UNIVERSIDADE FEDERAL DE PELOTAS
Centro de Desenvolvimento Tecnológico
Programa de Pós-Graduação em Computação

Dissertação

Implicações Fuzzy Obtidas por Agregadores Multi-dimensionais

Íbero Camilo Kreps Benítez

Pelotas, 2014

Íbero Camilo Kreps Benítez

Implicações Fuzzy Obtidas por Agregadores Multi-dimensionais

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Computação da Universidade Federal de Pelotas, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Ciência da Computação

Orientador: Profª. Drª. Renata Hax Sander Reiser
Co-orientador: Prof. Dr. Adenauer Corrêa Yamin

Pelotas, 2014

Dados de catalogação na fonte:
Aline Herbstrith Batista – CRB-10/1737
Biblioteca de Ciência & Tecnologia – UFPel

B467i Benítez, Íbero Camilo Kreps

Implicações Fuzzy Obtidas por Agregadores Multi-dimensionais / Íbero Camilo Kreps Benítez. – Pelotas, 2014. – 75 f: gráf. – Dissertação (Mestrado em Ciência da Computação) – Programa de Pós-Graduação em Computação. Universidade Federal de Pelotas. Pelotas, 2014. – Orientador: Renata Hax Sander Reiser; Co-orientador: Adenauer Corrêa Yamin.

1. Lógica Fuzzy. 2. Implicações Fuzzy. 3. Operadores de Agregação. I. Reiser, Renata Hax Sander. II. Yamin, Adenauer Corrêa. III. Título.

CDD: 005.131

Insira AQUI a folha de aprovação
(será entregue após à banca)

Dedico este trabalho à minha família e aos amigos,
pelo tremendo apoio e incentivo aos estudos.

AGRADECIMENTOS

À Professora Renata pela constante atenção e dedicação durante esta jornada.

Ao Professor Adenauer, pelas colaborações, sugestões e esclarecimentos de grande valia.

Ao Programa de Pós-Graduação em Computação da UFPel e à CAPES, por conceder-me a bolsa de estudos para cursar este Mestrado.

Aos colegas do LUPS, pelo companheirismo no laboratório de pesquisa e momentos de descontração.

A todos os professores do Programa, os quais contribuíram direta ou indiretamente para a minha formação no percurso desta Pós-Graduação.

"...E você corre e corre atrás do Sol
mas ele está se pondo
Fazendo a volta para
nascer atrás de você outra vez
De maneira relativa o Sol é o mesmo,
mas você está mais velho
Com menos fôlego
e um dia mais perto da morte..."
— 'Time' (Pink Floyd)

"...Não me nutro da mesma maneira que os turistas.
Não, não é assim que se conhece um povo,
uma forma e uma interpretação da vida.
Aquilo é uma coberta luxuosa,
mas sua alma [do povo] está refletida
nos enfermos dos hospitais, nos asilados na delegacia
ou no pedestre ansioso com quem se fraterniza"
— Ernesto R. Guevara de la Serna

"...[O homem] apesar de sua racionalização e toda a sua eficiência,
continua possuído por 'forças' além do seu controle.
Seus deuses e demônios absolutamente não desapareceram;
têm apenas novos nomes. E conservam-no em contato íntimo
com a inquietude, apreensões vagas, complicações psicológicas,
uma insaciável necessidade de pílulas, álcool, fumo, alimento e,
acima de tudo, com uma enorme coleção de neuroses."
— Carl G. Jung

"Conhece-te a ti mesmo, e então conhecerás o universo e os deuses."
— Uma das máximas de Delfos

RESUMO

BENÍTEZ, Íbero Camilo Kreps. **Implicações Fuzzy Obtidas por Agregadores Multi-dimensionais**. 2014. 75 f. Dissertação (Mestrado em Ciência da Computação) – Programa de Pós-Graduação em Computação, Universidade Federal de Pelotas, Pelotas, 2014.

Implicações fuzzy têm um importante papel na modelagem de sistemas inteligentes baseados na Lógica Fuzzy, permitindo a estes maior flexibilidade para deduzir conclusões significativas de maneira similar ao raciocínio humano. Este trabalho considera a construção de novos conectivos fuzzy obtidos por aplicação de funções de agregação multidimensionais, com ênfase na obtenção de novas t-subnormas, t-subconormas e subimplicações. Mostra-se que a análise de propriedades preservadas por tais funções de agregação leva à generalização das principais classes destes conectivos fuzzy. Estes resultados são extensões dos conceitos fundamentais referentes às classes de implicações representáveis a partir de negações fuzzy, de normas e conormas triangulares. Assim, nosso principal desafio de pesquisa se reporta à generalização de princípios da Lógica Fuzzy, garantindo que os novos conectivos preservem as propriedades algébricas que caracterizam suas correspondentes classes. Neste contexto, ao considerar a associatividade generalizada e a distributividade das funções de agregação em relação a famílias de t-subnormas e t-subconormas, assegura-se que a propriedade associativa é satisfeita pelos novos membros de cada classe destes conectivos. De forma análoga, o princípio da troca generalizado é condição necessária para a preservação de classes de subimplicações fuzzy como (S,N)-, QL- e D-subimplicações. Estudam-se as usuais funções de agregação no contexto da Lógica Fuzzy, incluindo as correspondentes propriedades algébricas. Em particular, estudos de casos são desenvolvidos para estas três classes de subimplicações representáveis, com base na média ponderada ordenada – denominada operador OWA, e duas de suas importantes subclasses, a média aritmética e a mediana. Este trabalho apresenta ainda a conjugada associada aos novos conectivos fuzzy, as quais são obtidas por ação de automorfismos que também preservam as propriedades das classes (S,N), QL- e D-de subimplicações. Os resultados referentes à representabilidade preservada pela a ação dos automorfismos estão resumidos em diagramas comutativos, explicitando o relacionamento entre os conectivos fuzzy e os agregadores aplicados na sua construção. Concluindo, pela formalização aqui apresentada nos teoremas e proposições, consolida-se uma metodologia para obter novos conectivos amplamente exemplificada para as principais classes de subimplicações fuzzy.

Palavras-chave: Lógica Fuzzy, Implicações Fuzzy, Operadores de Agregação.

ABSTRACT

BENÍTEZ, Íbero Camilo Kreps. **Fuzzy Implications obtained by Multidimentional Aggregation Operators**. 2014. 75 f. Dissertação (Mestrado em Ciência da Computação) – Programa de Pós-Graduação em Computação, Universidade Federal de Pelotas, Pelotas, 2014.

Fuzzy Implications play an important role on intelligent systems, allowing them to be modelled by plausible conclusions in a similar way to human reasoning. This work considers a construction of new fuzzy connectives obtained by application of multidimensional aggregation functions, achieving new triangular subnorms and subconorms together with fuzzy subimplications. It shows that the analysis of properties preserved by such aggregation functions leads to a generalization of the main classes of fuzzy implications. These results connected to representable fuzzy subimplications are extensions of fundamental concepts related to main representable implication classes, meaning that they are defined by composition of fuzzy negations, triangular subnorms and subconorms. Thus, the main research problem is concern with the generalization of fuzzy logic principles, assuring that the new fuzzy connectives preserve the algebraic properties characterizing their corresponding classes. In this context, by considering the generalized associativity and distributivity of aggregation functions related to families of triangular subnorms or subconorms, the associativity property of a new fuzzy triangular subnorm or subconorm is verified. Analogously, the generalized exchange principle is a necessary condition in order to preserve representable subimplication classes as the (S,N)-, QL- and D-subimplications. In addition, the usual aggregation functions on fuzzy logic context are studied, including corresponding algebraic properties. In particular, case studies are developed to these three representable subimplication classes based on the ordered weighted average – referred as the OWA operator, together with two of its main subclasses, the arithmetic mean and median. This work also presents the conjugate associated to the (S,N)-, QL- and D-subimplications, which are obtained by action of automorphisms preserving the corresponding properties of new fuzzy connectives. Results related to representable conjugate functions preserved by action of automorphisms are summarized by commutative diagrams, explicitly describing the relationship among the new connectives and the aggregation function applied in their construction. Concluding, by this formal approach presented as theorems and propositions, this work consolidates a methodology to obtain new connectives, providing examples for main fuzzy subimplication classes.

Keywords: Fuzzy Logic, Fuzzy Implications, Aggregation Functions.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 Função de Pertinência Triangular. 21

Figura 2 Subimplicações da família $\mathcal{I} = \{I_1, I_2, I_3\}$. 44
Figura 3 Família de QL-subimplicacoes fuzzy $\mathcal{J}_{QL} = \{J_1, J_2, J_3\}$. 47
Figura 4 Família de D-subimplicações fazzy $\mathcal{L} = \{L_1, L_2, L_3\}$. 50
Figura 5 Comutatividade das Classes das (S,N)-implicações sob a ação de um automorfismo ϕ 50
Figura 6 Comutatividade das Classes das QL-implicações sob a ação de um automorfismo ϕ. 51
Figura 7 Comutatividade das Classes das D-implicações sob a ação de um automorfismo ϕ 52

Figura 8 Classe das $(\mathcal{S}_M, N_S)$-implicações. 58
Figura 9 Classe das $(\mathcal{S}_{M_d}, N_S)$-implicações. 59
Figura 10 Diagrama comutativo da classe das $(\mathcal{S}_{OWA}, N_S)$-subimplicações. . . 61
Figura 11 Classe de $(\mathcal{S}_M, T_P, N_S)$-subimplicações obtida pelo operador M. . . . 65
Figura 12 Classe de $(\mathcal{S}_{M_d}, T_P, N_S)$-subimplicações obtida pelo operador M_d. . . 66
Figura 13 Diagrama comutativo da classe das $(\mathcal{S}_{OWA}, N_S)$-subimplicações. . . 67

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

χ	Função Característica
μ	Função de Pertinência
$\mathcal{F}$	Conjunto finito de Implicações
$\mathcal{F}_A$	Operador gerado por um Agregador A aplicado a um conjunto finito de implicações
N	Negação Fuzzy
A	Função/Operador de Agregação Fuzzy
T	T-Norma
S	T-Conorma
I	Implicação Fuzzy
I_N ou J	Coimplicação Fuzzy
M	Média Aritmética
M_w	Média Ponderada
M_d	Mediana

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 14
1.1 Tema 15
1.2 Motivação 15
1.3 Objetivos 17
1.4 Metodologia 17
1.5 Organização do Texto 18

2 LÓGICA FUZZY 19
2.1 Conjuntos Fuzzy 19
2.2 Automorfismos e Funções Conjugadas 20
2.3 Negações Fuzzy 22
2.3.1 Função N-Dual 23
2.3.2 Automorfismos e Negações Fuzzy 23
2.4 (Sub)implicações Fuzzy 24
2.5 Considerações Finais 26

3 OPERADORES DE AGREGAÇÃO 27
3.1 Definição 27
3.1.1 Conjugada de Agregadores Fuzzy 28
3.2 Propriedades de um Operador de Agregação 29
3.3 Operadores Agregadores 30
3.3.1 Média Ponderada Ordenada (OWA) 30
3.3.2 Média Aritmética 31
3.3.3 Mediana 32
3.3.4 Mínimo e Máximo 33
3.4 Normas e Conormas Triangulares 34
3.4.1 Dualidade de Sub(co)normas Triangulares 35
3.4.2 Conjugada de Normas e Conormas Triangulares 36
3.5 Considerações Finais 36

4 AGREGAÇÃO DE T-SUB(CO)NORMAS 38
4.1 Média Aritmética e a Classe de t-sub(co)normas 39
4.2 Mediana e a Classe de t-sub(co)normas 40
4.3 Operador OWA e a Classe de t-sub(co)normas 41

5 SUBIMPLICAÇÕES FUZZY REPRESENTÁVEIS 43
5.1 Classe das (S,N)-subimplicações Fuzzy 43
5.2 Classe das QL-subimplicações Fuzzy 45
5.2.1 Classe das D-subimplicações fuzzy 48
5.3 Conjugada de Subimplicações Fuzzy 49
5.3.1 Automorfismos sobre (S,N)-subimplicações 50
5.3.2 Automorfismos sobre QL-implicações 51
5.3.3 Automorfismos sobre D-implicações 51
5.4 Considerações Finais 52

6 AGREGAÇÃO DE SUBIMPLICAÇÕES FUZZY 53
6.1 Agregação de (S,N)-subimplicações 56
6.1.1 Média Aritmética 56
6.1.2 Mediana 57
6.1.3 Média Ponderada Ordenada 59
6.2 Agregação de QL-subimplicações 61
6.2.1 Operador de Média Aritmética 61
6.2.2 Operador de Mediana 62
6.2.3 Agregador Média Ordenada Ponderada (OWA) 63
6.3 Agregação de D-subimplicações 64
6.3.1 Operador Média Aritmética 64
6.3.2 Operador Mediana 65
6.3.3 Operador Média Ordenada Ponderada (OWA) 66
6.4 Considerações Finais 67

7 CONCLUSÃO 68

REFERÊNCIAS 69

1 INTRODUÇÃO

Implicações fuzzy têm um papel fundamental no desenvolvimento de regras de inferências em sistemas especialistas baseados em Lógica Fuzzy. Estes conectivos fuzzy permitem, por exemplo, que sistemas inteligentes sejam modelados para tomada de decisões plausíveis, de maneira similar ao pensamento humano. E, tais sistemas possuem aplicação em diversas áreas do raciocínio aproximado, com elevada relevância no estudo de equações relacionais fuzzy (MAS et al., 2007), na morfologia fuzzy (BLOCH, 2011) e no processamento de imagens (BELIAKOV; BUSTINCE; FERNANDEZ, 2011).

As implicações também são frequentemente utilizadas com funções de agregação em sistemas de raciocínio aproximado (BACZYNSKI; JAYARAM, 2008a; FODOR; ROUBENS, 1994), mas sempre agregando dois operadores, ou seja, considerando funções de agregacão bi-dimensionais, como em (BUSTINCE et al., 2010).

Funções de agregação (operadores de agregação ou agregadores), neste contexto, são funções cujo domínio de definição (entrada dos dados - números fuzzy) consiste em vários conjuntos fuzzy e realizam uma operação de agregação sobre esses conjuntos de tal maneira que a imagem é definda por um único conjunto fuzzy que contém como resposta o resultado desta operação. Operadores de agregação sobre uma classe de conectivos fuzzy também são usados para gerar um novo membro desta classe.

As funções de agregação mais utilizadas são as normas e as conormas triangulares. Entretanto, para certas aplicações, propriedades restritivas como a associatividade ou comutatividade devem ser estendidas. Tem-se então outros agregadores como uninormas, pseudo-(co)normas, t-conormas fracas, medianas, médias (aritméticas, ordenadas, ponderadas) e tantas outras estudadas na literatura da área (DESCHRIJVER; KERRE, 2005a; MAKSA, 2005; JAYARAM; MESIAR, 2009; OUYANG, 2012; BELIAKOV et al., 2012).

Considerando o uso de funções de agregação aplicadas sobre uma família de conectivos fuzzy, este trabalho tem como principal objetivo a construção de novos conectivos pela aplicação de funções de agregação sobre três famílias de implicações: (S,N)-subimplicações, QL-subimplicações e D-subimplicações. Analisando-se as propriedades algébricas para estas novas subimplicações e extendendo-se conceitos que assegurem a

preservação da classe das subimplicações. Com isso, obtém-se uma metodologia para obter novos conectivos fuzzy, a qual foi destacada em diagramas que comutam dentro das classes de subimplicações.

Esta dissertação aborda, no segundo capítulo, os conceitos básicos relacionados à Lógica Fuzzy. Definições de função característica e função de pertinência; o conceito de automorfismos; e definições ressaltando as propriedades básicas referentes aos conectivos fuzzy: negações e subimplicações fuzzy.

No Capítulo 3, são elencados a definição de operador de agregação, principais propriedades e os operadores de agregação utilizados neste trabalho. Em especial, uma seção é voltada para subnormas trinagulares e subconormas triangulares, agregadores presentes na Lógica Fuzzy.

O Capítulo 4 refere-se à agregação de funções e sub(co)normas triangulares, analisando as propriedades preservadas pelas famílias desses conectivos com estudo de caso para os agregadores: média aritmética, mediana e a média ponderada ordenada (OWA).

O Capítulo 5, se reporta à definição de como são construídas as classes (S,N)-, QL- e D-subimplicações e à análise de suas propriedades. Além disso, mostra um estudo de caso referente à ação de automorfismos sobre cada uma dessas classes.

No Capítulo 6, situa-se a principal contribuição deste trabalho. Discorre sobre agregação de (sub)implicações fuzzy. Descreve a agregação considerando as três classes de subimplicações: (S,N)-, QL- e D-subimplicações. E, ainda, um diagrama comutativo relacionando a construção de novas subimplicações fuzzy a partir da agregação t-sub(co)normas e subimplicações fuzzy. Faz-se um estudo de caso do comportamento de cada operador de agregação estudado, sobre as três classes de subimplicações.

O Capítulo 7, relata as principais considerações finais deste trabalho e os trabalhos futuros.

1.1 Tema

O tema deste trabalho contempla a construção de novos conectivos fuzzy usando operadores de agregação. Aplicando um operador de agregação multi-dimensional a um conjunto finito de subimplicações fuzzy, pode-se construir novas subimplicações. Tais construções de subimplicações preservam propriedades usuais das implicações fuzzy, viabilizando a modelagem de sistemas fuzzy mais flexíveis.

1.2 Motivação

A Lógica Fuzzy, é uma lógica multivalorada capaz de modelar informações vagas e/ou incertas de sistemas reais, as quais estão normalmente descritas em uma linguagem natural, e assim, convertê-las para um formato de fácil manipulação por sistemas

computacionais (BARROS; BASSANEZI, 2010; CARLSSON; FULLER, 2002).

A Lógica Fuzzy auxilia na tomada de decisões em sistemas de controle, frequentemente baseados em informações obtidas por especialistas. Tal contribuição pode ser facilmente verificada em aplicações nas áreas de reconhecimento de padrões, comunicação de informação e processamento de imagens (KLIR, 1993; DUBOIS; OSTASIEWICZ; PRADE, 2000; MITRA; PAL, 2005; KLIR, 2005).

A principal diferença entre uma proposição lógica definida sobre conjuntos clássicos e uma proposição lógica definida sobre conjuntos fuzzy, de acordo com a teoria introduzida por Zadeh (ZADEH, 1965), está na valoração do grau de pertinência, cujos valores são números reais no intervalo unitário $U = \{x \in \mathbb{R} \colon 0 \leq x \leq 1\} = [0, 1]$. Assim, os conectivos fuzzy de aridade n são funções $U^n \to U$, as quais estendem os correspondentes clássicos, preservando suas principais propriedades algébricas nos pontos extremos do intervalo unitário.

Em especial, as operações de agregação sobre conjuntos fuzzy são operações pelas quais vários conjuntos fuzzy são agregados de tal maneira que seja produzido um único conjunto fuzzy como resposta, o qual preserva as principais propriedades dos conjuntos agregados.

Mais formalmente, uma função (operador) de agregação $A : U^n \to U$ é uma função monotônica, não-decrescente em todos os seus argumentos, que preserva os argumentos nos extremos do intervalo unitário U. Uma função de agregação coincide com a função identidade quando se considera apenas um argumento na sua definição ($n = 1$).

As propriedades algébricas se reportam às propriedades dos sistemas modelados pela Lógica Fuzzy, e podem gerar diferentes classes de agregações (DETYNIECKI, 2001). Exemplos de funções de agregação são a média aritmética, média ponderada e média ponderada ordenada, a mediana, o máximo e o mínimo, o máximo e o mínimo ponderados.

Considerando os estudos científicos já consolidados nesta área de pesquisa (DESCHRIJVER; KERRE, 2005b; LIU; WANG, 2006; MAYORAND; J.MONREAL, 2007; REISER; BEDREGAL, 2011; XIA; XU, 2011), este trabalho visa a obtenção de implicações fuzzy a partir da análise das propriedades algébricas satisfeitas por funções de agregação. Neste contexto, considera-se a construção de um novo operador (conectivo) fuzzy indicado por $\mathcal{F}_A$, gerado pela aplicação de uma função de agregação A sobre um conjunto finito de subimplicações fuzzy. E analisa-se, sob quais condições este operador $\mathcal{F}_A$ verifica as propriedades de sua correspondente classe. Este trabalho está baseado nos fundamentos introduzidos em (REISER; BEDREGAL; BACZYNSKI, 2013) e estende tal pesquisa, seja na investigação das propriedades das implicações preservadas pela construção proposta, seja na busca de exemplificações em novas subclasses.

Diferentemente de recentes pesquisas (OUYANG, 2012), este trabalho não se restringe ao estudo de operadores de agregação binários, ou seja, obtenção de um novo

conectivo fuzzy a partir da agregação de apenas outros dois. Este estudo mais restritivo, elimina a investigacão de propriedades como a associatividade, e por consequência, o princípio da troca. Tais propriedades, na sua generalização, consideram sempre três ou mais conectivos na sua definição e aplicação.

A relevância do estudo das implicações fuzzy para a modelagem de sistemas de inferência baseados na Lógica Fuzzy pode ser verificada na diversidade de trabalhos recentemente realizados (CORNELIS; DESCHRIJVER; KERRE, 2002; LI, 2011; DESCHRIJVER; KERRE, 2005a). O estudo das implicações fuzzy é uma área de pesquisa consolidada, com diferentes formas de representação: implícita, explícita e axiomática das implicações fuzzy. Várias extensões vêm sendo consideradas, como a abordagem intuicionista e a abordagem intervalar. Além desses estudos, diferentes classes de implicações são definidas na literatura, como as R-implicações, (S,N)-implicações, QL-Implicações, XOR-implicações (DESCHRIJVER; KERRE, 2005c; BEDREGAL et al., 2010; BACZYNSKI; JAYARAM, 2008b; BACZYNSKI; JAYARAN, 2010; VISINTIN; REISER; BEDREGAL, 2011).

