

VALORES DOS PARÂMETROS RELEVANTES PARA CONVERGÊNCIA DA INVERSÃO NUMÉRICA DA TRANSFORMADA DE LAPLACE POR TALBOT FIXO

IAGO H. TEIXEIRA MARCOLINO¹; LESLIE D. PEREZ-FERNANDEZ²; CAMILA PINTO DA COSTA³

¹ Universidade Federal de Pelotas – iago.mat@hotmail.com

² Universidade Federal de Pelotas – leslie.fernandez@ufpel.edu.br

³ Universidade Federal de Pelotas – camila.costa@ufpel.edu.br

1. INTRODUÇÃO

A resolução de equações diferenciais via transformada de Laplace precisa, como último passo, da aplicação da transformada inversa. Contudo, a inversão analítica da transformada de Laplace, dependendo da função particular que precisa ser invertida, pode se tornar muito trabalhosa. Portanto, na prática, muitas vezes é necessário empregar algum método de inversão numérica. Mais detalhes sobre a teoria da transformada de Laplace podem ser encontrados em SCHIFF (1999) ou SPIEGEL (1965).

Existem muitos métodos de inversão numérica da Transformada de Laplace como Talbot Fixo, Dubner-Abate, Durbin, Graver-Stehfest e Euler (LEMONS et al. 2021). Na nossa experiência, o algoritmo Talbot Fixo (ABATE; VALKÓ, 2004) é o que tem melhor desempenho tanto em precisão como em tempo computacional (LEMONS et al. 2021). Entretanto, para algumas funções, pode ser difícil encontrar os valores para os parâmetros M e N do algoritmo de Talbot Fixo (ver, Metodologia), que garantam a sua convergência.

Após alguns experimentos computacionais realizados para várias funções-teste com a alteração dos parâmetros M e N chegou-se a seguinte pergunta: existe um valor da razão M/N que determina melhor convergência do método de inversão da transformada de Laplace por Talbot Fixo?

O objetivo deste trabalho é encontrar os valores mais adequados dos parâmetros M e N para garantir a convergência do método de Talbot Fixo. Especificamente, conjectura-se uma condição suficiente para os valores dos parâmetros M e N que garantem a convergência do método de Talbot Fixo pelo menos para as funções testadas.

2. METODOLOGIA

Talbot em 1979 foi quem iniciou o movimento de abordagem da inversão da Transformada de Laplace por métodos numéricos deformando o contorno padrão B da integral de Bromwich

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_B e^{ts} \hat{f}(s) ds,$$

em que $\hat{f}(s)$ é a Transformada de Laplace da função $f(t)$, B é uma linha vertical definida por $s = r + iy$, $-\infty < y < \infty$, e r tem valor fixo escolhido da forma que toda singularidade da transformada estão à esquerda de B .

Assim, Talbot chega na seguinte formula para inversão aproximada da transformada por método numérico:

$$f_{TF}(t) = \frac{r}{M} \left\{ \frac{1}{2} \hat{f}(r) e^{rt} + \sum_{k=1}^{M-1} \operatorname{Re} \left[e^{ts(\theta_k)} \hat{f}(s(\theta_k)) (1 + i\sigma(\theta_k)) \right] \right\},$$

em que $\theta_k = \frac{k\pi}{M}$, $\sigma(\theta) = \theta + (\theta \cot(\theta) - 1) \cot(\theta)$, $r = \frac{2M}{Nt}$ (com $N = 5$), sendo M o número de termos a serem somados e que impacta diretamente na precisão do algoritmo segundo ABATE e VALKÓ (2004). Mais detalhes sobre todo o procedimento até chegar a formula acima também podem ser encontrados em ABATE e VALKÓ (2004).

Através da metodologia experimental foram realizados vários testes computacionais e observou-se que parece existir um intervalo para a razão M/N no qual tem-se a convergência para esse método numérico de inversão de transformada de Laplace. A qualidade da convergência foi medida utilizando o máximo erro absoluto entre o resultado fornecido pelo algoritmo de Talbot fixo e o valor exato da função correspondente:

$$\text{Erro} = \max_{t \in [a,b]} |f(t) - f_{TF}(t)|.$$

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Os testes foram realizados para as seguintes funções com suas respectivas transformadas de Laplace, avaliadas no intervalo $0 < t \leq 10$:

Tabela 1. Funções-teste e suas transformadas de Laplace

$f(t)$	1	t	e^t	$\sin(t)$	$\cos(t)$	$\sinh(t)$	$\cosh(t)$
$\hat{f}(s)$	$\frac{1}{s}$	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{1}{s-1}$	$\frac{1}{s^2+1}$	$\frac{s}{s^2+1}$	$\frac{1}{s^2-1}$	$\frac{s}{s^2-1}$

A experimentação inicial com o algoritmo produziu resultados que sugeriram a existência de um intervalo de variação da razão entre a quantidade M de termos do somatório e o parâmetro N que aparece na definição do parâmetro fixo r .

