantum Computing**. [S.l.]: Oxford University Press, 2007.

KLEMENT, E.; MESIAR, R.; PAP, E. Triangular norms. Position paper I: basic analytical and algebraic properties. **Fuzzy Sets and Systems**, [S.l.], v.143, n.1, p.5–26, 2004.

KLEMENT, E. P.; MESIAR, R.; PAP, E. **Triangular Norms**. Dordrecht: Kluwer Academic Publisher, 2000.

KLIR, G. J. Developments in Uncertainty-Based Information. **Advances in Computers**, [S.l.], v.36, p.255–332, 1993.

KNILL, E.; LAFLAMME, R.; BARNUM, H.; DALVIT, D.; DZIARMAGA, J.; GUBERNATIS, J.; GURVITS, L.; ORTIZ, G.; VIOLA, L.; ZUREK, W. H. **Introduction to Quantum Information Processing**.

KOSHELEVA, O.; REISER, R.; KREINOVICH, V. Formalizing the informal, precisiating the imprecise: How fuzzy logic can help mathematicians and physicists by formalizing their intuitive ideas. In: LECTURE NOTES IN COMPUTER SCIENCE, 2015. **Anais...** Springer International Publishing: Netherlands: 2015, 2015. p.301–321. (Lecture Notes in Computer Science, v.325).

KREINOVICH, V.; KOHOUTB, L.; KIMC, E. Square Root of "Not": A Major Diference Between Fuzzy and Quantum Logics. **International Journal of General Systems**, [S.I.], 2008.

LEPORINI, M. L. D. C. R. G. G. S. R. A many-valued approach to quantum computational logics. **Fuzzy Sets and Systems**, [S.I.], 2016.

LIN, L.; XIA, Z. Intuitionistic fuzzy implication operators: Expressions and Properties. **Journal of Applied Mathematics and Computing**, [S.I.], v.22, n.3, p.325–338, 2003.

M, G.; MARICHAL, J.; MESIAR, R.; PAP, E. **Aggregation functions**. [S.I.]: Cambridge University Press, 2009.

MAES, K.; BAETS, B. de. Commutativity and self-duality: Two tales of one equation. **Int. J. Approximate Reasoning**, New York, NY, USA, v.50, n.1, 2009.

MANNUCCI, M. Quantum Fuzzy Sets: Blending Fuzzy Set Theory and Quantum Computation. **CoRR**, [S.I.], v.abs/cs/0604064, p.1–12, 2006.

MARON, A. K.; REISER, R. H. S.; PILLA, M. L. Correlations from Conjugate and Dual Intuitionistic Fuzzy Triangular Norms and Conorms. In: CCGRID 2013 IEEE/ACM INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON CLUSTER, CLOUD AND GRID COMPUTING, 2013, NY. **Anais...** IEEE, 2013. p.1–8.

MARON, A.; REISER, R. H. S.; PILLA, M.; YAMIN, A. Expanding the VPEqGM Environment Towards a Parallel Quantum Simulation of Quantum Processes Using GPUs. **CLEI Electronic Journal**, [S.I.], v.16, n.3, p.1–18, 2013.

MARON, A.; REISER, R. H. S.; PILLA, M.; YAMIN, A. Quantum Processes: A Novel Optimization for Quantum Simulation. **TEMA: Trends in Applied and Computational Mathematics**, [S.I.], v.14, n.3, 2013.

MARON, A.; VISINTIN, L.; ABEIJON, A.; REISER, R. Interpreting Fuzzy Connectives from Quantum Computing - Case Study in Reichenbach Implication Class. In: CBSF 2012 - CONGRESSO BRASILEIRO DE SISTEMAS FUZZY, 2012. **Anais...** [S.I.: s.n.], 2012. p.1–12.

MARON, A.; VISINTIN, L.; ABEIJON, A.; REISER, R. Fuzzy Computing from Quantum Computing Case Study in Reichenbach Implication Class. **Mathware Soft Computing Magazine**, [S.l.], v.20, n.1, p.86–114, 2013.