1.3 Objetivos

O objetivo geral deste trabalho é o estudo de funções de agregação e correspondentes propriedades visando a construção de novos conectivos fuzzy, com especial atenção na construção de subimplicações fuzzy.

Busca-se obter como resultados teóricos, a verificação da propriedade de fechamento em novas subimplicações obtidas pela composição de uma função de agregação $A : U^n \to U$ com um conjunto finito de subimplicações $\mathcal{F} = \{F_i : i \in \{1, 2, \ldots n\}\}$. Esta construção pode ser estendida para sua correspondente construção dual $\mathcal{J}_A$, definida como uma coimplicação fuzzy e obtida pela composição de uma função de agregação A com um conjunto finito de funções de coimplicação $\mathcal{J} = \{J_i : i \in \{1, 2, \ldots n\}\}$. Como objetivo específico destaca-se: a **definição de novos conectivos, analisando se estes preservam as propriedades de sua respectiva classe após uma operação de agregação**.

1.4 Metodologia

A metodologia a ser utilizada na realização deste trabalho considera, primeiramente, uma revisão bibliográfica e estudo dos fundamentos relativos à Lógica Fuzzy e operadores de agregação. Em seguida, uma revisão bibliográfica de implicações fuzzy, principais classes e propriedades algébricas. E para finalizar, uma avaliação da estruturação de novos conectivos fuzzy, em especial de subimplicações fuzzy, com base nos estudos realizados sobre operadores de agregação.

1.5 Organização do Texto

A estrutura desta Dissertação é composta por sete capítulos, o primeiro a Introdução, e os outros organizados da seguinte forma:

- Capítulo 2: Lógica Fuzzy. Este Capítulo apresenta os fundamentos da Lógica Fuzzy, com foco nos principais conectivos fuzzy e suas propriedades juntamente com o conceito de automorfismos.

- Capítulo 3: Operadores de Agregação. Neste Capítulo é descrito um estudo sobre os operadores de agregação mais usuais e suas propriedades. Incluindo as normas e conormas tringulares bem como suas respectivas funções conjugadas.

- Capítulo 4: Agregação de T-sub(co)normas. Este Capítulo trata da agregação de funções, neste caso, t-sub(co)normas. Analisando as propriedades preservadas por esses conectivos quando da aplicação dos operadores de agregação sobre os mesmos.

- Capítulo 5: Subimplicações Fuzzy Representáveis. Este Capítulo apresenta a construção das classes de subimplicações a partir de conectivos fuzzy. E, também, trata sobre a atuação de automorfismos sobre essas classes.

- Capítulo 6: Agregação de Submplicações Fuzzy. Relata sobre a agregação de (S,N)-, QL- e D-subimplicações e mostra as propriedades necessárias que cada classe deve satisfazer, para que, após a composição com uma função de agregação, o conectivo obtido esteja presente na respectiva classe a qual ele pertencia.

- Capítulo 7: Conclusão. Neste Capítulo são mencionadas as principais conclusões acerca desta Dissertação e a continuidade do trabalho.

2 LÓGICA FUZZY

Este Capítulo aborda os fundamentos básicos relativos à Lógica Fuzzy, definindo e diferenciando os conceitos de função característica e função de pertinência. Discorre sobre automorfismos e conectivos fuzzy: negações, função N-dual e subimplicações.

Na teoria dos conjuntos clássica, um elemento pertence ou não pertence a um determinado conjunto. A pertinência ou não pertinência do elemento, pode ser interpretada como uma função característica dada pela definição

Definição 1. *(Função de Característica) Seja χ um conjunto universo, A um subconjunto de χ e x um elemento de χ. Define-se a função característica como $C_A : \chi \to \{0, 1\}$ sendo $C_A(x)$ a pertinência (1) ou não pertinência (0) do elemento x ao subconjunto A, para cada $x \in \chi$. Ou ainda:*

$$C_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in A; \\ 0, & \text{se } x \notin A. \end{cases}$$

Desta forma, C_A é uma função cujo domínio é χ e a imagem está contida no conjunto $\{0, 1\}$, com $C_A(x) = 1$ denotando que o elemento x está em A, e $C_A(x) = 0$ denotando que x não é elemento de A. Por conseguinte, a função característica descreve completamente o conjunto A, definindo quais elementos do conjunto universo χ são também elementos de A.

No entanto, existem casos em que a pertinência entre elementos e conjuntos não é precisa, e não é possível definir discretamente se um elemento pertence ou não a um conjunto. Sistemas que modelam incertezas, por exemplo, nem sempre possuem fronteiras de pertinência bem definidas (BARROS; BASSANEZI, 2010; ROSS, 2004; SILER; BUCKLEY, 2004; CARLSSON; FULLER, 2002).

2.1 Conjuntos Fuzzy

Na teoria dos conjuntos fuzzy, a pertinência de um elemento a um determinado conjunto é flexibilizada; um elemento pode pertencer "parcialmente" a um determinado conjunto, ao invés de simplesmente "pertencer" ou "não pertencer'. Assim, o grau de

pertinência de um determinado elemento em um conjunto fuzzy e dado por uma função, considerando um universo de discurso. Formalmente:

Definição 2. *(Função de Pertinência) (ZADEH, 1965) Seja χ um conjunto universo não vazio ($\chi \neq \emptyset$). Um conjunto fuzzy A em χ é caracterizado pela função de pertinência $\mu_A : \chi \to [0,1]$ sendo $\mu_A(x)$ o grau de pertinência do elemento x no conjunto fuzzy A para cada $x \in \chi$.*

O valor $\mu_A(x) \in [0,1]$ denota o grau com que o elemento x de χ está contido no conjunto fuzzy A e os valores $\mu_A = 0$ e $\mu_A(x) = 1$ denotam, respectivamente, a não-pertinência e a pertinência completa de x ao conjunto fuzzy A. A definição de conjunto fuzzy corresponde à extensão da função característica $C_A : \chi \to \{0,1\}$, cujo contra-domínio $\{0,1\} \subseteq [0,1]$. Neste contexto, pode-se dizer que um conjunto clássico é um caso particular de um dado conjunto fuzzy, cuja restrição do domínio da função de pertinência μ_A coincide como domínio de definição da função característica C_A.

A partir da Definição 2, dado um conjunto universo χ, pode-se descrever um conjunto fuzzy A como um conjunto de pares ordenados, onde cada elemento genérico x está associado a seu respectivo grau de pertinência $\mu_A(x)$:

$$A = \{(x, \mu_A(x)) | x \in \chi \times [0,1]\}. \tag{1}$$

Quanto ao formato das funções de pertinências, este é restrito a determinada classe de funções, representadas por alguns parâmetros específicos. Os formatos mais comuns são: linear por partes (triangular, trapezoidal), gaussiana, sigmóide e singleton (conjuntos unitários) (BENINI; JR., 2009). A seguir, mostramos um exemplo de função de pertinência triangular na Equação 2:

Exemplo 1. *Função Triangular: Parâmetros (a,m,b), com a $\leq$ m $\leq$ b.*

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 \text{ se } x \leq a; \\ \frac{x-a}{m-a} \text{ se } x \in [a,m]; \\ \frac{b-x}{b-m} \text{ se } x \in [m,b]; \\ 0 \text{ se } x \geq b. \end{cases} \tag{2}$$

onde a, b, m, e x pertencem ao conjunto universo de discurso χ.

O gráfico da função de pertinência triangular (Eq. 2) é mostrado na Figura 1.

2.2 Automorfismos e Funções Conjugadas

Definição 3. *(BEDREGAL et al., 2007) A função $\phi : U \to U$ é um **automorfismo** se, e somente se, é bijetora e monotônica: $x \leq y \Rightarrow \phi(x) \leq \phi(y)$. Ou ainda, ϕ é uma função contínua e estritamente crescente, tal que: $\phi(0) = 0$ e $\phi(1) = 1$.*

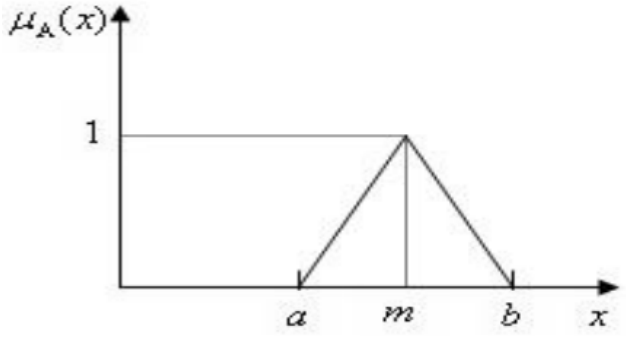


Figura 1: Função de Pertinência Triangular.

A ação de um automorfismo ϕ em uma função fuzzy $f : U^n \to U$, gera a função conjugada f^ϕ expressa pela equação:

$$f^\phi(x_1, \ldots, x_n) = \phi^{-1}(f(\phi(x_1), \ldots, \phi(x_n))). \tag{3}$$

Seja $Aut(\chi)$ o conjunto de todos os automorfismos definidos no intervalo unitário U, e seja $\circ$ a operação de composição de funções em χ. $(Aut(\chi), \circ)$ é um grupo. Logo, automorfismos são fechados para a composição em χ: $\phi_1 \circ \phi_2 \in Aut(\chi), \forall \phi_1, \phi_2 \in Aut(\chi)$.

E ainda, o inverso de um automorfismo ϕ, representado por ϕ^{-1} é também um automorfismo em χ: $\phi \circ \phi^{-1} = \phi^{-1} \circ \phi = id(\chi)$.

Definição 4. *(BUSTINCE et al., 2009) As funções $f_1, f_2 : U^n \to U$ são denominadas* ***funções conjugadas*** *se existe um automorfismo $\phi : U \to U$ tal que $f_2 = f_1^\phi$, para todo $(x_1, x_2 \ldots x_n) \in U^n$, tem-se que:*

$$f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \phi^{-1}(f_1(\phi(x_1), \phi(x_2), \ldots, \phi(x_n)).$$

Observa-se que também valem as relações: $f_2 = f_1^\phi$ e $f_1 = f_2^{\phi^{-1}}$.

Prova. *Se $f_2 = f_1^\phi$ então $f_2(x_1, \ldots, x_n) = \phi^{-1} f_1(\phi(x_1), \ldots, \phi(x_n))$. Logo,*

$$\begin{aligned} f_2^{\phi^{-1}}(x_1, \ldots, x_n) &= \phi(f_1(\phi^{-1}(x_1), \ldots, \phi^{-1}(x_n))) \\ &= \phi \circ \phi^{-1} f_1(\phi \circ \phi^{-1}(x_1), \ldots, \phi \circ \phi^{-1}(x_n)) \\ &= f_1(x_1, \ldots, x_n). \end{aligned}$$

Portanto, $f_2^{\phi^{-1}} = f_1$.

Exemplo 2. *A função $\phi : U \to U$ definida por $\phi(x) = x^n$ sempre que n é um número natural, é um automorfismo. O automorfismo inverso corresponde a função $\phi^{-1} : U \to U$, definida por $\phi^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$.*

2.3 Negações Fuzzy

Esta seção descreve as propriedades que caracterizam uma negação fuzzy. São apresentados, também, exemplos de negações fuzzy, negações fuzzy fortes, com correspondentes pontos de equilíbrio. Na última subseção está a definição de função N-dual.

Uma função $N : U \to U$ é uma **negação fuzzy** se satisfaz às seguintes propriedades (BUSTINCE; BURILLO; SORIA, 2003):

N1 : $N(0) = 1$ e $N(1) = 0$;

N2 : Se $x \geq y$ então $N(x) \leq N(y)$, para todo $x, y \in U$.

Se N também verifica a propriedade involutiva, esta é chamada de **negação forte** (BUSTINCE; BURILLO; SORIA, 2003; KLEMENT E. MESIAR R., 2003):

N3 : $N(N(x)) = x$, $\forall x \in U$.

Uma negação fuzzy N é uma **negação estrita** quando também satisfaz as propriedades:

N4 : N é contínua;

N5 : Se $x > y$ então $N(x) < N(y)$, para todo $x, y \in U$.

Negações fortes também são negações estritas, mas o contrário não é verdadeiro (BUSTINCE; BURILLO; SORIA, 2003). Por exemplo, a negação fuzzy $N_S(x) = 1 - x$, denominada negação fuzzy padrão (de Zadeh), é forte e portanto estrita. Mas a negação fuzzy $N(x) = 1 - x^2$, é estrita mas não é forte.

Verifica-se facilmente que se N_S é uma negação fuzzy forte, então $N_S(N_S(x)) = x$.

Um **ponto de equilíbrio** $e \in U$ de uma negação fuzzy N é tal que $N(e) = e$.

Se e é um ponto de equilíbrio de N então, pela antitonicidade de N, para cada $x \in U$, se $x \leq e$ então $e \leq N(x)$ e se $e \leq x$ então $N(x) \leq e$ (BEDREGAL, 2010). Além disso, tem-se que se e é um ponto de equilíbrio de N e se $x \leq N(x)$ então $x \leq e$, e se $N(x) \leq x$ então $e \leq x$ (BEDREGAL, 2010).

Todas as negações fuzzy têm no máximo um ponto de equilíbrio, ou seja, se existir esse ponto em uma negação fuzzy N então ele será o único (KLIR G., 1995).

Exemplo 3. *Descreve-se logo a seguir algumas negações fuzzy e seus respectivos pontos de equilíbrio.*

1. $N_S : [0, 1] \to [0, 1]$ *dada por* $N_S(x) = 1 - x$ *tem* $e = 0.5$.
2. $N : [0, 1] \to [0, 1]$ *dada por* $N(x) = \sqrt{1 - x^2}$ *tem* $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
3. $N_K : [0, 1] \to [0, 1]$ *dada por* $N_K(x) = 1 - x^2$ *tem* $e = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Exemplo 4. *A negação $N_\perp$ definida pela expressão:*

$$N_\perp(x) = \begin{cases} 0, & se\ x > 0 \\ 1, & se\ x = 0 \end{cases}$$

não tem ponto de equilíbrio.

2.3.1 Função N-Dual

Definição 5. *(BAETS, 1997, Definição 12) Seja N uma negação fuzzy forte em U e $f : U^n \to U$ uma função fuzzy. A **função N-dual de** f é a função que, para todo $(x_1, x_2, ..., x_n) \in U^n$, está definida pela expressão:*

$$f_N(x_1, x_2, ..., x_n) = N(f(N(x_1), N(x_2), ..., N(x_n))). \tag{4}$$

Neste trabalho, tal como considerado em (KLEMENT E. MESIAR R., 2003), quando $N = N_S$ a Eq. (4) é dada por:

$$f_{N_S}(x_1, x_2, ..., x_n) = 1 - f(1 - x_1, 1 - x_2, ..., 1 - x_n). \tag{5}$$

Assim, f e f_N são chamadas **funções mutuamente duais**.

2.3.2 Automorfismos e Negações Fuzzy

Nesta seção são estudados os principais resultados já conhecidos na literatura sobre a ação de automorfismos em negação para fundamentação deste trabalho, considerando (KLEMENT; NAVARA, 1999a,b; KLEMENT; MESIAR; PAP, 1999).

Proposição 1. *(NAVARA, 1999) Seja N uma negação forte e ϕ um automorfismo, então a conjugada de N também é uma negação forte dada pela expressão:*

$$N^\phi(x) = \phi^{-1}(N(\phi(x)), \forall x \in U. \tag{6}$$

Proposição 2. *(BUSTINCE; BURILLO; SORIA, 2003, Teorema 0) N_S é uma negação fuzzy forte se, e somente se houver um automorfismo $\phi : U \to U$ de tal forma que*

$$N_S^\phi(x) = \phi^{-1}(1 - \phi(x)) \tag{7}$$

A classe de negações fuzzy (estritas, fortes) é fechada sob a ação de um automorfismo (BEDREGAL, 2010).

Exemplo 5. *Considere o automorfismo $\phi(x) = x^2$, $\phi(x)^{-1} = \sqrt{x}$ e a negação padrão $f_1(x) = N_S(x) = 1 - x$ então:*

1 *:* $f_2 = f_1^{\phi}$

$$\begin{aligned} f_2(x) &= \phi^{-1}(f_1(\phi(x))) \\ &= \phi^{-1}(N_S(x^2)) \\ &= \phi^{-1}(1-x^2) \\ &= \sqrt{1-x^2}. \end{aligned}$$

Logo, construiu-se uma função conjugada da negação padrão ($N_S = f_1$*), denominada* f_2*.*

2 *:* $f_2^{\phi^{-1}} = f_1$

$$\begin{aligned} f_2^{\phi^{-1}}(x) &= \phi(f_2(\phi^{-1}(x))) \\ &= \phi(f_2(\sqrt{x})) \\ &= \phi(\sqrt{1-\sqrt{x^2}}) \\ &= \phi(\sqrt{1-x}) \\ &= (\sqrt{1-x})^2 \\ &= 1-x \\ &= f_1(x). \end{aligned}$$

Logo, $f_2^{\phi^{-1}} = f_1$*.*

2.4 (Sub)implicações Fuzzy

Sobre implicações fuzzy e suas construções duais (coimplicações), existem diversas definições, relevantes estudos e aplicações (BACZYNSKI, 2004; BACZYNSKI; JAYARAM, 2008a; BALASUBRAMANIAM, 2007; BUSTINCE; BURILLO; SORIA, 2003; FODOR, 1991; FODOR; ROUBENS, 1994; FODOR, 1995; HORCIK; NAVARA, 2002; LESKI, 2003; RUAN; KERRE, 1993; YAGER, 1983, 1999, 2004).

Sendo a implicação fuzzy uma generalização da abordagem clássica, o único consenso em suas definições é que a implicação fuzzy deve ter o mesmo comportamento da implicação clássica quando os valores de entrada são os extremos do intervalo U.

A classe das subimplicações fuzzy generaliza a classe das implicações fuzzy, as quais são operadores que não verificam totalmente o comportamento da implicação clássica nos extremos do intervalo U. Os estudos apresentados a seguir se reportam às condições satisfeitas por cada uma destas classes.

Um operador $I : U^2 \to U$ é um **operador de subimplicação** se I satisfaz as condições de contorno:

I0 : $I(1,1) = I(0,1) = I(0,0) = 1$.

Um operador de subimplicação $I : U^2 \to U$ que satisfaz a seguinte condição:

I1 : $I(1,0) = 0$,

é um **operador de implicação**.

De acordo com (KITAINIK, 1993), ou ainda (FODOR; ROUBENS, 1994), um operador de (sub)implicação que, para todo $x, y, z \in U$, satisfaz as seguintes propriedades:

I2 : Se $x \leq z$ então $I(x,y) \geq I(z,y)$ (antitonicidade no primeiro argumento);

I3 : Se $y \leq z$ então $I(x,y) \leq I(x,z)$ (isotonicidade no segundo argumento);

I4 : $I(0,y) = 1$ (dominância da falsidade).

é denominado uma **(sub)implicação fuzzy** (G. CORNELIS G. DESCHRIJVER, 2004, Definição 6)(KITAINIK, 1993).

Outras propriedades podem ser consideradas para as (sub)implicações fuzzy:

I5 : $I(x, I(y,z)) = I(y, I(x,z))$ (princípio da troca);

I6 : $I(x,y) = I(N(y), N(x))$; (simetria contrapositiva)

I7 : $I(x,1) = 1$;

I8 : $I(x,y) = I(x, I(x,y))$;

I9 : $I(1,x) = x$ (princípio da neutralidade à esquerda);

I10 : $I(x, N(x)) = N(x)$, e N é uma negação forte;

I11 : $I(x,x) = 1$;

I12 : $N(x) = I(x,0)$ é uma negação forte;

I13 : $I(x,y) \geq y$;

I14 : $I(1,y) \geq y$;

I15 : Se $S(N(x),x) = 1$ então $I(x,1) \leq 1$, para todo $x \in U$;

I16a : Se $x_1 \geq x_2$ então $I(x_1,0) \leq I(x_2,0)$, para todo $x_1, x_2 \in U$;

I16b : Se $y_1 \geq y_2$ então $I(1,y_1) \leq I(1,y_2)$, para todo $y_1, y_2 \in U$.

I17 : Se $S(N(y),y) = 1$ então $I(0,y) \leq y$, para todo $y \in U$.

2.5 Considerações Finais

As seções deste capítulo trataram sobre definições e conceitos básicos envolvendo a Lógica Fuzzy, conectivos e suas propriedades.

Além de distinguir função característica e função de pertinência, este capítulo também mostrou a definição de automorfismo e função conjugada. Mostra-se que a operação de um automorfismo sobre uma classe de negação fuzzy (forte e/ou estrita) é fechada. A definição de operador ou função dual e subimplicação também estão presentes neste capítulo.

3 OPERADORES DE AGREGAÇÃO

Neste Capítulo, são estudados os principais operadores de agregação como a média aritmética, a mediana e a média ponderada ordenada. Também são analisadas as propriedades mais relevantes e exemplos com relação a t-(sub)normas e t-(sub)conormas. Estes estudos são fundamentais para a análise de classes de (sub)implicações fuzzy implícita (R-(sub)implicações) e explicitamente representáveis (QL- D- (S,N)-(sub)implicações) e outros operadores da Lógica Fuzzy.

3.1 Definição

Na Teoria dos Conjuntos, um operador de agregação se caracteriza por agregar uma tupla de objetos que pertençam a um determinado conjunto, em um único objeto desse mesmo conjunto.

No contexto da Lógica Fuzzy, este conjunto será definido em $U = [0, 1]$, e os n valores em cada tupla são números reais também valorados em U. Um operador de agregação $A\colon U^n \to U$ é uma função que atribui um número real $y \in U$ a uma tupla $(x_1, x_2, ..., x_n) \in U^n$:

$$y = A(x_1, x_2, ..., x_n) \tag{8}$$

Naturalmente, deve-se impor certas condições sobre A para justificar o nome "operador de agregação". Diversos autores (MAYOR; TRILLAS, 1986; OVCHINNIKOV, 1998) já propuseram condições para definir operadores de agregação. Entretanto, algumas se mostraram incompatíveis com as aplicações na área. Recentemente, Mesiar e Komorníková (MESIAR; KOMORNIKOVA, 1997) propuseram propriedades fundamentais para operadores de agregação, as quais abarcaram todas as precedentes.