Para investigarmos a validade de tal conjectura foram realizados vários testes organizados da maneira a seguir. Primeiro com $M = 40$ e N variando, e segundo foi mantido $N = 7$ e M variando.

Por exemplo, para a função $f(t) = e^t$ com transformada de Laplace $\hat{f}(s) = \frac{1}{s-1}$, invertendo a função $\hat{f}(s)$ pelo método numérico de Talbot Fixo com M fixo e N variando encontramos os seguintes dados da Tabela 2.

Tabela 2. Erro de Talbot Fixo para $f(t) = e^t$ com $M = 40$ e N variando.

M	N	M/N	Erro	Tempo
40	1	40	3,442E+33	
40	3	13,33333	1,305E-4	0,2536782
40	5	8	1,586E-09	0,2530987
40	7	5,714286	0,6345161	0,2595801
40	35	1,142857	22,026	
40	175	0,228571	22,026	
40	875	0,045714	22,026	
40	4375	0,009143	22,026	

Invertendo a pelo método numérico a mesma função, agora com M variando e $N = 7$, encontramos os seguintes resultados da Tabela 3.

Tabela 3. Erro de Talbot Fixo para $f(t) = e^t$ com M variando e $N = 7$.

M	N	M/N	Erro	Tempo
10	7	1,428571	22,026	
20	7	2,857143	22,026	
30	7	4,285714	31,898	
40	7	5,714286	0,6345161	0,2595801
100	7	14,28571	4,891E-4	0,6346679
200	7	28,57143	951500000	
1000	7	142,8571	3,02E+108	

Após realizar mesmo teste para todas as funções da Tabela 1, a afirmativa da conjectura foi reforçada. Os resultados das outras funções não foram apresentados devido ao espaço ocupado.

Agora passamos a variar a razão a fim de encontrar quando o erro passa a ser maior que 1, o qual consideramos como sendo o maior erro aceitável.

Por exemplo, para a função $f(t) = \sinh(t)$ com transformada de Laplace $\hat{f}(s) = \frac{1}{s^2-1}$ foram obtidos os resultados da Tabela 4. Para obter erros abaixo de 1 é recomendado utilizar $M/N \leq 18$ (ocorre o mesmo com a função $f(t) = \sin(t)$).

Tabela 4. Erro de Talbot Fixo para $f(t) = \sinh(t)$, com M/N variando.

M	N	M/N	Erro	Tempo
48	3	16	0,0031456	0,3231514
80	5	16	0,0034274	0,5343156
112	7	16	0,0017004	0,7766912
51	3	17	0,0378876	0,3257361
85	5	17	0,0340786	0,5873630
119	7	17	0,0162398	0,755531
54	3	18	0,1852326	0,3462534
90	5	18	0,1675772	0,5957213
126	7	18	0,1563340	0,8327127
57	3	19	1,53	0,3711752
95	5	19	0,9124668	0,6491525
133	7	19	0,8591083	0,9076268
60	3	20	10	
100	5	20	10	
140	7	20	8	

Após análise da Tabela 4, ficou claro que ao aumentar a razão M/N o erro também aumenta. O erro passa a ser maior ou igual a 1 para razão $M/N \geq 19$, deixando evidente erro menor que 1 para $M/N < 19$. Os resultados das outras funções não foram apresentados devido ao espaço ocupado.

4. CONCLUSÕES

Neste trabalho apresentamos de forma bem resumida o estudo que foi feito e nos levou a uma conjectura de condição suficiente para convergência do método de Talbot Fixo.

O método numérico converge quando a razão M/N é tal que $5 < M/N < 19$ para as funções testadas, considerando um máximo erro absoluto menor que 1, no intervalo $(0,10]$, desde que se utilize o pelo menos $N = 5$, como adotado por ABATE e VALKÓ (2004). Isso sugere um critério de escolha dos parâmetros.

A tentativa de demonstração e amplitude do intervalo testado seria objeto de trabalhos futuros.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABATE, J.; VALKÓ, P. P. **Multi-precision Laplace transform inversion**, International Journal for Numerical Methods in Engineering: Vol. 60, p. 979-993, 2004.

LEMONS, C. H. CAMILA P. DA COSTA, P. C, PEREZ-FERNANDEZ, L. D. FERREIRA, A. M. SILVA, E. C. **Análise do Desempenho de Métodos Numéricos de Inversão da Transformada de Laplace**. Intermaths: Vol. 2, N. 2, Jul - Dez 2021, p. 75 – 90.

SCHIFF, J. L. **The Laplace Transform: Theory and Applications**. Springer-Verlag New York Berlin Heidelberg, 1999.

SPIEGEL, M. R. **Theory and Problems of Laplace Transforms**. McGRAW-HILL New York, 1965.