MARON, A.; VISINTIN, L.; REISER, R.; ABEIJON, A.; KREINOVICH, V. Aggregation Operations from Quantum Computing. In: FUZZ–IEEE 2013, IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON FUZZY SYSTEMS, 2013. **Anais...** IEEE Xplore Digital Library, 2013. p.1–6.

MITCHELL, H. B. Pattern recognition using type-II fuzzy sets. **Inf. Sci**, [S.l.], v.170, n.2-4, p.409–418, 2005.

NIELSEN, M.; CHUANG, I. **Quantum Computation and Quantum Information**. [S.l.]: Cambridge, 2003.

PRESKILL, J. **Lecture Notes - Course Information for Physics/Computer Science/Quantum Computation**. Caltech Particle Theory Group - California Institute of Technology - USA.

R. SERWAY, J. W. J. **Princípios de Física - Óptica e Física Moderna**. [S.l.]: Thompson, 2004. v.4.

REISER, R.; LEMKE, A.; AVILA, A.; VIEIRA, J.; PILLA, M.; BOIS, A. D. Interpretations on Quantum Fuzzy Computing: Intuitionistic Fuzzy Operations $\times$ Quantum Operators. **Electr. Notes Theor. Comput. Sci**, [S.l.], v.324, p.135–150, 2016.

SAKURAI, J. **Modern Quantum Mechanics**. [S.l.]: Addison-Wesley Publisher, 1994.

SZMIDT, E.; KACPRZYK, J. A Similarity Measure for Intuitionistic Fuzzy Sets and Its Application in Supporting Medical Diagnostic Reasoning. In: ARTIFICIAL INTELLIGENCE AND SOFT COMPUTING - ICAISC 2004, 7TH INTERNATIONAL CONFERENCE, ZAKOPANE, POLAND, JUNE 7-11, 2004, PROCEEDINGS, 2004. **Anais...** Springer, 2004. p.388–393. (Lecture Notes in Computer Science, v.3070).

TARTAS, E. B.; SOLA, H. B.; PAGOLA, M.; FERNÁNDEZ, J.; SANZ, J. Generalized Atanassov's Intuitionistic Fuzzy Index. Construction Method. In: IFSA/EUSFLAT CONF'09, 2009. **Anais...** [S.l.: s.n.], 2009. p.478–482.

VIEIRA, J. **Análise e Simulação dos Conectivos Fuzzy XOR e Classes Derivadas via Computação Quântica**. [S.l.]: Universidade Federal de Pelotas, Brasil, 2015.

VISINTIN, L.; MARON, A.; REISER, R.; ABEIJON, A. Interpreting Fuzzy Set Operations from Quantum Computing. In: WECIQ 2012, IV WORKSHOP-SCHOOL IN QUANTUM COMPUTATION AND INFORMATION, 2012. **Anais...** [S.l.: s.n.], 2012. p.142–151.

WANG, W. Q.; XIN, X. L. Distance measure between intuitionistic fuzzy sets. **Pattern Recognition Letters**, [S.l.], v.26, n.13, p.2063–2069, Oct. 2005.

XU, Z. Corrigendum to Dynamic intuitionistic fuzzy multi-attribute decision making [Int. J. Approx. Reasoning 48 (2008) 246-262]. **Int. J. Approx. Reasoning**, [S.l.], v.51, n.1, p.162–164, 2009.

XU, Z.; YAGER, R. R. Intuitionistic and interval-valued intuitionistic fuzzy preference relations and their measures of similarity for the evaluation of agreement within a group. **FO & DM**, [S.l.], v.8, n.2, p.123–139, 2009.

YE, J. Cosine similarity measures for intuitionistic fuzzy sets and their applications. **Mathematical and Computer Modelling**, [S.l.], v.53, n.1-2, p.91–97, 2011.

ZADEH, L. A. Fuzzy Sets. **Information and Control**, [S.l.], v.8, n.3, p.338–353, 1965.

ZADEH, L. A. Fuzzy logics and approximate reasoning. **Synthese**, [S.l.], v.30, p.407–428, 1975.