Considerando em $(U^n, \leq)$ a ordem usual, onde

$$(x_1, ..., x_n) \leq (y_1, ..., y_n) \text{ sss } x_i \leq y_i,\ \forall 1 \leq i \leq n, \tag{9}$$

define-se um operador de agregação como uma função $A : U^n \to U$, que satisfaz:

A1 : Identidade

$A(x) = x, \forall x \in U$;

A2 : Condições de Contorno

a)$A(0, 0, ..., 0) = 0$ e **b)**$A(1, 1, ..., 1) = 1$;

A3 : Monotonicidade

Se $(x_1, ..., x_n) \leq (y_1, ..., y_n)$ então $A(x_1, ..., x_n) \leq A(y_1, ..., y_n)$, $\forall (x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n) \in U^n$.

Essas condições estão frequentemente presentes nas definições propostas na literatura para um operador de agregação. Na primeira propriedade, se A tem apenas um (1) argumento, então coincide com a função identidade. Nas condições de contorno, atenta-se para o comportamento do agregador no pior e no melhor caso:

(i) a condição **A2a** diz que se observarmos somente critérios falsos ou não-satisfatórios, o resultado da agregação também deve ser falso ou não-satisfatório;

(ii) e em **A2b** observamos o contrário, como as entradas são verdadeiras ou satisfatórias, o resultado da agregação também deve ser verdadeiro ou satisfatório.

Segundo Mesiar e Komorníková (MESIAR; KOMORNIKOVA, 1997), **A2** parece ser fundamental na definição de operadores de agregação. Em Mayor e Trillas (MAYOR; TRILLAS, 1986) foi proposta uma extensão para essa condição básica. Eles propuseram como condição fundamental um operador de agregação satisfazer a expressão:

$$A(x, 0) = A(1, 0) \cdot x, \forall x \in U \tag{10}$$

$$A(x, 1) = (1 - A(1, 0)) \cdot x + A(1, 0), \forall x \in U \tag{11}$$

Na Eq. (10), $A(x, 0)$ consiste na média aritmética ponderada entre x e 0. Analogamente, na Eq. (11), $A(x, 1)$ é a média aritmética ponderada entre x e 1. As condições de contorno nas **A2a** e **A2b** são casos particulares para $x = 0$ e $x = 1$ nas Eqs. (10) e (11), respectivamente.

A tercera propriedade garante que agregadores são funções monotônicas em todos os argumentos. Outras propriedades podem ser anexadas a esse grupo fundamental, mais detalhes podem ser consultados em (KLEMENT; NAVARA, 1999a).

3.1.1 Conjugada de Agregadores Fuzzy

Seja A: $U^n \to U$ uma função de agregação e $\phi : U \to U$ um automorfismo. Para toda tupla $(x_1, x_2, ..., x_n) \in U^n$ tem-se $A^\phi : U^n \to U$ expressa por

$$A^\phi(x_1, x_2, ..., x_n) = \phi^{-1} A(\phi(x_1), \phi(x_2), ..., \phi(x_n))$$

a qual é chamada função conjugada de A obtida pela ação do automorfismo ϕ.

3.2 Propriedades de um Operador de Agregação

Existem diversas propriedades para um operador de agregação. Para mais detalhes, consultar Fodor (FODOR; ROUBENS, 1994) e Grabish (GRABISCH; NGUYEN; WALKER, 1995).

A4 : Continuidade

Se $\{x_{1i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ é uma sequência convergente então

$$\lim_{i\to\infty} A(x_{1i}, x_2, \ldots, x_n) = A(\lim_{i\to\infty} x_{1i}, x_2, \ldots x_n), \forall x_2, \ldots, x_n \in U.$$

A5 : Associatividade

$$A(A(x_1, x_2), x_3) = A(x_1, A(x_2, x_3)), \forall x_1, x_2, x_3 \in U.$$

A6 : Simetria

Seja $N_n = \{1, 2, ..., n\}$ e $\sigma : N_n \to N_n$ uma σ-permutação, então:

$$A(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, ..., x_{\sigma(n)}) = A(x_1, x_2, ..., x_n), \forall x_1, x_2, ..., x_n \in U.$$

A7 : Bissimetria

$$A(A(x_{11}, x_{12}), A(x_{21}, x_{22})) = A(A(x_{11}, x_{21}), A(x_{12}, x_{22})), \forall x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22} \in U.$$

A8 : Elemento Absorvente

$$\exists a \in U : A(x_1, ..., a, ..., x_n) = a, \forall x_1, x_2, \ldots, x_n \in U.$$

A9 : Elemento Neutro

$$\exists e \in U : A^n(x_1, ..., e, ..., x_{n-1}) = A^{n-1}(x_1, ..., x_{n-1}), \forall x_1, x_2, \ldots, x_n \in U.$$

A10 : Idempotência

$$\exists x \in U : A(x, x, ..., x) = x.$$

A11 : Compensação

$$\min_{i=1}^{n}(x_i) \leq A(x_1, x_2, ..., x_n) \leq \max_{i=1}^{n}(x_i), \forall x_1, x_2, \ldots, x_n \in U.$$

A propriedade **A4** reporta-se à continuidade da função A, em cada um de seus argumentos. Essa propriedade garante uma certa robustez e consistência, e ainda, um comportamento não-caótico da função A. Por **A5**, pode-se associar de diferentes maneiras uma função de agregação, ou ainda, a ordem de agregação não influencie no resultado da aplicação do agregador.

Pela propriedade **A6**, também conhecida como comutatividade, tem-se que a ordem dos argumentos de entrada não deve influenciar no resultado da aplicação do agregador.

Bissimetria, a propriedade **A7**, é associada a agregação de n^2 entradas para operadores de aridade-n. Essa propriedade assegura que, se os quatro argumentos podem ser descritos no formato de uma matriz quadrada, não importa se agregamos primeiro as colunas ou, se agregamos primeiro as linhas dessa matriz, o resultado obtido em ambas configurações será o mesmo.

Pela compensação **A11**, denominada frequentemente como propriedade de Pareto, o resultado da aplicação de uma função de agregação A deve ser menor que o maior elemento agregado obtido pelo operador $\max$ e, maior que o menor elemento agregado obtido pelo operador $\min$ (DETYNIECKI, 2001).

3.3 Operadores Agregadores

Nesta seção estão elencados os operadores de agregação mais usuais de acordo com (DETYNIECKI, 2001), incluindo aqueles que serão aplicados nos estudos dos próximos capítulos desta dissertação.

3.3.1 Média Ponderada Ordenada (OWA)

A função de agregação **Média Ponderada Ordenada** (**OWA** - *Ordered Weighted Averaging*) ou operador OWA, foi introduzida por Yager (YAGER, 1988), para prover um meio de agregar valores associados à satisfação de múltiplos critérios. Assim, um operador OWA unifica ambos os comportamentos de elementos em conjuntos fuzzy, o conjuntivo e o disjuntivo.

Definição 6. *Um operador* $OWA\colon U^n \to U$ *é definido pela expressão:*

$$OWA(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j x_{\sigma(j)}, \forall x_1, x_2, ..., x_n \in U, \tag{12}$$

onde $\sigma\colon N_n \to N_n$*, é uma* σ*-permutação de ordenação com escalares* w_i *não-negativos*

cuja soma é igual a 1*:*

$$x_{\sigma(1)} \leq x_{\sigma(2)} \leq \ldots \leq x_{\sigma(n)}, \;\; 0 \leq w_i \leq 1 \quad e \quad \sum_{i=1}^{n} w_i = 1.$$

De acordo com Yager e Kacprzyk (YAGER; KACPRZYK, 1997), este operador tem muitas aplicações devido a sua versatilidade.

Proposição 3. *(YAGER; KACPRZYK, 1997) A função* $OWA\colon U^n \to U$ *safisfaz* ***Ak*** *para* $\mathbf{k} \in \{1, 2, 3, 6, 10, 11\}$.

Pela Proposição 3, operadores OWA são funções de agregação comutativos, idempontentes e têm um comportamento compensatório. Por esta última propriedade, a agregação obtida pela aplicação de um operador OWA está entre os valores máximo e mínimo. O operador OWA generaliza o mínimo e o máximo, podendo ser visto como uma função parametrizada variando desde o valor mínimo (0) até o valor máximo (1).

A partir de um operador OWA, tem-se uma família parametrizada de operadores de agregação incluindo, entre tantos outros o máximo,o mínimo, a mediana e a média aritmética. Para obter esses operadores particulares, deve-se simplesmente escolher valores particulares de peso w_i expressos de acordo com a Tabela 3.3.1.

Operadores	**OWA**
Mínimo	$\begin{cases} w_1 = 1 \\ w_i = 0 \;\; \text{se } i \neq 1. \end{cases}$
Máximo	$\begin{cases} w_n = 1 \\ w_i = 0 \;\; \text{se } i \neq n. \end{cases}$
Mediana	$\begin{cases} w_{\frac{n+1}{2}} = 1 \;\; \text{se } n \text{ é ímpar} \\ w_{\frac{n}{2}} = \frac{1}{2} \;\; \text{e } w_{\frac{n}{2}+1} = \frac{1}{2} \;\; \text{se } n \text{ é par} \\ w_i = 0 \;\; \text{caso contrário .} \end{cases}$
Média Aritmética	$w_i = \frac{1}{n}, \quad \forall i.$

A seguir são discriminados alguns operadores que são casos particulares do operador OWA.

3.3.2 Média Aritmética

A maneira mais comum de agregar é usando a média aritmética simples. Esse operador é interessante pois retorna um valor agregado que é, menor que o maior dos argumentos, e, maior que o menor dos argumentos de entrada. Logo, o resultado da agregação é um valor "médio". O operador de média aritmética e um operador OWA muito usado, satisfazendo propriedades como continuidade:

Proposição 4. *O operador de agregação média aritmética é um operador OWA, definido pela expressão:*

$$M(x_1, x_2, ..., x_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{n}\cdot x_i\right), \tag{13}$$

satisfazendo a propriedade $\mathbf{A1}$.

Prova. *Para todo* $x \in U$, *tem-se que:*

A4 *Seja a sequência* $\{x_{1i}\}_{i\in\mathbb{N}}$. *Para todo* $x_2, \ldots, x_n \in U$ *verifica-se que:*

$$\begin{aligned}\lim_{i\to\infty} M(x_{1i}, x_2, \ldots, x_n) &= \lim_{i\to\infty}\frac{1}{n}(x_{1i}, x_2, \ldots, x_n)\\ &= \frac{1}{n}(\lim_{i\to\infty} x_{1i}, x_2, \ldots, x_n) = M(\lim_{i\to\infty} x_{1i}, x_2, \ldots, x_n).\end{aligned}$$

3.3.3 Mediana

Outro operador que segue a ideia de obter um "valor médio" é a Mediana, ordenando os argumentos de menor a maior e na sequência, tomando o elemento central. Se a cardinalidade do conjunto de argumentos for par, então não existe um argumento médio, mas existem dois. Toma-se, então, a média desses dois elementos como resultado da aplicação da mediana. Esse operador de agregação satisfaz as propriedades: condições de contorno, monotonicidade, simetria, idempotência e compensação.

Definição 7. *Seja* $\sigma\colon N_n \to N_n$ *uma função* σ*-ordenação. A função mediana* $M_d : M_d \to U$ *é definida pela expressão:*

$$M_d(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{cases} x_{\sigma(\frac{n+1}{2})}, & \text{se n é ímpar;}\\ \frac{1}{2}.\left(x_{\sigma(\frac{n}{2})} + x_{\sigma(\frac{n}{2}+1)}\right), & \text{se n é par.}\end{cases}$$

Proposição 5. *O operador mediana satisfaz as propriedades* A_k, *para* $k \in \{1, 2, 3, 6, 9, 10\}$.

Prova. *Seja* $(x_1, \ldots, x_n) \in U^n$ *e uma* σ*-ordenação em* N_n*:*

A1 $M_d(x) = x_{\sigma(1)} = x$.

A2 *Se n é ímpar, tem-se que* $M_d(0, \ldots, 0) = x_{\sigma(\frac{n+1}{2})} = 0$*; Se n é par, obtém-se* $M_d(0, \ldots, 0) = \frac{1}{2}.\left(x_{\sigma(\frac{n}{2})} + x_{\sigma(\frac{n}{2}+1)}\right) = \frac{1}{2}.(0+0) = 0$. *De forma análoga, mostra-se que* $A(1, \ldots, 1) = 1$.

A3 *Se* $(x_1, \ldots, x_n) \leq (y_1, \ldots, y_n)$ *então* $x_i \leq y_i$, $\forall 1 \leq i \leq n$. *Se n é ímpar, segue que* $M_d(x_1, \ldots, x_n) = x_{\sigma(\frac{n+1}{2})} \leq y_{\sigma(\frac{n+1}{2})} = M_d(y_1, \ldots, y_n)$. *Se*

n é par, $M_d(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{2} \cdot \left(x_{\sigma(\frac{n}{2})} + x_{\sigma(\frac{n}{2}+1)}\right) \leq \frac{1}{2}.\left(y_{\sigma(\frac{n}{2})} + y_{\sigma(\frac{n}{2}+1)}\right) = M_d(y_1, \ldots, y_n)$.

A6 *Seja* $\sigma : \mathbb{N}_{\mathbb{N}} \to U^n$ *uma* σ*-permutação. Se* n *é ímpar,* $(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$ *também é ímpar, e tem-se que:* $M_d(x_1, \ldots, x_n) = x_{\sigma(\frac{n+1}{2})} = M_d(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$*; Se n é par,* $(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$ *também é par, e obtém-se que* $M_d(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{2}.\left(x_{\sigma(\frac{n}{2})} + x_{\sigma(\frac{n}{2}+1)}\right) = M_d(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$.

A9 *Sabendo que* $(x, \ldots, x) \in U^n$ *está ordenado, se* n *é ímpar,* $M_d(x, \ldots, x) = x_{\sigma(\frac{n+1}{2})} = x$*; senão,* $M_d(x, \ldots, x) = \frac{1}{2}.\left(x_{\sigma(\frac{n}{2})} + x_{\sigma(\frac{n}{2}+1)}\right) = \frac{1}{2}.(x + x) = x$.

A10 $\min_{i=1}^n x_i = \min_{i=1}^n x_{\sigma(i)} = x_{\sigma(1)} \leq M_d(x_1, \ldots, x_n) \leq x_{\sigma(n)} = \max_{i=1}^n x_{\sigma(i)} = \max_{i=1}^n x_i$. *Logo,* $\min_{i=1}^n x_i \leq M_d(x_1, \ldots, x_n) \leq \max_{i=1}^n x_i$.

Portanto, Proposição 5 está verificada.

Corolário 1. *A função de agregação mediana é um operador OWA.*

Prova. *Segue da Proposição 5.*

Em (CALVO; MESIAR, 2001), são mostradas outras generalizações de operadores baseados na Mediana.

3.3.4 Mínimo e Máximo

Mínimo e Máximo são operadores indicados pelas expressões $\max, \min \colon U^2 \to U$. O mínimo retorna o menor valor de um conjunto, e o máximo, retorna o maior valor. Esses operadores não representam o valor médio em si, mas podem significar muito em contextos diferentes. Em problemas de decisão, por exemplo, o operador mínimo tem uma atitude conjuntiva (um caso particular de normas triangulares), enquanto o operador Máximo, apresenta um comportamento disjuntivo (conormas triangulares) (KLEMENT; MESIAR; PAP, 2000).

Ambos os operadores satisfazem as propriedades de identidade (quando unária), condições de contorno, monotonicidade, simetria, associatividade e idempotência.

Proposição 6. *O operador* $\max(\min) \colon U^2 \to U$ *satisfaz as propriedades* $\mathbf{Ak}$*, para* $k \in \{1, 2, 3, 5, 6, 9\}$.

Prova. A6 *Seja a* σ*-permutação. Tem-se, para todo* $x_1, x_2, \ldots, x_n \in U$*, que:*

$$\max(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) = \max(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Portanto, $\max$ *verifica a simetria. A prova para o operador* $\min$ *é construída de forma análoga.*

As demais propriedades podem ser facilmente provadas.

Corolário 2. *O operador* $\max(\min)\colon U^2 \to U$ *é uma função de agregação.*

Prova. *A prova segue diretamente da Proposição 6.*

3.4 Normas e Conormas Triangulares

Os operadores da teoria dos conjuntos clássica possuem generalizações para a teoria dos conjuntos fuzzy. Para as operações de intersecção e união dos conjuntos clássicos tem-se classes de funções chamadas de normas triangulares (t-normas) e conormas triangulares (t-conormas), respectivamente. Estas funções recebem como argumento dois números no intervalo U e retornam como resultado um número neste mesmo intervalo. Nos conjuntos fuzzy, existem várias funções que apresentam o comportamento de intersecção (t-normas) e união (t-conormas) dos conjuntos clássicos. A função *mínimo* e a função *produto* são exemplos importantes de t-normas utilizadas na construção de regras de inferência em um sistema fuzzy (BACZYNSKI; JAYARAM, 2008a).

Neste trabalho considerou-se uma definição mais ampla de t-normas e t-conormas, as t-subnormas e t-subconormas. Para definir uma t-sub(co)norma, não consideramos a propriedade do elemento neutro. O motivo de não levar em conta essa propriedade (mais restritiva) é obter uma classe maior de conectivos (operadores) fuzzy, para que, ao agregarmos (ver Capítulo 4) um número n de t-sub(co)normas de uma classe, o novo operador (resultante da agregação) esteja presente na respectiva classe dos conectivos agregados.

Esta seção descreve as propriedades e definições de t-(sub)normas e t-(sub)conormas.

De acordo com (KLEMENT; MESIAR; PAP, 2000), uma **sub(co)norma triangular** ou **t-sub(co)norma** é uma função $T(S)\colon U^2 \to U$ tal que, para todo $x, y \in U$, satisfaz

T0: $T(x,y) \leq \min(x,y)$; **S0**: $S(x,y) \geq \max(x,y)$;

assim como as propriedades de comutatividade, associatividade e monotonicidade, respectivamente dadas pelas expressões:

T1: $T(x,y) = T(y,x)$; **S1**: $S(x,y) = S(y,x)$;
T2: $T(x,T(y,z)) = T(T(x,y),z)$; **S2**: $S(x,S(y,z)) = S(S(x,y),z)$.
T3: $T(x,z) \leq T(y,z)$, se $x \leq y$; **S3**: $S(x,z) \leq S(y,z)$, se $x \leq y$.

Uma t-(co)norma é uma t-sub(co)norma que também satisfaz a seguinte condição de contorno (ou Elemento Neutro):

T4: $T(x,1) = x$; **S4**: $S(x,0) = x$.

Uma t-sub(co)norma que não é uma t-(co)norma é frequentemente chamada de t-sub(co)norma própria.

Observação 1. *Considerando as Propriedades **S0** e **T0**, tem-se que:*

$$S(0,0) \geq 0; \quad S(0,1) = 1; \quad S(1,0) = 1; \quad S(1,1) = 1.$$
$$T(1,1) \leq 1; \quad T(1,0) = 0; \quad T(0,1) = 0; \quad T(0,0) = 0.$$

Exemplo 6. *A seguir, são descritos alguns exemplos de t-(co)normas:*

1. *Mínimo e máximo:* $T_M(x,y) = min\{x,y\}$ *e* $S_M(x,y) = max\{x,y\}$*;*
2. *Produto e soma probabilística:* $T_P(x,y) = xy$ *e* $S_P(x,y) = x + y - xy$*;*
3. *T-norma e t-conorma de Łukasiewski :*
   $T_L(x,x) = max(x + y - 1, 0)$ *e* $S_L = min(x + y, 1)$*;*
4. *Produto drástico e soma drástica:*
   $T_D(x,y) = 0$*, se* $x, y < 1$*,* $T(x,y) = min\{x,y\}$*, caso contrário; e*
   $S_D(x,y) = 1$*, se* $x, y > 0$*,* $S_D(x,y) = max\{x,y\}$*, caso contrário.*
5. *Nilpotente mínimo e nilpotente máximo:*
   $T_{nM}(x,y) = 0$*, se* $x + y \leq 1$*,* $T_{nM}(x,y) = \min\{x,y\}$*, caso contrário; e*
   $S_{nM}(x,y) = 1$*, se* $x + y \geq 1$*,* $S_{nM}(x,y) = \max\{x,y\}$*, caso contrário.*

Proposição 7. *Para todos* $x, y \in U$*, a função* $T_i\,(S_i) : U^2 \to U$*, tal que* $i \geq 1$ *definida pela expressão*

$$T_i(x,y) = \frac{1}{i}xy \qquad (S_i(x,y) = 1 - \frac{1}{i}(1 - x - y + xy)), \tag{14}$$

é uma t-sub(co)norma fuzzy.

Prova. *Direta.*

Exemplo 7. *De acordo com a Proposição 7, apresentam-se exemplos de t-sub(co)normas próprias:*

(i) *t-subnorma produto:* $T_2(x,y) = \frac{1}{2}(xy)$*;*

(ii) *t-subconorma soma determinística:* $S_2(x,y) = \frac{1}{2}(1 + x + y - xy)$.

3.4.1 Dualidade de Sub(co)normas Triangulares

A expressão de t-norma e t-conorma duais é apresentada logo a seguir.

Proposição 8. *(KLEMENT; MESIAR; PAP, 1999) A função* $T_N(S_N) : U^2 \to U$ *é uma t-conorma (t-norma) se, e somente se, existe uma t-norma* T *(t-conorma* S*) tal que para todo* $x, y \in U$*, uma das seguintes equivalências são satisfeitas:*

$$T_N(x,y) = N(T(N(x), N(y))), \tag{15}$$
$$S_N(x,y) = N(S(N(x), N(y))). \tag{16}$$

A t-conorma T_N dada pela Eq. (15) é denominada de t-conorma derivada de T pela relação de dualidade e, analogamente a t-norma S_N dada pela Eq. (16) é chamada de t-norma derivada de S pela relação de dualidade, ambas definidas com respeito à negação fuzzy N.

Exemplo 8. *(REIS, 2010) Sejam as t-normas e t-conormas apresentadas na Exemplificação 6. Então, tem-se que* (T_M, S_M), (T_P, S_P) , (T_D, S_D), (T_L, S_L) *e* (T_{nM}, S_{nM}) *são pares de t-normas e t-conormas mutuamente duais em relação a* N_S *(negação padrão).*

3.4.2 Conjugada de Normas e Conormas Triangulares

Pela proposição a seguir, observa-se que os automorfismos preservam as t-conormas, de acordo com o que foi previamente estabelecido em (KLEMENT; NAVARA, 1999a,b; NAVARA, 1999; KLEMENT; MESIAR; PAP, 1999).

Proposição 9. *(ACZÉL, 1966; SCHWEIZER; SKLAR, 1983) Seja* $T(S)\colon U^2 \to U$ *uma t-(co)norma e* $\phi : U \to U$ *um automorfismo. Então a função conjugada* T^ϕ*, dada pela expressão*

$$T^\phi(x, y) = \phi^{-1}(T(\phi(x), \phi(y))); \tag{17}$$

$$S^\phi(x, y) = \phi^{-1}(S(\phi(x), \phi(y))). \tag{18}$$

é também uma t-(co)norma.

Exemplo 9. *Sejam os automorfismos* $\phi : U \to U$ *definida por* $\phi(x) = x^n$*, sempre que* n *é um número natural e correspondente* $\phi^{-1} : U \to U$*, definida por* $\phi^{-1}(x) = x^{\frac{1}{n}}$*. Então, tem-se que:*

Automorfismo	***t-norma conjugada***	***t-conorma conjugada***
$\phi(x) = x^n$	$T_i^\phi(x, y) = \frac{1}{\sqrt[n]{i}}\, x \cdot y$	$S_i^\phi(x, y) = \sqrt[n]{\frac{1}{i}(1 + x^n + y^n - x^n y^n)}$

Portanto, é imediato que $T_{N_S}^\phi(x, y) = S^\phi(x, y)$*, para todo* $x, y \in U$*.*

3.5 Considerações Finais

As seções deste capítulo reportam definições, exemplificação e propriedades dos operadores de agregação fuzzy.

Destacam-se os estudos envolvendo o operador OWA e correspondentes derivações, como a média aritmética e a mediana, incluindo o mínimo e o máximo. Tais funções de agregação são relevantes para a construção de novos conectivos fuzzy proposta nos próximos capítulos, incluindo o estudo de suas propriedades para modelagem a análise de comportamento.

Também foram considerados os conceitos de (sub)normas e (sub)conormas triangulares, operadores de agregação inerentes à Lógica Fuzzy que se reportam à disjunção e conjunção clássica.

A conjugação obtida pela ação de automorfismos e a construção dual definida a partir de negações fuzzy associada a estes conectivos foi brevemente discutida.

4 AGREGAÇÃO DE T-SUB(CO)NORMAS

Este trabalho estuda as condições em que funções de agregação n-nárias aplicadas sobre famílias de conectivos fuzzy geram novos membros e sobretudo, preservam as propriedades inerentes a estas famílias. Neste capítulo, consideram-se as t-sub(co)normas.

Para tal estudo, o trabalho primeiramente reporta à propriedade distributiva, relacionando uma função de agregação n-nária A e uma família de conectivos fuzzy $\mathcal{F}$. Logo a seguir, consideramos a associatividade generalizada de t-sub(co)normas.

Na sequência, direcionamos este estudo para classes especiais de funções de agregações. Assim, as condições que garantem que este novo operador $(A, \mathcal{F})$ preserva as propriedades satisfeitas por t-sub(co)normas são consideradas, focando nas instâncias da função de agregação A como a média aritmética, a mediana e mais genericamente, o operador OWA.

Definição 8. *Seja $A : U^n \to U$ uma função de agregação e $\mathcal{F} = \{F_i : U^k \to U\}$, com $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, uma família de funções. Um* ***operador*** $(\mathbf{A}, \mathcal{F})$ ***em*** $\mathbf{U}$*, denotado por $\mathcal{F}_A$: $U^k \to U$, é definido, para todos $x_1, \ldots, x_k \in U$, pela composição:*

$$\mathcal{F}_A(x_1, \ldots, x_k) = A(F_1(x_1, \ldots, x_k), F_2(x_1, \ldots, x_k), \ldots, F_n(x_1, \ldots, x_k)), \qquad (19)$$

Definição 9. *Seja $A : U^n \to U$ uma função de agregação e $\mathcal{F} = \{F_i : U^2 \to U\}$, com $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, uma família de funções de aridade k. Um* ***operador*** $(\mathbf{A}, \mathcal{F})$ ***em*** U ***é distributivo (à direita) em relação*** $\mathcal{F}$ *se, para todos $x, y_1, \ldots, y_n \in U$, a seguinte propriedade é satisfeita:*

A13 *Distributividade (à direita)*

$$F_i(x, A(y_1, y_2, \ldots, y_n)) = A(F_i(x, y_1), F_i(x, y_2), \ldots, F_i(x, y_n)).$$

Considere $A : U^n \to U$ uma função de agregação e $\mathcal{F} = \{F_i : U^2 \to U\}$, com $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, como uma família de funções binárias ($k = 2$) para o que segue neste trabalho.

Como t-sub(co)normas são conectivos fuzzy associativos, quando $\mathcal{F} = \{F_i : U^2 \to U\}$, com $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, consiste numa família de t-sub(co)normas, faz-se necessário considerar a generalização da propriedade associativa.

Os primeiros estudos referentes a esta generalização foram apresentados em (REISER; BEDREGAL; BACZYNSKI, 2013) resumidamente reportados logo a seguir.

Proposição 10. *(REISER; BEDREGAL; BACZYNSKI, 2013, Prop. 6.1) Seja $A\colon U^n \to U$ uma função de agregação e $\mathcal{T}(\mathcal{S}) = \{T_i(S_i)\colon U^2 \to U\}$, com $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, uma família de t-sub(co)normas. Então a funcao $\mathcal{T}_A : U^2 \to U$ ($\mathcal{S}_A : U^2 \to U$), denominada **operador** $(\mathbf{A}, \mathcal{T})$ (**operador** $(\mathbf{A}, \mathcal{S})$), é uma t-sub(co)norma sempre que as duas seguintes condições são verificadas:*

(i) *o operador $(\mathbf{A}, \mathcal{T})$ ($(\mathbf{A}, \mathcal{S})$) verifica a propriedade $\mathbf{A13}$, ou seja, $(\mathbf{A}, \mathcal{T})$ ($(\mathbf{A}, \mathcal{S})$) é distributivo em relação $\mathcal{F}$; e*

(ii) *a **associatividade generalizada**[1] é satisfeita, ou ainda, para todo i, j tal que $0 \leq i, j \leq n$ and $x, y, z \in U$, temos que:*

T5: $T_i(x, T_j(y, z)) = T_i(T_j(x, y), z)$; **S5**: $S_i(x, S_j(y, z)) = S_i(S_j(x, y), z)$.

Este resultado, descrito na Proposição 10, mostra-se relevante para garantir o fechamento do operador $(A, \mathcal{F})$ nas classes de implicações que podem ser explicitamente representadas por t-sub(co)normas e negações fuzzy, como as (S,N)- QL- e as D-implicações, sendo estas retritas neste trabalho às seguintes funções de agregação: média aritmética, mediana e mais genericamente, o operador OWA.

4.1 Média Aritmética e a Classe de t-sub(co)normas

No caso em que a função de agregação é a média aritmética, as próximas proposições mostram que o operador $(A, \mathcal{T})$ (operador $(A, \mathcal{S})$) satisfaz a propriedade de fechamento na classe das t-sub(co)normas.

Proposição 11. *Sejam $\mathcal{T}$ ($\mathcal{S}$) uma família de t-(co)subnormas descritas pela Eq. (14) e $M\colon U^2 \to U$ a média aritmética. O operador $(\mathbf{M}, \mathcal{T})$ ($(\mathbf{M}, \mathcal{S})$) verifica a propriedade $\mathbf{A13}$.*

[1] Eq. **T5** e **S5** são casos particulares de Eq.(GA) em (MAKSA, 2005).

Prova. *Para todos* $x, y_1, y_2, \ldots, y_n \in U$ *segue que:*

$$\begin{aligned} M(T_i(x,y_1), T_i(x,y_2), \ldots, T_i(x,y_n)) &= M(\frac{1}{i}(x \cdot y_1), \frac{1}{i}(x \cdot y_2), \ldots, \frac{1}{i}(x \cdot y_n)) \\ &= \frac{1}{n}(\frac{1}{i}(x \cdot y_1) + \frac{1}{i}(x \cdot y_2) + \ldots + \frac{1}{i}(x \cdot y_n)) \\ &= \frac{1}{i} \cdot x \cdot \frac{1}{n}(y_1 + y_2 + \ldots + y_n) \\ &= \frac{1}{i} \cdot x \cdot M(y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ &= T_i(x, M(y_1, y_2, \ldots, y_n)). \end{aligned}$$

Portanto, $(\mathbf{M}, \mathcal{T})$ *verifica a propriedade* $\mathbf{A13}$*. A prova para* $\mathcal{S}$ *é relacionada a* $\mathbf{A13}$ *e pode ser obtida de forma análoga.*

Proposição 12. *Seja* $\mathcal{T}$ *(*$\mathcal{S}$*) uma família de t-(co)subnormas descritas pela Eq. (14). Para todo* $i, j \geq 1$*, cada par* $T_i, T_j \in \mathcal{T}$ *(*$S_i, S_j \in \mathcal{S}$*) verifica* ***T5*** *(****S5****).*

Prova. *Para todo* x*,* y*,* $z \in U$*,* $T_i(x, T_j(y,z)) = T_i(x, \frac{1}{j}yz) = \frac{1}{ij}(xyz) = \frac{1}{i}(T_j(x,y) \cdot z) = T_i(T_j(x,y), z)$*. Então,* $\mathcal{T}$ *satisfaz* ***T5****. A prova para* $\mathcal{S}$ *é relacionada a* ***S5*** *e pode ser obtida de forma análoga.*

Proposição 13. *Seja* $\mathcal{T}$ *(*$\mathcal{S}$*) uma família de t-(co)subnormas descritas pela Eq. (14). O operador* $(\mathbf{M}, \mathcal{T})$ *(*$(\mathbf{M}, \mathcal{S})$*) é um t-sub(co)norma.*

Prova. *De acordo com a Proposição 10, a prova segue dos resultados apresentados nas Proposições 11 e 12.*

Exemplo 10. *Seja* A *a média aritmética. Se* $\mathcal{T} = \{T_i, T_{i/2}\}$ *(*$\mathcal{S} = \{S_i, S_{i/2}\}$*), obtemos a seguinte t-(co)subnorma:*

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_M(x,y) &= \frac{3}{4}(x \cdot y), \\ \mathcal{S}_M(x,y) &= \frac{1}{4} + \frac{3}{4}(x + y - x \cdot y), \forall x, y \in U. \end{aligned}$$

4.2 Mediana e a Classe de t-sub(co)normas

No caso em que a função de agregação é a mediana, as próximas proposições mostram que o operador $(A, \mathcal{T})$ (operador $(A, \mathcal{S})$) é também uma t-sub(co)norma.

Proposição 14. *Sejam* $\mathcal{T}$ *(*$\mathcal{S}$*) uma família de t-(co)subnormas descritas pela Eq. (14) e* $M_d \colon U^2 \to U$ *a mediana. O operador* $(\mathbf{M_d}, \mathcal{T})$ *(*$(\mathbf{M}, \mathcal{S})$*) verifica a propriedade* $\mathbf{A13}$*.*

Prova. *Para todos* $x, y_1, \ldots, y_n \in U$*, consideram-se dois casos. Primeiramente, se* n *é ímpar, segue que* $M(T_i(x,y_1), \ldots, T_i(x,y_n)) = M(\frac{1}{i}xy_{\sigma(\frac{n+1}{2})}) =$

$\frac{1}{i}xM(y_1,\ldots,y_n) = T_i(x,M(y_1,\ldots,y_n))$. *Caso contrário, quando* n *é par, tem-se que* $M(T_i(x,y_1),\ldots,T_i(x,y_n)) = \frac{x}{2i}(y_{\sigma(\frac{n}{2})}) + y_{\sigma(\frac{n}{2}+1)}) = \frac{x}{2i}(y_{\sigma(\frac{n}{2})} + y_{\sigma(\frac{n}{2}+1)}) = \frac{1}{i}xM(y_1,\ldots,y_n))$. *Portanto,* $M(T_i(x,y_1),\ldots,T_i(x,y_n)) = T_i(x,M(y_1,\ldots,y_n))$ *e* $\mathcal{T}$ *satisfaz* $\mathbf{A13}$. *A prova relacionada a* $\mathcal{S}_M$ *pode ser construída de forma análoga.*

Proposição 15. *Seja* $\mathcal{T}$ *(*$\mathcal{S}$*) uma família de t-(co)subnormas descritas pela Eq. (14). O operador* $(\mathbf{M_d},\mathcal{T})$ *((*$\mathbf{M_d},\mathcal{S}$*)) é um t-sub(co)norma.*

Prova. *De acordo com a Proposição 10, a prova segue dos resultados apresentados nas Proposições 16 e 12.*

4.3 Operador OWA e a Classe de t-sub(co)normas

O estudo de caso referente ao operador OWA está descrito nas próximas proposições, mostrando que também este operador $(OWA,\mathcal{T})$ (operador $(OWA,\mathcal{S})$) é uma t-sub(co)norma.

Proposição 16. *Sejam* $\mathcal{T}$ *(*$\mathcal{S}$*) uma família de t-(co)subnormas descritas pela Eq. (14) e* $OWA\colon U^2 \to U$ *a média ponderada ordenada. O operador* $(\mathbf{OWA},\mathcal{T})$ *((*$\mathbf{OWA},\mathcal{S}$*)) definido pela expressão:*

$$\mathcal{T}_{OWA}(x,y_1,y_2,\ldots,y_n) = \sum_{i=0}^{n} w_i T_{\sigma(i)}(x,y) \tag{20}$$

$$(\mathcal{S}_{OWA}(x,y_1,y_2,\ldots,y_n) = \sum_{i=0}^{n} w_i S_{\sigma(i)}(x,y)) \tag{21}$$

para todos $x,y_1,\ldots,y_n \in U$*, verifica a propriedade* $\mathbf{A13}$.

Prova. *Para todos* $x,y_1,\ldots,y_n \in U$ *seguem as provas.*

(i) *Para cada* $T_i \in \mathcal{T}$ *verifica-se que:*

$$\begin{aligned}(\mathcal{T}_P)_{OWA}(x,\vec{y}) &= OWA(T_i(x,y_1),\ldots,T_i(x,y_n))\\ &= OWA(\frac{1}{i}xy_1,\ldots,\frac{1}{i}xy_n)\\ &= \frac{1}{i}x(w_1y_{\sigma(1)},\ldots,w_ny_{\sigma(n)}))\\ &= \frac{1}{i}x\,OWA(\vec{y}) = T_i(x,OWA(y_1,\ldots,y_n)).\end{aligned}$$

(ii) *E, para cada $S_i \in \mathcal{T}$, tem-se que:*

$$\begin{aligned}(\mathcal{S}_P)_{OWA}(x,y) &= OWA(S_i(x,y_1),\ldots,S_i(x,y_n))\\ &= w_1(1-\frac{1}{i}(1-x-y_{\sigma(1)}+xy_{\sigma(1)}))+\ldots\\ &\quad + w_{\sigma(n)}(1-\frac{1}{i}(1-x-y_{\sigma(n)}+xy_{\sigma(n)}))\\ &= 1-\frac{1}{i}(1-x-OWA(\vec{y})+xOWA(y_1,\ldots,y_n))\\ &= S_i(x,OWA(y_1,\ldots,y_n)).\end{aligned}$$

Portanto ambos operadores $\mathcal{T}_{OWA}$ e $\mathcal{S}_{OWA}$ satisfazem $\mathbf{A8}$.

Proposição 17. *Seja $\mathcal{T}$ ($\mathcal{S}$) uma família de t-(co)subnormas descritas pela Eq. (14). O operador $(\mathbf{OWA},\mathcal{T})$ ($(\mathbf{OWA},\mathcal{S})$) é uma t-sub(co)norma.*

Prova. *De acordo com a Proposição 10, a prova segue dos resultados apresentados nas Proposições 16 e 12.*

Este capítulo centrou-se na agregação de t-sub(co)normas. Para que o resultado da agregação de uma t-sub(co)norma seja fechado na respectiva classe, foi necessário considerar duas propriedades: a distributividade do agregador em relação a t-sub(co)norma e a associatividade generalizada. Após a descrição destas duas propriedades, seguem as seções que relacionam as t-sub(co)normas com os agregadores estudados: média aritmética, mediana e a média ponderada ordenada (OWA).

T-sub(co)normas podem ser agregadas com o operador OWA para tratar problemas que envolvem tomada de decisão (YAGER; TROIANO, 2005). Em (BUSTINCE et al., 2013) e (YAGER; KACPRZYK, 1997) são mostrados outros exemplos de aplicações usando operadores de agregação.

5 SUBIMPLICAÇÕES FUZZY REPRESENTÁVEIS

As extensões obtidas com a definição das classes de t-sub(conormas) permite obter correspondentes extensões para os demais conectivos fuzzy representáveis por t-(co)normas e negações.

Os principais resultados considerados nesta seção reportam a propriedades que são verificadas para as classes de (S,N)- QL- e D-subimplicações que podem ser representadas por negações fuzzy e t-sub(co)normas. Exemplificação destas classes de funções e as correspondentes conjugadas são também detalhadas.

Para a classe das implicações fuzzy representáveis a partir dos conectivos fuzzy (negações, t-(co)normas), consulte os resultados disponíveis em (BUSTINCE; BURILLO; SORIA, 2003; REISER; BEDREGAL; BACZYNSKI, 2013; BACZYNSKI; JAYARAM, 2008b).

5.1 Classe das (S,N)-subimplicações Fuzzy

Esta seção introduz a classe das (S,N)-subimplicações estendendo as principais propriedades das (S,N)-implicações. Os resultados apresentados complementam o estudo em (BENÍTEZ et al., 2014a). Para mais detalhes, consulte (REISER; BEDREGAL; BACZYNSKI, 2013; BEDREGAL, 2010).

Uma função $I_{S,N}\colon U^2 \to U$ é chamada de **(S,N)-(sub)implicação** se existir uma t-(sub)conorma S e uma negação fuzzy N tal que

$$I_{S,N}(x,y) = S(N(x),y), \tag{22}$$

para todos $x, y \in U$. Se N é uma negação forte, então I é chamado de **S-(sub)implicação**. Claramente, uma (S,N)-implicação fuzzy também é uma (S,N)-subimplicação fuzzy.

A família de todas as (S,N)-implicações é referenciada neste texto por $\mathcal{I}$.

Proposição 18. *(REISER; BEDREGAL; BACZYNSKI, 2013, Proposição 4.10)*

As seguintes afirmações são equivalentes:

(i) *$I:U^2 \to U$ é uma (S,N)-implicação com uma negação fuzzy contínua N e uma t-subconorma S contínua no ponto 0;*

(ii) *I é contínua no ponto $x = 1$ (primeiro argumento) satisfazendo* $\mathbf{I3}, \mathbf{I5}$ *e* $\mathbf{I6}$.

Proposição 19. *A função binária $I_i : U^2 \to U$, definida como*

$$I_i(x, y) = 1 - \frac{1}{i}(x - xy), \ \ \forall i \geq 1, \tag{23}$$

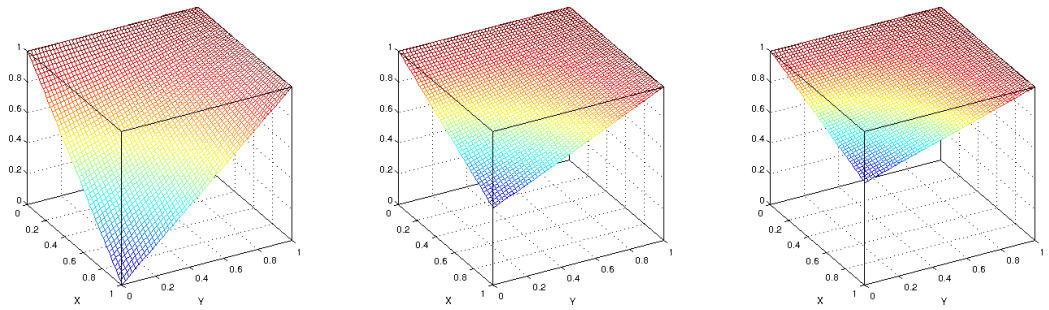
é uma (S,N)-subimplicação fuzzy.

Prova. *Seja a t-subconorma $S_i(x, y) = 1 - \frac{1}{i}(1 - x - y + xy)$, para $i \leq 1$. Então tem-se que:*

$$S_i(N_S(x), y) = 1 - \frac{1}{i}(1 - (1 - x) - y + (1 - x)y) = 1 - \frac{1}{i}(x - xy).$$

Consequentemente, para todos $x, y \in U$, vale que: $I_i(x, y) = S_i(N_S(x), y)$. Portanto I_i é uma (S_i,N_S)-implicação.

Na Equação 23 está um exemplo de classe de (S,N)-subimplicações. A medida que instancia-se um valor para i ($i \geq 1$), essa classe gera uma função que é uma (S,N)-subimplicação. Veja na Figura 2, os três primeiros membros (instâncias) I_1, I_2, I_3 dessa classe, denominada $\mathcal{I}$. Em particular, I_1 é conhecida como a implicação de Reichenbach.



(a) $I_1(x, y) = 1 - x + xy$. (b) $I_2(x, y) = 1 - \frac{1}{2}(x - xy)$. (c) $I_3(x, y) = 1 - \frac{1}{3}(x - xy)$.

Figura 2: Subimplicações da família $\mathcal{I} = \{I_1, I_2, I_3\}$.

A diferença entre as expressões pode ser observada levando-se em consideração a entrada $I(1, 0)$ (ver propriedade **I1**). $I_1(1, 0) = 0$, $I_2(1, 0) = 0.5$ e $I_3(1, 0) \approx 0.67$. A medida que i vai aumentando, o valor relativo à entrada $(1, 0)$ em I também aumenta. Este comportamento, de forma análoga, se repete nas classes estudadas de QL- e D-subimplicações.

Proposição 20. *Uma (S,N)-subimplicação I_i em $\mathcal{I}$, dada pela Equação (23) verifica a Propriedade* $\mathbf{Ik}$, *para* $\mathbf{k} \in \{0, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Prova. *Considera-se o seguinte:*

I0: *Segue da definição de* I_i *pela Eq. (23) na Proposição 19.*

I2: *Se* $x_1 \leq x_2$*, para todos* $x_1, y, x_2 \in U$*, vale que*
$I_i(x_1, y) = 1 - \frac{1}{i}(x_1 - x_1 y) \geq x_1 - \frac{1}{i}(x_1 - x_1 y) = I_i(x_2, y)$.

I3: *Se* $y_1 \leq y_2$*, para todos* $y_1, y_2, x \in U$ *vale que*

$$I_i(x, y_1) = 1 - \frac{1}{i}(x - xy_1) \leq x - \frac{1}{i}(x - xy_2) = I_i(x, y_2).$$

I4: $I_i(0, y) = 1 - \frac{1}{i} \cdot 0 = 1$*, para todo* $y \in U$.

I5: *Para todos* $x, y, z \in U$*, vale que*

$$I_i(x, I_i(y, z)) = 1 - \frac{1}{i}x - x(1 - \frac{1}{i}(y - yz)) = 1 - \frac{x}{i^2}(y - yz).$$

Logo, obtemos o que segue:

$$\begin{aligned} I_i(x, I_i(y, z)) &= 1 - \frac{y}{i^2}(x - xz) \\ &= 1 - \frac{1}{i}y - y(1 - \frac{1}{i}(x - xz)) \\ &= I_i(y, I_i(x, z)). \end{aligned}$$

I6: *Para todos* $x, y \in U$*, o seguinte é válido:*

$$\begin{aligned} I_i(N_S(y), N_S(x)) &= 1\frac{1}{i}(1 - y - (1 - y - x + xy)) \\ &= 1 - \frac{1}{i}(x - xy) = I_i(x, y). \end{aligned}$$

Portanto, a Proposição 20 é verificada.

Corolário 3. *O operador* $I_i : U^2 \to U$ *dado pela Eq. (23) é uma* (S_i,N_S)*-implicação obtido a partir de uma função de negação contínua* N_S *e a t-subconorma* S_i *contínua no ponto* 0.

Prova. *Segue das Proposições 18, 19 and 20.*

5.2 Classe das QL-subimplicações Fuzzy

Esta seção introduz a classe das QL-(sub)implicações estendendo as principais propriedades das QL-implicações. Os resultados apresentados complementam o estudo em

(BENÍTEZ et al., 2014b). Para mais detalhes e outras propriedades da classe de QL-implicações, consulte (BACZYNSKI; JAYARAN, 2010; BEDREGAL, 2010) e (SHI et al., 2008).

Definição 10. *Uma função $I_{S,T,N}\colon U^2 \to U$ é chamada de **QL-(sub)implicação** se, para todo $x, y \in U$, existe uma t-(sub)conorma S, uma t-norma T e uma negação fuzzy N tal que:*

$$I_{S,T,N}(x,y) = S(N(x), T(x,y)). \tag{24}$$

Neste caso, uma QL-(sub)implicação $I_{S,N,T}$ indica a t-(sub)conorma, t-norma e a negação fuzzy como S, N e T, respectivamente. A família de todas as QL-subimplicações é denotada por $\mathcal{J}$.

Proposição 21. *A função binária $J_i : U^2 \to U$, dada pela expressão*

$$J_i(x,y) = 1 - \frac{1}{i}(x - x^2 y), \forall x, y \in U, \tag{25}$$

é uma QL-subimplicação fuzzy.

Prova. *Considere as funções $T_P(x,y) = xy$, $S_{Pi}(x,y) = 1 - \frac{1}{i}(1 - x - y + xy)$ e $N_S(x) = 1 - x$. Se $T_P(x,y) = xy$, $S_{Pi}(x,y) = 1 - \frac{1}{i}(1 - x - y + xy)$ e $N_S(x) = 1 - x$, vale que*

$$\begin{aligned} I_{S_{Pi},N_S,T_P}(x,y) &= S_i(N_S(x), T(x,y)) \\ &= 1 - \frac{1}{i}(1 - (1-x) - xy + (1-x)xy) \\ &= 1 - \frac{1}{i}(x - x^2 y) \\ &= J_i(x,y). \end{aligned}$$

Por conseguinte, $J_i \in \mathcal{J}$, significando que é uma QL-subimplicação.

A proposição seguinte é uma extensão da Proposição 4.2 em (BACZYNSKI; JAYARAN, 2010) por considerar as principais propriedades algébricas que caracterizam a classe das QL-subimplicações.

Proposição 22. *Uma QL-subimplicação $I_{S,N,T} \in \mathcal{J}$ verifica **Ik** para $\mathbf{k} \in \{0, 2, 4, 15, 16a, 16b\}$.*

Prova. *Para $x_1, x_2, x, y_1, y_2, y \in U$, o seguinte é verificado.*

I0 *Pelos resultados na Observação 1, segue que*

$$I_{S,T,N}(0,0) = S(1, T(0,0)) = S(1,0) = 1;$$
$$I_{S,T,N}(0,1) = S(1, T(0,1)) = S(1,0) = 1;$$
$$I_{S,T,N}(1,1) = S(0, T(1,1)) = S(1,1) = 1;$$

I2 *Uma vez que S e T são funções monotônicas, se $y_1 \leq y_2$ então $T(x, y_1) \leq T(x, y_2)$ e consequentemente, $I_{S,N,T}(x, y_1) = S(N(x), T(x, y_1)) \leq S(N(x), T(x, y_2)) = I_{S,N,T}(x, y_2)$.*

I4 $I_{S,N,T}(0, y) = S(1, T(0, y)) = 1$.

I15 $I_{S,N,T}(x, 1) = S(N(x), T(x, 1)) \leq S(N(x), x) = 1$.

I16a *Quando $x_1 \geq x_2$, então $N(x_1) \leq N(x_2)$. Logo, $I_{S,N,T}(x_1, 0) = S(N(x_1), T(x_1, 0)) = S(N(x_1), 0) \leq S(N(x_2), 0) = S(N(x_2), T(x_2, 0)) = I_{S,N,T}(x_2, 0)$.*

I16b *Quando $y_1 \geq y_2$ então $I_{S,N,T}(1, y_1) = S(0, T(1, y_1)) \geq S(0, T(1, y_2)) = I_{S,N,T}(1, y_2)$.*

Portanto a Proposição 22 é satisfeita.

Corolário 4. *O operador $I_{S_i,N_S,T_P} \in \mathcal{J}$ verifica **Ik** para $\mathbf{k} \in \{0, 2, 4, 15, 16a, 16b\}$.*

Prova. *Segue da Proposição 22.*

Observação 2. *Seja $I : U^2 \to U$ uma função dada pela Eq.(24). Considerando uma t-subconorma S, uma negação fuzzy N e uma t-subnorma T, a função I não verifica* **I0** *nem* **I1***:*

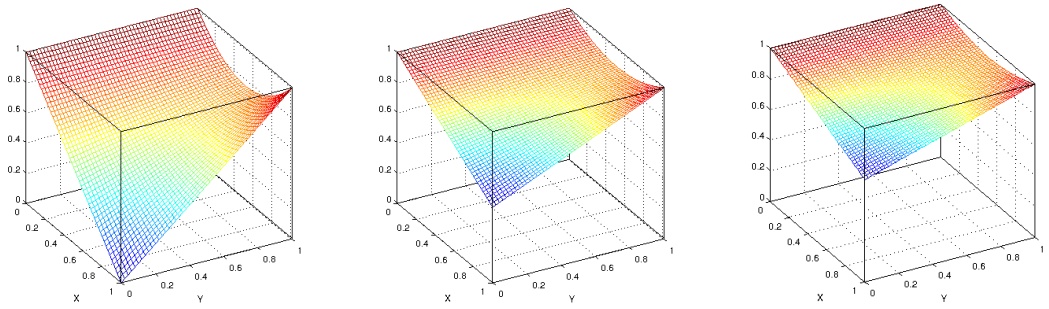
(i) $I(1, 1) = S(N(1), T(1, 1)) = S(0, T(1, 1)) \geq T(1, 1)$;

(ii) $I(1, 0) = S(N(1), T(1, 0)) = S(0, 0) \geq 0$.

Portanto, I não é necessariamente uma subimplicação.

Notavelmente, uma QL-implicação é sempre uma QL-subimplicação.

Veja na Figura 3 outras instâncias (J_1, J_2, J_3) da classe $\mathcal{J}$. Em particular, $J_1 \in \mathcal{J}$ é uma QL-implicação (BACZYNSKI; JAYARAM, 2008b).



(a) $J_1(x, y) = 1 - \frac{1}{i}(x - x^2 y)$. (b) $J_2(x, y) = 1 - \frac{1}{2}(x - x^2 y)$. (c) $J_3(x, y) = 1 - \frac{1}{3}(x - x^2 y)$.

Figura 3: Família de QL-subimplicacoes fuzzy $\mathcal{J}_{QL} = \{J_1, J_2, J_3\}$.

5.2.1 Classe das D-subimplicações fuzzy

Esta seção introduz a classe das D-subimplicações, estendendo as principais propriedades da classe das D-implicações. Os principais resultados descritos para a classe de D-subimplicações complementam o trabalho em (BENÍTEZ et al., 2014).

Definição 11. *Uma função $I_{S,T,N}\colon U^2 \to U$ é chamada de **D-(sub)implicação** se, para todos $x, y \in U$, existir uma t-(sub)conorma S, a t-norma T e uma negação fuzzy N, satisfazendo a seguinte expressão algébrica:*

$$I_{S,T,N}(x,y) = S(T(N(x), N(y)), y). \tag{26}$$

Neste caso, uma D-(sub)implicação $I_{S,T,N}$ indica a t-(sub)conorma, t-norma e a negação fuzzy como S, T e N, respectivamente. A família de todas as D-subimplicações é denotada por $\mathcal{L}$.

Proposição 23. *Uma função $I_i : U^2 \to U$, dada por*

$$I_i(x,y) = 1 - \frac{1}{i}(1-y) + \frac{1}{i}(y-1)^2(1-x), \forall x, y \in U, \tag{27}$$

é uma D-subimplicação fuzzy.

Prova. *Considere as funções $T_P(x,y) = xy$, $S_i(x,y) = 1 - \frac{1}{i}(1 - x - y + xy)$ e $N_S(x) = 1 - x$. Vale o seguinte:*

$$\begin{aligned} I_{S_i,N_S,T_P}(x,y) &= S_i(1-x, 1-y), y) \\ &= 1 - \frac{1}{i}(1-y)(1-(1-x)(1-y)) \\ &= 1 - \frac{1}{i}(1-y) + \frac{1}{i}(1-y)^2(1-x) = I_i(x,y). \end{aligned}$$

Logo, $I_i \in \mathcal{L}$ é uma D-subimplicação fuzzy.

Proposição 24. *Para todos $x, y \in U$, existe uma t-(sub)conorma S, a t-norma T e uma negação fuzzy forte N tal que:*

$$I_{S,T,N}(x,y) \;=\; I_{S,N,T}(N(y), N(x))). \tag{28}$$

A seguinte proposição considera as principais propriedades algébricas que caracterizam a classe $\mathcal{L}$ de D-subimplicações.

Proposição 25. *Uma D-subimplicação $I_{S,T,N} \in \mathcal{L}$ verifica **Ik** para $\mathbf{k} \in \{0, 2, 16a, 16b, 17\}$.*

Prova. *Para $x_1, x_2, x, y_1, y_2, y \in U$, o seguinte é verificado:*

I0 *Considerando os resultados na Observação 1, segue que*

$$I_{S,T,N}(0,0) = S(T(1,1),0) = S(1,0) = 1;$$
$$I_{S,T,N}(0,1) = S(T(1,0),1) = S(0,1) = 1;$$
$$I_{S,T,N}(1,1) = S(T(0,0),1) = S(0,1) = 1;$$

I2 *Uma vez que S e T são funções monotônicas, $x_1 \leq x_2$ implica que $N(x_1) \geq N(x_2)$. Logo $T(N(x_1), N(y)) \geq T(N(x_2), N(y))$ e consequentemente, vale que $I_{S,T,N}(x, y_1) = S(T(N(x_1), N(y)), y) \geq S(T(N(x_2), N(y)), y) = I_{S,N,T}(x_2, y)$.*

I16a *Quando $x_1 \geq x_2$, $I_{S,T,N}(x_1, 0) = S(T(N(x_1), 1), 0) \leq S(T(N(x_2), 1), 0) = I_{S,T,N}(x_2, 0)$.*

I16b *Quando $y_1 \geq y_2$, $I_{S,T,N}(1, y_1) = S(T(0, N(y_1)), y_1) = S(0, y_1) \geq S(0, y_2) = S(T(0, N(y_2)), y_2) = I_{S,T,N}(1, y_2)$.*

I17 $I_{S,T,N}(0, y) = S(T(1, N(y)), y) \leq S(N(y), y) = 1$.

Corolário 5. *O operador $I_{S_i,N_S,T_P} \in \mathcal{I}_D$ verifica **Ik** para* $\mathbf{k} \in \{0, 2, 16a, 16b, 17\}$.

Prova. *Segue da Proposição 25.*

Observação 3. *Seja $I : U^2 \to U$ uma função dada pela Eq.(26). Considerando uma t-subconorma S, uma negação fuzzy N e uma t-subnorma T, a função I não verifica* $\mathbf{I0}, \mathbf{I1}$ *nem* $\mathbf{I4}$*:*

(i) $I_{S,T,N}(0,0) = S(T(1,1),0) \leq S(1,0) = 1$;

(ii) $I_{S,T,N}(1,0) = S(T(0,1),0) = S(0,0) \geq 0$;

(iii) $I_{S,T,N}(1, y) = S(T(0, N(y)), y) = S(0, y) \geq y$, $\forall y \in U$.

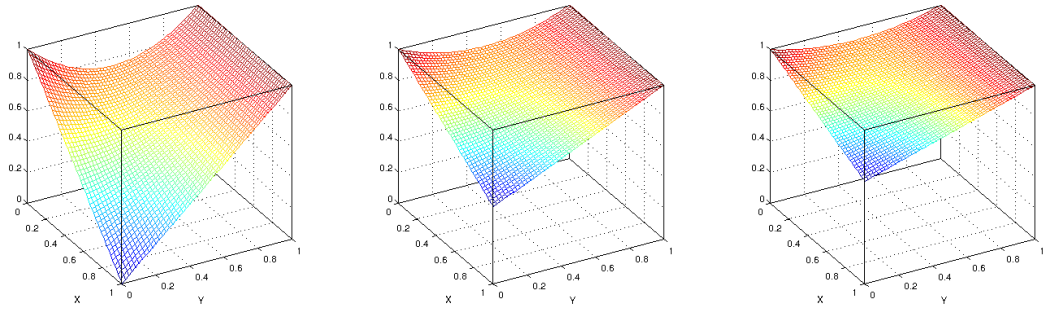
Portanto, $I_{S,T,N}$ não é necessariamente uma subimplicação.

Notavelmente, um D-implicação é sempre uma D-subimplicação.

Veja na Figura 4 outras instâncias L_1, L_2, L_3 da classe $\mathcal{L}$ (Eq. 27). Obtidas quando $i = 1$, $i = 2$ e $i = 3$, respectivamente. Em particular, $L_1 \in \mathcal{L}$ é uma D-implicação (BACZYNSKI; JAYARAM, 2008b).

5.3 Conjugada de Subimplicações Fuzzy

Esta seção analisa a ação de um automorfismo sobre as classes de (S,N)-, QL- e D-subimplicões fuzzy. Os resultados descritos nesta seção estão baseados em (DIAS, 2011; BEDREGAL et al., 2010).



(a) $L_1(x,y) = y + (y-1)^2(1-x)$.

(b) $L_2(x,y) = 1 - \frac{1}{2}(1-y) + \frac{1}{2}(y-1)^2(1-x)$.

(c) $L_3(x,y) = 1 - \frac{1}{3}(1-y) + \frac{1}{3}(y-1)^2(1-x)$.

Figura 4: Família de D-subimplicações fazzy $\mathcal{L} = \{L_1, L_2, L_3\}$.

5.3.1 Automorfismos sobre (S,N)-subimplicações

Na Proposição seguinte, será mostrado como um automorfismo age nas (S,N)-implicações , gerando novas (S,N)-implicações.

Proposição 26. *(BEDREGAL et al., 2010) Seja $\phi : U \to U$ um automorfismo e $I_{S,N} : U^2 \to U$ uma (S,N)-implicação. Então $I^{\phi}_{S,N} : U^2 \to U$ é uma (S,N)-implicação, definida por*

$$I^{\phi}_{S,N} = I_{S^{\phi},N^{\phi}}. \tag{29}$$

Assim, a função conjugada de uma (S,N)-subimplicação é representada pelas conjugadas de S e de N.

A partir da Proposição 26 a comutatividade da Classe das (S,N)-implicações sobre a ação de um automorfismo ϕ é representada no diagrama da Figura 5.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(S) \times \mathcal{C}(N) & \xrightarrow{Eq.(22)} & \mathcal{C}(I_{S,N}) \\ \Big\downarrow Eq.(18), Eq.(6) & & \Big\downarrow Eq.(3) \\ \mathcal{C}(S^{\phi}) \times \mathcal{C}(N^{\phi}) & \xrightarrow{Eq.(29)} & \mathcal{C}(I^{\phi}_{S,N}) \end{array}$$

Figura 5: Comutatividade das Classes das (S,N)-implicações sob a ação de um automorfismo ϕ

Exemplo 11. *Pela Eq. (23), se $\phi(x) = x^n$ e $n = 2$, então tem-se que a conjugada de I_{S_i,N_S} é dada pela expressão:*

$$I^{\phi}_{S_i,N_S}(x,y) = \sqrt{1 - \tfrac{1}{i}(x^2 - x^2y^2)}, \text{ para todo } x, y \in U.$$

5.3.2 Automorfismos sobre QL-implicações

Na sequência, mostra-se que a conjugada de uma QL-implicação é também representada pelas conjugadas de S, N e T.

Proposição 27. *(DIAS, 2011) Seja $I_{S,N,T}$ uma QL-implicação onde T é uma t-norma contínua e estrita. Então existe um automorfismo $\phi : U \to U$ tal que*

$$I^{\phi}_{S,N,T} = I^{\phi}_{S^{\phi},N^{\phi},T^{\phi}}, \tag{30}$$

$$I^{\phi}_{S,N,T} = \phi^{-1}(S(N(\phi(x)), T(\phi(x), \phi(y)))). \tag{31}$$

A partir da Proposição 27 a comutatividade da Classe das QL-implicações sobre a ação de um automorfismo ϕ é representada no diagrama da Figura 6.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(S) \times \mathcal{C}(N) \times \mathcal{C}(T) & \xrightarrow{Eq.(24)} & \mathcal{C}(I_{S,N,T}) \\ \Big\downarrow Eq.(18), Eq.(6), Eq.(17) & & \Big\downarrow Eq.(3) \\ \mathcal{C}(S^{\phi}) \times \mathcal{C}(N^{\phi}) \times \mathcal{C}(T^{\phi}) & \xrightarrow{Eq.(30)} & \mathcal{C}(I^{\phi}_{S,N,T}) \end{array}$$

Figura 6: Comutatividade das Classes das QL-implicações sob a ação de um automorfismo ϕ.

Exemplo 12. *Pela Eq. (25), se $\phi(x) = x^n$ e $n = 2$, então tem-se que a conjugada de J_{S_i,N_S,T_P} é dada, para todo $x, y \in U$, pela expressão:*

$$J^{\phi}_{S_i,T_P,N_S}(x, y) = \sqrt{1 - \tfrac{1}{i}(x^2 - x^4 y^2)}.$$

5.3.3 Automorfismos sobre D-implicações

A seguir, mostra-se que a ação de um automorfismo preserva uma D-subimplicação fuzzy e a correspondente função conjugada. Neste sentido, a conjugada de uma QL-implicação é também uma QL-subimplicação.(DIAS, 2011; BUSTINCE; BURILLO; SORIA, 2003).

Proposição 28. *Seja $\phi : U \to U$ um automorfismo e $I : U^2 \to U$ uma D-subimplicação. Então $I^{\phi} : U^2 \to U$ também é uma D-subimplicação.*

$$I^{\phi}_{S,T,N}(x, y) = S^{\phi}(T^{\phi}(N^{\phi}(x), N^{\phi}(y)), y) \tag{32}$$

Prova. *Análoga à prova em (DIAS, 2011).*

A partir da Proposição 28 a comutatividade da Classe das D-implicações sobre a ação de um automorfismo ϕ é representada no diagrama da Figura 7.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(S)\times\mathcal{C}(T)\times\mathcal{C}(N) & \xrightarrow{Eq.(26)} & \mathcal{C}(I_{S,T,N}) \\ \Big\downarrow Eq.(18)Eq.(17), Eq.(6) & & \Big\downarrow Eq.(3) \\ \mathcal{C}(S^{\phi})\times\mathcal{C}(T^{\phi})\times\mathcal{C}(N^{\phi}) & \xrightarrow{Eq.(32)} & \mathcal{C}(I^{\phi}_{S,T,N}) \end{array}$$

Figura 7: Comutatividade das Classes das D-implicações sob a ação de um automorfismo ϕ

Exemplo 13. *Pela Eq. (27), se* $\phi(x) = x^n$ *e* $n = 2$*, então tem-se que a conjugada de* I_{S_i,T_P,N_S} *é dada pela expressão:* $I^{\phi}_{S_i,T_P,N_S}(x,y) = \sqrt[2]{1-\frac{1}{i}(1-y^2)(1-(1-y^2)(1-x^2))}$*, para todos* $x, y \in U$*.*

5.4 Considerações Finais

Este Capítulo descreveu os fundamentos relacionados às principais classes de subimplicações, focando nas representabilidades destas classes, considerando automorfismos e a ação destes sobre as negações e as (sub)implicações.

Nas primeiras seções, descrevem-se a construção de cada classe de subimplicação (a partir da composição de t-sub(co)normas) e as propriedades que cada uma delas satisfaz. A seção final trata da atuação de automorfismos sobre as classe de subimplicações estudadas: (S,N)-, QL- e D-subimplicação.

6 AGREGAÇÃO DE SUBIMPLICAÇÕES FUZZY

Este Capítulo aborda a metodologia para aplicação de funções de agregação n-árias sobre famílias de subimplicações fuzzy, principalmente aquelas definidas nas classes de (S,N)- QL- e D-subimplicações fuzzy.

Para tal, o operador $\mathcal{I}_A$ é definido por uma função de agregação A aplicada a um conjunto finito de (sub)implicações $\mathcal{I}$, a fim de gerar um nova (sub)implicação fuzzy. São também verificadas propriedades que o novo operador $\mathcal{I}_A$ preserva, em relação às propriedades das (sub)implicações agregadas.

Os estudos de casos estão baseados na média aritmética, na mediana e no operador média ponderada ordenada, e são apresentados para cada uma das classes de subimplicações.

Teorema 1. *O operador $\mathcal{F}_A$ verifica a propriedade* $\mathbf{Ik}$ *se cada $F_i \in \mathcal{F}$ verifica a propriedade* $\mathbf{Ik}$*, para todo $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$.*

Prova. *Para todos $x, y, z \in U$ vale que:*

I0-I1: *Uma vez que F_i verifica a propriedade* $\mathbf{I1}$*, para a prova de* $\mathbf{A2}$ *tem-se que:*

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_A(0,0) &= A(F_1(0,0), F_2(0,0), \ldots, F_n(0,0)) = A(1,1,\ldots,1) = 1,\\
\mathcal{F}_A(1,1) &= A(F_1(1,1), F_2(1,1), \ldots, F_n(1,1)) = A(1,1,\ldots,1) = 1,\\
\mathcal{F}_A(0,1) &= A(F_1(0,1), F_2(0,1), \ldots, F_n(0,1)) = A(1,1,\ldots,1) = 1,\\
\mathcal{F}_A(1,0) &= A(F_1(1,0), F_2(1,0), \ldots, F_n(1,0)) = A(0,0,\ldots,0) = 0.
\end{aligned}$$

Portanto, $\mathcal{F}_A$ também verifica $\mathbf{I1}$*.*

I2: *Assume-se que $x \leq z$. Como A e F_i, para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, verificam as propriedades* $\mathbf{A3}$ *e* $\mathbf{I2}$*, respectivamente, vale que:*

$$\mathcal{F}_A(x,y) = A(F_1(x,y), F_2(x,y), \ldots, F_n(x,y)) \geq A(F_1(z,y), F_2(z,y), \ldots, F_n(z,y))$$

Logo, $\mathcal{F}_A(x,y) \geq \mathcal{F}_A(z,y)$.

I3: *Assumindo que $y \leq z$. Como A e F_i, para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, verificam as propriedades $\mathbf{A3}$ e $\mathbf{I3}$, respectivamente, tem-se que:*

$$\mathcal{F}_A(x, y) = A(F_1(x, y), F_2(x, y), \ldots, F_n(x, y)) \leq A(F_1(x, z), F_2(x, z), \ldots, F_n(x, z))$$

Logo, $\mathcal{F}_A(x, y) \leq \mathcal{F}_A(x, z)$.

I4: *Partindo da hipótese que F_i satisfaz $\mathbf{I4}$, para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, então por $\mathbf{A2}$ tem-se:*

$$\mathcal{F}_A(0, y) = A(F_1(0, y), F_2(0, y), \ldots, F_n(0, y)) = A(1, 1, \ldots, 1) = 1.$$

I5: *Partindo da hipótese que F_i verifica $\mathbf{I5}$, para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, logo por $\mathbf{A2}$ tem-se:*

$$\mathcal{F}_A(x, 1) = A(F_1(x, 1), F_2(x, 1), \ldots, F_n(x, 1)) = A(1, 1, \ldots, 1) = 1.$$

I9: *Por $\mathbf{A2}$, considere que:*

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_A(0, 0) &= A(F_1(0, 0), F_2(0, 0), \ldots, F_n(0, 0)) = A(1, 1, \ldots, 1) = 1, e \\ \mathcal{F}_A(1, 0) &= A(F_1(1, 0), F_2(1, 0), \ldots, F_n(1, 0)) = A(0, 0, \ldots, 0) = 0. \end{aligned}$$

Assumindo que $x \leq y$. Então, por $\mathbf{A3}$ e $\mathbf{N2}$ tem-se que

$$A(N_1(x), N_2(x), \ldots, N_n(x)) \geq A(N_1(y), N_2(y), \ldots, N_n(y)).$$

Por $\mathbf{I9}$ chegamos a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_A(x, 0) &= A(F_1(x, 0), F_2(x, 0), \ldots, F_n(x, 0)) \\ &\geq A(F_1(y, 0), F_2(y, 0), \ldots, F_n(y, 0)) = \mathcal{F}_A(y, 0). \end{aligned}$$

Conclusão, provamos que $\mathcal{F}_A(\,\cdot\,, 0)$ é uma negação fuzzy.

I11: *Se $F_i(x, x) = 1$ para todo $x \in U$ e todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, então por $\mathbf{I1}$ tem-se:*

$$\mathcal{F}_A(x, y) = A(F_1(x, x), F_2(x, x), \ldots, F_n(x, x)) = A(1, 1, \ldots, 1) = 1$$

Portanto, o Teorema 1 foi provado.

Proposição 29. *Se para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, F_i é uma implicação fuzzy, então $\mathcal{F}_A$ é uma implicação fuzzy.*

Prova: Segue do Teorema 1, itens $\mathbf{I0}$, $\mathbf{I1}$, $\mathbf{I2}$ e $\mathbf{I3}$.

Teorema 2. *Seja N uma negação fuzzy. O operador $\mathcal{F}_A$ verifica a propriedade* $\mathbf{I12}$ *em relação a N se cada $F_i \in \mathcal{F}$, para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, verifica a propriedade* $\mathbf{I12}$ *em relação a N.*

Prova. *Para todo $y \in U$, se $F_i(x, y) = F_i(N(y), N(x))$ para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ e alguma negação fuzzy N, então tem-se*

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_A(x, y) &= A(F_1(x, y), F_2(x, y), \ldots, F_n(x, y)) \text{ pela Eq. (19)} \\ &= A(F_1(N(y), N(x)), F_2(N(y), N(x)), \ldots, F_n(N(y), N(x))) \text{ por } \mathbf{I12}.\end{aligned}$$

Por conseguinte, $\mathcal{F}_A(x, y) = \mathcal{F}_A(N(y), N(x))$.

Teorema 3. *$\mathcal{F}_A$ verifica* $\mathbf{I7}$ *quando $F_i \in \mathcal{F}$ satisfaz, para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, as seguintes condições:*

1. *a* ***propriedade distributiva****, a qual para todo $x, y_1, y_2, \ldots, y_n \in U$:*

$$A(F_i(x, y_1), F_i(x, y_2), \ldots, F_i(x, y_n)) = F_i(x, A(y_1, y_2, \ldots, y_n)), \tag{33}$$

2. *o princípio da* ***troca generalizada****, na qual para todo $0 \leq i, j \leq n$:*

$$F_i(x, F_j(y, z)) = F_i(y, F_j(x, z)). \tag{34}$$

Prova. *Para todos $x, y, z \in U$ tem-se*

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_A(x, \mathcal{F}_A(y, z)) &= A(F_1(x, A(F_1(y, z) \ldots, F_n(y, z))), \cdots, \\ &\qquad F_n(x, A(F_1(y, z) \ldots, F_n(y, z)))) \quad \text{pela Eq. 19} \\ &= A(A(F_1(x, F_1(y, z)), \ldots, F_1(x, F_n(y, z))), \ldots, \\ &\qquad A(F_n(x, F_1(y, z)), \ldots, F_n(x, F_n(y, z)))) \quad \text{pela Eq. (33)} \\ &= A(A(F_1(y, F_1(x, z)), \ldots, F_1(y, F_n(x, z))), \ldots, \\ &\qquad A(F_n(y, F_1(x, z)), \ldots, F_n(y, F_n(x, z)))) \quad \text{pela Eq. (34)} \\ &= A(F_1(y, A(F_1(x, z), \ldots, F_n(x, z))), \ldots, \\ &\qquad F_n(y, A(F_1(x, z), \ldots, F_n(x, z)))) \quad \text{pela Eq. (33)} \\ &= \mathcal{F}_A(y, \mathcal{F}_A(x, z)). \quad \text{pela Eq. 19.}\end{aligned}$$

Portanto, $\mathcal{F}_A$ verifica $\mathbf{I7}$.

Proposição 30. *Se, para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, F_i é uma (S,N)-subimplicação então $\mathcal{F}_A$ é uma (S,N)-subimplicação.*

Prova: Segue do Teorema 1, itens $\mathbf{I2}$, $\mathbf{I9}$. E da Proposição 3, a prova de $\mathbf{I7}$.

6.1 Agregação de (S,N)-subimplicações

Esta seção descreve a agregação de (S,N)-subimplicações fuzzy, obtidas por t-subnormas e a negação padrão.

6.1.1 Média Aritmética

Esta subseção discorre sobre a agregação de (S,N)-subimplicações considerando o operador de agregação Média Aritmética.

Proposição 31. *Seja* $M\colon U^n \to U$ *o agregador média aritmética e* $\mathcal{I}_n = \{I_{i1}, \ldots, I_{in}\} \subset \mathcal{I}$, *onde* $\mathcal{I} = \{I_i(x,y) = 1 - \frac{1}{i}(x - xy)\}$ *é a família de (S,N)-subimplicações.* $\mathcal{I}_M$ *verifica* $\mathbf{Ik}$ *quando cada instância* I_i *verifica* $\mathbf{Ik}$, *para* $k \in \{0, 2, 3, 4, 6\}$.

Prova. *Pela Proposição 20 temos que cada* I_{ij} *com* $1 \leq j \leq n$ *satisfaz* $\mathbf{I0}, \mathbf{I2}, \mathbf{I3}, \mathbf{I4}$ *e* $\mathbf{I6}$. *Então, para todos* $x, y, z \in U$, *o seguinte vale:*

I0: $\mathcal{I}_M(1,1) = M(I_1(1,1), \ldots, I_n(1,1)) = M(1, \ldots, 1)$, *uma vez que o operador* M *é função de agregação idempotente. Analogamente, também pode ser provado que* $\mathcal{I}_M(1,1) = \mathcal{I}_M(0,0) = \mathcal{I}_M(0,1) = 1$. *Logo,* $\mathcal{I}_M$ *verifica* $\mathbf{I0}$.

I2: *Sendo* M *uma função monotônica, quando* $x \leq z$, *então é válido que* $\mathcal{I}_M(x,y) = M(I_1(x,y), I_2(x,y), \ldots, I_n(x,y)) \geq M(I_1(z,y), I_2(z,y), \ldots, I_n(z,y)) = \mathcal{I}_M(z,y)$. *Por conseguinte,* $\mathcal{I}_M$ *verifica a antitonicidade no primeiro argumento.*

I3: *Sendo* M *uma função monotônica, quando* $y \leq z$, *então segue que* $\mathcal{I}_M(x,y) = M(I_1(x,y), I_2(x,y), \ldots, I_n(x,y)) \leq M(I_1(x,z), I_2(x,z), \ldots, I_n(x,z)) = \mathcal{I}_M(x,z)$.. *Portanto,* $\mathcal{I}_M$ *verifica a monotonicidade no segundo argumento.*

I4: $\mathcal{I}_M(0,y) = M(I_1(0,y), \ldots, I_n(0,y)) = M(1, \ldots, 1) = 1$. *Logo* $\mathcal{I}_M$ *verifica* $\mathbf{I4}$.

I6: $\mathcal{I}_M(N_S(y), N_S(x)) = 1 - \frac{1}{i}((1-y) - (1-y)(1-x)) = 1 - \frac{1}{i}(x - xy) = \mathcal{I}_M(x,y)$, *por conseguinte* $\mathcal{I}_M$ *verifica a simetria contrapositiva.*

Proposição 32. *O operador* $(A, \mathcal{I})$ *ou* $\mathcal{I}_M$ *definido pelo agregador media* M *e a família de (S,N)-subimplicações* $\mathcal{I}$, *previamente definida na Proposição 31, verificam a propriedades* $\mathbf{A13}$ *e* $\mathbf{I5}$.

Prova. *De acordo com a Proposição 3, é suficiente provar que:*

(ii) *Para todo $x, y_1, \ldots, y_n \in U$, vale o seguinte:*

$$\begin{aligned}
&M(I_i(x,y_1),\ldots,I_i(x,y_n)) = \\
&= \frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{i}(x-xy_1)+\ldots+1-\frac{1}{i}(x-xy_n)\right) \\
&= \frac{1}{n}\left(n-\frac{1}{i}(nx)+\frac{1}{i}x(y_1+\ldots+y_n)\right) \\
&= \frac{n}{n}-\frac{1}{n}\frac{1}{i}(nx)+\frac{1}{n}\frac{1}{i}x(y_1+\ldots+y_n) \\
&= 1-\frac{1}{i}x+\frac{1}{i}x\frac{1}{n}(y_1+\ldots+y_n) \\
&= 1-\frac{1}{i}(x-x\frac{1}{n}(y_1+\ldots+y_n)) \\
&= 1-\frac{1}{i}(x-xM(y_1,\ldots,y_n)) = I_i(x,M(y_1,\ldots,y_n)).
\end{aligned}$$

Portanto, o operador M verifica $\mathbf{A13}$.

(ii) *Para $I_{i_1}, I_{i_2} \in \mathcal{I}$, obtém-se o seguinte:*

$$\begin{aligned}
I_{i_1}(x, I_{i_2}(y,z)) &= I_{i_1}(x, 1-\frac{1}{i_2}(y-yz)) \\
&= 1-\frac{xy}{i_1 i_2}(1-z) \\
&= 1-\frac{1}{i_1}(y-y(1-\frac{1}{i_2}(x-xz))) \\
&= I_{i_1}(y, I_{i_2}(x,z)).
\end{aligned}$$

Logo, $\mathcal{I}_M$ verifica o princípio da troca generalizado.

Concluindo, $\mathcal{I}_M$ verifica $\mathbf{I5}$.

Corolário 6. *$\mathcal{I}_M$ é uma (S,N)-implicação dada por*

$$\mathcal{I}_{\mathcal{S}_M,N_S}(x,y) = \mathcal{S}_M(N_S(x),y) \tag{35}$$

Prova. *Segue das Proposições 31 e 32, de acordo com a Proposição 18.*

Os principais resultados estão resumidos na Figura 8. Mostrando que o agregador média aritmética M preserva a classe das (S,N)-subimplicações definidas na Proposição 31, ou seja, $\mathcal{I}_{\mathcal{S}_M,N_S}$ também é uma (S,N)-subimplicação.

6.1.2 Mediana

Esta subseção discorre sobre a agregação de (S,N)-subimplicações considerando o operador de agregação Mediana.

$$\begin{array}{ccc} C(N)\times\mathcal{S}\times M & \xrightarrow{Eq.(19)} & C(N)\times\mathcal{S}_M \\ \Big\downarrow{\scriptstyle Eqs.(22)} & & \Big\downarrow{\scriptstyle Eq.(35)} \\ \mathcal{I}_{\mathcal{S},N}\times M & \xrightarrow{Eq.(19)} & (\mathcal{I}_{\mathcal{S},N})_M \end{array}$$

Figura 8: Classe das $(\mathcal{S}_M, N_S)$-implicações.

Proposição 33. *Seja $M_d\colon U^n \to U$ o agregador mediana e $\mathcal{I}_n = \{I_{i1}, \ldots, I_{in}\} \subset \mathcal{I}$, onde $\mathcal{I} = \{I_i(x,y) = 1 - \frac{1}{i}(x - xy)\}$ é a família de (S,N)-subimplicações. $\mathcal{I}_{M_d}$ verifica $\mathbf{I0}, \mathbf{I2}, \mathbf{I3}, \mathbf{I4}$ e $\mathbf{I6}$, quando cada instância I_i verifica $\mathbf{I0}, \mathbf{I2}, \mathbf{I3}, \mathbf{I4}$ e $\mathbf{I6}$.*

Prova. *Pela Proposição 20 temos que cada I_{ij} com $1 \leq j \leq n$ satisfaz $\mathbf{I0}, \mathbf{I2}, \mathbf{I3}, \mathbf{I4}$ e $\mathbf{I6}$. Então, para todos $x, y, z \in U$, o seguinte vale.*

I0: *$\mathcal{I}_{M_d}(1,1) = M_d(I_1(1,1), \ldots, I_n(1,1)) = M_d(1, \ldots, 1)$, uma vez que o operador M_d é função de agregação idempotente. Analogamente, também pode ser provado que $\mathcal{I}_{M_d}(1,1) = \mathcal{I}_{M_d}(0,0) = \mathcal{I}_{M_d}(0,1) = 1$. Logo, $\mathcal{I}_{M_d}$ verifica $\mathbf{I0}$.*

I2: *Sendo M_d uma função monotônica, quando $x \leq z$, então é válido que $\mathcal{I}_{M_d}(x,y) = M_d(I_1(x,y), I_2(x,y), \ldots, I_n(x,y)) \geq M_d(I_1(z,y), I_2(z,y), \ldots, I_n(z,y)) = \mathcal{I}_{M_d}(z,y)$. Por conseguinte, $\mathcal{I}_{M_d}$ verifica a antitonicidade no primeiro argumento.*

I3: *Sendo M_d uma função monotônica, quando $y \leq z$, então segue que $\mathcal{I}_{M_d}(x,y) = M_d(I_1(x,y), I_2(x,y), \ldots, I_n(x,y)) \leq M_d(I_1(x,z), I_2(x,z), \ldots, I_n(x,z)) = \mathcal{I}_{M_d}(x,z)$.. Portanto, $\mathcal{I}_{M_d}$ verifica a monotonicidade no segundo argumento.*

I4: *$\mathcal{I}_{M_d}(0,y) = M_d(I_1(0,y), \ldots, I_n(0,y)) = M_d(1, \ldots, 1) = 1$. Logo $\mathcal{I}_{M_d}$ verifica $\mathbf{I4}$.*

I6: *$\mathcal{I}_{M_d}(N_S(y), N_S(x)) = 1 - \frac{1}{i}((1-y) - (1-y)(1-x)) = 1 - \frac{1}{i}(x - xy) = \mathcal{I}_{M_d}(x,y)$, por conseguinte $\mathcal{I}_{M_d}$ verifica a simetria contrapositiva.*

Proposição 34. *O operador $\mathcal{I}_{M_d}$ definido pelo agregador mediana M_d e a família de (S,N)-subimplicações $\mathcal{I}$, previamente definida na Proposição 33, verifica a propriedade $\mathbf{I5}$.*

Prova. *De acordo com a Proposição 3, para todo $x, y_1, \ldots, y_n \in U$, considere os dois casos seguintes.*
(i) Primeiramente, se n é ímpar, $M_d(I_i(x,y_1), \ldots, I_i(x,y_n)) = M_d(1 - \frac{1}{i}(x - xy_1), \ldots, 1 - \frac{1}{i}(x - xy_n)) = 1 - \frac{1}{i}(x - xy_{\sigma(\frac{n+1}{2})}) = I_i(x, M_d(y_1, \ldots, y_n))$. Caso contrário, quando n é par: $M_d(I_i(x,y_1), \ldots, I_i(x,y_n) = M_d(1 - \frac{1}{i}(x - xy_1), \ldots, 1 - \frac{1}{i}(x - xy_n))$. Isso implica que $M_d(I_i(x,y_1), \ldots, I_i(x,y_n) = 1 - \frac{1}{i}(2x\frac{1}{2} - x\frac{1}{2}(y_{\sigma(\frac{n}{2})} + y_{\sigma(\frac{n}{2}+1)})) = 1 - \frac{1}{i}(x - xM_d(y_1, \ldots, y_n))$

(ii) *Agora, para* $I_{i_1}, I_{i_2} \in \mathcal{I}$, $I_{i_1}(x, I_{i_2}(y,z)) = I_{i_1}(x, 1-\frac{1}{i_2}(y-yz)) = 1-\frac{1}{i_1}(x-x(1-\frac{1}{i_2}(y-yz)))$. *Então,* $I_{i_1}(x, I_{i_2}(y,z)) = I_{i_1}(x, 1-\frac{1}{i_2}(y-yz)) = 1-\frac{1}{i_1}(x-x(1-\frac{1}{i_2}(y-yz))) = 1-\frac{xy}{i_1 i_2}(1-z) = 1-\frac{1}{i_1}y-y+\frac{y}{i_2}(x-xz)) = 1-\frac{1}{i_1}(y-y(1-\frac{1}{i_2}(x-xz))) = I_{i_1}(y, I_{i_2}(x,z))$. *Logo,* $\mathcal{I}_{M_d}$ *verifica o princípio da troca generalizado. Por conseguinte,* $\mathcal{I}_{M_d}$ *verifica* $\mathbf{I5}$.

Corolário 7. $\mathcal{I}_{M_d}$ *é uma* (S,N)*-implicação dada por*

$$\mathcal{I}_{\mathcal{S}_{M_d},N_S}(x,y) = \mathcal{S}_{M_d}(N_S(x), y) \tag{36}$$

Prova. *Segue das Proposições 33 e 34, de acordo com a Proposição 18.*

Os principais resultados descritos no Corolário (7) estão resumidos na Figura 9. Mostrando que o agregador M_d preserva a classe das (S,N)-subimplicações definidas na Proposição 33, ou seja, $\mathcal{I}_{\mathcal{S}_{M_d},N_S}$ também é uma (S,N)-subimplicação.

$$\begin{array}{ccc} C(N)\times\mathcal{S}\times M_d & \xrightarrow{Eq.(19)} & C(N)\times\mathcal{S}_{M_d} \\ \Big\downarrow Eqs.(22) & & \Big\downarrow Eq.(36) \\ \mathcal{I}_{\mathcal{S},N}\times M_d & \xrightarrow{Eq.(19)} & (\mathcal{I}_{\mathcal{S},N})_{M_d} \end{array}$$

Figura 9: Classe das $(\mathcal{S}_{M_d}, N_S)$-implicações.

6.1.3 Média Ponderada Ordenada

Esta subseção discorre sobre a agregação de (S,N)-subimplicações considerando o operador de agregação OWA.

Proposição 35. *Seja* $OWA\colon U^n \to U$ *um agregador (idempotente,* n*-ário) e* $\mathcal{I}$ *uma família de (S,N)-subimplications fuzzy.* $\mathcal{I}_{OWA}$ *verifica* $\mathbf{I0}, \mathbf{I2}, \mathbf{I3}, \mathbf{I4}$ *e* $\mathbf{I6}$ *sempre que todo membro da função* $I_i \in \mathcal{I}$ *verifica* $\mathbf{I0}, \mathbf{I2}, \mathbf{I3}, \mathbf{I4}$ *e* $\mathbf{I6}$*, respectivamente.*

Prova. *Pela Proposição 20, cada* I_{ij} *com* $1 \leq j \leq n$ *satisfaz* $\mathbf{I0}, \mathbf{I2}, \mathbf{I3}, \mathbf{I4}$ *e* $\mathbf{I6}$*. Logo, para todos* $x, y, z \in U$*, vale o seguinte:*

I0: *Como o* OWA *verifica* $\mathbf{A0}$*, temos que:*

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{OWA}(1,1) &= OWA(I_1(1,1),\ldots,I_n(1,1)) = OWA(1,\ldots,1) = 1 \\ \mathcal{I}_{OWA}(0,0) &= OWA(I_1(0,0),\ldots,I_n(0,0)) = OWA(1,\ldots,1) = 1 \\ \mathcal{I}_{OWA}(0,1) &= OWA(I_1(0,1),\ldots,I_n(0,1)) = OWA(1,\ldots,1) = 1 \end{aligned}$$

Portanto, $\mathcal{I}_{OWA}$ *verifica* $\mathbf{I0}$.

I2: *Pela monotonicidade de OWA, se $x \leq z$, segue que*

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{OWA}(x,y) &= OWA(I_1(x,y), I_2(x,y), \ldots, I_n(x,y)) \\ &\geq OWA(I_1(z,y), I_2(z,y), \ldots, I_n(z,y)) = \mathcal{I}_{OWA}(z,y).\end{aligned}$$

I3: *Pela monotonicidade de OWA, se $y \leq z$, segue que*

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{OWA}(x,y) &= OWA(I_1(x,y), I_2(x,y), \ldots, I_n(x,y)) \\ &\leq OWA(I_1(x,z), I_2(x,z), \ldots, I_n(x,z)) = \mathcal{I}_{OWA}(x,z).\end{aligned}$$

I4: *Pela propriedade $\mathbf{A0}$, nós obtemos o seguinte:*

$$\mathcal{I}_{OWA}(0,y) = OWA(I_1(0,y), \ldots, I_n(0,y)) = OWA(1, \ldots, 1) = 1.$$

I6: *Pela simetria contrapositiva de I_n, segue que*

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{OWA}(N(y), N(x)) &= OWA(I_1(N(y), N(x)), \ldots, I_n(N(y), N(x))) \\ &= OWA(I_1(x,y), \ldots, I_n(x,y)) = \mathcal{I}_O WA(x,y).\end{aligned}$$

I7: *Quando OWA é uma função indempotente, segue que*

$$\mathcal{I}_{OWA}(1,y) = OWA(I_1(1,y) \ldots, I_n(1,y)) = OWA(y,y,\ldots,y) = y.$$

I8: *Quando $x \leq y$, o que segue é verificado:* $N_{\mathcal{I}_{OWA}}(x) = \mathcal{I}_{OWA}(x,0) = OWA(I_1(x,0) \ldots, I_n(x,0)) \geq OWA(I_1(y,0) \ldots, I_n(y,0)) = N_{\mathcal{I}_{OWA}}(y)$

Portanto, a Proposição 35 é verificada.

Proposição 36. *O operador $\mathcal{I}_{OWA}$ definido pelo agregador OWA e a família $\mathcal{I}_{(S,N)}$ de (S,N)-subimplicações, previamente definida na Equação(23),verifica* $\mathbf{I5}$.

Prova. *De acordo com a Proposição 3, é suficiente provar que:*

(ii) *Para todo $x, y_1, \ldots, y_n \in U$, vale o seguinte:*

$$\begin{aligned}&OWA(I_i(x,y_1), \ldots, I_i(x,y_n)) = \\ &= w_1(1 - \frac{1}{i}(x - xy_{\sigma(1)})), \ldots, w_n(1 - \frac{1}{i}(x - xy_{\sigma(n)})) \\ &= \sum_{i=0}^{n} w_i - \frac{1}{i}(x - x\sum_{i=0}^{n} w_i y_{\sigma(i)}) \\ &= 1 - \frac{1}{i}(x - x \cdot OWA(y_1, y_2, \ldots y_n)) \\ &= I_i(x, OWA(y_1, y_2, \ldots y_n)).\end{aligned}$$

Portanto, o operador OWA verifica $\mathbf{A13}$.

(ii) *Para* $I_{i_1}, I_{i_2} \in \mathcal{I}$, *obtemos o seguinte:*

$$\begin{aligned} I_{i_1}(x, I_{i_2}(y,z)) &= I_{i_1}(x, 1 - \frac{1}{i_2}(y - yz)) \\ &= 1 - \frac{xy}{i_1 i_2}(1 - z) \\ &= 1 - \frac{1}{i_1}(y - y(1 - \frac{1}{i_2}(x - xz))) \\ &= I_{i_1}(y, I_{i_2}(x,z)). \end{aligned}$$

Logo, $\mathcal{I}_{OWA}$ *verifica (*$\mathbf{I5}$*), o princípio da troca generalizado.*

Corolário 8. *Sejam o operador* $(OWA, \mathcal{I})$ *e a família de (S,N)-subimplicações* $\mathcal{I}$ *previamente definida na Eq.(23). A função* $\mathcal{I}_{OWA}$ *é uma* $(\mathcal{S}_{OWA}, N_S)$*-subimplicação dada por*

$$\mathcal{I}_{OWA}(x,y) = \mathcal{S}_{OWA}(N_S(x), y) \tag{37}$$

Prova. *Segue das Proposições 35 e 36.*

Os principais resultados sobre como obter o operador $\mathcal{I}_{OWA}$ estão resumidos no diagrama da Figura 10, mostrando que o operador OWA preserva a classe das (S,N)-subimplicações, como estabelecido na Proposição 35, ou ainda, $\mathcal{I}_{\mathcal{S}_{OWA},N_S}$ é uma (S,N)-subimplicação.

$$\begin{array}{ccc} C(N) \times \mathcal{S} \times OWA & \xrightarrow{Eq.(19)} & C(N) \times \mathcal{S}_{OWA} \\ \Big\downarrow Eqs.(22) & & \Big\downarrow Eq.(37) \\ \mathcal{I}_{\mathcal{S},N} \times OWA & \xrightarrow{Eq.(19)} & (\mathcal{I}_{\mathcal{S},N})_{OWA} \end{array}$$

Figura 10: Diagrama comutativo da classe das $(\mathcal{S}_{OWA}, N_S)$-subimplicações.

6.2 Agregação de QL-subimplicações

Esta seção introduz a agregação de QL-(sub)implicações fuzzy. As quais são obtidas considerando o uso de t-subnormas, t-subconormas e a negação padrão.

6.2.1 Operador de Média Aritmética

Proposição 37. *Seja* $M\colon U^n \to U$ *o agregador média aritmética e* $\mathcal{J} = \{J_i\colon U^k \to U\}$, *para* $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ *uma família de subimplicações fuzzy dada por* $J_i = 1 - \frac{1}{i}(x - x^2 y)$.

Então $\mathcal{J}_M$ é uma QL-implicação dada por

$$\mathcal{J}_M(x,y) = \mathcal{I}_{\mathcal{S}_M,N_S,\mathcal{T}_P}(x,y). \tag{38}$$

Prova. *De acordo com a Proposição 22, vale o seguinte:*

Para todos $x, y \in U$, tem-se que:

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_M(x,y) &= M(J_1(x,y),\ldots,J_n(x,y)) \textit{Eq. (19)}\\ &= M(S_1(N_S(x),T_P(x,y)),\ldots,S_n(N_S(x),T_P(x,y))) \textit{Eq. (25)}\\ &= \mathcal{I}_{\mathcal{S}_M,N_S,\mathcal{T}_M}(x,y). \textit{Prop. (13)}\end{aligned}$$

Logo, a Proposição 37 é verificada.

Proposição 38. *Seja $M\colon U^n \to U$ o agregador média aritmética e $\mathcal{J}$ uma família de todas as subimplicações J_i. $\mathcal{J}_M$ verifica $\mathbf{Ik}$, para $\mathbf{k} \in \{0,2,4,15,16a,16b\}$.*

Prova. *Segue das Proposições 22 e 37.*

6.2.2 Operador de Mediana

Proposição 39. *Seja $M_d\colon U^n \to U$ o agregador mediana e $\mathcal{J} = \{J_i\colon U^k \to U\}$, para $i \in \{1,2,\ldots,n\}$ uma família de subimplicações fuzzy dada por $J_i = 1 - \frac{1}{i}(x - x^2y)$. Então $\mathcal{J}_{M_d}$ é uma QL-implicação dada por*

$$\mathcal{J}_{M_d}(x,y) = \mathcal{I}_{\mathcal{S}_{M_d},N_S,\mathcal{T}_{M_d}}(x,y). \tag{39}$$

Prova. *De acordo com a Proposição 22, vale o seguinte.*

(i) *Primeiramente, se n é ímpar, obtém-se o seguinte:*

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_{M_d}(x,y) &= M_d(J_1(x,y),\ldots,J_n(x,y))\\ &= M_d(S_1(N(x),T_1(x,y),\ldots,S_n(N(x),T_n(x,y))\\ &= \left(S_{\sigma(\frac{n+1}{2})}(N(x),T(x,y)\right) = \mathcal{I}_{\mathcal{S}_{M_d},N_S,\mathcal{T}_{M_d}}(x,y).\end{aligned}$$

(ii) *Caso contrário, quando n é par, segue que:*

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_{M_d}(x,y) &= M_d(J_1(x,y),\ldots,J_n(x,y))\\ &= M_d(S_1(N(x),T(x,y)),\ldots,S_n(N(x),T(x,y)))\\ &= \frac{1}{2}(S_{\sigma(\frac{n}{2})}(N(x),T(x,y)) + S_{\sigma(\frac{n+1}{2})}(N(x),T(x,y)))\\ &= \mathcal{I}_{\mathcal{S}_{M_d},N_S,\mathcal{T}_{M_d}}(x,y).\end{aligned}$$

Logo, a Proposição 39 é verificada.

Proposição 40. *Seja $M_d\colon U^n \to U$ o agregador mediana e $\mathcal{J}$ uma família de todos os subimplicadores J_i. $\mathcal{J}_{M_d}$ verifica* $\mathbf{Ik}$*, com* $\mathbf{k} \in \{0, 2, 4, 15, 16a, 16b\}$.

Prova. *Segue das Proposições 22 e 39.*

6.2.3 Agregador Média Ordenada Ponderada (OWA)

Esta seção analisa sob quais condições a classe das QL-subimplicações são preservadas pelo operador OWA.

Proposição 41. *Seja o agregador OWA e $\mathcal{J} = \{I_i\colon U^2 \to U, I_i(x,y) = S_P(N_S(x), T_i(x,y)), 0 \leq i \leq n\}$ uma família de QL-subimplicações. Então, para todos $x, y \in U$, a função $\mathcal{J}_{OWA}\colon U^2 \to U$ é uma QL-subimplicação, cuja definição é dada por*

$$\mathcal{J}_{OWA}(x,y) = \mathcal{I}_{\mathcal{S}_P, N_S, \mathcal{T}_{OWA}}(x,y). \tag{40}$$

Prova. *De acordo com a Eq. (19), para todos $x, y \in U$, tem-se que o seguinte vale.*

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_{OWA}(x,y) &= OWA(I_1(x,y), \ldots, I_n(x,y)) = \sum_{i=1}^{n} w_i \cdot I_{\sigma(i)}(x,y) \\
&= \sum_{i=1}^{n} w_i \cdot S_P(N(x), T_{\sigma(i)}(x,y)) \\
&= S_P(N(x), \sum_{i=1}^{n} w_i \cdot T_{\sigma(i)}(x,y)) = \mathcal{I}_{\mathcal{S}_P, N_S, \mathcal{T}_{OWA}}(x,y).
\end{aligned}$$

Portanto, a Proposição 41 é verificada.

Proposição 42. *Seja $OWA\colon U^n \to U$ o operador OWA e $\mathcal{J}$ uma família de todas as QL-subimplicações como apresentado na Proposição 41. Então o operador $(\mathcal{J}, OWA)$, referenciado como $\mathcal{J}_{OWA}$, verifica as propriedades* ***Ik*** *para* $\mathbf{k} \in \{0, 2, 4, 9, 16a, 16b\}$.

Prova. *Segue das Proposições 22 e 41.*

As resultados apresentados mostram que o operador OWA preserva a classe das QL-subimplicações:

1. Primeiramente, podemos obter $\mathcal{S}_{OWA}$ pelo operador OWA aplicado sobre n t-subconormas $\mathcal{S}_i$. E após isso, definimos um operador $(\mathcal{J}, OWA)$ como uma QL-subimplicação representada pela t-norma produto T_P, a negação padrão N_S juntamente com uma t-subconorma $\mathcal{S}_i$.

2. Para cada t-subconorma S_i, a família $\mathcal{J}$, de QL-subimplicações, tem suas funções-membro expressas por I_{S_i, T_P, N_S}. E após, pela agregação das n funções-membro de $\mathcal{J}_{QL}$, obtemos um operador $(\mathcal{J}, OWA)$.

6.3 Agregação de D-subimplicações

Esta seção discorre sobre a agregação de D-(sub)implicações fuzzy. As quais são obtidas considerando o uso de t-subconormas, t-subnormas, e a negação padrão.

6.3.1 Operador Média Aritmética

Esta subseção analisa sob quais condições a classe das D-subimplicações são preservadas pelo operador média aritmética (M).

Proposição 43. *Seja $M\colon U^n \to U$ o agregador média aritmética e*

$$\mathcal{L} = \{I_i\colon U^2 \to U\colon I_i(x,y) = S_i(T_P(x,y), N_S(x)), 0 \leq i \leq n\},$$

uma família de D-subimplicações. Então, para todo $x, y \in U$, a função $\mathcal{L}_{OWA}\colon U^2 \to U$ é uma D-subimplicação, cuja definição é dada por

$$\mathcal{L}_M(x,y) = \mathcal{I}_{\mathcal{S}_M,\mathcal{T}_P,N_S}(x,y). \tag{41}$$

Prova. *De acordo com a Proposição 25, o seguinte vale.*

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_M(x,y) &= M(I_1(x,y),\ldots,I_n(x,y)) \\
&= M\left(S_{\sigma(1)}(T_P(N_S(x),N_S(y)),y),\cdots,S_{\sigma(n)}(T_P(N_S(x),N_S(y)),y)\right) \\
&= \frac{1}{n}\left(S_1(T_P(N_S(x),N_S(y)),y)+,\cdots,+S_n(T_P(N_S(x),N_S(y)),y)\right) \\
&= \mathcal{I}_{S_M,T_P,N_S}(x,y).
\end{aligned}$$

Portanto, a Proposição 43 é verificada.

Proposição 44. *Seja $M\colon U^n \to U$ o operador média aritmética e $\mathcal{L}$ uma família de todas as D-subimplicações como apresentado na Prop. 43. Então o operador $(\mathcal{L}, M)$, referenciado como $\mathcal{L}_M$, verifica as propriedades **Ik** para $\mathbf{k} \in \{0, 2, 4, 16a, 16b, 17\}$.*

Prova. *Segue das Proposições 25 e 43.*

Na Figura 11, está uma representação em diagrama dos resultados expostos nesta subseção. O gráfico mostra que o operador média preserva a classe das D-subimplicações.

1. Primeiramente, podemos obter $\mathcal{S}_M$ pelo operador média (M) aplicado sobre n t-subconormas $\mathcal{S}_i$. E após isso, definimos um operador $(\mathcal{L}, M)$ como uma D-subimplicação representada pela t-norma T_P, a negação padrão N_S juntamente com uma t-subconorma $\mathcal{S}_i$.

2. Para cada t-subconorma S_i, a família $\mathcal{L}$, de D-implicações, com suas funções-membro dadas por I_{S_i,T_P,N_S}, é construída. E após isso, pela agregação das n funções-membro de $\mathcal{L}$, obtemos um operador $(\mathcal{L}, M)$.

$$\begin{array}{ccc} N_S \times T_P \times \mathcal{S} \times M & \xrightarrow{Eq.(19)} & N_S \times T_P \times \mathcal{S}_M \\ \Big\downarrow Eqs.(26) & & \Big\downarrow Eq.(41) \\ \mathcal{I}_{\mathcal{S}_i,T_P,N_S} \times M & \xrightarrow{Eq.(19)} & \mathcal{I}_{\mathcal{S}_M,T_P,N_S} \end{array}$$

Figura 11: Classe de $(\mathcal{S}_M, T_P, N_S)$-subimplicações obtida pelo operador M.

6.3.2 Operador Mediana

Esta subseção analisa sob quais condições a classe das D-subimplicações é preservada pelo operador mediana.

Proposição 45. *Seja $M_d\colon U^n \to U$ o agregador M_d e*
$\mathcal{L} = \{I_i\colon U^2 \to U\colon I_i(x,y) = S_i(T_P(x,y), N_S(x)), 0 \leq i \leq n\}$
uma família de D-subimplicações. Então, para todos $x, y \in U$, a função $\mathcal{L}_{M_d}\colon U^2 \to U$ é uma D-subimplicação, cuja definição é dada por

$$\mathcal{L}_{M_d}(x,y) = \mathcal{I}_{\mathcal{S}_{M_d},\mathcal{T}_P,N_S}(x,y). \tag{42}$$

Prova. *De acordo com a Proposição 25, o seguinte vale.*
(i) Se n é ímpar:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{M_d}(x,y) &= M_d(I_1(x,y), \ldots, I_n(x,y)) \\ &= M_d\left(S_{\sigma(1)}(T_P(N_S(x), N_S(y)), y), \cdots, S_{\sigma(n)}(T_P(N_S(x), N_S(y)), y)\right) \\ &= S_{\sigma(\frac{n+1}{2})}(T_P(N_S(x), N_S(y)), y) \\ &= \mathcal{I}_{S_{M_d},T_P,N_S}(x,y). \end{aligned}$$

(ii) Se n é par:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{M_d}(x,y) &= M_d(I_1(x,y), \ldots, I_n(x,y)) \\ &= M_d\left(S_{\sigma(1)}(T_P(N_S(x), N_S(y)), y), \cdots, S_{\sigma(n)}(T_P(N_S(x), N_S(y)), y)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(S_{\sigma(\frac{n}{2})}(T_P(N_S(x), N_S(y)), y) + S_{\sigma(\frac{n}{2}+1)}(T_P(N_S(x), N_S(y)), y)\right) \\ &= \mathcal{I}_{S_{M_d},T_P,N_S}(x,y). \end{aligned}$$

Portanto, a Proposição 45 é verificada.

Proposição 46. *Seja $M_d\colon U^n \to U$ o operador mediana e $\mathcal{L}$ uma família de todas as D-subimplicações como apresentado na Prop. 45. Então o operador $(\mathcal{L}, M_d)$, referenciado como $\mathcal{L}_{M_d}$, verifica as propriedades **Ik** para $\mathbf{k} \in \{0, 2, 4, 9, 16a, 16b, 17\}$.*

Prova. *Segue das Proposições 25 e 45.*

Na Figura 12, está uma representação em diagrama dos resultados expostos nesta subseção. O gráfico mostra que o operador mediana (M_d) preserva a classe das D-subimplicações.

1. Primeiramente, podemos obter $\mathcal{S}_{M_d}$ pelo operador mediana aplicado sobre n t-subconormas $\mathcal{S}_i$. E após isso, definimos um operador $(\mathcal{L}, M_d)$ como uma D-subimplicação representada pela t-norma T_P, a negação padrão N_S juntamente com uma t-subconorma $\mathcal{S}_i$.

2. Para cada t-subconorma S_i, a família $\mathcal{L}$, de D-implicações, com suas funções-membro dadas por I_{S_i,T_P,N_S}, é construída. E após isso, pela agregação das n funções-membro de $\mathcal{L}$, obtemos um operador $(\mathcal{L}, M_d)$.

$$\begin{array}{ccc} N_S \times T_P \times \mathcal{S} \times M_d & \xrightarrow{Eq.(19)} & N_S \times T_P \times \mathcal{S}_{M_d} \\ \Big\downarrow Eqs.(26) & & \Big\downarrow Eq.(42) \\ \mathcal{I}_{\mathcal{S}_i,T_P,N_S} \times M_d & \xrightarrow{Eq.(19)} & \mathcal{I}_{\mathcal{S}_{M_d},T_P,N_S} \end{array}$$

Figura 12: Classe de $(\mathcal{S}_{M_d}, T_P, N_S)$-subimplicações obtida pelo operador M_d.

6.3.3 Operador Média Ordenada Ponderada (OWA)

Esta subseção analisa sob quais condições a classe das D-subimplicações é preservada pelo operador OWA.

Proposição 47. *Seja $OWA\colon U^n \to U$ o agregador OWA e*
$\mathcal{L} = \{I_i\colon U^2 \to U\colon I_i(x,y) = S_i(T_P(x,y), N_S(x)), 0 \leq i \leq n\}$,
uma família de D-subimplicações. Então, para todos $x, y \in U$, a função $\mathcal{L}_{OWA}\colon U^2 \to U$ é uma D-subimplicação, cuja definição é dada por

$$\mathcal{L}_{OWA}(x,y) = \mathcal{I}_{\mathcal{S}_{OWA},\mathcal{T}_P,N_S}(x,y). \tag{43}$$

Prova. *De acordo com a Proposição 25, o seguinte vale.*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{OWA}(x,y) &= OWA(I_1(x,y), \ldots, I_n(x,y)) = \sum_{i=1}^{n} w_i \cdot I_{\sigma(i)}(x,y) \\ &= \sum_{i=1}^{n} w_i \cdot S_{\sigma(i)}(T_P(N_S(x), N_S(y)), y) \\ &= \mathcal{I}_{\mathcal{S}_P,\mathcal{T}_{OWA},N_S}(x,y). \end{aligned}$$

Portanto, a Proposição 47 é verificada.

Proposição 48. *Seja $OWA\colon U^n \to U$ o operador OWA e $\mathcal{L}$ uma família de todas as D-subimplicações como apresentado na Prop. 47. Então o operador $(\mathcal{L}, OWA)$, referenciado como $\mathcal{L}_{OWA}$, verifica as propriedades* ***Ik*** *para $\mathbf{k} \in \{0, 2, 4, 9, 16a, 16b\}$.*

Prova. *Segue das Proposições 25 e 47.*

Na Figura 13, está uma representação em diagrama dos resultados expostos na Prop. 47. O gráfico mostra que o operador OWA preserva a classe das D-subimplicações.

1. Primeiramente, podemos obter $\mathcal{S}_{OWA}$ pelo operador OWA aplicado sobre n t-subconormas $\mathcal{S}_i$. E após isso, definimos um operador $(\mathcal{L}, A)$ como uma D-subimplicação representada pela t-norma T_P, a negação padrão N_S juntamente com uma t-subconorma $\mathcal{S}_i$.

2. Para cada t-subconorma S_i, a família $\mathcal{L}$ de D-implicações, com suas funções-membro dadas por I_{S_i,T_P,N_S}, é construída. E após isso, pela agregação das n funções-membro de $\mathcal{L}$, obtemos um operador $(\mathcal{L}, OWA)$.

$$\begin{array}{ccc} N_S \times T_P \times \mathcal{S} \times OWA & \xrightarrow{Eq.(19)} & N_S \times T_P \times \mathcal{S}_{OWA} \\ \Big\downarrow Eqs.(26) & & \Big\downarrow Eq.(43) \\ \mathcal{I}_{\mathcal{S}_i,T_P,N_S} \times OWA & \xrightarrow{Eq.(19)} & \mathcal{I}_{\mathcal{S}_{OWA},T_P,N_S} \end{array}$$

Figura 13: Diagrama comutativo da classe das $(\mathcal{S}_{OWA}, N_S)$-subimplicações.

6.4 Considerações Finais

O presente Capítulo abordou definições, proposições e propriedades relacionadas a operadores de agregação aplicados sobre classes de subimplicações fuzzy.

Foram desenvolvidos estudos de casos para as classes de (S,N)- QL- e D-subimplicações, considerando as funções de agregação: media Aritmética, Mediana e o operador OWA.

Estes estudos também consideraram as principais propriedades, exemplos e a expressão das correspondentes funções conjugadas para as classes de (S,N)- QL- e D-subimplicações.

7 CONCLUSÃO

As Implicações Fuzzy têm um papel importante na modelagem de sistemas inteligentes permitindo a estes deduzir conclusões significativas de maneira similar ao raciocínio humano. Esta dissertação abordou um estudo da Lógica Fuzzy, no sentido estrito, e a construção de conectivos fuzzy obtidos por operadores de agregação com ênfase na obtenção de uma nova classe de conectivos fuzzy.

Foram introduzidos operadores de agregação sobre t-subnormas, t-subconormas e subimplicações, estendendo as classes de t-normas, t-conormas e implicações fuzzy.

O eixo central deste trabalho considerou as agregações de (sub)implicações fuzzy, gerando novas (sub)implicações, para permitir uma maior flexibilidade na modelagem de sistemas de inferência baseados na Lógica Fuzzy. Para tanto, foram estudados os conceitos básicos relativos à representabilidade de implicações e as classes: (S,N)-, QL- e D-subimplicações, incluindo análise de propriedades desses conectivos e exemplos. Nestes, destacaram-se as subimplicações representadas pela t-subnorma produto e pela t-conorma soma probabilística, respectivamente.

Definições e principais propriedades referentes aos operadores de agregação foram estudas, como: identidade, condições de contorno, idempotência, e monotonicidade. Desenvolveram-se estudos de caso baseados nos agregadores: média aritmética, mediana e o operador OWA. Para a mediana, em particular, foi dada uma atenção maior quanto à análise de propriedades verificadas. A classe de funções de agregação OWA (*Ordered Weighted Averaging*) introduzida por Yager (YAGER, 1988), define uma família parametrizada cujos parâmetros satisfazem múltiplos critérios, unificando o comportamento de conjunções e disjunções em um único operador.

Como trabalhos futuros, pretende-se investigar novas classes de (sub)implicações (como a Xor-subimplicação, por exemplo) que podem ser geradas pela aplicação de um operador de agregação. Considera-se ainda, o estudo e a aplicação do operador de dualidade entre os novos conectivos agregados, com a análise da sensibilidade dos conectivos quanto a robustez, diante de perturbação nos dados de entrada nos sistemas fuzzy modelados por operadores de agregação.

REFERÊNCIAS

ACZÉL, J. **Lectures on functional equations and their applications**. [S.l.]: Academic Press, 1966. (Mathematics in Science and Engineering).

BACZYNSKI, M. Residual Implications Revisited. Notes on the Smets-Magrez Theorem. **Fuzzy Sets and Systems**, [S.l.], v.145, n.2, p.267–277, 2004.

BACZYNSKI, M.; JAYARAM, B. **Fuzzy Implications**. Berlin: Springer-Verlag, 2008.

BACZYNSKI, M.; JAYARAM, B. (S,N)- and R-implications: A state-of-the-art survey. **Fuzzy Sets and Systems**, [S.l.], v.159, n.14, p.1836–1859, 2008.

BACZYNSKI, M.; JAYARAN, B. QL-implications: Some properties and intersections. **Fuzzy Sets and Systems**, [S.l.], v.161, n.2, p.158–188, 2010.

BAETS, B. Coimplicators, The Forgotten Connectives. **Tatra Mountains Mathematical Publications**, [S.l.], p.229–240, 1997.

BALASUBRAMANIAM, J. Yager's new class of implications Jf and some classical tautologies. **Inf. Sci.**, New York, NY, USA, v.177, n.3, p.930–946, Feb. 2007.

BARROS, L. C.; BASSANEZI, R. C. **Tópicos de Lógica Fuzzy com Aplicações em Biomatemática.** Campinas, SP: UNICAMP/IMECC, 2010.

BEDREGAL, B. C. On interval fuzzy negations. **Fuzzy Sets Syst.**, Amsterdam, The Netherlands, The Netherlands, v.161, n.17, p.2290–2313, Sept. 2010.

BEDREGAL, B. C.; SANTIAGO, R. H. N.; DIMURO, G. P.; REISER, R. H. S. Interval Valued R-Implications and Automorphisms. In: **Pre-Proceedings of the 2nd Workshop on Logical and Semantic Frameworks, with Applications**. Ouro Preto: UFMG, 2007. p.82–97.

BEDREGAL, B.; DIMURO, G.; SANTIAGO, R.; REISER, R. On interval fuzzy S-implications. **Information Science**, [S.l.], n.180, p.1373–1389, 2010.

BELIAKOV, G.; BUSTINCE, H.; FERNANDEZ, J. The median and its extensions. **Fuzzy Sets and Systems**, [S.l.], v.175, n.1, p.36 – 47, 2011. Theme: Aggregation Functions, Generalised Measure Theory.

BELIAKOV, G.; BUSTINCE, H.; JAMES, S.; CALVO, T.; FERNANDEZ, J. Aggregation for Atanassovs Intuitionistic and Interval Valued Fuzzy Sets: The Median Operator. **Fuzzy Systems, IEEE Transactions on**, [S.l.], p.487–498, 2012.

BENINI, L. C.; JR., M. M. **Uma Abordagem para Modelagem de dados com o uso de Sistemas Neuro-Fuzzy**: Aplicações Geoespaciais. SP: Notas em Matemática Aplicada - SBMAC, 2009.

BENÍTEZ, Í.; REISER, R. H. S.; YAMIN, A.; BEDREGAL, B. Conjugate Fuzzy S-Implications Obtained by OWA-operator. In: FUZZY LOGIC AND INTELLIGENT TECHNOLOGIES IN NUCLEAR SCIENCE, 2014. **Anais...** FLINS, 2014. p.1–6. submitted.

BENÍTEZ, Í.; REISER, R. H. S.; YAMIN, A.; BEDREGAL, B. Aggregating fuzzy QL-implications. In: WEIT –IEEE XPLORE, 2014. **Proceedings...** IEEE Computer Society, 2014. p.1–6.

BENÍTEZ, Í.; REISER, R. H. S.; ZANOTTELLI, R.; CAVALHEIRO, S.; FOSS, L.; BEDREGAL, B. Aggregating fuzzy implications based on OWA–operators. In: FUZZ–IEEE, 2014. **Anais...** IEEE Computer Society, 2014. p.1–6. accepted to be published.

BLOCH, I. Lattices of fuzzy sets and bipolar fuzzy sets, and mathematical morphology. **Inf. Sci.**, New York, NY, USA, v.181, n.10, p.2002–2015, May 2011.

BUSTINCE, H.; BARRENECHEAA, E.; PAGOLAA, M.; FERNANDEZ, J. Interval-valued fuzzy sets constructed from matrices: Application to edge detection. **Fuzzy Sets and Systems**, [S.l.], v.160, n.13, p.1819–1840, 2009.

BUSTINCE, H.; BURILLO, P.; SORIA, F. Automorphisms, negations and implication operators. **Fuzzy Sets Syst.**, Amsterdam, The Netherlands, The Netherlands, v.134, n.2, p.209–229, Mar. 2003.

BUSTINCE, H.; CALVO, T.; BAETS, B. D.; FODOR, J.; MESIAR, R.; MONTERO, J.; PATERNAIN, D.; PRADERA, A. A class of aggregation functions encompassing two-dimensional {OWA} operators. **Information Sciences**, [S.l.], v.180, n.10, p.1977 – 1989, 2010. Special Issue on Intelligent Distributed Information Systems.

BUSTINCE, H.; FERNANDEZ, J.; MESIAR, R.; CALVO, T. **Aggregation Functions in Theory and in Practise**: Proceedings of the 7th International Summer School on

Aggregation Operators at the Public University ... In Intelligent Systems and Computing). [S.l.]: Springer Publishing Company, Incorporated, 2013.

CALVO, C.; MESIAR, T. Generalized medians. **Fuzzy Sets Syst.**, Amsterdam, The Netherlands, The Netherlands, v.124, n.1, p.59–64, Nov. 2001.

CARLSSON, C.; FULLER, R. **Fuzzy Reasoning in Decision Making and Optimization**. Heidelberg: Physiva-Verlag Springer, 2002.

CORNELIS, C.; DESCHRIJVER, G.; KERRE, E. E. Classification of Intuitionistic Fuzzy Implicators: An Algebraic Approach. In: JCIS, 2002. **Anais...** JCIS / Association for Intelligent Machinery: Inc, 2002. p.105–108.

DESCHRIJVER, G.; KERRE, E. E. Implicators based on binary aggregation operators in interval-valued fuzzy set theory. **Fuzzy Sets and Systems**, [S.l.], v.153, n.2, p.229–248, 2005.

DESCHRIJVER, G.; KERRE, E. E. Implicators based on binary aggregation operators in interval-valued fuzzy set theory. **Fuzzy Sets and Systems**, [S.l.], v.153, n.2, p.229–248, 2005.

DESCHRIJVER, G.; KERRE, E. E. Smets-magrez Axioms for R-implicators in Interval-valued and Intuitionistic Fuzzy Set Theory. **International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems**, [S.l.], v.13, n.4, p.453–464, 2005.

DETYNIECKI, M. Numerical Aggregation Operators: State of the Art. In: INTERNATIONAL SUMMER SCHOOL ON AGGREGATION OPERATORS AND THEIR APPLICATIONS, 2001. **Anais...** [S.l.: s.n.], 2001.

DIAS, M. A. **A-Implicações Fuzzy Valoradas Intervalarmente**. 2011. Dissertação (Mestrado em Ciência da Computação) — Universidade Católica de Pelotas.

DUBOIS, D.; OSTASIEWICZ, W.; PRADE, H. **Fuzzy Sets**: History and Basic Notions. Berlin: Springer, 2000.

FODOR, J. C. On fuzzy implication operators. **Fuzzy Sets Syst.**, Amsterdam, The Netherlands, The Netherlands, v.42, n.3, p.293–300, Aug. 1991.

FODOR, J. C. Contrapositive symmetry of fuzzy implications. **Fuzzy Sets Syst.**, Amsterdam, The Netherlands, The Netherlands, v.69, n.2, p.141–156, Jan. 1995.

FODOR, J.; ROUBENS, M. **Fuzzy preference modelling and multicriteria decision support**. [S.l.]: Kluwer Academic Publishers, 1994.

G. CORNELIS G. DESCHRIJVER, E. K. Implications in intuitionistic fuzzy and interval-valued fuzzy set theory: construction, classification and application. **International Journal of Approximate Reasoning**, [S.l.], n.35, p.55–95, 2004.

GRABISCH, M.; NGUYEN, H.; WALKER, E. A. **Fundamentals of Uncertainty Calculi with Applications to Fuzzy Inference**. [S.l.]: Kluwer Academic Publishers, 1995.

HORCIK, R.; NAVARA, M. Validation Sets in Fuzzy Logics. **KYBERNETIKA**, [S.l.], v.38, p.319–326, 2002.

JAYARAM, B.; MESIAR, R. On special fuzzy implications. **Fuzzy Sets Syst.**, Amsterdam, The Netherlands, The Netherlands, v.160, n.14, p.2063–2085, July 2009.

KITAINIK, L. **Fuzzy decision procedures with binary relations**. [S.l.]: Kluver, 1993.

KLEMENT E. MESIAR R., P. E. **Triangular Norms**. [S.l.]: Kluwer Academic Publisher, 2003.

KLEMENT, E. P.; MESIAR, R.; PAP, E. Quasi- and pseudo-inverses of monotone functions, and the construction of t-norms. **Fuzzy Sets and Systems**, [S.l.], v.104, n.1, p.3–13, 1999.

KLEMENT, E. P.; MESIAR, R.; PAP, E. **Triangular Norms**. Dordrecht: Kluwer Academic Publisher, 2000.

KLEMENT, E. P.; NAVARA, M. A survey on different triangular norm-based fuzzy logics. **Fuzzy Sets and Systems**, [S.l.], v.101, n.2, p.241–251, 1999.

D. DUBOIS, E. P. K.; PRADE, H. (Ed.). **Fuzzy Sets, Logics and Reasoning About Knowledge**. Dorbrech: Kluwer Academic Publishers, 1999. p.17–38. (Applied logics, v.15).

KLIR, G. J. Developments in Uncertainty-Based Information. **Advances in Computers**, [S.l.], v.36, p.255–332, 1993.

KLIR, G. J. **Uncertainty and information Foundations of generalized Information theory**. [S.l.]: Wilwy-Interscience, 2005.

KLIR G., Y. B. **Fuzzy Sets and Fuzzy Logics**: Theory and Applications. [S.l.]: Prentice-Halls PTR, 1995.

LESKI, J. M. ε-Insensitive Learning Techniques for Approximate Reasoning Systems. **JOUR. OF COMPUTATIONAL COGNITION**, [S.l.], v.1, p.21–77, 2003.

LI, D.-F. Extension principles for interval-valued intuitionistic fuzzy sets and algebraic operations. **FO & DM**, [S.l.], v.10, n.1, p.45–58, 2011.

LIU, H.-W.; WANG, G.-J. A note on implicators based on binary aggregation operators in interval-valued fuzzy set theory. **Fuzzy Sets and Systems**, [S.l.], v.157, n.24, p.3231–3236, 2006.

MAKSA, G. Quasisums and generalized associativity. **Aequationes Math.**, [S.l.], v.69, n.1-2, p.6–27, 2005.

MAS, M.; MONSERRAT, M.; TORRENS, J.; TRILLAS, E. A Survey on Fuzzy Implication Functions. **Trans. Fuz Sys.**, Piscataway, NJ, USA, v.15, n.6, p.1107–1121, Dec. 2007.

MAYOR, G.; TRILLAS, E. On the representation of some aggregation functions. In: PROCEEDING OF ISMVL, 1986. **Anais...** [S.l.: s.n.], 1986. p.111–114.

MAYORAND, G.; J.MONREAL. Additive generators of discrete conjunctive aggregation operations. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, [S.l.], v.15, n.6, p.1046–1052, 2007.

MESIAR, R.; KOMORNIKOVA, M. Aggregation operators. **Proceeding of the XI Conference on applied Mathematics PRIM 96**, [S.l.], p.193–211, 1997.

MITRA, S.; PAL, S. K. Fuzzy Sets in Pattern Recognition and Machine Intelligence. **Fuzzy Sets and Systems**, [S.l.], v.156, n.3, p.381–386, 2005.

NAVARA, M. Characterization of measures based on strict triangular norms. **Mathematical Analysis and Applications**, [S.l.], v.236, n.2, p.370–383, 1999.

OUYANG, Y. On fuzzy implications determined by aggregation operators. **Inf. Sci.**, New York, NY, USA, v.193, p.153–162, June 2012.

OVCHINNIKOV, S. On Robust Aggregation Procedures. **Aggregation Operators for Fusion under Fuzziness**, [S.l.], p.3–10, 1998.

REIS, G. A. A. dos. **Coimplicações Fuzzy Valoradas Intervalarmente**. 2010. Dissertação de Mestrado — PPGInf/UCPEL, Pelotas/RS.

REISER, R.; BEDREGAL, B.; BACZYNSKI, M. Aggregating Fuzzy Implications. **Information Science**, [S.l.], v.253, p.126–146, 2013.

REISER, R. H. S.; BEDREGAL, B. R. C. Representable coimplications from aggregation operators and duality principle. In: EUSFLAT, 7., 2011, Aix-les-Bains. **Proceedings...** Atlantis Press. Amsterdam - Beijing - Paris: Atlantis Press, 2011. p.1–8.

ROSS, T. **Fuzzy Logic with Enginnering Apllications**. England: John Wiley e Sons ltda, 2004.

RUAN, D.; KERRE, E. E. Fuzzy implication operators and generalized fuzzy method of cases. **Fuzzy Sets Syst.**, Amsterdam, The Netherlands, The Netherlands, v.54, n.1, p.23–37, Feb. 1993.

SCHWEIZER, B.; SKLAR, A. **Probabilistic Metric Spaces**. New York: North-Holland, 1983.

SHI, Y.; GASSE, B. V.; RUAN, D.; KERRE, E. E. On the first place antitonicity in QL-implications. **Fuzzy Sets and Systems**, [S.l.], v.159, n.22, p.2988–3013, 2008.

SILER, W.; BUCKLEY, J. J. **Fuzzy Expert Systems and Fuzzy Reasoning**. New York: John Wiley, 2004.

VISINTIN, L.; REISER, R. H. S.; BEDREGAL, B. R. C. Interval-Valued Intuitionistic Fuzzy Implications. In: WEIT, 2011. **Anais...** IEEE Computer Society, 2011. p.46–52.

XIA, M.; XU, Z. Hesitant fuzzy information aggregation in decision making. **International Journal on Approximate Reasoning**, [S.l.], v.52, p.395–407, 2011.

YAGER, R. R. On the implication operator in fuzzy logic. **Inf. Sci.**, New York, NY, USA, v.31, n.2, p.141–164, Nov. 1983.

YAGER, R. R. On ordered weighted averaging aggregation operators in multicriteria decisionmaking. **Systems, Man and Cybernetics, IEEE Transactions on**, [S.l.], v.18, n.1, p.183–190, 1988.

YAGER, R. R. On global requirements for implication operators in fuzzy modus ponens. **Fuzzy Sets Syst.**, Amsterdam, The Netherlands, The Netherlands, v.106, n.1, p.3–10, Aug. 1999.

YAGER, R. R. On some new classes of implication operators and their role in approximate reasoning. **Inf. Sci. Inf. Comput. Sci.**, New York, NY, USA, v.167, n.1-4, p.193–216, Dec. 2004.

YAGER, R. R.; KACPRZYK, J. **The ordered weighted averaging operators**: theory and applications. [S.l.]: Kluwer Academic Publishers, 1997.

YAGER, R. R.; TROIANO, L. On some properties of mixing OWA operators with t-norms and t-conorms. In: EUSFLAT CONF., 2005. **Anais...** Universidad Polytecnica de Catalunya, 2005. p.1206–1212.

ZADEH, L. A. Fuzzy Sets. **Information and Control**, [S.l.], v.8, p.29–44, 1965.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PELOTAS
Centro de Desenvolvimento Tecnológico
Programa de Pós-Graduação em Computação

Dissertação

Implicações Fuzzy Obtidas por Agregadores Multi-dimensionais

ÍBERO CAMILO KREPS BENÍTEZ

Pelotas, 2014